Aula 10 – Corte de Arestas

Notas de Aula de Teoria dos Grafos

Prof[a.]: Patrícia D. L. Machado

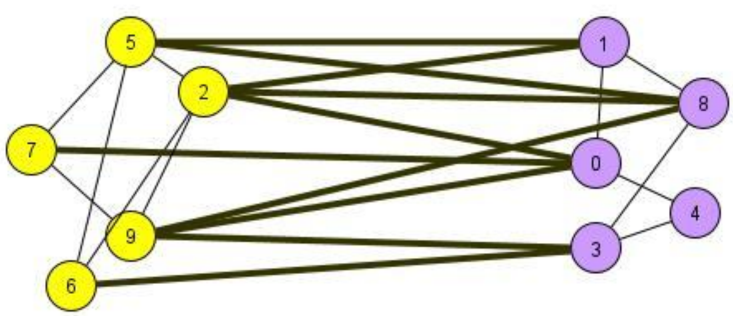
UFCG – Unidade Acadêmica de Sistemas e Computação

Sumário

Nesta aula, estudaremos o conceito de corte de arestas em grafos.

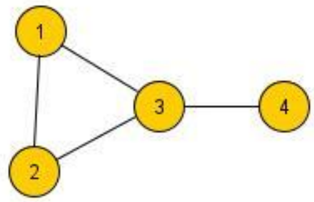
Corte de Aresta

Na resolução de problemas usando grafos, em muitas situações, é necessário determinar o conjunto de arestas que conecta um conjunto de vértices aos outros vértices do grafo. Como exemplo, temos problemas de alcançabilidade e definição de rotas. Este conjunto de arestas é chamado de **corte de arestas**. Corte de arestas não é uma operação de fragmentação do grafo como o termo sugere tal como a decomposição e a cobertura. O termo “corte” é na verdade sinônimo de “conjunto”. Abaixo temos uma ilustração deste conjunto.



Sejam *X* e *Y* conjuntos de vértices de um grafo *G*, onde $Y = V \backslash X$ (*Y* é o complemento de *X* em *V*), onde *V* é o conjunto de vértices do grafo. O conjunto *de arestas* $\partial(X)$ – **corte de arestas** *(edge cut)* de *G* associado a *X* – é definido como o conjunto de todas as arestas de *G* com um terminal em *X* e um terminal em *Y.* Note que $\partial(X) = \partial(Y)$, visto que estamos observando exatamente o mesmo conjunto de arestas já que Y é o complemento de X. Observe também que $\partial(V) = \emptyset$, uma vez que $V \setminus V$ é $\emptyset$.

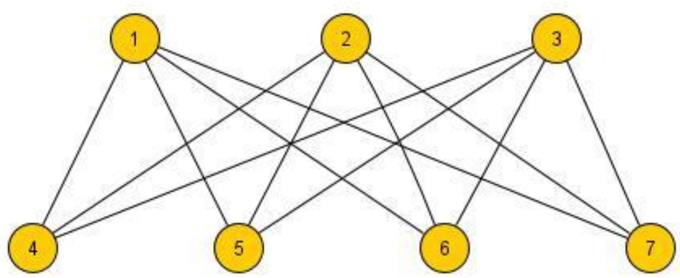
Como exemplo, considere o grafo abaixo:



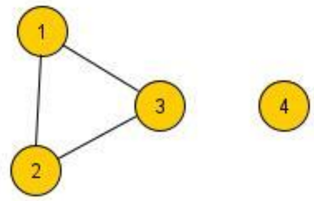
- Se $X = \{1,2\}$, $Y = \{3,4\}$, o corte de arestas é definido pelas arestas $\partial(X) = \{13, 23\}$ que são as únicas arestas que possuem um terminal em X e outro em Y. Podemos dizer que estas arestas conectam os vértices de X aos vértices de Y;
- Se $X = \{3,4\}$ e $Y = \{1,2\}$, obtemos o mesmo corte. Como Y é o complemento de X, tanto faz calcular o corte para X quando para Y;
- Se $X = \{1,2,3,4\}$, então $\partial(X) = \emptyset$, visto que $Y = \emptyset$;
- Se $X = \{2,3\}$ e $Y = \{1,4\}$, $\partial(X) = \{12,13,34\}$.

O corte de arestas pode ser usado para expressar conceitos que estudamos antes.

Um grafo G é **bipartido** se $\partial(X) = E(G)$, onde X é uma das partições que podem ser usadas para comprovar a bipartição do grafo. Considere o grafo bipartido abaixo e as partições $X = \{1,2,3\}$ e $Y = \{4,5,6,7\}$. Tanto $\partial(X) = E(G)$, quanto $\partial(Y) = E(G)$.



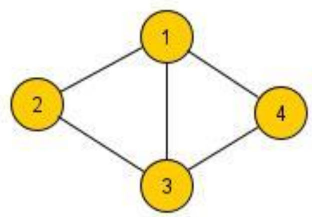
Um grafo G é **conectado** se $\partial(X) \neq \emptyset$, para todo $X \subset V(G)$, onde $X \neq \emptyset$. Quando um grafo é desconectado, é possível encontrar um conjunto de vértices X para o qual $\partial(X) = \emptyset$. Para o grafo abaixo, considere $X = \{4\}$.



Por fim, dizemos que um corte ∂(*X*) separa um vértice ***a*** de um vértice ***b*** se ***a*** pertence a *X* e ***b*** não pertence a *X.* Em outras palavras, ∂(X) é um conjunto de todas as arestas que conectam os vértices de X aos vértices de Y, sendo que G \ ∂(X) é um grafo desconectado.

Exercícios sobre Corte de Arestas

Seja G = (V(*G*), E(*G*)), onde V(*G*) = {1,2,3,4} e E(*G*) = {12,13,23,24,34}.

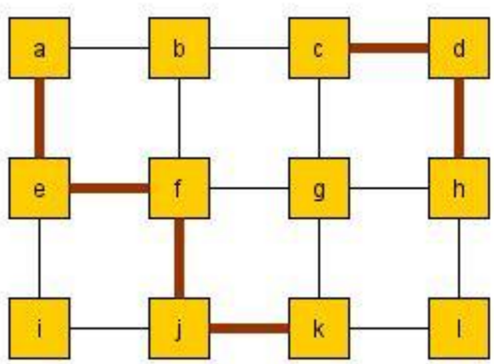


$Se\ X = \{1\};\ Y = \{2,3,4\}, então\ \partial(\mathrm{X}) = \{12, 13, 14\}$

$Se\ X = \{2,3\};\ Y = \{1,4\}, então\ \partial(\mathrm{X}) = \{12, 13, 34\}$

Observe que o conjunto de arestas {23, 21, 13} não representa um corte de arestas, visto que não conseguimos definir as partições X e Y.

Vamos considerar agora o grafo grid abaixo e o conjunto de arestas {*ae, ef, fj, jk, cd, dh*} (em destaque):



Este conjunto de arestas representa um corte de arestas obtido através da seguinte partição:
$X = \{e, j, d, i\}$ e $Y = \{a, f, k, h, c, l, b, g\}$.

Neste grafo grid, podemos encontrar vários cortes de tamanho 6 (com 6 arestas). Considere, $\mathrm{X} = \{\mathrm{a,e,i,d,h,l}\}$, $X = \{a, d, i\}$, $X = \{c, g, k\}$, dentre outros. O corte associado ao conjunto $X = \{a, i, f, c, k, h\}$, tem como resultado todas as arestas do grafo. Observe que este grafo é bipartido.

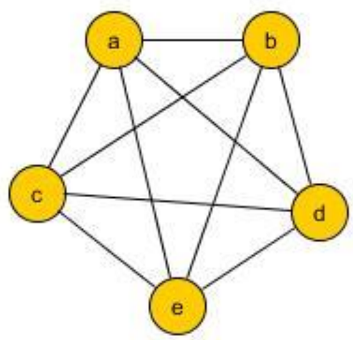
□

Seja X um conjunto de vértices de um grafo G. Vamos demonstrar que (V(G), ∂(X)) é um subgrafo gerador bipartido de G.

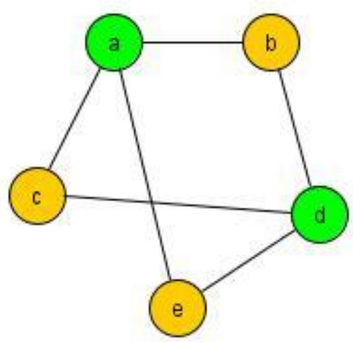
Por definição ∂(X) define todas as arestas em G que relacionam vértices de X aos demais vértices do grafo apenas. Então, no grafo (V(G), ∂(X)), podemos encontrar duas partições de vértices X e Y (o complemento de X) tal que os vértices de X e Y não são adjacentes entre si.

Por fim, podemos afirmar que o grafo (V(G), ∂(X)) é um subgrafo gerador de G, pois possui os mesmos vértices e um subconjunto de arestas de G.

Como exemplo, considere o grafo K_5 abaixo. Seja X = {a,d}.



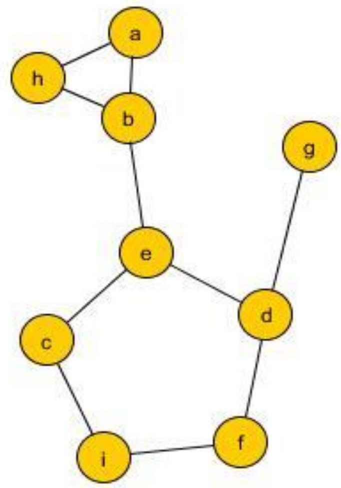
O grafo (V(G), ∂_G({a,d})), abaixo ilustrado, é um grafo bipartido, onde X = {a,d} e Y = {c,e,b}.



Aresta de Corte

Uma **aresta de corte** (*cut edge*) ou **ponte** (*bridge*) ou **istmo** (*isthmus*) em um grafo é qualquer aresta ***a*** tal que {***a***} é o resultado de um corte de arestas.

Considere o exemplo abaixo. Observe que $\partial(\{a,b,h\}) = \{be\}$. Neste caso, *be* é uma aresta de corte. Outro exemplo de aresta de corte é *gd*, visto que $\partial(\{g\}) = \{gd\}$.



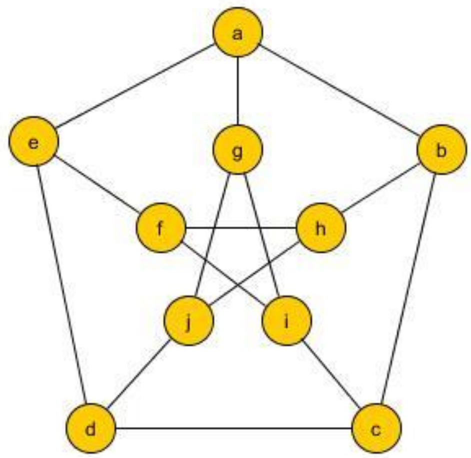
Observem que a aresta de corte é a única ligação entre dois grupos de vértices de um grafo: esta aresta é a única aresta resultante em um corte de arestas. Se esta aresta for removida, o grafo será desconectado. Assim, esta aresta nunca faz parte de um ciclo.

Proposição. Uma aresta ***e*** de um grafo *G* é uma aresta de corte se e somente se ***e*** não pertence a um ciclo de *G*.

Como consequência desta proposição, note que, se *e* é uma aresta de corte, esta aresta é o único caminho entre seus vértices terminais.

Exercícios Propostos

1. Encontre o menor corte de arestas que puder no grafo de Petersen (abaixo). Encontre o maior corte de arestas que puder neste mesmo grafo.



2. Mostre que em todo grafo simples existe um corte de arestas que contém pelo menos a metade das arestas do grafo.

3. Suponha que todos os vértices de um grafo G têm grau par. Mostre que G não tem arestas de corte.

4. Mostre que um grafo G é bipartido se e somente se seu conjunto de arestas é um corte de arestas de G.

5. Seja P um caminho em um grafo G. Seja X um conjunto de vértices que contém um e apenas um dos extremos de P. Mostre que $E(P) \cap \partial(X)$ <> $\emptyset$ (onde <> representa a negação da igualdade).

Referências

J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer, 2008,2010.

- Seção 2.1 (Edge and Vertex Deletion; Acyclic Graphs)
- Seção 2.2
- Seção 2.3
- Seção 2.4