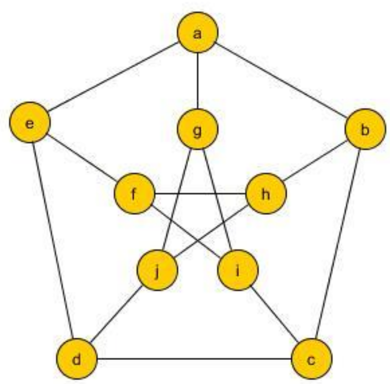
Aula 04 – Tipos Básicos de Grafos

Notas de Aula de Teoria dos Grafos
Prof$^{a.}$: Patrícia D. L. Machado
UFCG – Unidade Acadêmica de Sistemas e Computação

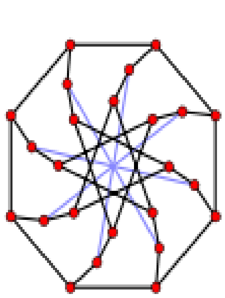
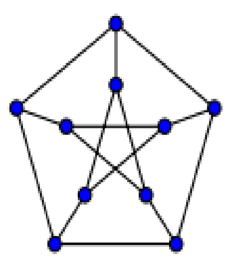
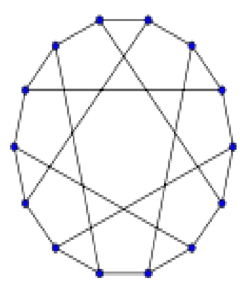
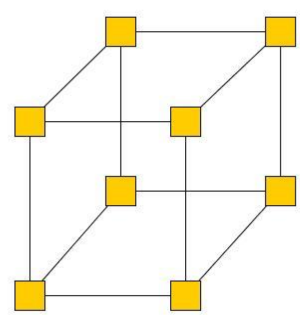
Nesta aula, estudamos diferentes tipos de grafos os quais apresentam propriedades importantes que serão apresentadas ao longo do curso.

Grafo Regular e Cúbico

Um **grafo regular** é um tipo especial de grafo onde todos os vértices possuem o mesmo grau. Um grafo regular de grau *k* é chamado de *k*-regular. O grafo apresentado no exemplo abaixo é um grafo 3-regular.

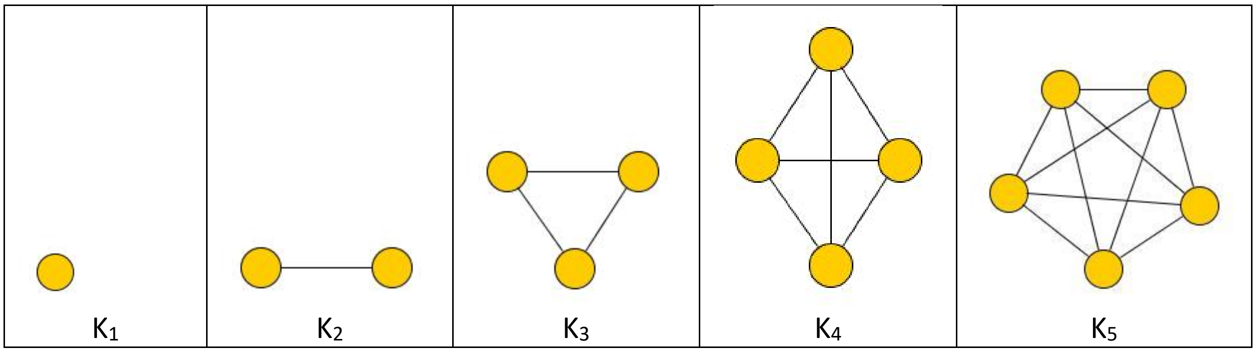


Um grafo é **cúbico** quando todos os seus vértices têm grau 3, ou seja, um grafo cúbico é um grafo 3-regular. Abaixo, temos alguns exemplos de grafos cúbicos.

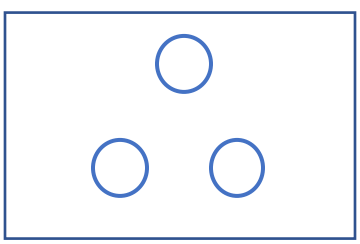
Grafo Completo e Vazio

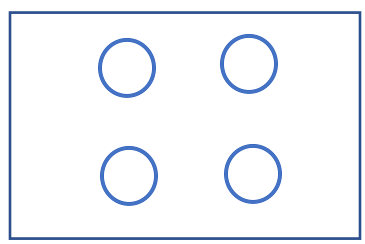
Um **grafo completo** é um grafo simples em que todo vértice é adjacente a todos os outros vértices. Lembrando que um grafo simples é aquele que não possui loops e arestas paralela. Todo grafo simples completo de *n* vértices é chamado de K_n. Na tabela abaixo, temos exemplos de grafos completos de 1 a 5 vértices.



A quantidade máxima de arestas em um grafo completo é $n(n-1)/2$, onde *n* é a quantidade de vértices de um grafo. Esta fórmula indica que cada vértice é adjacente aos $n-1$ demais. Sendo $n(n-1)$ a quantidade total de possíveis adjacências entre os vértices, dividimos este valor por 2 visto que cada aresta representa a adjacência de um vértice *a* para *b* e de um vértice *b* para *a*.

Um **grafo vazio** é aquele que não possui vértices adjacentes. Abaixo temos dois exemplos de grafos vazios, sendo um de 3 vértices e outro de 4 vértices.





Grafo Caminho e Ciclo

É comum necessitarmos realizar caminhamentos em grafos a fim de analisá-los. Vamos então definir o conceito de passeio.

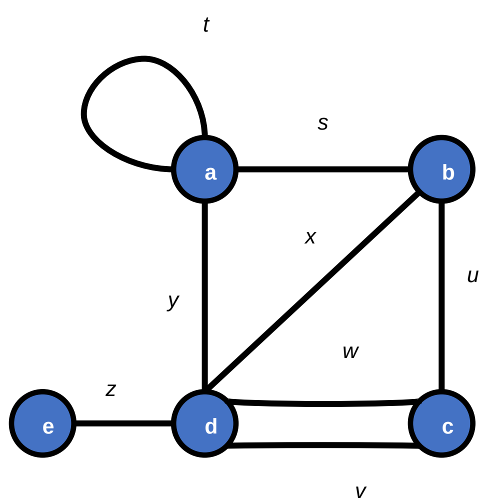
Um **passeio** em um grafo é uma sequência de vértices e arestas tal que cada aresta (exceto a primeira) inicia com um vértice no qual a aresta anterior terminou.

O tamanho de um passeio é o número de arestas nele contido.

Para o grafo abaixo, a sequência de vértices e arestas (*ezd*, *d***w***c*, *c***v***d*, *d***y***a*) forma um passeio visto que, de acordo com a ordem em que os terminais são considerados na sequência, o vértice final da aresta anterior é igual ao vértice inicial da posterior. Cada aresta possui como um dos terminais um vértice no qual a aresta anterior terminou. O passeio vai do vértice *e* ao vértice *a* passando pelas arestas *z*, *w*, *v* e *y* respectivamente. A sequência é formada por vértices e arestas adjacentes.

Por outro lado, a sequência (*asb*, *bxd*, *cub*) não é um passeio, pois a aresta *u* não tem o vértice *d* como terminal. A sequência (*asb*, *bxd*, *cwd*) também não é um passeio porque apesar das arestas *s,x,w* serem adjacentes, a ordem dos vértices não está correta no elemento *cwd*.

Por fim, a sequência (*asb*, *bxd*, *dwc*, *cub*, *bxd*, *dze*) é um passeio que vai do vértice *a* para o vértice *e* passando duas vezes pela aresta *x*.



Em um grafo simples, um passeio pode também ser representado pela sequência de vértices correspondentes, já que não há risco de ambiguidade devido a inexistência de arestas paralelas.

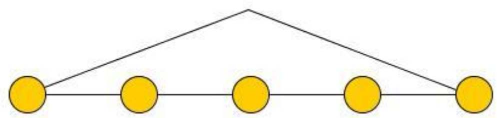
Um **caminho** em um grafo é um passeio sem arestas repetidas. Um **caminho simples** é um caminho no qual todos os vértices são distintos.

Um **grafo caminho simples** ou simplesmente **grafo caminho** é um grafo simples formado por um único caminho (simples) de 2 ou mais vértices. Em um grafo caminho, os vértices formam uma sequência linear tal que dois vértices são adjacentes se um for consecutivo do outro, caso contrário, não são adjacentes. Abaixo temos um exemplo de grafo caminho.

Para o grafo acima, (*ezd*, *dwc*, *cvd*, *dya*) é um caminho, mas não é um caminho simples porque passa pelo vértice *d* duas vezes. O passeio (asb, bxd, dwc, cub, bxd, dze) não é um caminho porque passa duas vezes pela aresta *x*.

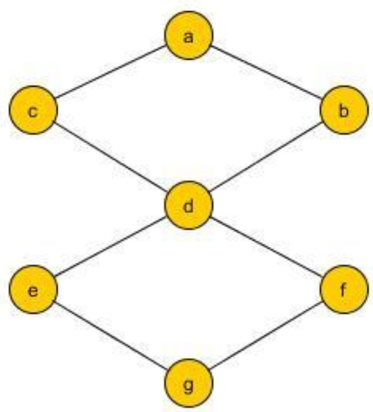
Um **ciclo** em um grafo é um passeio no qual os vértices formam um circuito sequencial sem repetição de arestas. Um **ciclo simples** é um ciclo no qual todos os vértices são distintos.

Um **grafo ciclo (simples)** é um grafo simples com três ou mais vértices, formado por um único ciclo (simples). Abaixo apresentamos o exemplo de um grafo ciclo simples.



Consideramos a definição de grafo ciclo para grafos com 3 ou mais vértices, pois a noção de ciclo em um grafo trivial, ou seja, um grafo com 1 vértice, é contemplada pelo conceito de loop. Já para os grafos com 2 vértices, a noção de ciclo é contemplada pelo conceito de arestas paralelas.

No exemplo abaixo, o passeio (*dc*, *ca*, *ab*, *bd*, *de*, *eg*, *gf*, *fd*) é um ciclo, mas não é um ciclo simples porque passa duas vezes pelo vértice *d*. O passeio (*dc*, *ca*, *ab*, *bd*) é um ciclo simples. Como o grafo é simples, este ciclo também pode ser representado pela sequência de vértices correspondentes: (***d,c,a,b,d***). O grafo abaixo é um grafo ciclo, mas não é um grafo ciclo simples.



Note que:

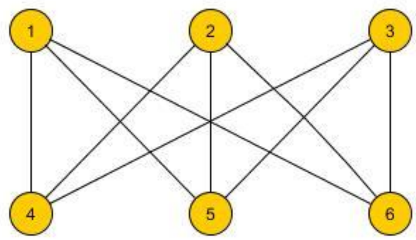
- O **tamanho** de um caminho ou ciclo é o número de arestas correspondente.
- Um caminho ou ciclo de tamanho *k* é um **k-caminho** ou **k-ciclo**
- Um caminho / ciclo simples é **máximo** se é o de maior tamanho que pode ser definido no grafo.

No exemplo acima, o ciclo (*d,c,a,b,d*) é um 4-ciclo e é um ciclo simples máximo neste grafo.

Grafo Bipartido

Um grafo é **bipartido** *(bipartite)* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos *X* e *Y* tal que todas as arestas do grafo possuam um terminal em *X* e outro em *Y*.

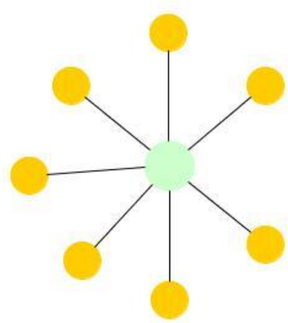
Abaixo temos um exemplo de um grafo bipartido, visto que podemos particionar o conjunto de vértices em dois subconjuntos $X = \{1,2,3\}$ e $Y = \{4,5,6\}$. Podemos observar que toda aresta deste grafo possui um terminal em X e outro em Y.



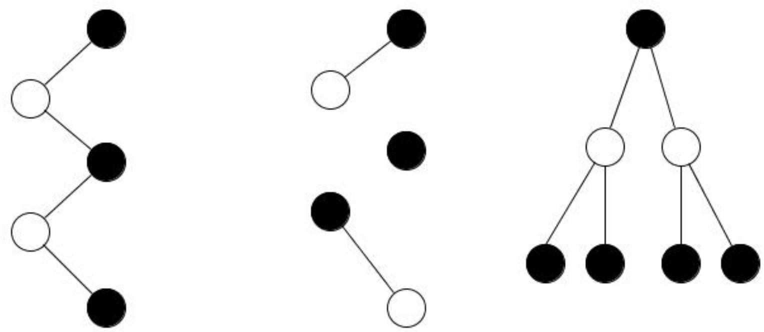
Um grafo *G* é **bipartido completo** se é bipartido e todos os vértices da partição *X* são adjacentes a todos os vértices da partição *Y*. Um grafo bipartido completo possui ***p+q*** vértices, ***pq*** arestas e recebe a denominação de $\boldsymbol{K_{p,q}}$, onde *p* e *q* são os tamanhos das partições de vértices.

O grafo do exemplo acima é um $K_{3,3}$, visto que todo vértice de uma partição é adjacente a todos os outros vértices da outra partição e ambas as partições tem tamanho 3.

Todo grafo $K_{1,q}$ é chamado de estrela, grafo bipartido completo onde uma das partições, *X*, tem tamanho 1 e a outra partição, *Y*, tem tamanho q. Neste grafo, o vértice da partição *X* tem grau *q* e os vértices da partição *Y* tem grau 1. Abaixo temos como exemplo um $K_{1,7}$.



Para um grafo ser bipartido, não é necessário que todos os vértices de uma partição sejam adjacentes a todos os vértices da outra partição tal como no caso do grafo bipartido completo. Abaixo podemos ver outros exemplos de grafos bipartidos, onde as partições estão indicadas por cores. Note que no grafo (b) o vértice isolado pode fazer parte tanto da partição preta quanto da partição branca já que não é adjacente a outros vértices. É possível haver mais de uma possibilidade de partição. O que caracteriza um grafo como não sendo bipartido é o fato de não ser possível definir pelo menos uma partição.

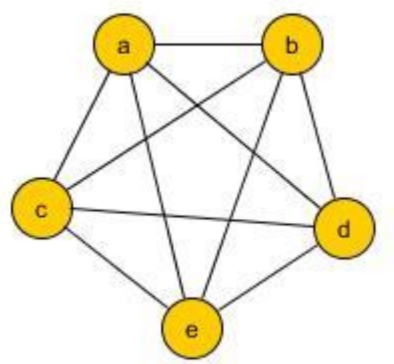


(a) (b) (c)

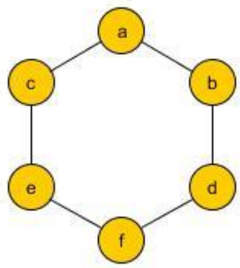
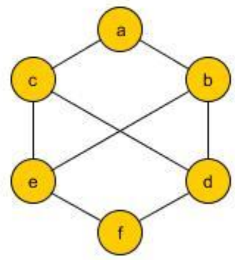
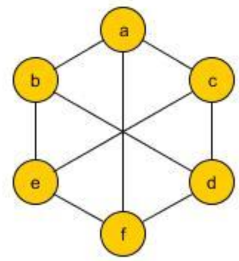
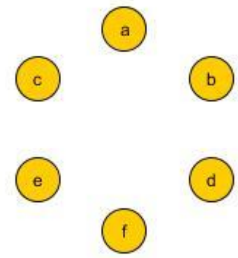
Teorema 01. Um grafo é bipartido se e somente se não contém ciclo simples de tamanho ímpar.

Em outras palavras, um grafo é bipartido ou um grafo contém um ciclo simples de tamanho ímpar, mas não os ambos.

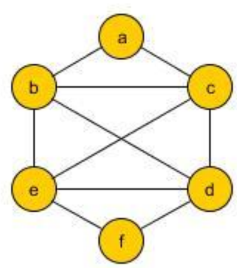
Os grafos (a), (b) e (c) acima não possuem ciclos, portanto são bipartidos. O grafo K_5, abaixo ilustrado, é um exemplo de um grafo que não é bipartido, visto que possui ciclos simples de tamanho ímpar tais como (*ab*, *bd*, *da*) e (*cb*, *bd*, *dc*).



Os grafos abaixo são bipartidos. Note que os três primeiros (da esquerda para a direita) possuem apenas ciclo simples de tamanho par e o último não possui ciclos.

			
X = {a,d,e} Y = {b,f,c}	X = {a,d,e} Y = {b,f,c}	X = {a,d,e} Y = {b,f,c}	X = {a,b} Y = {c,d,e,f} Qualquer partição é válida já que os vértices não são adjacentes

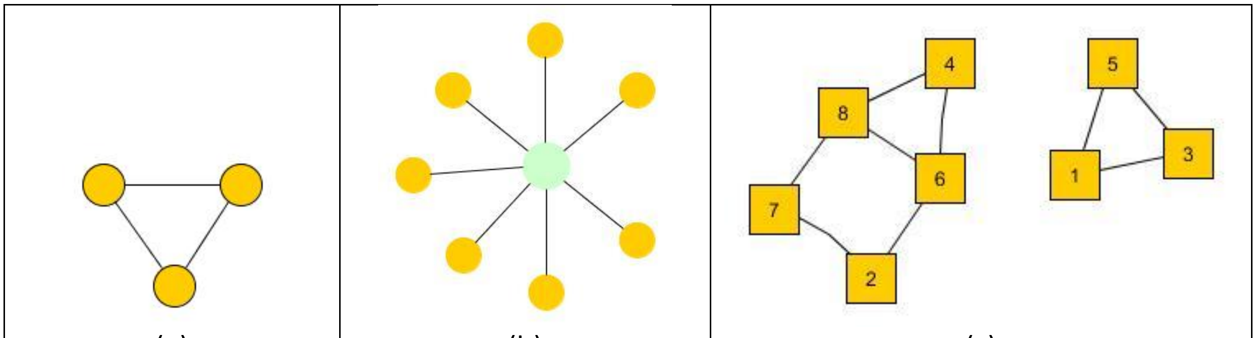
Por outro lado, o grafo abaixo não é bipartido. Possui ciclos de tamanho ímpar. Como exemplo, (*a*,*b*,*c*).



Grafo Conectado

Um grafo é **conectado** ou **conexo** *(connected*) se, para qualquer partição de seu conjunto de vértices em 2 subconjuntos não-vazios *X* e *Y*, existe pelo menos uma aresta com um terminal em *X* e um terminal em *Y*. Caso contrário, o grafo é desconectado.

Nos exemplos abaixo, podemos determinar visualmente que os grafos (a) e (b) são conectados. No entanto, para grafos que não podem ser visualizados, precisamos usar uma estratégia sistemática para determinar se um grafo é ou não conectado. Usando a definição formal, podemos observar que o grafo (c) não é conectado, visto que identificamos um particionamento do conjunto de vértices, em 2 subconjuntos não vazios X = {7,2,8,4,6} e Y = {1,5,3}, e, para este particionamento, não existe uma aresta que possua um terminal em cada partição.

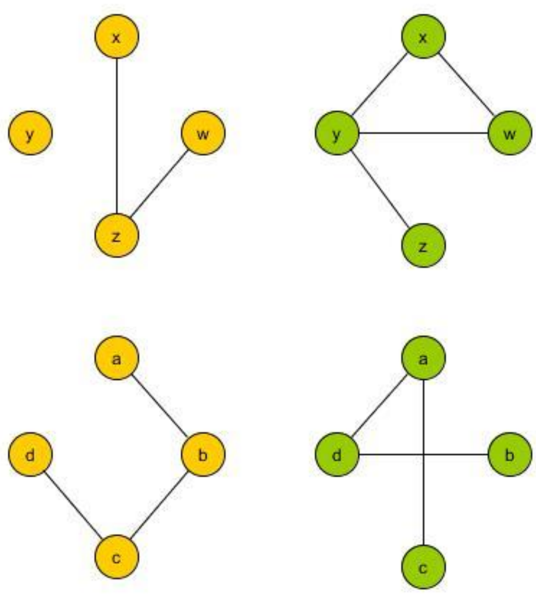


(a) (b) (c)

Complemento de um Grafo

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples. O **complemento** de *G* é um grafo simples cujo conjunto de vértices é *V*(*G*) e cujo conjunto de arestas é formado por arestas que não pertencem a *E*(*G*), ou seja, todas as possíveis arestas entre pares não adjacentes de vértices de *G*.

No exemplo abaixo, podemos observar dois pares de grafo (um par em cada linha), onde cada um é o complemento do outro. Observem que eles possuem o mesmo conjunto de vértices, mas o conjunto de arestas de um é o complemento do conjunto de arestas do outro, ou seja, na primeira linha *xz* é aresta do grafo, mas não é aresta do complemento, da mesma forma, os vértices *xy* não são adjacentes no grafo, mas não adjacentes no complemento. Note que os vértices isolados em um grafo estão conectados a todos os outros vértices no complemento deste grafo, como podemos observar com o vértice *y* na primeira linha.



Exercícios Propostos

1. Todo grafo G tem um caminho de comprimento δ(G). Construa um exemplo.[1]

2. Uma pequena fábrica tem cinco máquinas — 1, 2, 3, 4 e 5 — e seis operários — A, B, C, D, E e F. A relação abaixo especifica as máquinas que cada operário sabe operar: A -> 2, 3; B -> 1, 2, 3, 4, 5; C -> 3; D; E -> 2, 4, 5; F -> 2, 5. Apresente a definição formal (matemática) deste grafo e construa uma representação gráfica. Este grafo é bipartido? [1]

3. Quantas arestas pode ter um grafo {U, W}-bipartido, onde U e W são os conjuntos que representam as partições dos conjuntos de vértices? Quantas arestas o complemento deste grafo possui? [1]

4. Que aparência tem a matriz de adjacências de um grafo bipartido?

5. Seja $\bar{G}$ o complemento de um grafo simples G. Determine $\delta(\bar{G})$ e $\Delta(\bar{G})$ em função de δ(G) e Δ(G), onde δ(G) é o grau mínimo de G e Δ(G) é o grau máximo de G. [1]

6. Quantos caminhos diferentes existem em um grafo completo com conjunto de vértices {1, 2, 3}? Quantos ciclos diferentes existem em um grafo completo com conjunto de vértices {1, 2, 3}? Quantos ciclos diferentes existem em um grafo completo com conjunto de vértices {1, 2, 3, 4}? Considere apenas caminhos e ciclos simples e não vazios. [1]

7. Mostre que se um grafo G não é conectado, então seu complemento $\bar{G}$é conectado. Pode usar exemplos.

8. Seja G o grafo descrito a seguir: V(G) = {a, b, c, d, e, f, g}, E(G) = {ab, bc, cd, cf, gf, ga, gb}. G é um grafo conectado? Justifique. Apresente o complemento deste grafo.

9. O complemento de todo grafo ciclo é um grafo conectado. Verdadeiro ou falso? Justifique.

10. O complemento de todo grafo caminho é um grafo não conectado. Verdadeiro ou falso? Justifique.

11. Sejam P∗ e Q∗ dois caminhos de comprimento máximo em um grafo conexo G. Mostre que P∗ e Q∗ têm um vértice em comum.

---

[1] Questão de adaptada de: https://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/texto/ETG.pdf

Referências

J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer, 2008,2010. Seção 1.1 - Special Families of Graphs, excluindo grafo planar.