



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO

## Trabalho de Modelagem e Simulação

### Prática 05

**Alunos:** | Aline de Souza Lima Abreu  
Miguel Henrique de Brito Pereira  
Tarcísio Magno de Almeida Filho  
Vinícius Gonzaga Rocha

Uberlândia  
2017

# Sumário

Exercício 6.1.1	3
Exercício 6.1.7	9
Exercício 6.2.3	10
Exercício 6.2.4	11
Exercício 6.3.1	12
Exercício 6.4.1	13
Exercício 6.4.5	15

# Lista de Figuras

1	6.1.1 - letra a: Histograma de 360 repetições. . . . .	4
2	6.1.1 - letra a: Tabela de 360 repetições. . . . .	5
3	6.1.1 - letra b: Histograma de 3600 repetições. . . . .	5
4	6.1.1 - letra b: Tabela de 3600 repetições. . . . .	6
5	6.1.1 - letra b: Histograma de 36000 repetições. . . . .	6
6	6.1.1 - letra b: Tabela de 36000 repetições. . . . .	7
7	6.1.1 - letra b: Histograma de 360000 repetições. . . . .	7
8	6.1.1 - letra b: Tabela de 360000 repetições. . . . .	8
9	6.1.1 - letra b: PDF do lançamento simultâneo de dois dados. . . . .	8
10	6.2.3 - Comparação do histograma com a pdf. . . . .	11
11	6.2.4 - Comparação entre a PDF e o histograma de 1.000.000 de dados da poisson(9). . . . .	12
12	Resultado mean 10000 vezes inverse_truncated. . . . .	13
13	Output . . . . .	14
14	Output . . . . .	14
15	Output . . . . .	15
16	Output . . . . .	16
17	Output . . . . .	17

## Exercício 6.1.1

a) Simulate rolling a pair of dice 360 times with five different seeds and generate five histograms of the resulting sum of the two up faces. Compare the histogram mean, standard deviation and relative frequencies with the corresponding population mean, standard deviation and pdf.

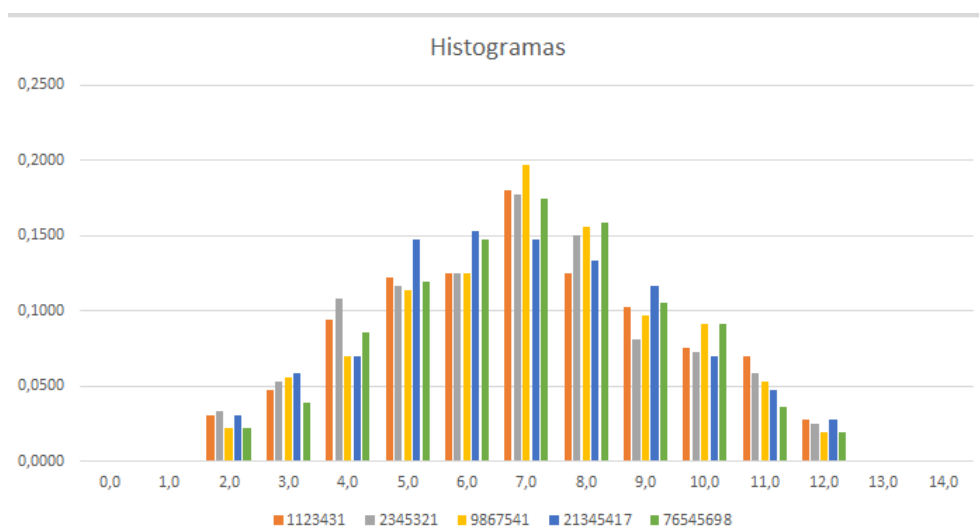


Figura 1: 6.1.1 - letra a: Histograma de 360 repetições.

seed	1123431	2345321	9867541	21345417	76545698
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,0000	0,0306	0,0333	0,0222	0,0306	0,0222
3,0000	0,0472	0,0528	0,0556	0,0583	0,0389
4,0000	0,0944	0,1083	0,0694	0,0694	0,0861
5,0000	0,1222	0,1167	0,1139	0,1472	0,1194
6,0000	0,1250	0,1250	0,1250	0,1528	0,1472
7,0000	0,1806	0,1778	0,1972	0,1472	0,1750
8,0000	0,1250	0,1500	0,1556	0,1333	0,1583
9,0000	0,1028	0,0806	0,0972	0,1167	0,1056
10,0000	0,0750	0,0722	0,0917	0,0694	0,0917
11,0000	0,0694	0,0583	0,0528	0,0472	0,0361
12,0000	0,0278	0,0250	0,0194	0,0278	0,0194
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
Média	6,9777778	6,825	7,0388889	6,8611111	6,975
Desvio	2,1062	2,2003	2,2693	2,2119	2,2487
SOMA	1	1	1	1	1

Figura 2: 6.1.1 - letra a: Tabela de 360 repetições.

b) Repeat for 3600, 36 000, and 360 000 replications.

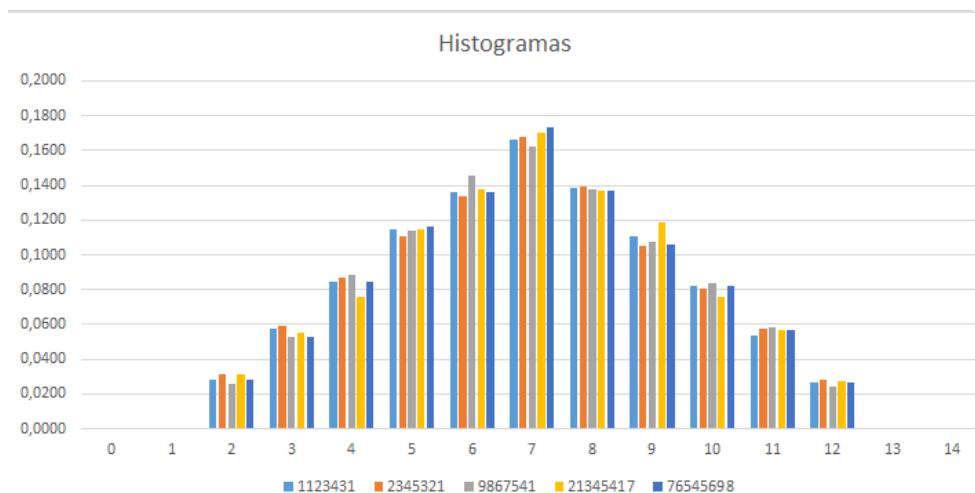


Figura 3: 6.1.1 - letra b: Histograma de 3600 repetições.

seed	112343	234532	986754	213454	765456
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0283	0,0317	0,0256	0,0317	0,0281
3	0,0572	0,0592	0,0531	0,0550	0,0531
4	0,0847	0,0872	0,0889	0,0756	0,0847
5	0,1144	0,1106	0,1136	0,1147	0,1161
6	0,1358	0,1336	0,1453	0,1375	0,1364
7	0,1664	0,1675	0,1619	0,1706	0,1736
8	0,1386	0,1392	0,1381	0,1367	0,1367
9	0,1111	0,1053	0,1075	0,1189	0,1061
10	0,0825	0,0803	0,0839	0,0758	0,0822
11	0,0539	0,0575	0,0581	0,0564	0,0564
12	0,0269	0,0281	0,0242	0,0272	0,0267
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b>Média</b>	<b>6,969167</b>	<b>0,111809</b>	<b>0,112079</b>	<b>0,113015</b>	<b>0,113326</b>
<b>Desvio</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0,03387</b>	<b>0,034156</b>	<b>0,034255</b>
<b>SOMA</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

Figura 4: 6.1.1 - letra b: Tabela de 3600 repetições.

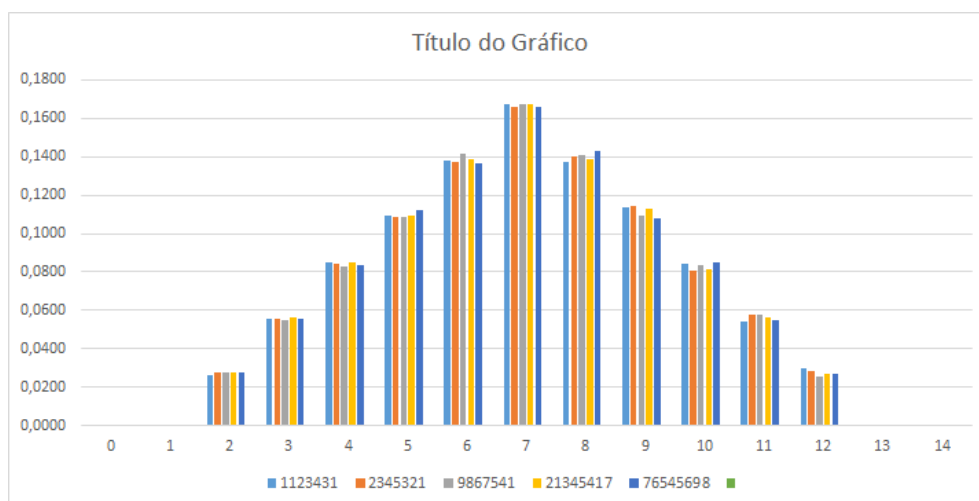


Figura 5: 6.1.1 - letra b: Histograma de 36000 repetições.

seed	112343	234532	986754	213454	765456
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0264	0,0275	0,0277	0,0279	0,0277
3	0,0554	0,0553	0,0546	0,0560	0,0556
4	0,0846	0,0841	0,0829	0,0850	0,0839
5	0,1091	0,1090	0,1087	0,1095	0,1121
6	0,1379	0,1372	0,1414	0,1386	0,1369
7	0,1676	0,1661	0,1677	0,1674	0,1661
8	0,1371	0,1401	0,1408	0,1385	0,1430
9	0,1135	0,1142	0,1093	0,1129	0,1077
10	0,0843	0,0806	0,0838	0,0814	0,0849
11	0,0540	0,0578	0,0576	0,0561	0,0552
12	0,0301	0,0281	0,0256	0,0267	0,0270
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Média	7,019694	0,112479	0,112852	0,113022	0,112767
Desvio	2,118917	0,033993	0,034107	0,034159	0,034081
SOMA	1	1	1	1	1

Figura 6: 6.1.1 - letra b: Tabela de 36000 repetições.

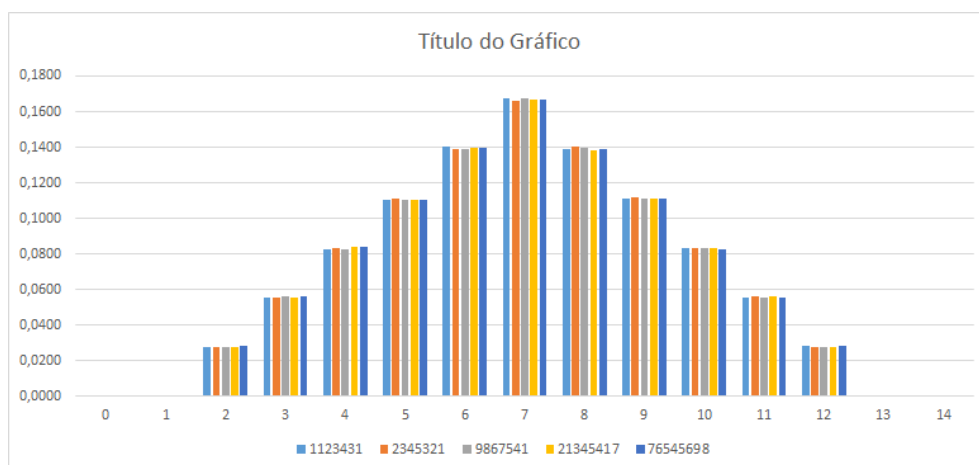


Figura 7: 6.1.1 - letra b: Histograma de 360000 repetições.

seed	112343	234532	986754	213454	765456
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0274	0,0276	0,0274	0,0276	0,0281
3	0,0557	0,0553	0,0559	0,0555	0,0558
4	0,0825	0,0831	0,0828	0,0840	0,0837
5	0,1105	0,1110	0,1105	0,1107	0,1105
6	0,1400	0,1387	0,1389	0,1395	0,1393
7	0,1673	0,1664	0,1675	0,1664	0,1668
8	0,1386	0,1400	0,1393	0,1383	0,1387
9	0,1110	0,1115	0,1111	0,1113	0,1110
10	0,0833	0,0829	0,0833	0,0833	0,0827
11	0,0554	0,0558	0,0556	0,0559	0,0553
12	0,0281	0,0277	0,0277	0,0276	0,0279
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Média	7,004219	7,004167	7,003831	6,999433	6,994342
Desvio	2,114268	2,25816	2,258051	2,256633	2,254993
SOMA	1	1	1	1	1

Figura 8: 6.1.1 - letra b: Tabela de 360000 repetições.

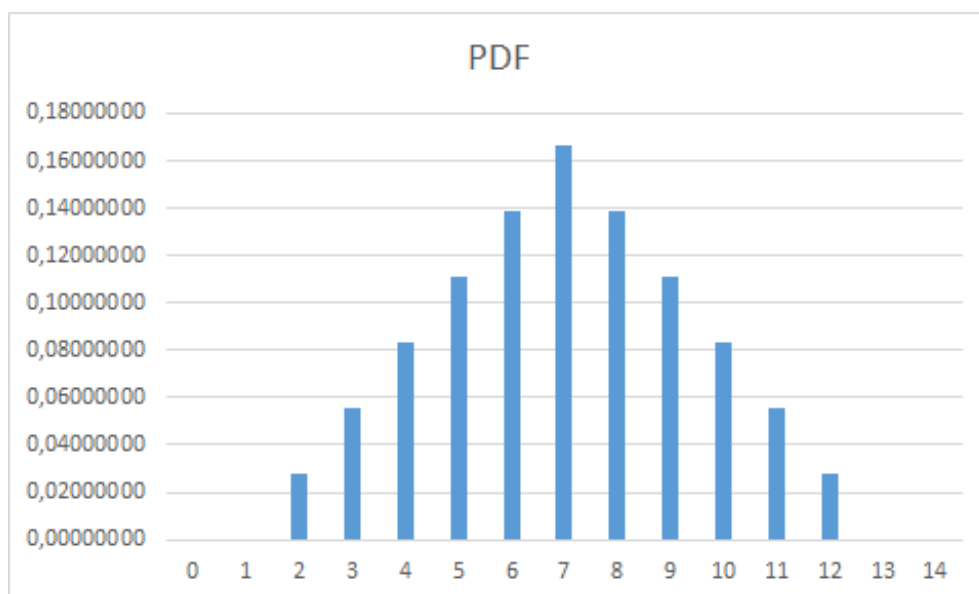


Figura 9: 6.1.1 - letra b: PDF do lançamento simultâneo de dois dados.



c) Comment.

As médias dos conjuntos de dados tendem a 7,0, e o desvio padrão a 2,25. Como podemos ver na tabela os dados estatísticos do histograma se aproximam bastante dos dados estatísticos do conjunto de dados.

## Exercício 6.1.7

As an alternative to Example 6.1.14, another way to play Pick-3 is for the player to opt for a win in any order. That is, for example, if the player's number is 123 then the player will win (the same amount) if the state draws any of 123, 132, 231, 213, 321, or 312. Because this is an easier win, the pay-off is suitably smaller, namely 80 for a net yield of +79.

a) What is the player's expected yield (per game) if this variation of the game is played? (Assume the player is bright enough to pick a 3-digit number with three different digits.)

De acordo com o exemplo 6.1.14 sabemos que:

$h(x) = -1$  para  $x = 0$  e  $79$ , se  $x = 1$

Se o jogador escolher um número com três dígitos diferentes, temos que:

as probabilidades são  $abc, acb, bac, cab, bca$  e  $cba$ , logo sabemos que  $p = 6/1000$ .

$$E[Y] = \sum_{i=0}^1 h(x) * f(x) = h(0)(1-p) + h(1)p = -1 * 994/1000 + 79 * 6/1000 = -0.994 + 0.474 = -0.52$$

## Exercício 6.2.3

Find the pdf associated with the random variate generation algorithm.

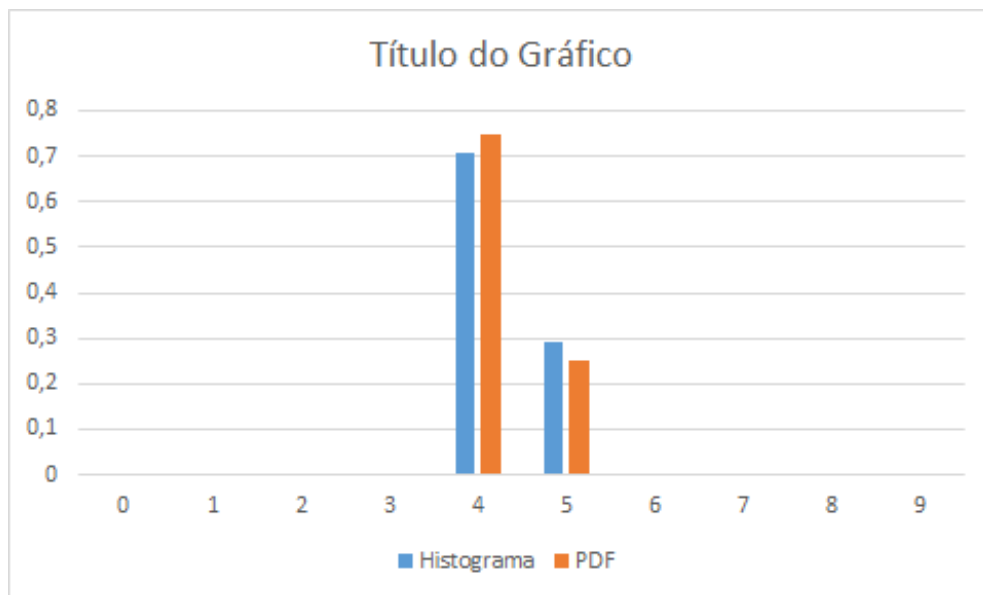


Figura 10: 6.2.3 - Comparação do histograma com a pdf.

## Exercício 6.2.4

a) Generate a  $\text{Poisson}(9)$  random variate sample of size 1 000 000 using the appropriate generator function in the library `rvgs` and form a histogram of the results. b) Compare the resulting relative frequencies with the corresponding  $\text{Poisson}(9)$  pdf using the appropriate pdf function in the library `rvms`.

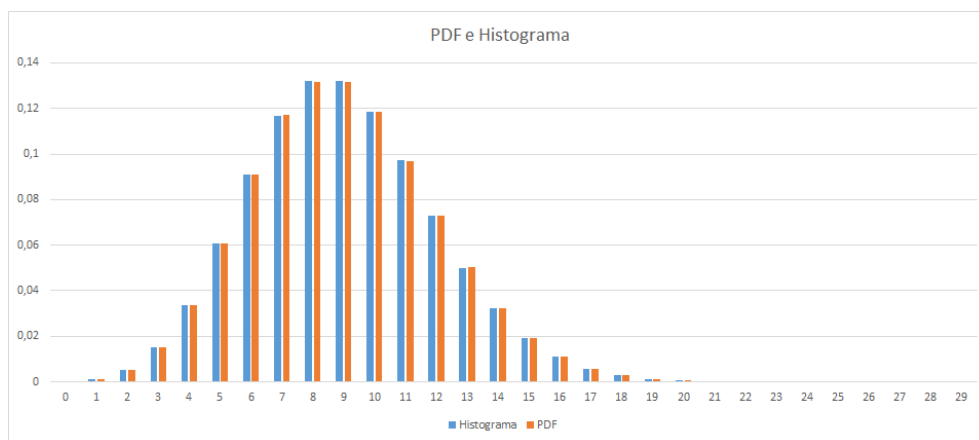


Figura 11: 6.2.4 - Comparação entre a PDF e o histograma de 1.000.000 de dados da  $\text{poisson}(9)$ .

c) Comment on the value of this process as a test of correctness for the two functions used.

O histograma de frequência relativa se aproxima bastante da função de probabilidade da  $\text{poisson}(9)$ , isso é, a probabilidade dos resultados obtidos são verificáveis em varias gerações sucessivas.

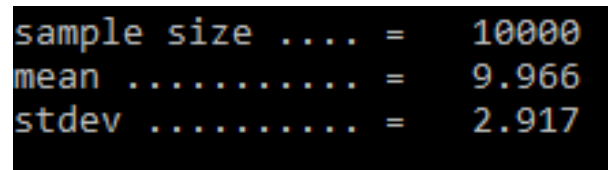
## Exercício 6.3.1

a) Suppose you wish to use inversion to generate a Binomial (100, 0.1) random variate  $X$  truncated to the subrange  $x = 4, 5, \dots, 16$ . How would you do it? Work through the details.

Como o truncamento que se pede é  $4 \leq x \leq 16$ , utilizando das funções do livro, temos:

```
long inverse_truncated() {  
    double a = pdfBinomial(100, 0.1, 4 - 1); // (seria o 4 - 1 )  
    double b = pdfBinomial(100, 0.1, 16); // b (16)  
    double u = Uniform(a, 1 - b);  
    return idfBinomial(100, 0.1, u);  
}
```

b) What is the value of the mean and standard deviation of the resulting truncated random variate?



```
sample size .... = 10000  
mean ..... = 9.966  
stdev ..... = 2.917
```

Figura 12: Resultado mean 10000 vezes `inverse_truncated`.

## Exercício 6.4.1

- a) Simulate the tossing of a fair coin 10 times and record the number of heads.

```
C
C
K
C
C
K
K
K
K
K
C

Cara saiu 5 vezes

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.031 s
Press any key to continue.
```

Figura 13: Output

- b) Repeat this experiment 1000 times and generate a discrete-data histogram of the results.

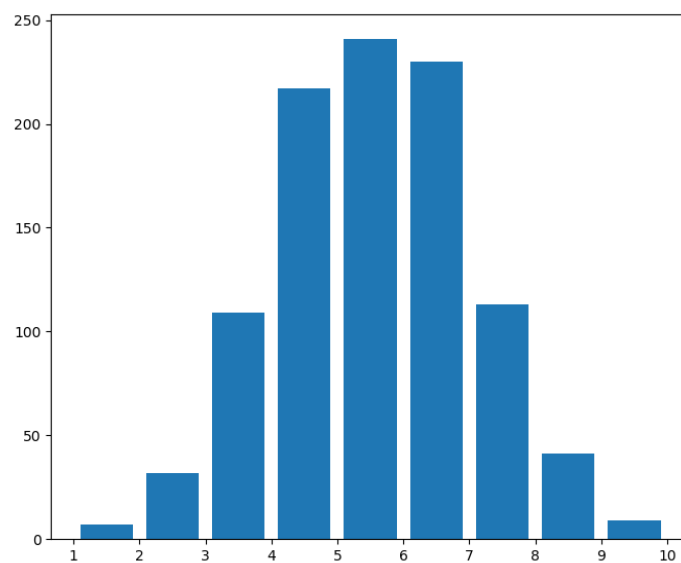


Figura 14: Output

c) Verify numerically that the relative frequency of the number of heads is approximately equal to the pdf of a Binomial (10, 0.5) random variable.

Simulando 100.000 vezes 10 arremessos da moeda, utilizando a semente 4554, foi obtida uma frequência relativa 0.505507, enquanto a pdf da binomial é 0.500000

```

    Frequencia relativa - 0.505507
    Binomial pdf - 0.500000

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.040 s
Press any key to continue.

```

Figura 15: Output

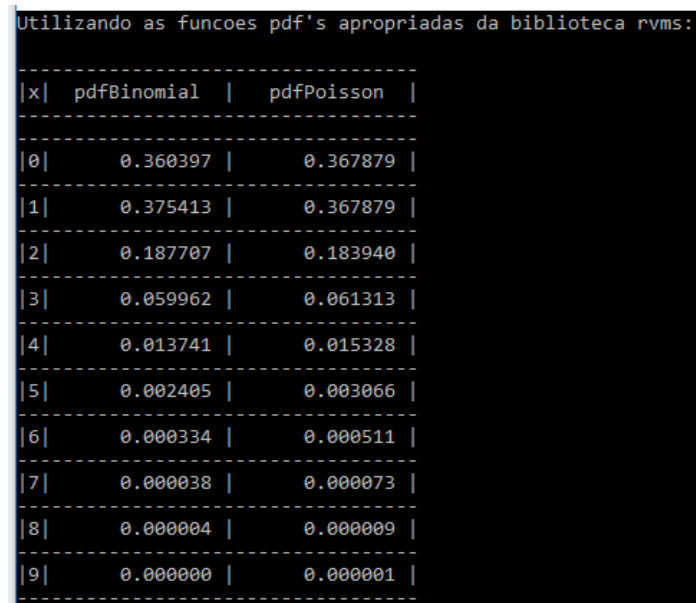
## Exercício 6.4.5

Verify numerically that the pdf of a Binomial (25, 0.04) random variable is virtually identical to the pdf of a Poisson( $\mu$ ) random variable for an appropriate value of  $\mu$ . Evaluate these pdf's in two ways: by using the appropriate pdf functions in the library rvms and by using the Binomial (n , p) recursive pdf equations.

Pelo livro temos o seguinte trecho: which shows that for large values of n, Binomial(n,  $\mu/n$ ) and Poisson( $\mu$ ) random variables are virtually identical, particularly if  $\mu$  is small.

Como  $n = 25$  e  $\mu/n = 0.04$  então  $\mu = 1$ .

Calculando via funções apropriadas da biblioteca rvms:



```
Utilizando as funcoes pdf's apropriadas da biblioteca rvms:
```

x	pdfBinomial	pdfPoisson
0	0.360397	0.367879
1	0.375413	0.367879
2	0.187707	0.183940
3	0.059962	0.061313
4	0.013741	0.015328
5	0.002405	0.003066
6	0.000334	0.000511
7	0.000038	0.000073
8	0.000004	0.000009
9	0.000000	0.000001

Figura 16: Output

É possível verificar valores virtualmente semelhantes.



Calculando via equações recursivas:

Utilizando as funcoes pdf's apropriadas da biblioteca rvms:

x	pdfBinomial	pdfPoisson
0	0.360397	0.367879
1	0.375413	0.367879
2	0.187707	0.183940
3	0.059962	0.061313
4	0.013741	0.015328
5	0.002405	0.003066
6	0.000334	0.000511
7	0.000038	0.000073
8	0.000004	0.000009
9	0.000000	0.000001

Figura 17: Output