Aula 15 – Árvore (Continuação)

Notas de Aula de Teoria dos Grafos

Prof[a.]: Patrícia D. L. Machado

UFCG – Unidade Acadêmica de Sistemas e Computação

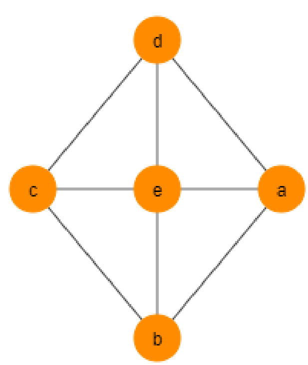
Sumário

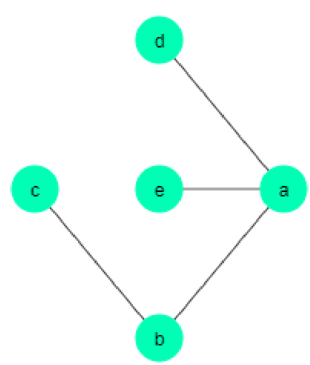
Nesta aula, damos continuidade ao estudo sobre árvores, considerando conceitos avançados.

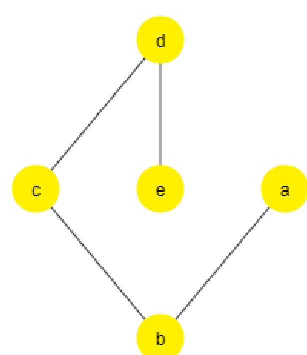
Árvore Geradora

Podemos chamar de **subárvore**, todo subgrafo de um grafo qualquer que é uma árvore. Se a subárvore é um subgrafo gerador, ou seja, é obtida através a remoção de arestas do grafo, mantendo o conjunto de vértices, então chamamos esta subárvore de **árvore geradora** (ou ***spanning tree***).

Abaixo apresentamos como exemplo, duas árvores geradoras para o grafo a esquerda.





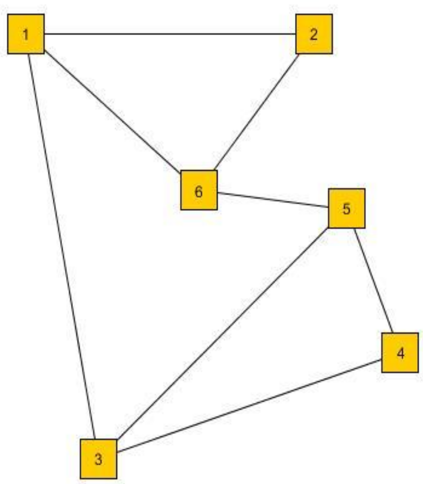


Teorema. Um grafo é conectado *se e somente se* possui uma árvore geradora.

Prova.

> $\Rightarrow$ Seja G um grafo conectado. Se G é um grafo conectado, mas não é uma árvore, G possui um ou mais ciclos incorporados. Se e é uma aresta de um ciclo de G, então $G\backslash e$ é um subgrafo gerador conectado, pois e não é uma aresta de corte (proposição que vimos anteriormente). Sucessivamente, removendo arestas (uma de cada vez) que fazem parte de um ciclo até quebrar todos os ciclos obtemos uma árvore geradora a partir de G. Portanto, G possui uma árvore geradora.
>
> $\Leftarrow$ Seja G um grafo que possui uma árvore geradora. Se um grafo G possui uma árvore geradora T, então G é conectado, pois quaisquer dois vértices de G são conectados por um caminho em T (já que T é conectado e possui todos os vértices de G) e, portanto, em G.

Exercício: Considere o grafo abaixo. Encontre uma árvore geradora para este grafo.



Como exemplo, temos as seguintes árvores denotadas por seu conjunto de arestas (o conjunto de vértices é o mesmo, por definição). Note que este grafo possui outras árvores geradoras além destas.

$$E(T_1) = \{12, 26, 65, 54, 34\}$$

$$E(T_2) = \{12, 16, 13, 35, 54\}$$

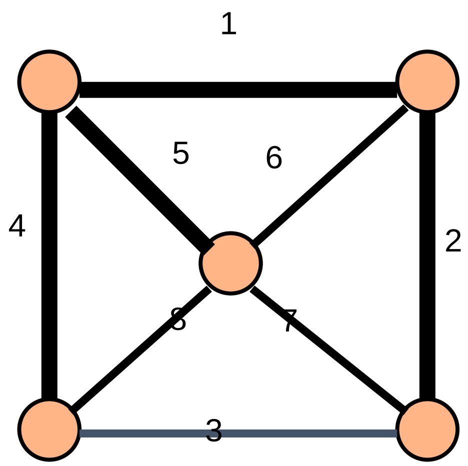
$$E(T_3) = \{12, 26, 65, 54, 43\}$$

Os conceitos de árvore geradora e corte de arestas estão relacionados da seguinte forma. Seja G um grafo conectado e T uma árvore geradora de G. Como T é um grafo conectado, *todo corte de arestas não vazio de G contém pelo menos uma aresta de T*. Isto se deve ao fato de que a árvore geradora de um grafo conecta seus vértices minimamente considerando uma das opções de caminho entre cada par de vértices. Assim, todo corte não vazio inclui pelo menos uma aresta de qualquer árvore geradora.

Co-árvore

O complemento de uma árvore geradora T em um grafo conectado G é chamado de **co-árvore** e é denotado por $\overline{T}$. Note que $\overline{T}$ possui todos os vértices de G e todas as aresta de G que não estão em T.

Abaixo vemos um exemplo de um grafo, uma árvore geradora T e a respectiva co-árvore $\overline{T}$ de T em G (T e $\overline{T}$ estão representadas através de seus conjuntos de arestas).



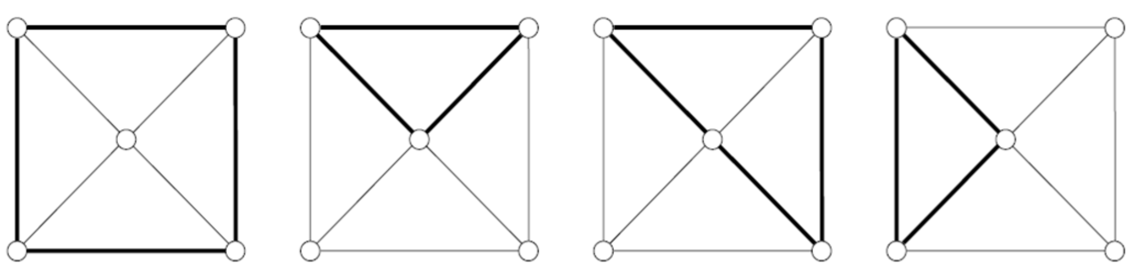
E(T)={1,2,4,5}

E($\bar{T}$) = {6,7,8,3}

Podemos observar que para cada aresta *e = xy* de uma co-árvore $\overline{T}$ em um grafo *G*, existe um único *xy*-caminho em T conectando seus terminais. Isto se deve ao fato de que *T* é uma árvore e, portanto, existe um único caminho em *T* entre quaisquer dois vértices *x* e *y* de *G*.

Como xy $\in$ $\overline{T}$, esta aresta não pode fazer parte de um caminho em T. Seja *T+e* um grafo formado pela árvore *T* com a adição da aresta *e*. Observe que *T+e* contém um ciclo, chamado de **ciclo fundamental** que é formado pelo *xy*-caminho com a adição da aresta *e*.

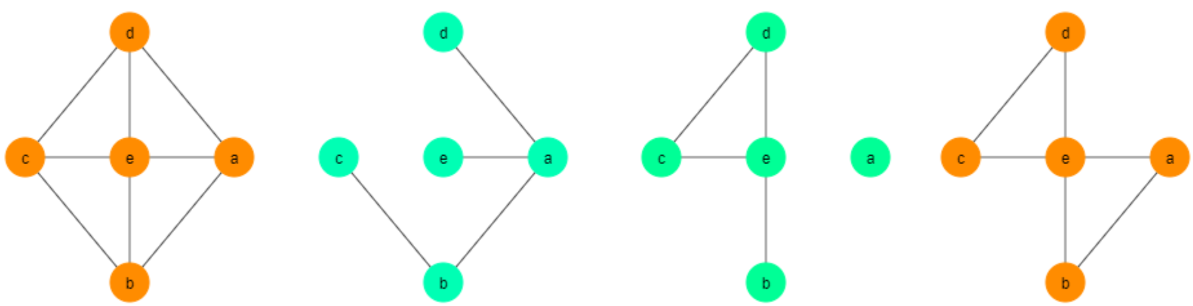
Abaixo podemos observar os ciclos fundamentais que podem ser formados a partir da árvore geradora T e sua co-árvore $\overline{T}$ no grafo acima.



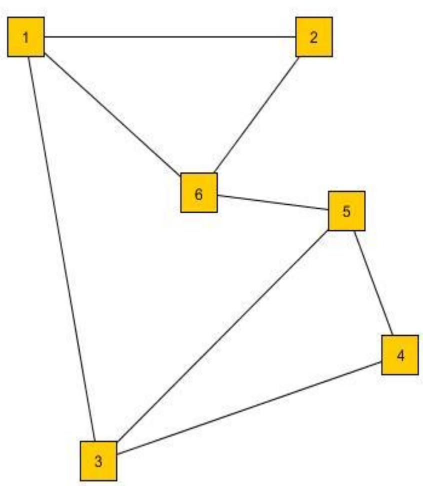
e = 3 e = 6 e =7 e = 8

Toda co-árvore de um grafo conectado está contida em um subgrafo par do grafo. Isto se deve ao fato de que as arestas de uma co-árvore formam ciclos juntamente a uma árvore geradora. O mesmo ocorre quando adicionamos arestas da arvore geradora na co-árvore. Assim sempre será possível obter um subgrafo par. Observe também que as arestas da co-árvore sempre fazem parte de um ciclo em *G*, caso contrário seriam arestas de corte e assim estariam presentes em qualquer árvore geradora de *G*.

A seguir, temos um exemplo. Considere o grafo *G* a esquerda, uma de suas árvores geradora e a respectiva co-árvore (nesta ordem). O grafo mais à direita é um subgrafo par de *G* que contém a co-árvore como subgrafo. Este grafo foi obtido através da adição das arestas *ea* e *ba* da árvore na co-árvore.



Exercício: Considere o grafo *G* abaixo e uma de suas árvores geradoras *T*. Encontre a respectiva co-árvore.



$V(T) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathrm{E(T)} = \{12, 16, 13, 26, 65, 35, 34, 54\}$

$\mathrm{E(\overline{T})} = \{12, 26, 65, 34, 54\}$

$\mathrm{E(co\overline{T})} = \{16, 13, 35\}$

Para a árvore e co-árvore acima, encontre os ciclos fundamentais.

Para tal, vamos observar cada uma das arestas de $\mathrm{co\overline{T}}$:

Para *e* = 13, $\mathrm{C}_{13} = (1, 2, 6, 5, 4, 3, 1)$

Para e = 16, $C_{16} = (1, 2, 6, 1)$

Para e = 35, $C_{35} = (3, 5, 4, 5)$

Propriedade da Troca

A seguir vamos estudar uma propriedade importante sobre a família de todas as árvores geradoras de um grafo G. Para tal, vamos introduzir o conceito de matróide.

Um **matróide** é um par ordenado (E, $\mathcal{B}$), onde E é um conjunto finito de elementos e $\mathcal{B}$ é uma família não vazia de subconjuntos de E, chamados de bases que satisfazem a seguinte **propriedade básica de troca**:

If $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $e \in B_1 \backslash B_2$ (e é um elemento de B_1, mas não é um elemento de B_2) então existe $f \in B_2 \backslash B_1$ tal que $(B_1 \backslash \{e\}) \cup \{f\} \in \mathcal{B}$

Como exemplo, considere o conjunto $\mathrm{E} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}\}$ e a família de subconjuntos $\mathcal{B} = \{\{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{e}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{d}, \mathrm{f}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{f}\}, \dots\}$.

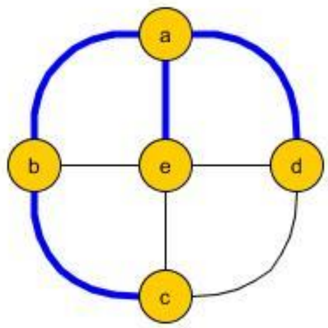
Se B_1 = {a,**e**,d} e B_2 = {a,b,**f**}, podemos observar que {a,**e**,d}\{e} ∪ {f} = {a,d,f}, onde {a,d,f} ∈ $\mathcal{B}$.

Se conseguimos mostrar que esta propriedade é válida para todo B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}$, então (E, $\mathcal{B}$) é um matróide.

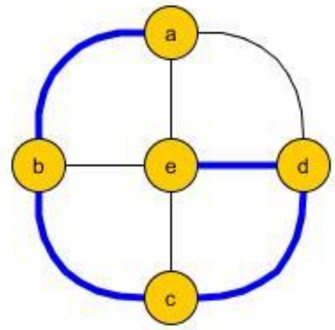
Vamos agora aplicar este conceito para o conjunto de arestas de um grafo G conectado (conjunto E) e a família de todas as árvores geradoras de G (conjunto $\mathcal{B}$). Seja E(T_1) e E(T_2) os conjuntos de arestas de duas árvores geradoras de *G*.

- Seja $e \in E(T_1) \backslash E(T_2)$. Então existe uma aresta $f \in E(T_2) \backslash E(T_1)$ tal que $(E(T_1) \backslash \{e\}) \cup \{f\})$ é o conjunto de arestas de uma árvore geradora de *G.*
- Seja $e \in E(T_2) \backslash E(T_1)$. Então existe uma aresta $f \in E(T_1) \backslash E(T_2)$ tal que $(E(T_2) \backslash \{e\}) \cup \{f\})$ é o conjunto de arestas de uma árvore geradora de *G.*

Em outras palavras, para um grafo G conectado e duas de suas árvores geradoras, T_1 e T_2, é sempre possível trocar uma aresta de T_1 por uma certa aresta de T_2 de tal forma que o resultado da troca sejam duas árvores geradoras de G. Note que a troca não envolve arestas quaisquer de T_2, mas sabemos que existe pelo menos uma para a qual a troca é possível. Considere o grafo G abaixo e as duas árvores geradoras cujas arestas estão em destaque:



T_1



T_2

T1 = {da, ea, ab, cb}

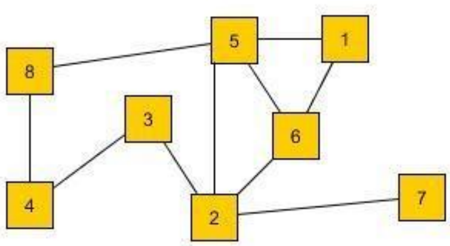
T2 = {de, dc, ab, cb}

Note que, se *e* = ea, podemos definir *f* = de, visto que (T_1\{ea}) U {de} e (T_2\{de}) U {ea} são árvores geradoras de *G*. Mas não podemos definir *f* = dc visto que (T_1\{ea}) U {dc} não é uma árvore.

Se *e* = da, podemos definir *f* = dc, visto que (T_1\{da}) U {dc} e (T_2\{dc}) U {da} são árvores geradoras de *G*. Mas não podemos definir *f* = de visto que (T_2\{de}) U {da} não é uma árvore.

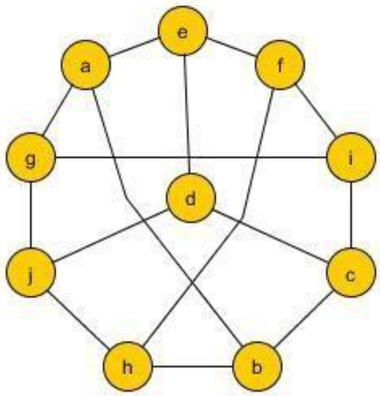
Exercícios Propostos[1]

1. Para o grafo abaixo, encontre 2 árvores geradoras e suas respectivas co-árvores.

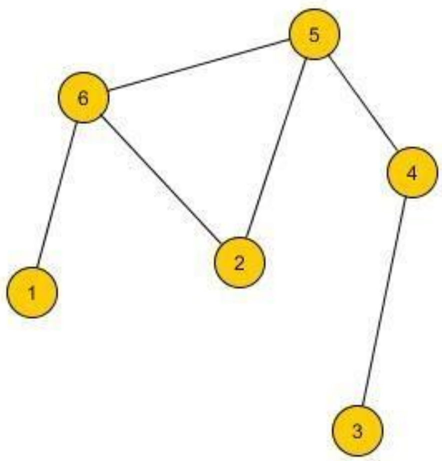


2. Para o grafo abaixo, encontre 2 árvores geradoras e exemplifique a propriedade da troca.

[1] Algumas questões foram adaptadas de: http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/



3. Toda co-árvore de um grafo conectado está contida em um único subgrafo par do grafo. Exemplifique esta propriedade considerando o grafo abaixo.



4. Seja T uma sub-árvore de um grafo G. Mostre que, se $V(T) \subset V(G)$ e $\partial G(V(T)) = \emptyset$, então G é desconectado.

5. Suponha que T é uma árvore geradora de um grafo ponderado G e e* é uma aresta de G que não pertence a T. Seja e uma aresta qualquer de T que pertence ao caminho que conecta os terminais de e* em T. Mostre que $w(e) <= w(e^*)$.

6. Mostre que o grafo ciclo de n vértices possui n árvores geradoras diferentes.

7. Mostre que uma árvore é sua própria árvore geradora.

8. Mostre que toda árvore é um grafo bipartido.

9. É verdade que todas as árvores geradoras de um grafo G contém todas as arestas de G que possuem um vértice folha como terminal? Justifique.

10. Mostre que todas as arestas de um grafo conectado G pertencem a pelo menos uma de suas árvores geradoras.

Referências

J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer, 2008,2010.

4.1, 4.2 (excluindo Cayley’s Formula), 4.3 (apenas a definição de co-árvore)

4.1 (excluindo Binary Tree), 4.2, 4.3