Aula 26 – Fluxos em Redes

Notas de Aula de Teoria dos Grafos

Prof[a.]: Patrícia D. L. Machado

UFCG – Unidade Acadêmica de Sistemas e Computação

Sumário

Nesta aula, introduzimos o conceito de Fluxos em Redes e o problema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo.

Redes de Fluxo

Redes de fluxo modelam, através de nós e conexões entre estes nós, estruturas voltadas a transmissão ou distribuição de itens de interesse. Como exemplo temos redes de tráfego de veículos em um sistema de rodovia, redes canalizadas de fluidos, redes para transmissão de energia elétrica, dentre outros. O problema do fluxo em redes se configura sempre que itens precisam ser distribuídos usando uma rede com capacidade limitada.

Por exemplo, imagine que se pretende determinar qual o volume de água máximo (por segundo), que é possível se fazer chegar de um reservatório de água a uma certa localidade. Sabemos que:

- Existe uma rede de condutores de água que permite o envio da água do reservatório para a localidade;
- Cada condutor apresenta uma capacidade limite, de metros cúbicos por segundo;
- Condutores ligam repositórios temporários ou centros de distribuição na rede.

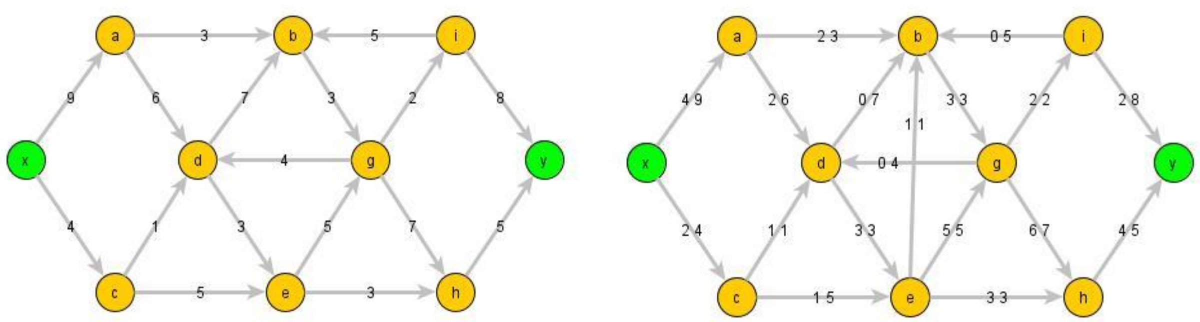
Como encontrar um algoritmo eficiente para resolver este problema?

Uma **rede de fluxo** $N := N(x, y)$ é um dígrafo:

- Com 2 vértices distintos: x é **origem** e y é o **destino;**
- Os outros vértices, cujo conjunto é representado por I, são chamados de **vértices intermediários**;
- Cada arco (u, v) é caracterizado por uma **capacidade** não negativa $c(u, v)$, onde esta capacidade indica o valor limite de "fluxo" que é possível enviar de u para v através do arco (u, v)

A partir de uma rede de fluxo, pode-se calcular o **valor máximo de "fluxo"** que é possível enviar do vértice origem x para o vértice destino y, respeitando as restrições de capacidade dos arcos.

A Figura 1(a) apresenta um exemplo de uma rede de fluxo onde o vértice x é a origem e o vértice y é o destino. Observe que o vértice de origem não possui arcos de entrada, enquanto o vértice de saída não possui arcos de saída. Nesta rede, para cada arco, temos um valor que representa a sua capacidade. Este valor é fixo e faz parte da definição da rede. Entretanto, para cada arco, podemos atribuir um valor de fluxo que, na Figura 1(b) representando a mesma rede, aparece a esquerda do valor de capacidade. Este valor pode variar à medida que desejamos representar diferentes fluxos nesta rede. Por exemplo, a capacidade do arco (x, a) é 9 e, em 1(b), temos um fluxo de valor 4 atribuído ao mesmo. No fluxo da Figura 1(b), 6 itens estão sendo enviados de x para y que é exatamente a soma dos valores dos fluxos que saem de x $(4 + 2)$ e dos fluxos que chegam em y $(2 + 4)$.



(a) (b)

Figura 1

Para esta rede, qual a quantidade máxima de itens que podemos enviar de x para y? Em outras palavras, qual o valor do fluxo máximo da rede? A soma das capacidades dos arcos que saem de x $(4 + 9)$? Não necessariamente. De fato, não é trivial determinar este valor, mesmo para redes pequenas, pois as capacidades dos arcos intermediários podem limitar o valor máximo do fluxo de saída de x como discutiremos em mais detalhes a seguir nesta aula, visto que não podemos definir um valor de fluxo para um certo arco que seja maior que sua capacidade.

Em particular, para esta rede, o valor do fluxo máximo é 7.

Por questão de simplicidade, daremos enfoque ao estudo de redes com uma única origem e um único destino. Para redes de fluxo com múltiplas fontes e/ou destinos, podemos definir uma *super fonte* que incorpora todas as fontes e um *super destino* que incorpora todos os destinos.

Estaremos também considerando apenas redes com capacidades finitas.

Fluxo

A atribuição de valores de fluxos aos arcos $a \in A$ de uma rede N pode ser definida através de uma função, $f : A \rightarrow \mathbb{N}$, que define para cada arco um valor em $\mathbb{N}$ representando o valor de fluxo definido para o arco. Quando aplicamos a função f a um conjunto de arcos $S \subseteq A$, obtemos o somatorio dos valores dos fluxos dos arcos em S:

$$f(S) = \sum_{a \in S} f(a)$$

Adicionalmente, definimos $f^+(X) = f(\partial^+(X))$, como sendo o somatório dos valores de fluxo para os arcos resultantes do corte de saída de X e $f^-(X) = f(\partial^-(X))$, como sendo o somatório dos valores de fluxo para os arcos resultantes do corte de entrada de X, onde $X \in V$ é um conjunto de vértices. Utilizaremos a notação simplificada $f^+(v)$, para representar $f^+(\{v\})$, onde $v \in V$ é um vértice.

Como exemplo, para a rede e o fluxo representado na Figura 1(b), temos que:

- $c\big((a,b)\big) = 3$ e $f\big((a,b)\big) = 2$
- $f(\{(x,a),(a,b)\}) = 4 + 2$
- $f^+(\{x,a\}) = f(\{(a,b),(a,d),(x,c)\}) = 2 + 2 + 2$
- $f^-(\{x,a\}) = f(\emptyset) = 0$

Observe também que:

- $f^+(x) = f^+(\{x\}) = f(\{(x,a),(x,c)\}) = 4 + 2$
- $f^-(x) = f^-(\{x\}) = f(\emptyset) = 0$
- $f^+(y) = f^+(\{y\}) = f(\emptyset) = 0$
- $f^-(y) = f^-(\{y\}) = f(\{(i,y),(h,y)\}) = 2 + 4$

Um fluxo em uma rede é **válido** se o valor de fluxo associado ao corte de saída do vértice v é igual ao valor do fluxo associado ao corte de entrada de v, para todo vértice intermediário.

$$f^+(v) = f^-(v), \forall v \in I$$

Ou seja, o valor do fluxo de entrada em um vértice é sempre igual ao fluxo de saída, garantindo que não há perdas ou acréscimos ao fluxo originalmente enviado de x ao longo dos vértices intermediários.

Dizemos que um fluxo é **viável** se o valor de f para todo arco a da rede não ultrapassa a capacidade definida para este arco e não é negativo.

$$0 \leq f(a) \leq c(a), \forall a \in A$$

Podemos também observar que toda rede tem pelo menos um fluxo onde $f(a) = 0, \forall a \in A$. Este fluxo é chamado de **fluxo zero**.

Com base nestas propriedades, podemos concluir que $f^+(x) - f^-(x) = f^-(y) - f^+(y)$.

Considerando a rede e o fluxo na Figura 1(b), note que, para o vértice intermediário b, $f^+(b) = f^-(b) = 3$. Observe também que $f^+(x) = 6, f^-(x) = 0, f^+(y) = 0, f^-(y) = 6$.

Ainda considerando este exemplo, podemos observar que sempre que o vértice x é incluído em um corte e o vértice y não é, a diferença entre o valor do fluxo do corte de saída e o valor do fluxo do corte de entrada é exatamente igual ao valor do fluxo definido para a rede. Em particular, considere o fluxo de saída e entrada para os vértices x e a: $f^+(\{x, a\}) = 9$ e $f^-(\{x, a\}) = 3$. Esta diferença denota o valor do fluxo da rede.

O valor de um fluxo f é dado por:

$$val(f) = f^+(x) - f^-(x) = f^-(y) - f^+(y)$$

Isto é, $val(f)$ pode ser calculado tanto a partir da diferença entre os fluxos de saída e entrada de x quando entre os fluxos de entrada e saída de y. Note que, para qualquer vértice intermediário, a diferença entre os fluxos de entrada e saída ou vice-versa é sempre 0:

$$f^+(v) - f^-(v) = 0, \forall v \in I$$

Proposição 1. Para qualquer fluxo f em uma rede $N(x, y)$ e qualquer subconjunto X de V tal que $x \in X$ e $y \in V \setminus X$, $val(f) = f^+(X) - f^-(X)$

Prova. Por definição:

$$f^+(v) - f^-(v) = \begin{cases} val(f), & se\ v = x \\ 0, & se\ v \in X \setminus \{x\} \end{cases}$$

Somando os valores obtidos para cada vértice, obtemos o valor do fluxo da rede.

Fluxo Máximo

Um fluxo f é **máximo** em uma rede $N(x, y)$ se não existe outro fluxo de x para y em N de maior valor. O problema do **fluxo máximo** consiste em determinar este fluxo.

Considere a rede e o fluxo associado na Figura 2. Para cada arco, estamos representando o valor do fluxo como o número a esquerda no rótulo do arco e o valor da capacidade como o número a direita no rótulo do arco.

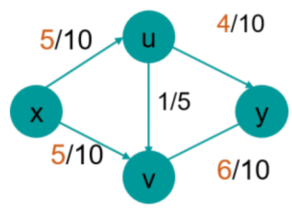


Figura 2

Este fluxo é válido? É viável? O fluxo é válido, pois para os vértices intermediários observamos que a diferença entre o fluxo de entrada e o fluxo de saída é 0. Podemos também observar que esse fluxo é viável visto que nenhum valor de fluxo é maior que o valor da capacidade.

Porém, este fluxo é máximo? Não. Note que o valor do fluxo é 10, este é um fluxo válido e viável, mas não é um fluxo máximo. A Figura 3 mostra um fluxo máximo para esta rede. O fluxo tem valor 20.

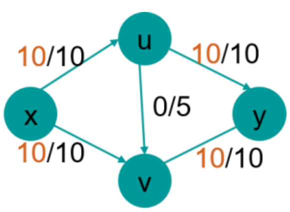


Figura 3

Note que, a fim de obter um fluxo de valor máximo, nem sempre iremos apenas aumentar o valor do fluxo de todos os arcos até obter sua capacidade máxima. Para alguns arcos, pode ser necessário diminuir o valor do fluxo. Por exemplo, para obter o fluxo máximo na rede das Figuras 2 e 3, precisamos atribuir valor 0 para o arco (u, v). Caso atribuíssemos, por exemplo, o valor 2, teríamos que alterar os valores de fluxos dos arcos (u, y) e (x, v) a fim de manter a validade do fluxo o que não possibilitaria obter um fluxo de valor máximo. Ou seja, o fluxo de saída de u tem que ser 10, assim como o fluxo de entrada de v.

Desta forma, o arco (u, v) que chamaremos de **reverso** mais adiante é um arco que precisa ter o seu valor de fluxo minimizado a fim de que possamos atingir um fluxo máximo para a rede.

Em resumo, encontrar o fluxo máximo de uma rede não é um problema trivial e pode requisitar tanto o aumento quando a diminuição do valor do fluxo em diferentes arcos, dependendo de seu papel.

Corte Mínimo

Um aspecto determinante no valor do fluxo máximo de uma rede é o corte de saída mínimo ou de menor capacidade.

A **capacidade de um corte** $K = \partial^+(X), cap(K),$ é a soma da capacidade de seus arcos de saída*, onde* $x \in X$ *e* $y \in V \backslash X$*.*

Ou seja, $cap(K)$ representa a soma das capacidades do conjunto de arcos de saída de X capazes de transmitir um fluxo de X para o vértice destino y. Este conjunto X inclui o vértice de origem, mas não inclui o vértice de destino.

Intuitivamente, podemos observar a capacidade de transmissão da rede em diferentes pontos através da capacidade de um corte de saída, já que esta operação retorna precisamente todos os arcos de saída de um conjunto de vértices para os demais vértices da rede.

Considerando a rede e o fluxo definidos na Figura 4, podemos observar que o corte de saída para o conjunto de vértices $X = \{x, a, c, d, e\}$ é formado pelos arcos hachurados: $K = \partial^+(X) = \{(a, b), (d, b), (e, b), (e, g)\}$. A capacidade deste corte é então definida como a soma das capacidades dos arcos: $cap(K) = 3 + 7 + 1 + 5 = 16$.

Qual o corte de menor capacidade nesta rede, também chamado de corte mínimo?

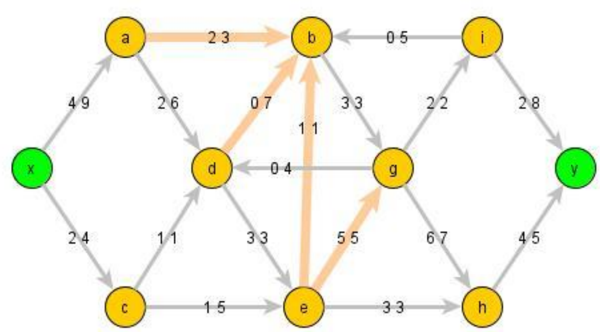


Figura 4

Um **corte** $\boldsymbol{K}$ em uma rede $N(x, y)$ é **mínimo** se nenhum corte em N tem capacidade menor.

A Figura 5 ilustra um corte mínimo $K_{min} = \{(g, i), (h, y)\}$ para o grafo da Figura 4, representado pelos arcos hachurados. Este corte é definido pelo conjunto de vértices $X = \{x, a, c, b, d, e, g, h\}$. Note que $cap(K_{min}) = 7$.

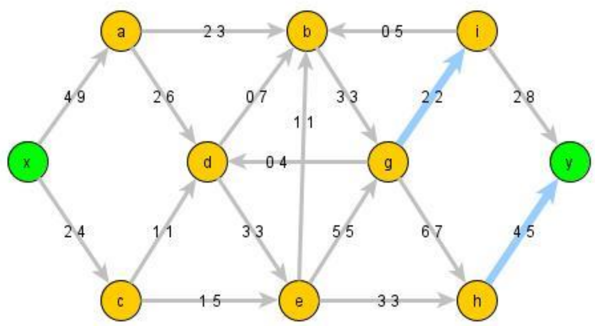


Figura 5

Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo

O valor de um fluxo f jamais poderá ser maior que a capacidade de um corte mínimo. E, se o valor for menor do que a capacidade do corte mínimo, então o fluxo não é máximo. Por outro lado, quando a capacidade de um corte coincide com um valor de um fluxo, significa que não pode existir um corte de capacidade menor, caso contrário o fluxo não seria viável.

Teorema 1. Para qualquer fluxo f e qualquer corte K em uma rede N, $val(f) \leq cap\ (K)$.

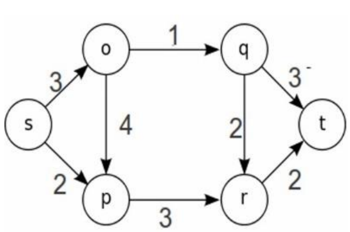
A prova deste teorema se baseia no fato de que os valores dos fluxos de cada arco nunca podem ultrapassar a capacidade. Portanto, o valor de um fluxo nunca ultrapassará a capacidade de nenhum corte de saída. Para a rede e o fluxo da Figura 5, podemos observar que $val(f) = 6$ e $cap(\{(g,i),(h,y)\}) = 7$.

Corolário 1. Seja f um fluxo e K um corte. Se $val(f) = cap(K)$, então f é um fluxo máximo e K é um corte mínimo.

Teorema 2. Em qualquer rede, o valor do fluxo máximo é igual a capacidade do corte mínimo.

Exercícios Resolvidos

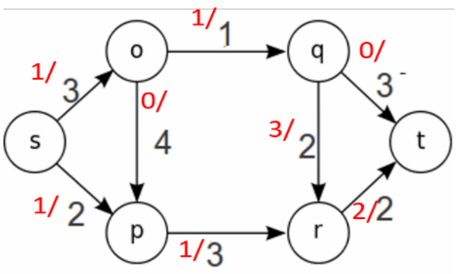
Para a rede abaixo, onde s é o vértice s de origem e t é o vértice de destino, qual o corte mínimo?



Para responder a esta questão, precisamos considerar todos os possíveis conjuntos de vértices $X \subseteq V$, onde $s \in X$ e $t \notin X$, observando a capacidade do corte resultante.

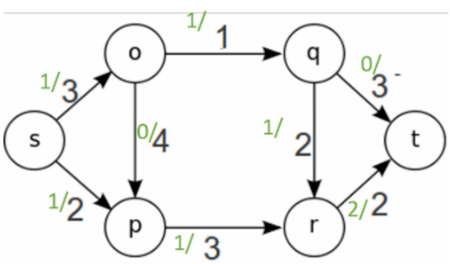
Neste caso, podemos observar que para $X = \{s, o, p, r\}$, a capacidade do corte de saída correspondente $K = \{(o, q), (r, t)\}$ é 3. Como não conseguimos encontrar um outro com capacidade menor, este é o corte mínimo.

Considere agora a mesma rede com um fluxo associado ilustrado na figura abaixo. Este fluxo é válido?



Não. Note que o valor de fluxo no arco (q, r) ultrapassa a capacidade. Também podemos observar que o fluxo de entrada no vértice q é menor que o de saída.

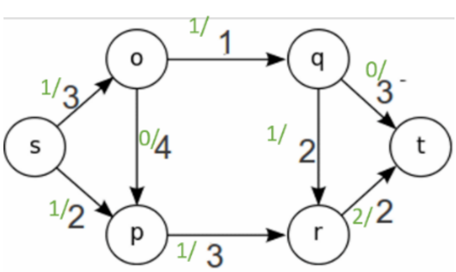
Considere agora a mesma rede com outro fluxo associado, ilustrado na figura abaixo. Note que este fluxo é válido. Entretanto, este fluxo é máximo?



Observe que o valor deste fluxo é 2. Como vimos anteriormente, a capacidade do corte mínimo para esta rede é 3. Portanto este fluxo não é máximo. Um fluxo máximo pode ser definido como:

$f = \{(s, o) \rightarrow 1, (s, p) \rightarrow 2, (o, p) \rightarrow 0, (o, q) \rightarrow 1, (p, r) \rightarrow 2, (q, r) \rightarrow 0, (q, t) \rightarrow 1, (r, t) \rightarrow 2\}$

Para a rede e o fluxo abaixo ilustrado, determine $f^+(X)$ e $f^-(X)$:



Seja $X = \{s, o\}$:

$$f^+(X) = f(\partial^+(X)) = f(\{(o,q),(o,p),(s,p)\}) = 1 + 0 + 1 = 2$$

$$f^-(X) = f(\partial^-(X)) = f(\emptyset) = 0$$

Seja $X = \{s,p,r\}$:

$$f^+(X) = f(\partial^+(X)) = f(\{(s,o),(r,t)\}) = 1 + 2 = 3$$

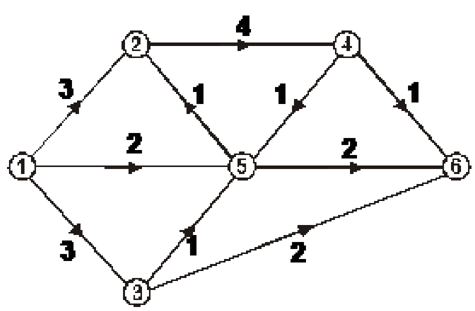
$$f^-(X) = f(\partial^-(X)) = f(\{(o,p),(q,r))\}) = 0 + 1 = 1$$

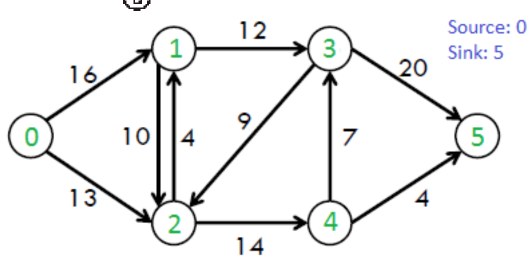
Note que, como $s \in X$, $f^+(X) - f^-(X) = val(f) = 2$.

Exercícios Propostos

1. Seja N(x, y) uma rede que não contém (x, y)-caminho. Mostre que o valor do fluxo máximo e a capacidade do corte mínimo é zero. Mostre um exemplo de uma rede deste tipo.

2. Para as redes de fluxo a seguir, encontre:
   a. uma função fluxo f válida, não necessariamente representando o fluxo máximo
   b. um conjunto de vértices que determinam o corte mínimo
   c. uma função fluxo f que represente o fluxo máximo
   d. o valor do fluxo máximo e capacidade do corte mínimo
   e. Seja f um fluxo máximo e X={1,2). Determine $f^+(X)$ e $f^-(X)$





3. Apresente um exemplo de uma rede e um fluxo tal que

$\sum_{v \in X} f^{+}(v) \neq f^{+}(X)$ e
$\sum_{v \in X} f^{-}(v) \neq f^{-}(X)$

Referências

J. A. Bondy and U. S. R. Murty.Graph Theory. Springer, 2008,2010.

7.1 e 7.2