

Aula 22 – Grafos Planares

Notas de Aula de Teoria dos Grafos

Prof^ª: Patrícia D. L. Machado

UFCG – Unidade Acadêmica de Sistemas e Computação

Sumário

Introdução.....	1
Grafo Dual	3
Operações Básicas para Teste de Planaridade	7
Teste de Planaridade	8
Usando os Teoremas de Kuratowski e Wagner	9
Algoritmos.....	11
Exercícios Propostos	14
Referências.....	15

Nesta aula, apresentamos uma introdução a grafos planares, incluindo principais teoremas e estratégias para o teste de planaridade.

Introdução

Existem situações práticas em que é importante decidir se um dado grafo pode ser desenhado em um plano sem sobreposição de arestas. Por exemplo, no projeto de VLSI, ligações entre pinos não podem se sobrepor. Outro exemplo é o problema clássico do suprimento de residências. Como suprir três casas com gás, água e energia, usando canalizações em um plano e evitando que os canais se cruzem? Como veremos, isto não é possível, pois o grafo que modela este problema, um $K_{3,3}$, não é planar (Figura 1).

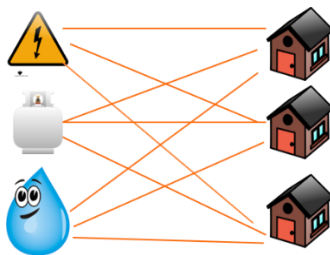


Figura 1

Um grafo é dito estar incorporado em um plano, ou é **planar**, se pode ser representado graficamente em um plano tal que arestas se interceptem apenas nos terminais. Na Figura 2, temos um exemplo do grafo K_5 sem uma de suas arestas ($K_5 \setminus e$). Este grafo é planar, visto que sua representação gráfica a direita não possui arestas que se sobrepõem e as arestas se interceptam apenas nos vértices.

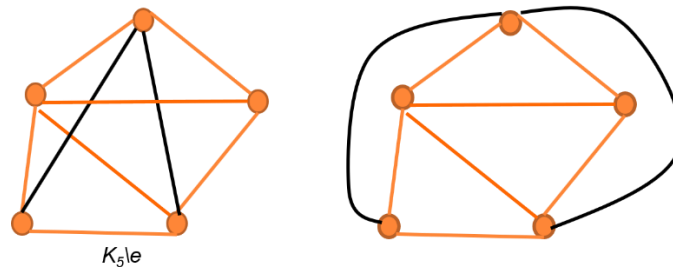


Figura 2

Como veremos a seguir, grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. Considere o desenho na Figura 3 para estes grafos e seja C um ciclo gerador em cada um deles que está destacado em azul (ciclo mais externo neste desenho). O ciclo gerador é um ciclo que inclui todos os vértices do grafo.

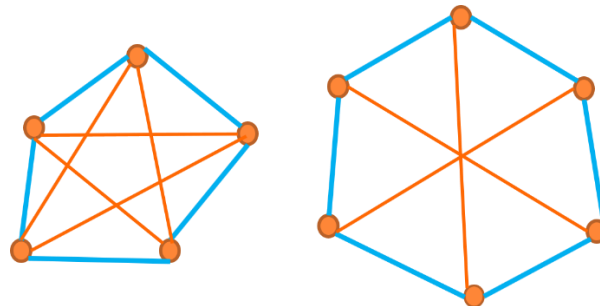


Figura 3

Chamamos de cordas as arestas do grafo que cruzam o ciclo gerador. Se não existem cordas no grafo, então C pode ser desenhado como uma curva fechada e neste caso o grafo é planar. Isto não ocorre com o K_5 e $K_{3,3}$. Caso contrário, as cordas de C devem ser movidas para dentro ou para fora de C .

Duas cordas são conflitantes se seus terminais ocorrem de forma alternada. Neste caso, uma tem que ficar dentro e uma tem que ficar fora. A Figura 4 ilustra diferentes forma de representar os grafos para separar cordas conflitantes.

Note que K_5 tem dois pares de cordas não conflitantes entre si onde um deles poderia ser movido para fora, mas uma aresta isolada não poderia ficar nem dentro nem fora pois cruza com os 2. Esta aresta está marcada em vermelho em nosso exemplo. Se movermos as cordas verdes para fora, uma das cordas laranja ficará cruzando com a vermelha. Se movermos as cordas laranja para fora, uma das cordas verdes cruzará com a vermelha. Se movermos um dos pares para fora juntamente com a aresta vermelha, ela ficará cruzando com uma das arestas. Assim, concluímos que K_5 não é planar.

Note também que $K_{3,3}$ tem 3 cordas conflitantes emparelhadas. Se movermos uma para fora, duas ficarão se cruzando dentro. Se movermos 2 para fora, estas ficarão se cruzando fora. Assim, concluímos que $K_{3,3}$ não é planar.

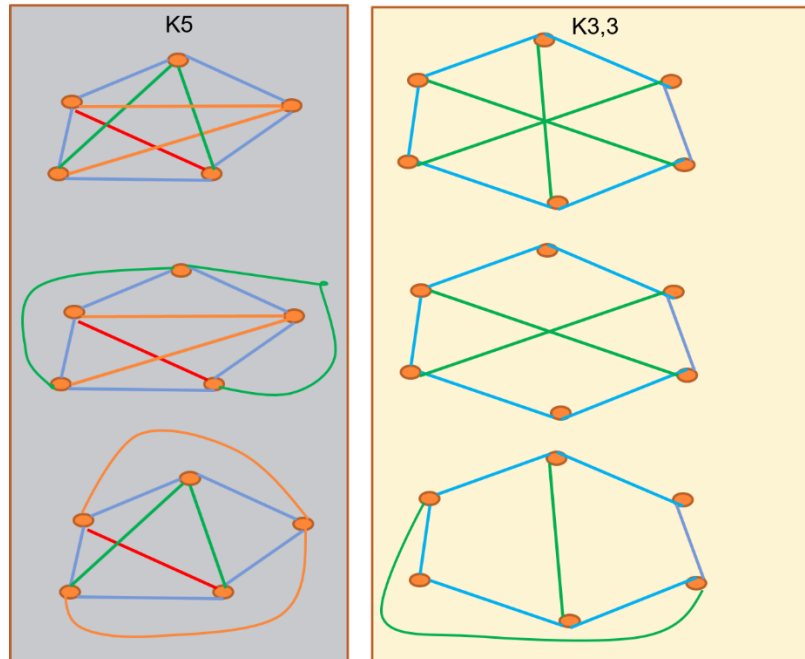


Figura 4

Grafo Dual

Um grafo planar G possui partições chamadas de **faces ou regiões** de G .

Uma face é dita ser **incidente** com os vértices e arestas em seu limite.

Dois faces são **adjacentes** caso se limitem por arestas comuns.

Na Figura 5, temos um grafo planar com 5 faces:

- A face f_1 que é incidente com as arestas e_5, e_1, e_2, e_3 e e_4 ;
- A face f_2 que é incidente com a aresta e_9 apenas, um *loop*;
- A face f_3 que é incidente com as arestas $e_1, e_2, e_{10}, e_6, e_9$ e e_7 ;
- A face f_4 que é incidente com as arestas e_{10}, e_3 e e_4 ;
- A face f_5 que é incidente com as arestas e_6, e_7, e_8 e e_5 ;

Note que a face f_3 que é adjacente as faces f_5, f_4, f_2 e f_1 . Além disso, a aresta e_8 é a única aresta que não delimita duas faces. Nesta representação, ela ocorre na face f_5 e faz f_5 ser adjacente a ela mesma.

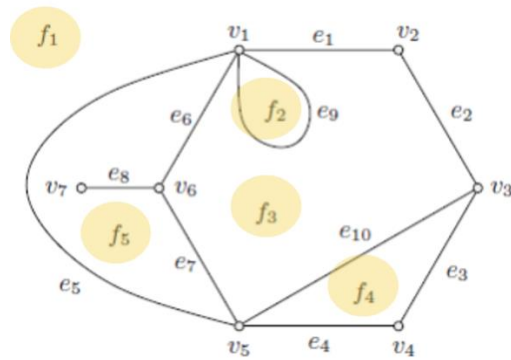


Figura 5¹

Toda árvore é um grafo planar com apenas uma face. Isto se deve ao fato de que árvore não possuem ciclos.

É possível abstrair formalmente uma representação gráfica de um grafo planar através da definição de suas faces e arestas adjacentes. Para tal, definimos o grafo dual de G , chamado de G^* .

Neste grafo:

- Para cada face f de G , existe um vértice f^* ;
- Para cada aresta e de G existe uma aresta e^* ;
- Dois vértices f^* e g^* são ligados por uma aresta e^* em G^* se e somente se as faces correspondentes f e g são separadas por uma aresta e em G ;
- Se e for uma aresta de corte de G , então $f = g$, portanto e^* é um loop de G^* ;
- Se e é um loop de G , a aresta e^* é uma aresta de corte de G^* .

A Figura 6 apresenta um exemplo.

¹ Imagem de J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer, 2008, 2010.

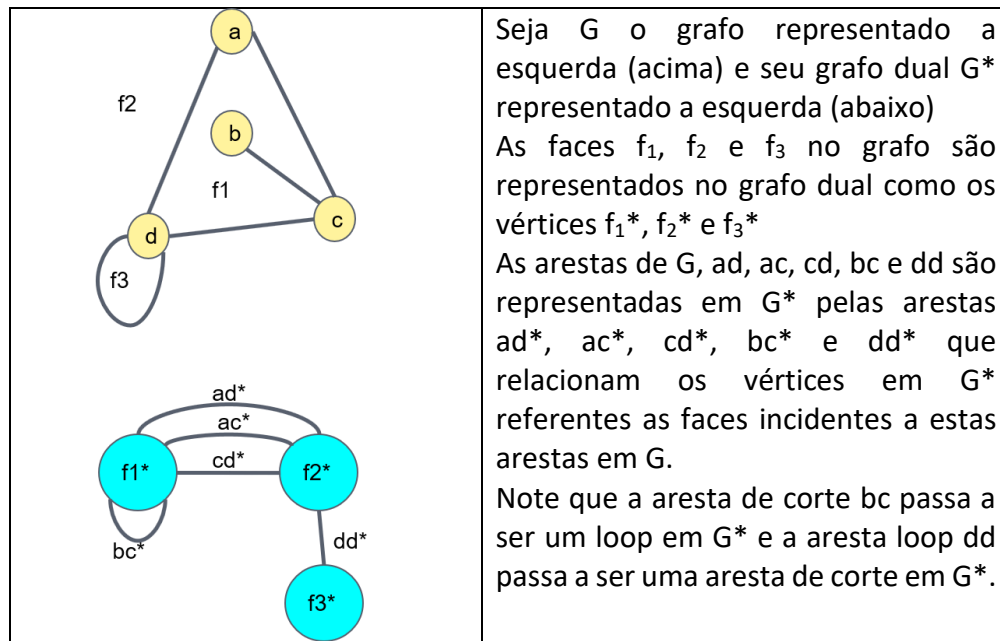


Figura 6

Note que, o grafo dual está associado a uma representação específica no plano de um grafo planar, capturando a localização relativa de faces e arestas. Por exemplo, na Figura 7, para um mesmo grafo, temos representações planares diferentes ilustradas a esquerda. Cada representação é capturada por um grafo dual diferente, visto que na primeira, a aresta de corte e_4 ocorre dentro da face f_2 , enquanto na segunda a aresta de corte e_4 ocorre na face f_1 .

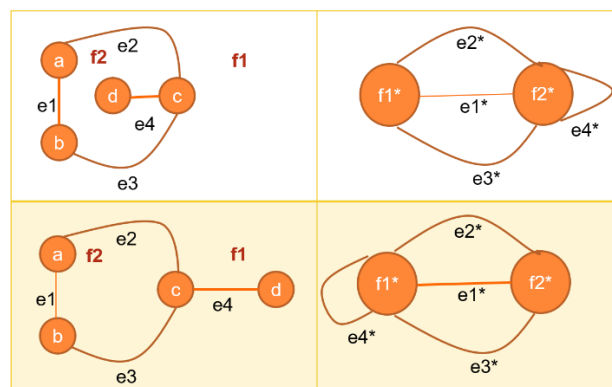


Figura 7

O **grau** $d(f)$ de uma face é o número de arestas no seu limite, sendo que arestas de corte contam 2, pois delimitam uma face com ela mesma.

No exemplo da Figura 5, podemos observar que o grau de f_5 é 5, considerando as arestas e_7 , e_6 , e_5 que contam 1 e e_8 que conta 2. Já a face f_3 tem grau 6, pois possui 6 arestas em seu limite, e_6 , e_7 , e_{10} , e_2 , e_1 e e_9 . A face f_4 possui grau 3, a face f_2 possui grau 1 e a face f_1 possui grau 5.

Teorema 1. Se G é um grafo planar então o somatório dos graus de todas as faces é igual a 2 vezes a quantidade de arestas.

Intuitivamente, podemos observar que isto é verdade, pois cada aresta aparece no limite de no máximo 2 faces. Assim, cada aresta é contada 2 vezes no somatório total dos graus de todas as faces.

Teorema 2. Se G é um grafo planar conectado, então $v(G) - e(G) + f(G) = 2$, onde $v(G)$ é a quantidade de vértices de G , $e(G)$ é a quantidade de arestas de G e $f(G)$ é a quantidade de faces de G .

Esta equação é a **fórmula de Euler** que só deve ser aplicada se o grafo for planar. Não deve ser aplicada para determinar se um grafo é planar.

Prova. Por indução sobre a quantidade de faces do grafo.

Caso base: Se $f(G) = 1$, então G é uma árvore. Para toda árvore, $e(G) = v(G) - 1$. Se substituirmos $e(g)$ por $v(g) - 1$ na fórmula de Euler chegaremos a uma igualdade: $(v(G) - (v(G) - 1) + 1 = 2)$.

Caso Indutivo: Suponha que é válido para todos os grafos planares com menos de f faces, onde $f \geq 2$. Seja G um grafo conectado com f faces. Se e é uma aresta que faz parte de um ciclo, então $G \setminus e$ é um grafo com $f - 1$ faces. Pela hipótese indutiva, $v(G \setminus e) - e(G \setminus e) + f(G \setminus e) = 2$. Considerando que $v(G \setminus e) = v(G)$, $e(G \setminus e) = e(G) - 1$ e $f(G \setminus e) = f(G) - 1$, obtemos a conclusão a partir da fórmula de para $G \setminus e$: $v(G) - (e(G) - 1) + (f(G) - 1) = 2$.

Teorema 3. O dual de qualquer grafo planar é conectado.

É fácil observar que isto é verdade, pois se considerarmos um grafo com uma face, ou seja uma árvore, ele será representado por um vértice com um *loop* para cada aresta do grafo (Figura 8 (a)). Se o grafo possui mais de uma face, então existe pelo menos uma aresta que as delimita e essa aresta conecta os vértices do grafo dual correspondentes a face (Figura 8 (b)). O dual do grafo trivial ou do grafo vazio é um grafo trivial que é conectado por definição (Figura 8 (c)).

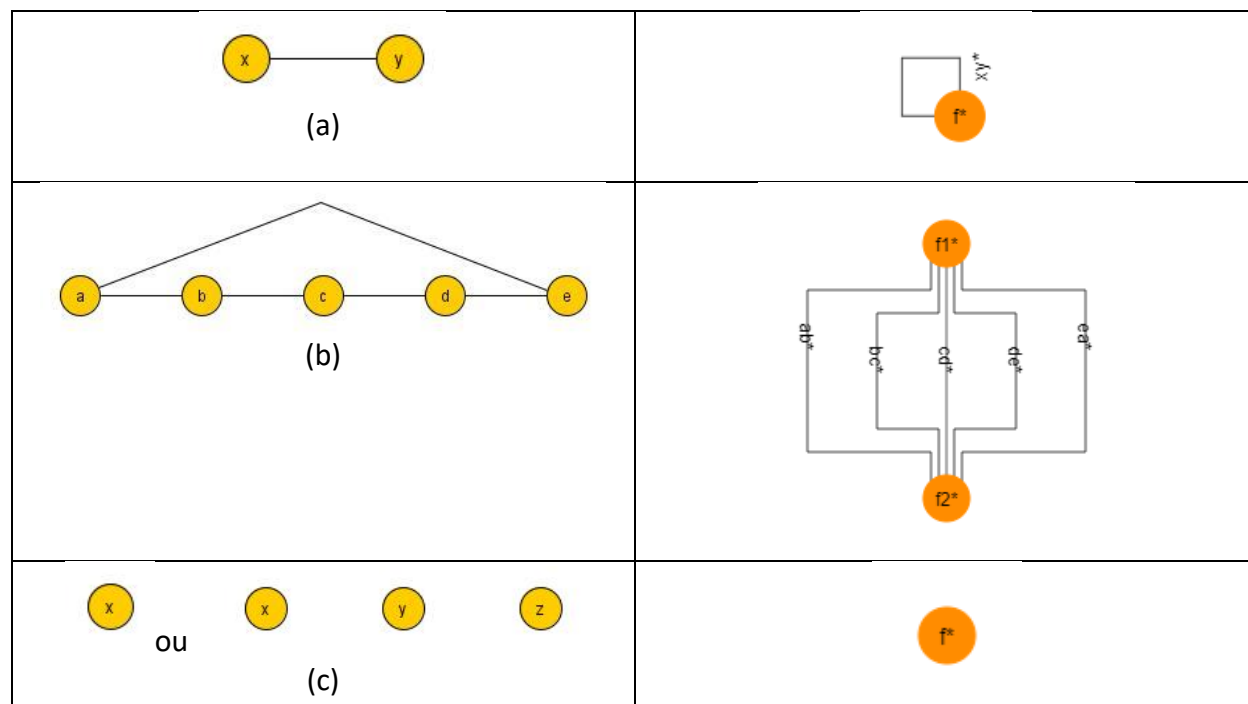
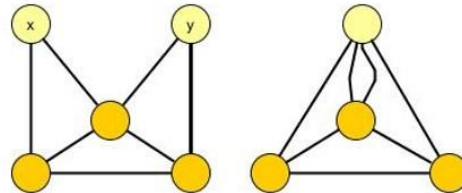


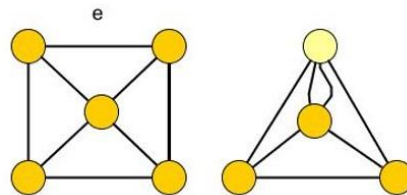
Figura 8

Operações Básicas para Teste de Planaridade

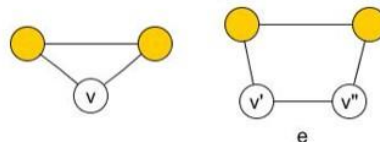
A **identificação de vértices** não adjacentes x e y em um grafo G é uma operação que tem como resultado o grafo $G / \{x, y\}$, onde estes vértices são substituídos por um único vértice incidente, xy , para todas as arestas em G que eram incidentes a x ou y .



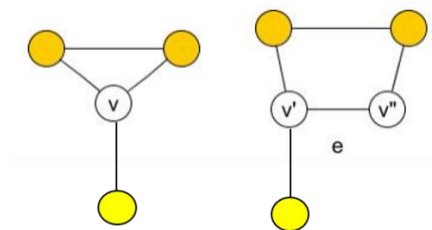
Seja e uma aresta link de G . A **contração** de e em G é a operação que deleta a aresta e e identifica seus terminais. O grafo resultante é G / e .



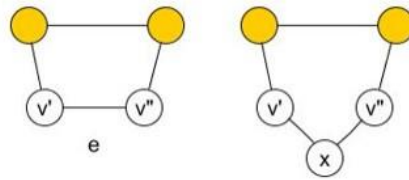
Dois vértices v' e v'' e uma aresta e podem ser obtidos a partir da **divisão de um vértice** v .



Cada aresta incidente a v passa a ser incidente a v' ou v'' , mas não a ambos.



Uma **aresta** e **pode ser subdividida** através da sua remoção e da adição de um novo vértice x com 2 arestas que unem x aos terminais de e .



Um grafo obtido de G através de subdivisões é chamado de **subdivisão** de G .

Dois grafos são **homeomórficos** se e somente se eles podem ser obtidos a partir do mesmo grafo pela adição de subdivisões. Na Figura 9 abaixo, os grafos (a) e (b) são homeomórficos, pois podem ser obtidos a partir do grafo (c) através da adição de subdivisões.

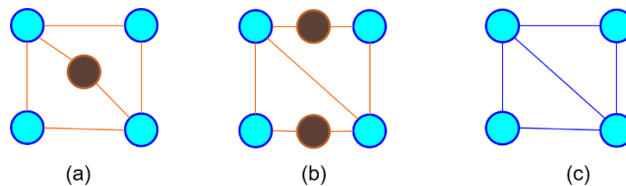


Figura 9

Proposição 1. Um grafo G é planar se e somente se toda subdivisão de G é planar.

Como K_5 e $K_{3,3}$ não são planares, nenhum grafo planar pode conter uma subdivisão de K_5 e $K_{3,3}$.

Teste de Planaridade

A maior parte das estratégias existentes para determinar se um grafo é planar, envolvem a observação do grafo a partir de subgrafos, considerando a aplicação de operações com as estudadas na seção anterior, além da remoção de vértices e arestas. De acordo com o **Teorema de Kuratowski** (Teorema 4), caso um dos subgrafos de um grafo G seja homeomórfico a K_5 ou $K_{3,3}$, então o grafo não é planar.

Teorema 4. Um grafo é planar se e somente se não tem um subgrafo homeomórfico a K_5 e $K_{3,3}$.

Um **menor (minor)** de um grafo G é obtido através de uma sequência de operações de remoção de vértices e arestas e contração de arestas. O grafo de Petersen possui tanto o K_5 quando o $K_{3,3}$ como menor. A Figura 10 abaixo ilustra como encontrar um menor K_5 no grafo de Petersen a partir da contração das arestas hachuradas. [Este link](#) apresenta uma animação onde podemos observar que o grafo de Petersen possui um $K_{3,3}$ como menor. Este é obtido através da remoção de um vértice e contração de arestas.

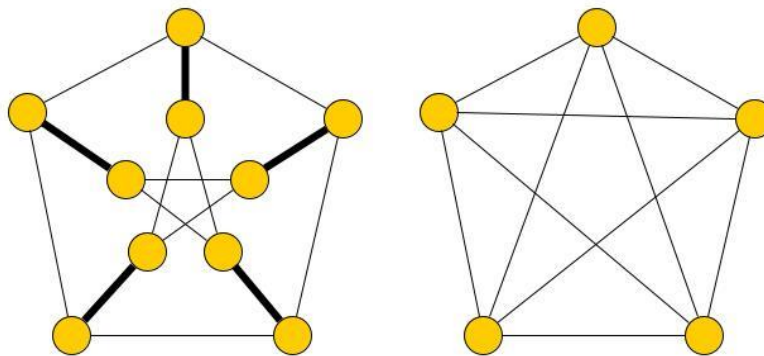


Figura 10

O **Teorema de Wagner** (Teorema 5) se baseia no conceito de menor para determinar se um grafo é planar.

Proposição 2. Menores de grafos planares são planares.

Teorema 5. Um grafo é planar se e somente se não possui um menor de *Kuratowski*, ou seja, um subgrafo isomórfico a K_5 ou $K_{3,3}$.

Teorema 6. Todo grafo não planar 3-conectado possui um menor de *Kuratowski*.

Usando os Teoremas de Kuratowski e Wagner

A seguir descrevemos algumas estratégias gerais que podem ser utilizadas para determinar se **um grafo não é planar** com base nos teoremas anteriores.

Usando o Teorema de Kuratowski, o objetivo é encontrar um subgrafo que seja homeomórfico ao K_5 . Para tal, realize repetidamente os seguintes passos até encontrar este subgrafo:

1. Escolha 5 vértices do grafo
2. Verifique se todos os vértices são conectados entre si por 10 caminhos distintos, tal como no K_5 .

A Figura 11 apresenta um exemplo onde este procedimento pode ser aplicado. Note que é possível encontrar 10 caminhos distintos que conectam mutuamente os vértices 1,2,7,4,5: $\{(1,3,4), (1,5), (1,7), (1,2), (2,4), (2,5), (2,7), (7,4), (7,6,5), (5,4)\}$.

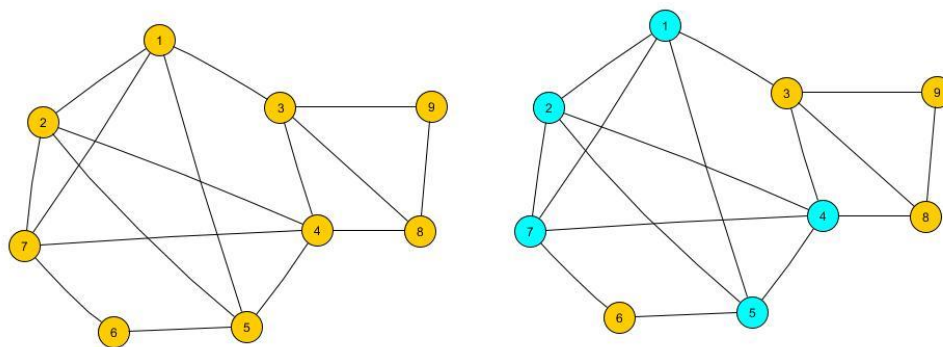


Figura 11

Usando o Teorema de Wagner, o objetivo é encontrar um menor no grafo que seja um K_5 ou um $K_{3,3}$. Para tal, os seguintes passos devem ser repetidos até encontrar este menor:

1. Escolha uma aresta de G .
2. Realize uma contração ou remoção de aresta.
3. Se restarem 6 vértices, verifique se formam um $K_{3,3}$ (se 5, um K_5)

Aplicando esta estratégia, podemos observar que o grafo da Figura 12 não é planar. Inicialmente realizamos a contração da aresta incidente aos vértices “8” e “3”, obtendo o grafo a esquerda na linha de baixo. Depois, removemos uma das arestas paralelas incidentes entre os vértices “1” e “8,3” e realizamos a contração da outra, obtendo o grafo do centro na linha de baixo. Por último, removemos uma das arestas paralelas entre os vértices “8,3,1” e “9”, obtendo um K_5 .

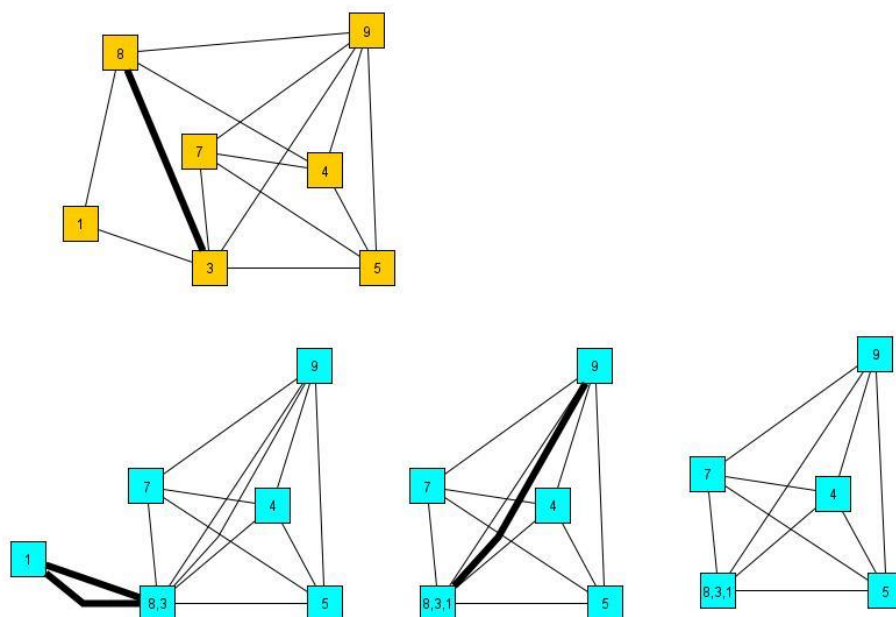


Figura 12

Algoritmos

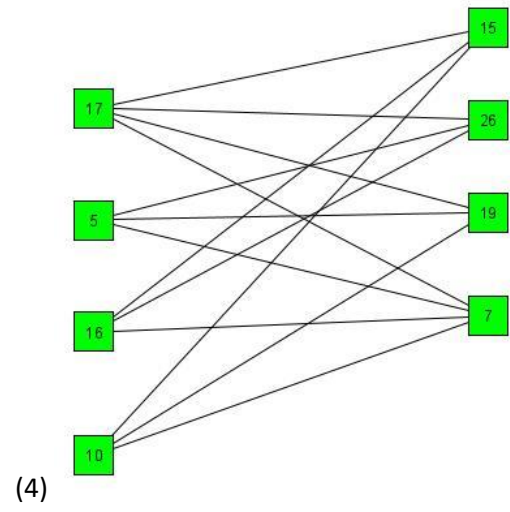
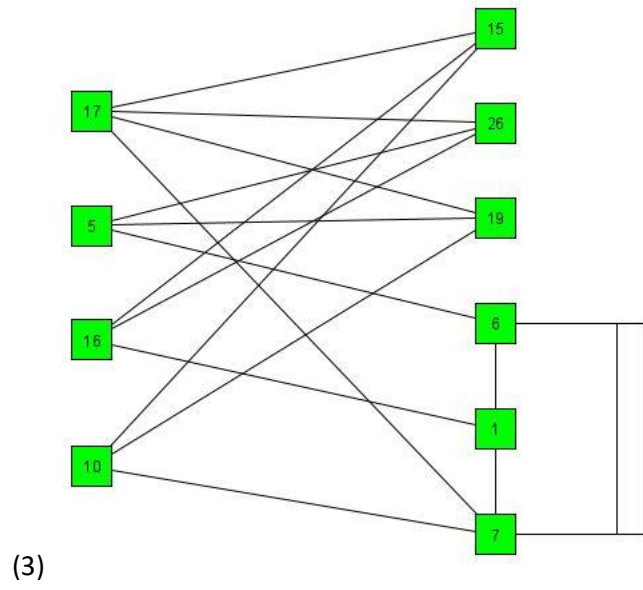
Os primeiros algoritmos de tempo polinomial para planaridade são devidos a Auslander e Parter (1961), Goldstein (1963) e, independentemente, Bader (1964). Na sequência, temos o método de adição de trajetória: Em 1974, Hopcroft e Tarjan propuseram o primeiro algoritmo de teste de planaridade de tempo linear. Temos também, o método de adição de vértices: devido a Lempel, Even e Cederbaum (1967). Mais recentemente, foi proposto o método de adição de bordas: Boyer e Myrvold (2004).

O Algoritmo FMR, proposto por Hubert de Fraysseix, Patrice Ossona de Méndez e Pierre Rosenstiehl (2006) é o algoritmo mais rápido conhecido.

A **JGraphT** apresenta uma implementação do algoritmo de Boyer-Myrvold, no pacote org.jgrapht.alg.planar que determina se um grafo é planar. Se não é planar, o algoritmo retorna um subgrafo que é homeomórfico a K_5 or $K_{3,3}$.

Para o grafo da Figura 13, que não é planar, os vértices em verde representam os vértices do subgrafo retornado pelo algoritmo que é homeomórfico ao $K_{3,3}$. Este grafo pode ser testado usando a implementação disponível no repl.it (graph-layout.gml). Na sequência, apresentamos imagens de operações que podemos realizar para demonstrar que este subgrafo é homeomórfico ao K_5 . Inicialmente apresentamos apenas o subgrafo (1). Depois identificamos os vértices que podem representar subdivisões de arestas (vértices de grau 2)(2). Realizamos a contração das arestas incidentes a estes vértices e apresentamos graficamente em um formato mais próximo a um $K_{3,3}$ (3). Realizando remoção e contração de arestas obtemos um grafo que contém um $K_{3,3}$ incorporado.

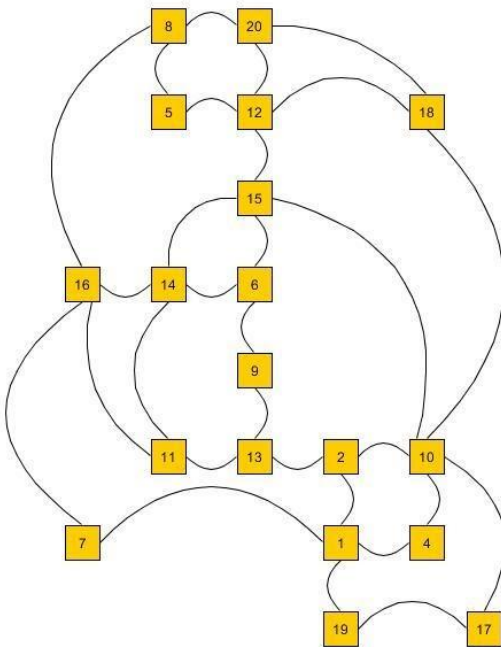




Exercícios Propostos

1. Mostre que o grafo K_4 e o grafo $K_{2,3}$ são grafos planares.
2. Mostre que se G possui um subgrafo que não é planar, então G não é planar.
3. Seja G um K_5 (isto é, um grafo completo com 5 vértices). Mostre que $G-e$ é planar qualquer que seja a aresta e de G . Repita o exercício com $K_{3,3}$ no lugar de K_5 .
Questão adaptada de: <http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/>

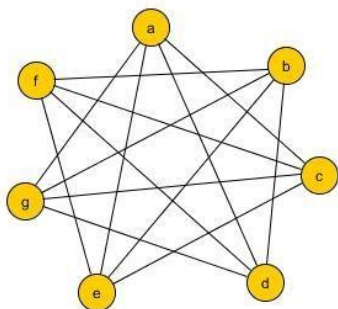
4. Para o grafo planar e a sua representação abaixo, identifique as faces existentes e determine o grafo dual.



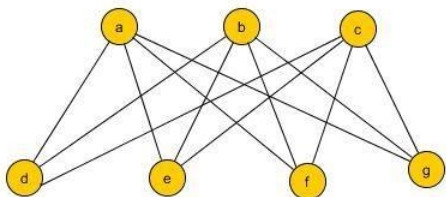
5. Mostre que todo grafo planar tem pelo menos um vértice de grau não superior a 5. Em outras palavras, mostre que $\delta(G) \leq 5$ para todo grafo planar G . Dê exemplo de um grafo planar que não contém vértices de grau menor que 5.

Questão adaptada de: <http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/>

6. Use o teorema de Kuratowski para determinar se o grafo abaixo é planar.



7. Use o Teorema de Wagner para determinar se o grafo abaixo é planar.



8. Seja H um subgrafo de um grafo G . Mostre que H é isomórfico a um menor (uma contração de arestas) de G .

9. Mostre que um grafo G tem um menor (uma contração de arestas) isomórfico a K_3 se e somente se G contém um circuito.

10. Seja G um grafo acíclico e seja e uma aresta de $E(G)$. Mostre que G/e (grafo G com contração da aresta e) é um grafo acíclico.

11. Seja e uma aresta de um grafo par G . Mostre que G/e (grafo G com contração da aresta e) é par.

Referências

J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer, 2008, 2010.

- 10.1 (excluindo the Jordan Curve Theorem)
- 10.2 (excluindo Theoremas 10.2-10.8 e 10.11 a 10.18)
- 10.3

https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_minor