Aula 09 – Subgrafos e Operações Unárias sobre Grafos

Notas de Aula de Teoria dos Grafos

Prof[a.]: Patrícia D. L. Machado

UFCG – Unidade Acadêmica de Sistemas e Computação

Sumário

Nesta aula, estudaremos o conceito de subgrafo e algumas operações unárias que podem aplicadas para produzir subgrafos.

Subgrafo

Um grafo *F* é **subgrafo** de um grafo *G* se $V(F) \subseteq V(G)$, $E(F) \subseteq E(G)$ e ψ_F é a restrição de ψ_G a $E(F)$. Em outras palavras, todo vértice/aresta de F é um vértice/aresta de G e a função de incidência de F é igual a função de G para toda aresta de F.

Usamos uma notação semelhante a teoria dos conjuntos para indicar que F é um subgrafo de G, $G \supseteq F$ ou $F \subseteq G$, considerando os dois possíveis sinais e sentidos do operador de continência.

Um **supergrafo** de *G* é um grafo *H* que contém *G* como subgrafo, isto é, $H \supseteq G$.

Um subgrafo é **próprio** se $F \subset G$ se $F \subseteq G$ e $V(F) \subset V(G)$ ou $E(F) \subset E(G)$. Ou seja, F não pode ser igual a G. Neste caso, utilizamos o operador de continência sem a indicação de igualdade.

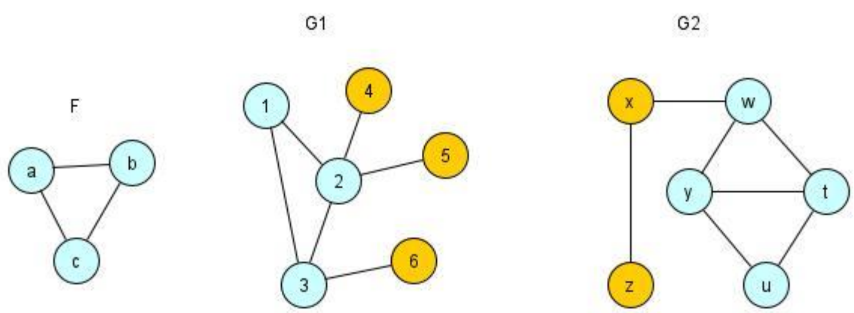
Incorporação

O conceito de subgrafo pode ter sua aplicação limitada visto que exige que o conjunto de vértices e arestas, juntamente com a função de incidência estejam contidos no supergrafo. Desta forma, inspirado na noção de isomorfismo, podemos definir quando um grafo está incorporado em outro e assim poder estudar propriedades de uma maneira mais geral.

Uma incorporação (***embedding***) de um grafo *F* em um grafo *G* é um isomorfismo entre *F* e um subgrafo de *G*.

Em outras palavras, se *F* está incorporado em *G*, podemos dizer que *G* possui/contém um grafo com a mesma estrutura de *F*.

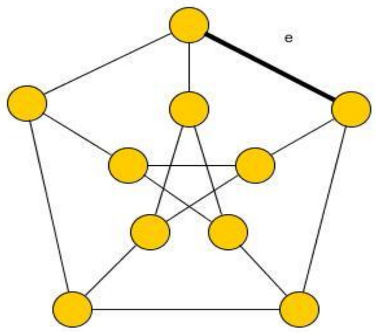
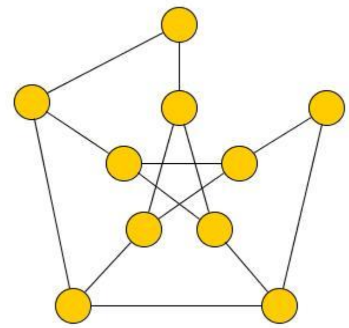
Em nosso exemplo abaixo, temos que o grafo *F*, não é subgrafo de *G1* e *G2*, mas está incorporado neles pois estes grafos possuem subgrafos que são isomórficos ao grafo *F*. Em particular, *F* é isomórfico ao subgrafo de *G1* formado pelos seguintes conjuntos de vértices e arestas: {1,2,3} e {12,23,31}. Note também que *F* está incorporado 2 vezes em *G2*, pois é isomórfico aos subgrafos de *G2* formados pelos seguintes conjuntos de vértices e arestas: {w,y,t} e {wt, ty, yw}; {y,t,u} e {yt, tu, uy}.



Remoção de Arestas e Vértices

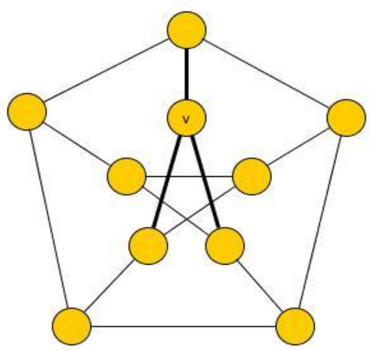
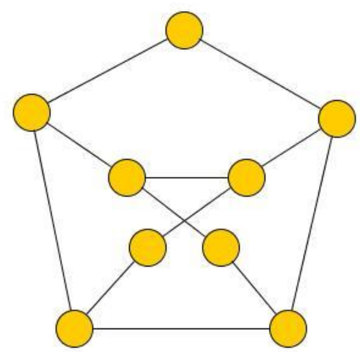
Se *e* é uma aresta de *G*, podemos obter um grafo ***G\e*** com *m-1* arestas (*m* é o número de arestas de *G*), removendo *e* de *G*, mas deixando os vértices e as outras arestas intactos. A operação "****" é chamada de **remoção de aresta** (*edge deletion*) e pode também ser aplicada a um conjunto de arestas ***G\S***, onde *S* é um conjunto de arestas de *G*.

Como exemplo, vamos considerar o grafo *G* a esquerda na tabela abaixo e uma de suas arestas: *e*. O grafo a direita representa o grafo obtido através da remoção da aresta *e*.

G	G\e
	

Se *v* é um vértice de *G*, podemos obter um grafo ***G-v*** com *n-1* vértices (*n* é o número de vértices de G), removendo *v* juntamente com todas as arestas incidentes com *v*. A operação "**-**" é chamada de **remoção de vértice** (*vertex deletion*) e pode também ser aplicada a um conjunto de vértices ***G-S***, onde *S* é um conjunto de vértices de *G*.

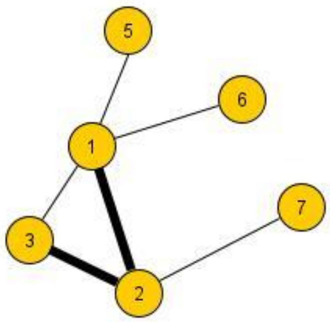
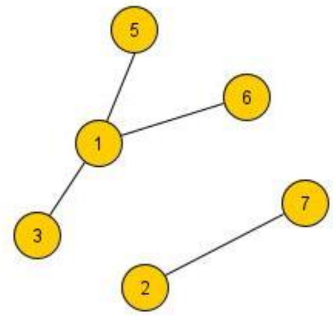
Como exemplo, vamos considerar o grafo *G* a esquerda na tabela abaixo e um de seus vértices: *v*. O grafo a direita representa o grafo obtido através da remoção de *v* e de suas arestas incidentes.

G	G-v
	

Subgrafo Gerador e Subgrafo Induzido

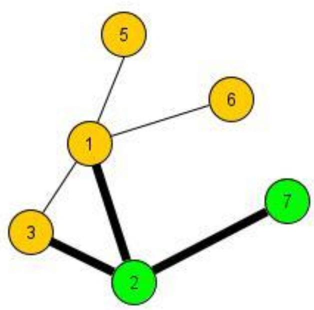
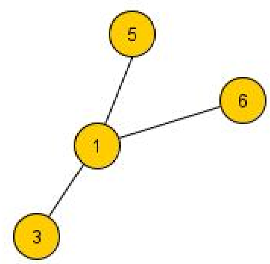
Um **subgrafo gerador (*spanning subgraph*)** de *G* – *G\S* – é aquele obtido a partir de remoção de arestas apenas, onde *S* é o conjunto de arestas removidas.

Como exemplo, vamos considerar o grafo *G* a esquerda na tabela abaixo e um conjunto de arestas de *G* definido como *S* = {*12*, *32*}. O grafo a direita é um subgrafo gerador de *G*, pois foi obtido unicamente através da remoção das arestas de *S*.

G	Subgrafo gerador: G\{12,32}
	

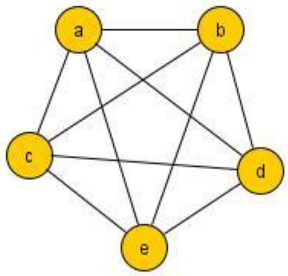
Um **subgrafo induzido (*induced subgraph*)** de *G*, *G-S,* é aquele obtido apenas a partir de remoção de vértices, onde *S* é o conjunto de vértices removidos.

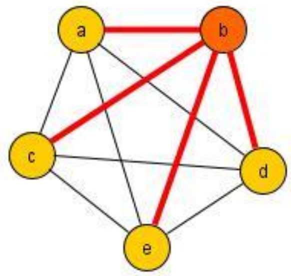
Como exemplo, vamos considerar o grafo *G* a esquerda na tabela abaixo e um conjunto de vértices de *G* definido como *S* = {*2*, *7*}. O grafo a direita é um subgrafo induzido de *G*, pois foi obtido unicamente através da remoção dos vértices de *S* e suas arestas incidentes.

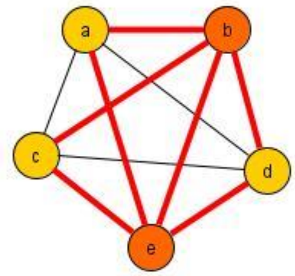
G	Subgrafo induzido: G-{2,7}
	

Exercício: Mostre que todo subgrafo induzido de um grafo completo é completo.

Para realizar este exercício é necessário observar os conceitos centrais envolvidos: subgrafo, subgrafo induzido e grafo completo. Inicialmente, vamos observar um exemplo com o grafo completo K_5 abaixo ilustrado a esquerda.





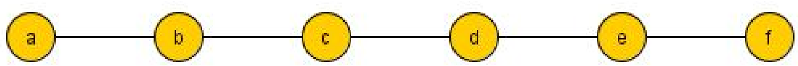


Observe que o grafo do meio, considerando a remoção do vértice b e suas arestas incidentes (em destaque) é um K_4 e o grafo da direita, considerando a remoção dos vértices b e suas arestas incidentes (em destaque) é um K_3. Portanto, com este exemplo, temos uma evidência de que a proposição do exercício pode ser verdadeira. Mas falta ainda demonstrar que é válida para qualquer grafo completo.

Seja G um grafo completo de *n* vértices. Seja *v* um dos vértices de *G*. O subgrafo induzido obtido através da remoção de *v*, *G-v*, contém todos os vértices e arestas de *G*, exceto o vértice *v* e as arestas que o relacionam com outros vértices. Visto que *G* é um grafo completo, então todos os vértices são adjacentes. Assim, remover *v* de *G* não afeta a relação de adjacência entre os outros vértices do grafo.

Exercício: É verdade que todo subgrafo induzido de um caminho é um caminho?

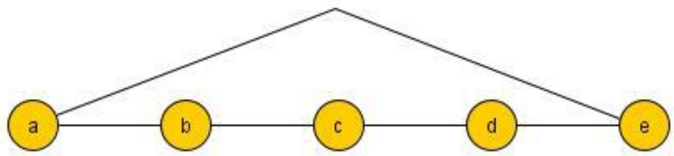
Antes de apresentar uma solução para o exercício, é fundamental observar os principais conceitos envolvidos: subgrafo induzido e grafo caminho. Observe que um subgrafo induzido pode ser definido a partir da remoção de 1 ou mais vértices de G e estes vértices podem ser quaisquer. Em um grafo caminho, as adjacências determinam uma sequência linear de vértices, como podemos observar no exemplo abaixo.



Considerando este exemplo, podemos observar que os grafos G-{a} e G-{f} são grafos caminho, mas os grafos G-{b} e G-{c,e} não são grafos caminho. Assim, a proposição do exercício não é verdadeira e podemos demonstrar isto através deste contraexemplo.

Exercício: É verdade que todo subgrafo induzido de um grafo ciclo é um caminho?

Novamente, antes de apresentar uma solução para o exercício, é fundamental observar os principais conceitos envolvidos: subgrafo induzido, grafo ciclo e grafo caminho. Observe que um subgrafo induzido pode ser definido a partir da remoção de 1 ou mais vértices de G e estes vértices podem ser quaisquer. Em um grafo ciclo, as adjacências determinam uma organização linear de vértices em um circuito, como podemos observar no exemplo abaixo.



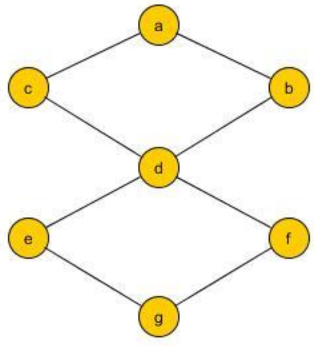
Considerando este exemplo, podemos observar que os grafos G-{a} e G-{a,e} são grafos caminho, mas os grafos G-{b,d} e G-{c,e} não são grafos caminho. Assim, a proposição do exercício não é verdadeira e podemos demonstrar isto através deste contraexemplo.

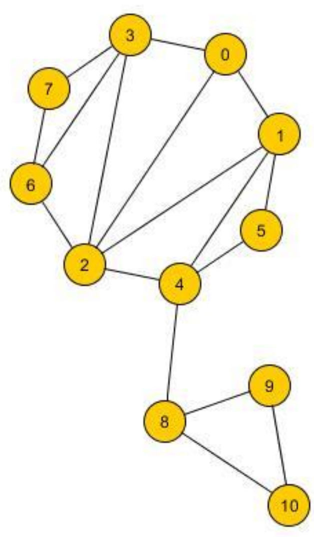
Incorporação de Ciclo

Ciclos são estruturas comumente investigadas na análise de grafos. O fato de um ciclo estar incorporado em um grafo pode trazer informações importantes sobre ele de acordo com o domínio do problema investigado. Quando um ciclo de tamanho *n* está incorporado em um grafo *G* dizemos que o grafo *G* possui/contém este ciclo. Lembrando que o tamanho de um ciclo é determinado pela quantidade de arestas que o define. Observe que o termo ciclo nesta seção denota sempre o conceito de ***ciclo simples***, sem repetição de vértices.

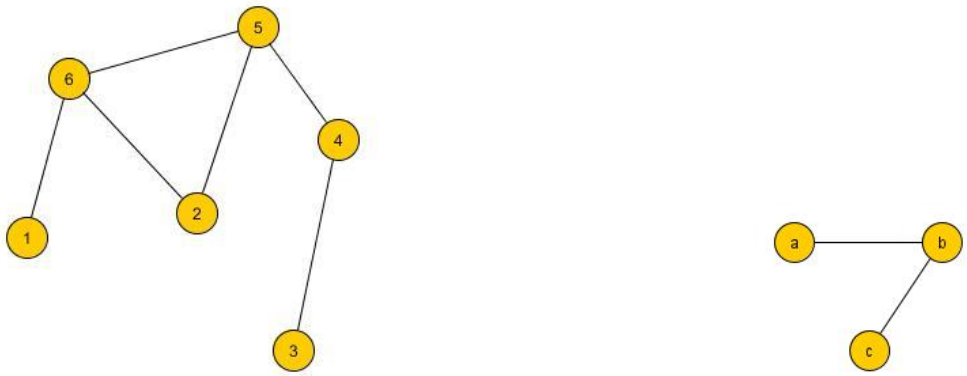
Teorema do Ciclo: Seja *G* um grafo no qual todos os vértices têm grau no mínimo *2*. Então *G* contém um ciclo.

Abaixo temos 2 exemplos de grafos que ilustram este teorema.

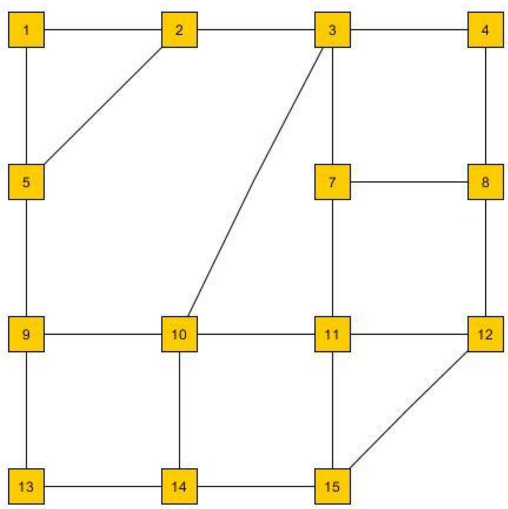




Note que este teorema é aplicável apenas a grafos com grau mínimo 2. ***Nada podemos afirmar para grafos com grau mínimo 0 ou 1***. Abaixo, temos exemplos de grafos com grau mínimo 1 com e sem ciclo (esquerda e direita respectivamente).



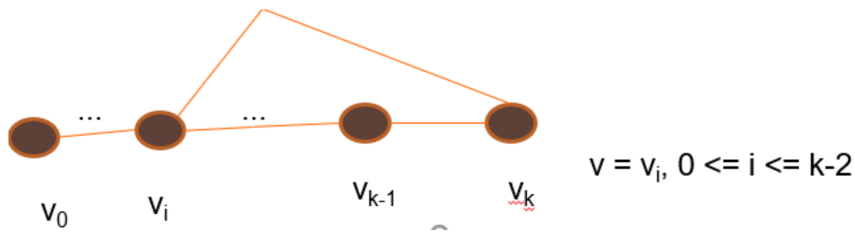
A prova para este teorema utiliza o conceito de caminhos simples mais longo, isto é, aquele que passa pelo maior número possível de vértices. Pode existir mais de um em grafo. Para o grafo acima, a esquerda, um caminho simples mais longo seria: (3,4,5,2,6,1). Já para o grafo abaixo, seria: (15,12,11,7,8,4,3,10,14,13,9,5,1,2). Note que este caminho contém todos os vértices do grafo e este não pode ser maior porque, a partir do vértice 2, podemos chegar apenas a vértices que já foram incluídos no caminho. Assim, o caminho não pode ser maior já que é simples.



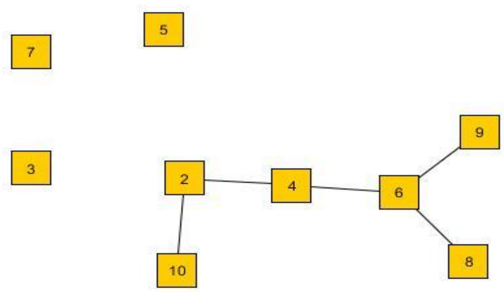
Prova do Teorema do Ciclo:

Seja G um grafo no qual todos os vértices têm grau no mínimo 2. Se *G* tem uma aresta *loop*, então contém um ciclo de tamanho *1*. Se *G* tem arestas paralelas, então contém um ciclo de tamanho *2*. Então vamos assumir o caso mais complexo em que *G* é um grafo simples.

Seja $P := v_0v_1...v_{k-1}v_k$ o caminho simples mais longo em *G*. Como o grau de v_k é no mínimo 2, este possui um vizinho v diferente de v_{k-1}. Se v não está em *P*, então *P* não é o caminho simples mais longo. Portanto, $v = v_i$, com $0 \leq i \leq k\text{-}2$, e $v_0v_1...v_{k-1}v_kv_i$ possui um ciclo.



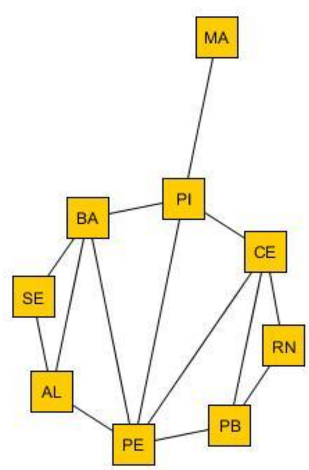
Um grafo (direcionado) é **acíclico** se não contém um ciclo (direcionado). Todo grafo acíclico não-trivial possui pelo menos dois vértices de grau menor que 2. Abaixo, temos um exemplo de um grafo acíclico.



A **cintura (*girth*)** de um grafo é o tamanho do menor ciclo contido nele. A cintura de um grafo sem ciclos é infinita.

A **circunferência** (***circumference***) de um grafo é o tamanho do ciclo simples mais longo. Um grafo Hamiltoniano de *n* vértices possui circunferência *n*. Neste grafo, podemos encontrar um ciclo hamiltoniano de tamanho n que inclui todos os vértices.

O grafo abaixo possui cintura igual a 3 porque o menor ciclo simples contido nele tem tamanho 3 (por exemplo, (BA, AL, SE, BA). E possui circunferência igual a 8 correspondendo ao maior ciclo simples que contém todos os vértices, exceto MA. O grafo acíclico ilustrado acima possui cintura infinita e circunferência igual a 0.



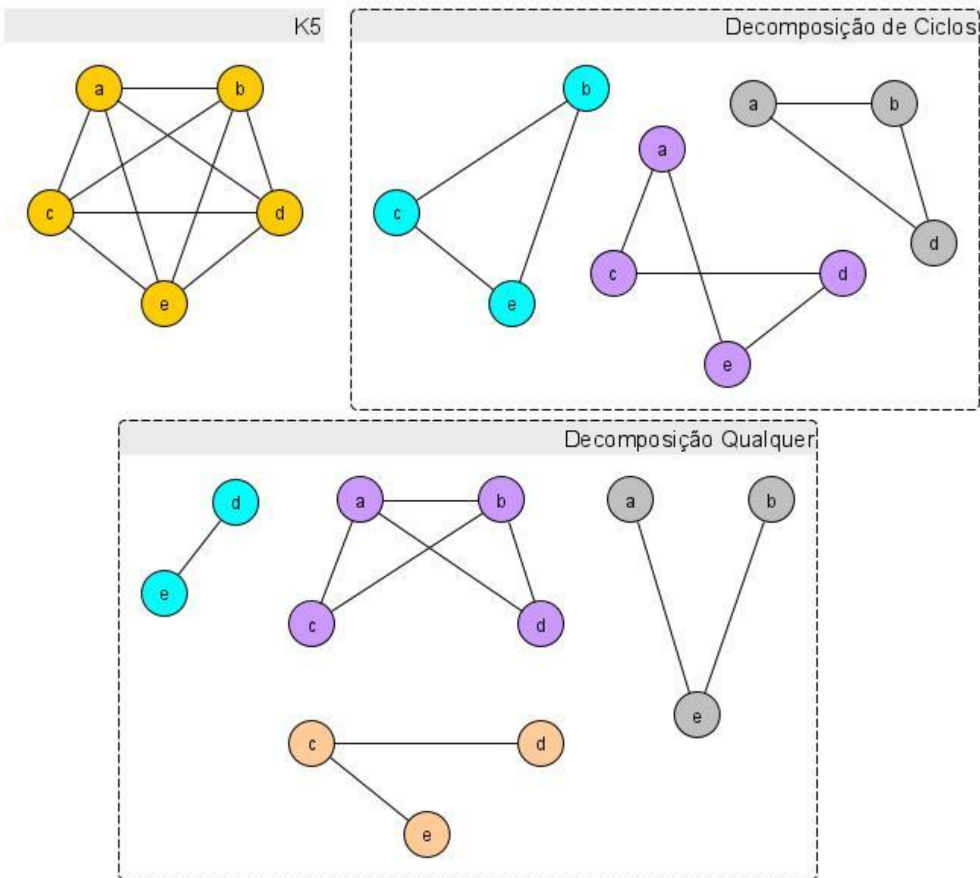
Decomposição e Cobertura

Decomposição é a operação a partir qual obtemos um conjunto de subgrafos de um grafo, onde os subgrafos não possuem arestas em comum.

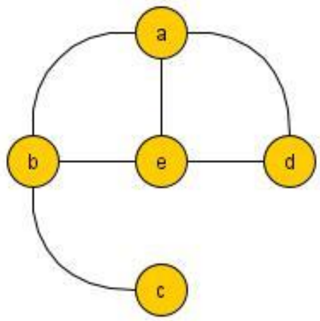
Formalmente, uma **decomposição** de um grafo *G* é uma família *Γ* de subgrafos de *G* com <u>arestas disjuntas</u> tal que $\cup_{F \in \Gamma} E(F) = E(G)$

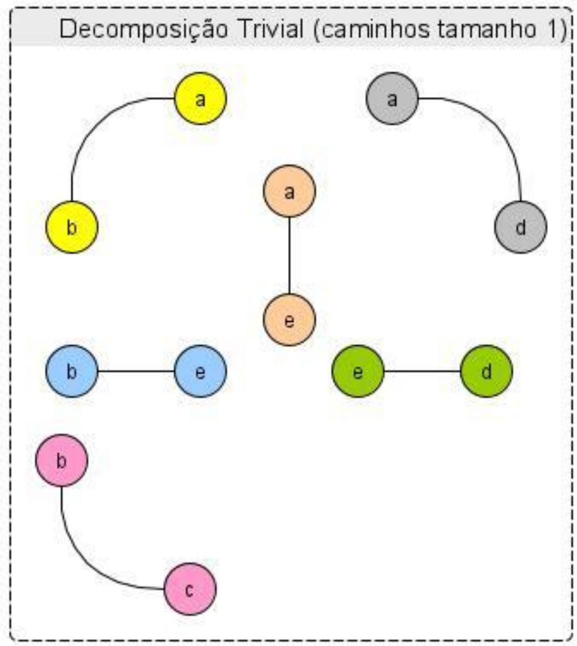
Se *Γ* consiste unicamente de caminhos ou ciclos simples, chamamos *Γ* de **decomposição de caminhos** ou **de ciclos** de *G*.

No exemplo abaixo, vemos uma decomposição do grafo K5 em 3 subgrafos simples e também em subgrafos quaisquer.



Todo grafo não-vazio e sem *loops* tem uma **decomposição trivial** em caminhos simples de tamanho 1. Mas nem todo grafo tem uma decomposição de ciclos. Abaixo, temos um exemplo de uma decomposição trivial em caminhos. Por que não seria possível uma decomposição de ciclos neste grafo?





No grafo acima, como a aresta *bc* não faz parte de um ciclo e toda decomposição precisa incluir todas as arestas do grafo, não é possível definir uma decomposição formada apenas por ciclos.

O teorema abaixo estabelece a condição mínima para que um grafo admita uma decomposição de ciclos.

Teorema (*Veblen's Theorem*). Um grafo admite uma decomposição de ciclos se e somente se é par (todos os vértices têm grau par).

Intuitivamente, uma das condições básicas para se formar ciclos entre um conjunto de vértices é que para cada vértice fazer parte de um ciclo, é necessário que duas arestas sejam incidentes a ele. Se um vértice possui grau ímpar, uma das arestas não poderá fazer parte de um ciclo (vértices *b* e *c* acima). Observe também que vértices em um ciclo têm no mínimo grau 2. Em uma decomposição, para formarmos *n* ciclos passando por um vértice *v* é necessário que este vértice possua *2n* arestas incidentes.

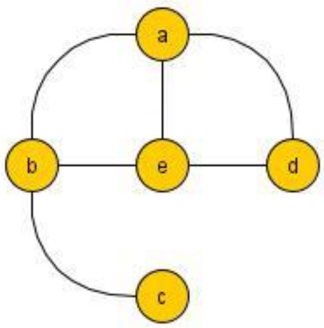
Cobertura é uma operação semelhante a decomposição, com a diferença de que as arestas dos subgrafos não precisam ser distintas.

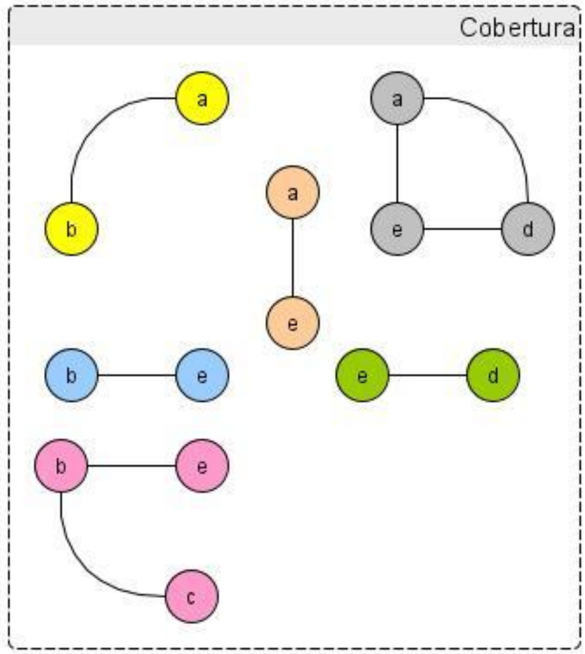
Formalmente, uma **cobertura** de um grafo *G* é uma família *Γ* de subgrafos de *G, não necessariamente* com arestas disjuntas, satisfazendo a condição $\cup_{F \in \Gamma} E(F) = E(G)$

Uma cobertura é uniforme se cobre cada aresta do grafo o mesmo número de vezes (*k-cobertura*).

Se *Γ* consiste unicamente de caminhos ou ciclos simples, chamamos *Γ* de **cobertura de caminhos** ou **cobertura de ciclos** de *G*.

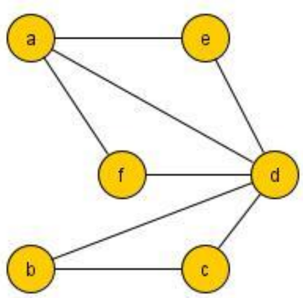
Abaixo, temos um exemplo de cobertura para o grafo a esquerda.

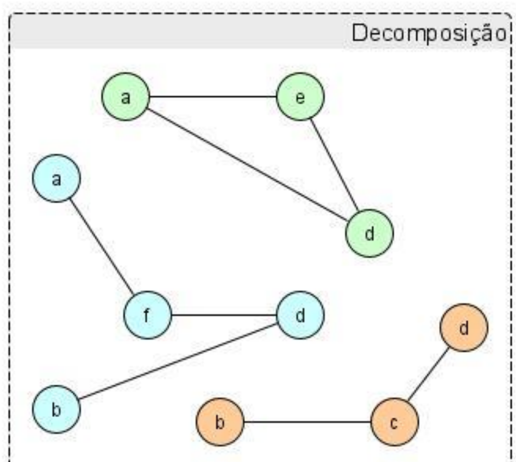




Exercício: Seja G = (V(G),E(G)) um grafo simples, onde V(G)={a,b,c,d,e,f} e E(G) = {af,ae,ad,bc,bd,de,df,cd}. Encontre uma decomposição.

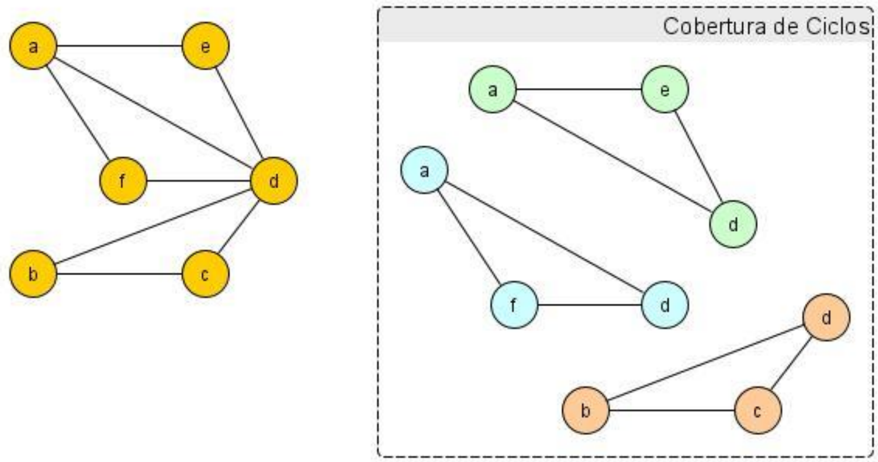
Abaixo temos uma visualização gráfica de G a esquerda e uma decomposição de G em subgrafos a direita.



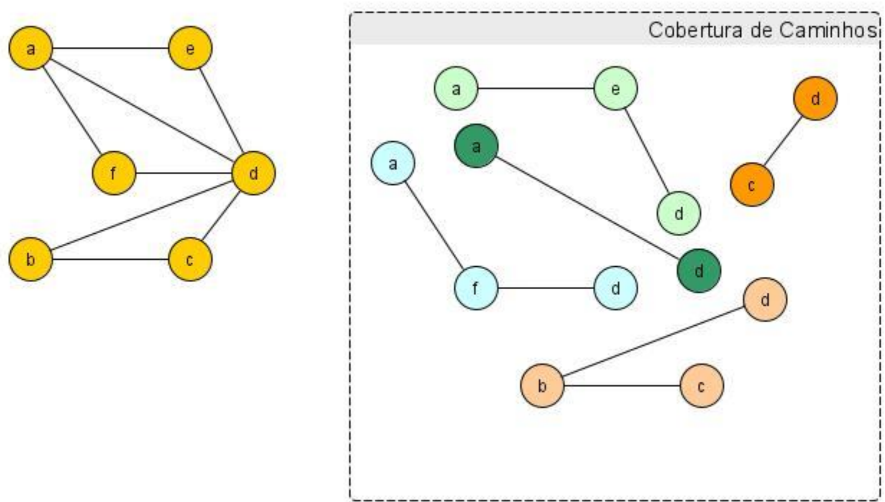


É possível realizar uma decomposição de ciclos em G? Não, pois G não é um grafo par.

É possível realizar uma cobertura de ciclos em G? Sim. Temos um exemplo abaixo. Note que para tornar possível a formação da cobertura de ciclos foi necessário repetir a aresta *ad* o que é permitido para cobertura, mas não é permitido para decomposição.



É possível realizar uma decomposição de caminhos em G? Sim. Lembrando que qualquer grafo não-vazio admite uma decomposição trivial em caminhos de tamanho 1. No exemplo abaixo, temos uma outra possível decomposição de G em caminhos.



Exercícios Propostos

1. Apresente um exemplo de um grafo que não possui uma decomposição de ciclos.

2. Seja *v* um vértice e *e* uma aresta de um grafo ciclo *O*. Mostre que o grafo *O* - *v* é um caminho. Mostre que o grafo *O* – *e* é um caminho.[1]

3. Use indução no número de arestas do grafo para provar que todo grafo (V, E) satisfaz a identidade $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G)$, onde e(G) é a quantidade de arestas do grafo.[1]

4. Sejam *v* e *w* dois vértices de um grafo G. Suponha que d(v) = δ(G) (grau mínimo) e d(w) = Δ(G) (grau máximo). É verdade que δ(G−v) = δ(G)−1? É verdade que Δ(G−w) =Δ(G) − 1? [1]

5. Seja G um grafo {U, W}-bipartido. Mostre que os subgrafos induzidos G-{U} e G-{W} são vazios, onde U e W são os conjuntos de vértices das partições de V(G). [1]

6. Suponha que um subgrafo gerador H de um grafo G é conexo. Mostre que G é conexo. [1]

7. Seja G um grafo acíclico e seja *e* uma aresta de E(G). Mostre que G/*e* é um grafo acíclico. [1]

8. Seja G um grafo simples conectado com um número par de arestas. Mostre que G admite uma decomposição em caminhos de tamanho 2. [1]

Referências

J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer, 2008,2010.

- Seção 2.1 (Edge and Vertex Deletion; Acyclic Graphs)
- Seção 2.2
- Seção 2.3
- Seção 2.4

[1] Questão adaptada de: http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/