Aula 08 – Operações Binárias sobre Grafos e Isomorfismo

Notas de Aula de Teoria dos Grafos

Prof[a.]: Patrícia D. L. Machado

UFCG – Unidade Acadêmica de Sistemas e Computação

Sumário

Operações Binárias

Alguns grafos que representam problemas no mundo real possuem um tamanho muito grande e, muitas vezes, sua construção, armazenamento ou representação precisa ser feita em partes separadas. Portanto, frequentemente, grafos precisam ser fragmentados, combinados ou reconstituídos a fim de viabilizar seu uso para a resolução de um problema específico. Nesta aula, estudaremos algumas operações binárias básicas sobre grafos.

Operações binárias sobre grafos são aquelas que recebem como entrada 2 grafos e produzem um grafo como resultado.

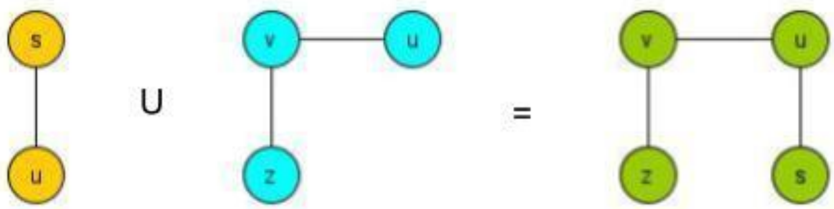
União

Sejam G e H dois grafos simples. A **união** entre G e H é o grafo $G \cup H$, onde:

$V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$

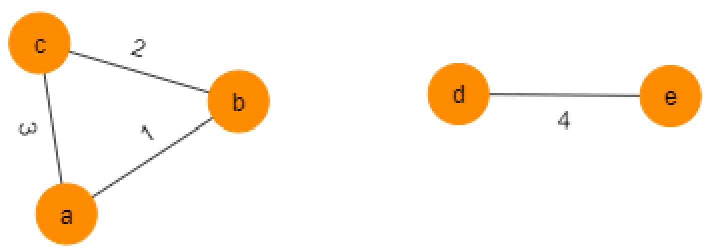
Como exemplo, considere que *G* e *H* são os grafos abaixo, onde $V(G) = s, u, E(G) = su, V(H) = u, v, h e E(H) = uv, vh.$ A união entre V e G é definida como:

$$V(G \cup H) = \{s, u, v, h\} \; e \; E(G \cup H) = \{uv, vh, su\}.$$



Se *G* e *H* são grafos disjuntos, isto é, não possuem vértices ou arestas em comum, então o resultado da operação é uma **união disjunta** (soma) representada por $G + H$.

Um grafo é **desconectado** se e somente se pode ser representado pela união disjunta de 2 ou mais grafos não-nulos. Por exemplo, considere o grafo abaixo. Este grafo pode ser representado como um grafo $G + H$, onde $V(G) = \{a, b, c\}, E(G) = \{1,2,3\}, V(H) = \{d, e\}, E(H) = \{4\}$.

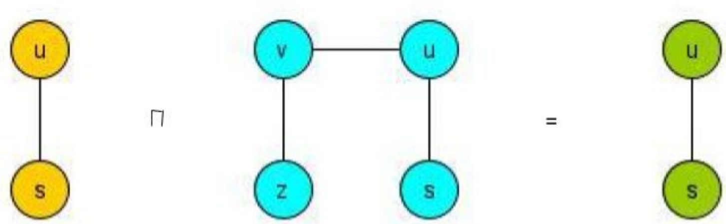


Interseção

Sejam G e H dois grafos simples. A **interseção** entre *G* e *H* é o grafo $G \cap H$, onde:

$$V(G \cap H) = V(G) \cap V(H) \quad \text{e} \quad E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$$

Como exemplo, considere que *G* e *H* são os grafos abaixo, onde $V(G) = \{s, u\}, E(G) = \{su\}, V(H) = \{u, v, h\} \; e \; E(H) = \{su, uv, vh\}. Então, V(G \cap H) = \{s, u\} \; e \; E(G \cap H) = \{su\}.$



Produto Cartesiano

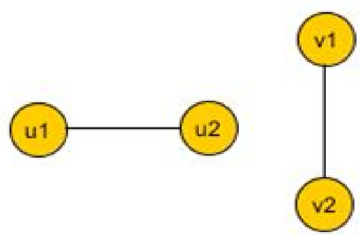
Sejam G e H dois grafos simples. O produto cartesiano de G e H é o grafo $G \square H$, onde:

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H) = \{(x, y) \mid x \in V(G) \; e \; y \in V(H)\}$$

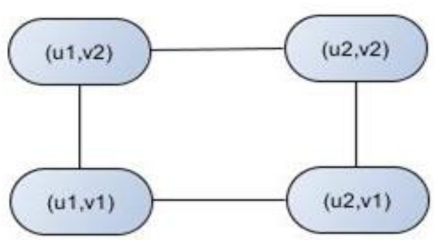
$$E(G \square H) = \{(x, y)(z, y) \mid xz \in E(G)\} \cup \{(y, x)(y, z) \mid xz \in E(H)\}$$

Ou seja, o conjunto de vértices de $G \square H$ possui como elementos os pares ordenados obtidos pelo produto cartesiano entre V(G) e V(H) ($\{(x, y) \mid x \in V(G) \; e \; y \in V(H)\}$). O conjunto de arestas é formado a partir de todas as possíveis representações de arestas de E(G) através dos pares de vértices de $G \square H$ com um vértice de H em comum ($\{(\boldsymbol{x}, y)(\boldsymbol{z}, y) \mid xz \in E(G)\}$) e de todas as possíveis representações de arestas de E(H) através dos pares de vértices de $G \square H \; com \; um \; vértice \; de \; G \; em \; comum$ ($\{(y, \boldsymbol{x})(y, \boldsymbol{z}) \mid xz \in E(H)\}$).

Como exemplo, considere os grafos G e H abaixo, onde $V(G) = \{u1, u2\}, E(G) = \{u1u2\}, V(H) = \{v1, v2\}, E(H) = \{v1v2\}$.



O produto cartesiano $G \square H$ é definido da seguinte forma.



O conjunto de vértices é o produto cartesiano entre os vértices de G e H[1]:

$$V(G \square H) = \{(u1v1), (u1v2), (u2v1), (u2v2)\}$$

Para compor o conjunto de arestas, consideramos cada aresta de E(G) e E(H) e observamos as possíveis forma de representa-las através dos vértices do grafo resultante, onde para as arestas de G observamos o primeiro elemento do par ordenado o qual deve representar a aresta (o

[1] O par (u1,v1) está representando como (u1v1) para melhorar a legibilidade.

segundo elemento deve ser o mesmo na aresta resultante) e para as arestas de H observamos o segundo elemento. Neste exemplo, a partir da aresta u1u2 de G, temos as seguintes arestas no produto cartesiano:

$\{(u1v1)(u2v1),\ (u1v2)(u2v2)\}$

A partir da aresta v1v2 de H temos as seguintes arestas no produto cartesiano:

$\{(u1v1)(u1v2),\ (u2v1)(u2v2)\}$

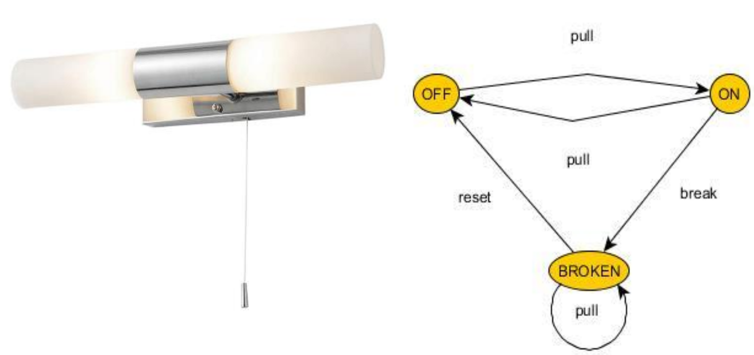
Assim, o conjunto de aresta é:

$$E\ (G \square H)\ =\ \{(u1v1)(u2v1), (u1v2)(u2v2), (u1v1)(u1v2), (u2v1)(u2v2)\ \}$$

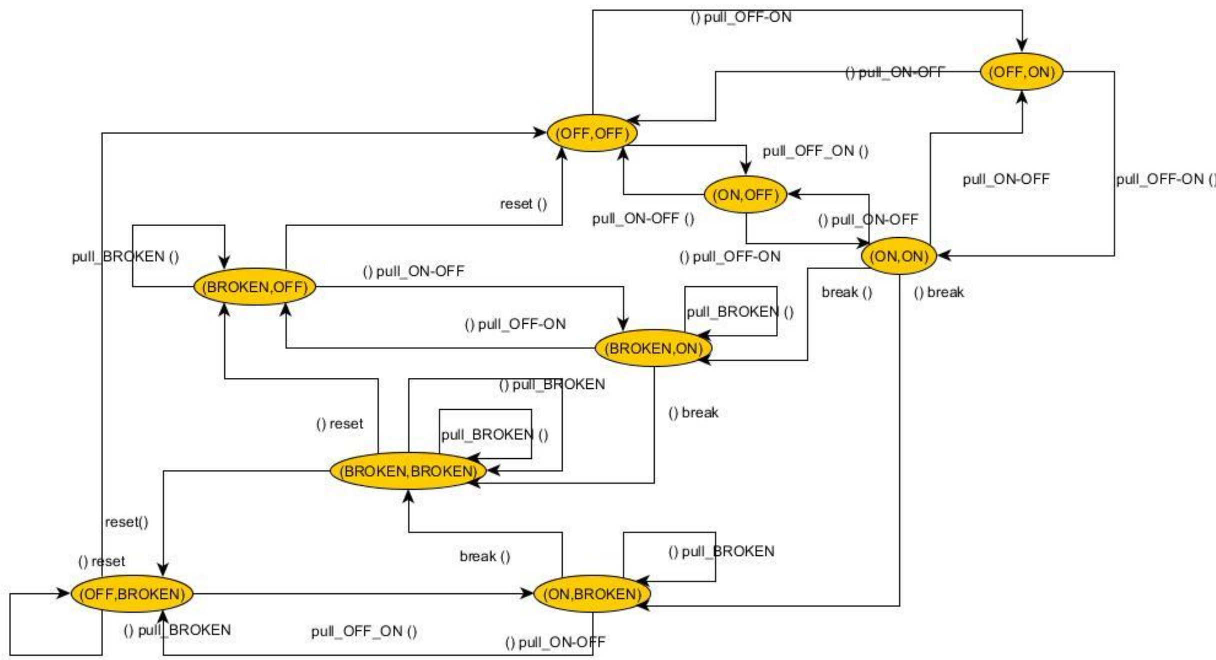
A seguir, temos uma ilustração gráfico do grafo resultante.

Vejamos agora um exemplo de aplicação prática deste conceito. Em engenharia de sistemas, é comum construirmos sistemas complexos a partir de componentes desenvolvidos isoladamente e cujo comportamento e fluxo de execução, no sistema final, ocorre de forma independente. Como exemplo, temos desde os controladores de vôo até nossos smartphones. Para avaliar o comportamento do sistema final, é necessário compreender o efeito das possíveis interações entre estes componentes. Existem inúmeros relatos de falhas catastróficas em sistemas deste tipo quando certas interações ocorreram durante o uso do software e não foram devidamente investigadas pela equipe de desenvolvimento e verificação e validação do sistema.

O produto cartesiano é uma operação que pode ser utilizada para representar todas as possíveis interações entre dois componentes cujo comportamento é representando através de um grafo especial: um grafo de estados. Considere a seguinte lâmpada abaixo que pode ser ligada ou desligada puxando o seu cordão. O comportamento desta lâmpada pode ser modelado pelo grafo de estados abaixo, onde OFF, ON e BROKEN, vértices do grafo, são possíveis estados em a lâmpada pode estar e os arcos do grafo representam as mudança de estado que podem ocorrer mediante a ocorrência de eventos que estão representados através dos rótulos dos arcos. Por exemplo, se a lâmpada está no estado ON e o evento pull ocorre, a lâmpada passa para o estado OFF.



Se desejarmos investigar os possíveis comportamentos emergentes entre duas lâmpadas deste tipo operando de forma concorrente, podemos utilizar uma ferramenta que calcule o produto cartesiano entre duas lâmpadas. Este comportamento pode ser representado no grafo abaixo.



Imagine que neste sistema seja desejável que exista sempre pelo menos uma lâmpada ligada a cada instante. Através da análise deste grafo, é possível observar que eventos deveriam ser inibidos pelo sistema ou que situações de prevenção seriam necessárias a fim de impedir que atinja o estado (OFF,OFF).

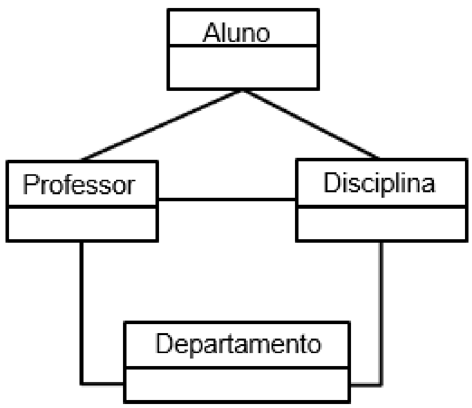
É importante ressaltar que, na prática, estas análises são realizadas sempre com o uso de ferramentas, grafos resultantes são representados apenas internamente (por serem muito grandes e complexos) e operações mais sofisticadas de produto entre os grafos são consideradas, por exemplo para prever a simultaneidade de ocorrências de eventos ou restrições temporais. Trata-se de um tópico avançado de engenharia de software que foge ao escopo desta disciplina. No entanto, este exemplo serve para motivar e exemplificar o uso prático deste tipo de operação.

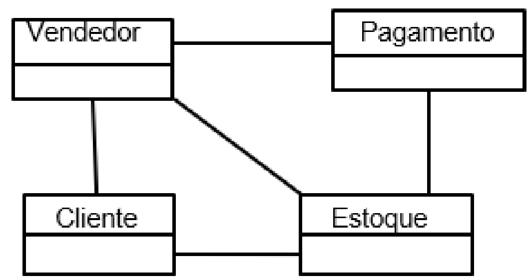
Isomorfismo

Dois grafos *G* e *H* são **idênticos**, *G* = *H*, se $V(G) = V(G), E(G) = E(H) \; e \; \psi_G = \psi_H$

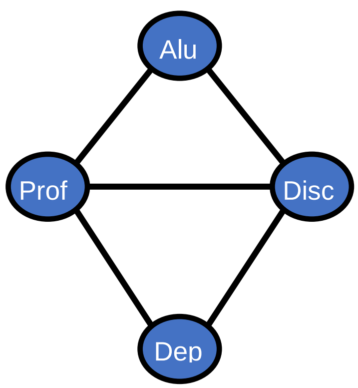
Este conceito tem pouca utilidade prática. Na prática, é interessante estudar propriedades comuns em grafos diferentes, mas que possuem a mesma estrutura e podem ser representados pelo mesmo diagrama.

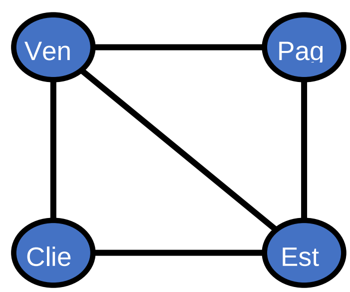
Por exemplo, considere dois sistemas diferentes cujas classes de conceitos e seus relacionamentos são apresentados abaixo. Trata-se de um Sistema de controle acadêmico e um Sistema de controle de vendas.





Tais sistemas podem ser representados por grafos com a mesma estrutura, onde um objeto de um domínio (e cada um de seus relacionamentos) pode ser mapeado para um objeto do outro nesta estrutura e vice-versa.





Por exemplo, *Prof* pode ser mapeado em *Ven*. Ambos estão relacionados a três outros vértices e podemos relacionar cada um deles precisamente entre os dois grafos de tal forma que as arestas sejam também mapeadas. Com isto, considerando um dos grafos e um mapeamento de vértices e arestas, podemos obter o outro grafo precisamente.

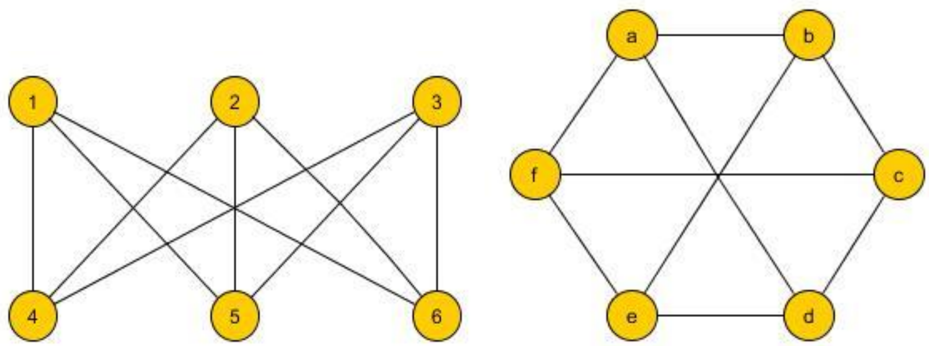
Neste caso, dizemos que existe um isomorfismo entre estes grafos.

Isomorfismos são estudados na matemática para estender conhecimentos de um fenômeno para outro: se dois objetos são isomorfos, então qualquer propriedade que é preservada por um isomorfismo e que é verdade para um dos objetos, também é verdade para o outro objeto. Em engenharia de software, podemos utilizar este conceito para reutilizar soluções ou inferir propriedade de um sistema que é isomorfo ao outro.

Formalmente, dois grafos *G* e *H* são **isomórficos**, G ≅ H, se existem bijeções $\theta: V(G) \rightarrow V(H)$ e $\varphi : E(G) \rightarrow E(H)$ tal que $\psi_G(e) = uv$ se e somente se $\psi_H(\varphi(e)) = \theta(u)\,\theta(v)$.

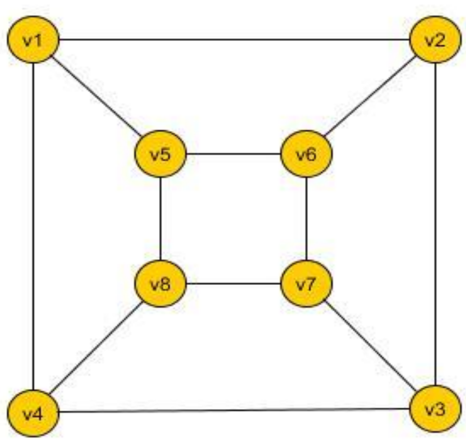
Onde a função de incidência de *G* é preservada através destes mapeamentos em *H*. Ou seja, se *u* e *v* são os terminais de uma aresta *e* em G, então os terminais da aresta mapeada em H por φ são os vértices mapeados de *u* e *v* por θ.

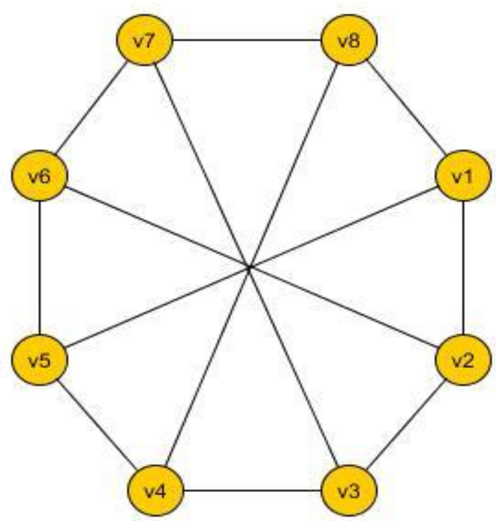
Como exemplo de grafos isomórficos, podemos considerar os grafos abaixo, onde é possível definir uma bijeção teta que mapeia cada vértice de G em um vértice de H. Apesar de estarem representados graficamente de forma diferente, visto que são isomórficos, podemos representá-los da mesma forma.



θ = (1→b, 2→d, 3→f, 4→c,5→e, 6→a)
Este mapeamento respeita em H as adjacências existentes em G

Estes outros grafos abaixo, aparentemente idênticos, pois possuem um conjunto de vértices em comum, não são isomórficos. Podemos observar que *G* possui 4 vértices que são mutuamente não adjacentes, v1, v3, v6 e v8. Não conseguimos encontrar um conjunto de vértices semelhante em H. Portanto, concluímos que estes grafos apresentam um padrão de conexão diferente.





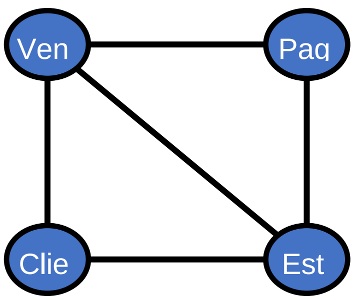
Automorfismo

Um **automorfismo** em um grafo simples *G* é um isomorfismo de *G* com ele mesmo. É definido por uma permutação $\boldsymbol{\alpha}$ de seu conjunto de vértices que preserva adjacência: se *uv* é uma aresta de G, então $\boldsymbol{\alpha}(u)\boldsymbol{\alpha}(v)$ é uma aresta de G. Os vértices *u* e *v* são chamados de **vértices similares**.

O objetivo de definir automorfismos é identificar vértices similares a outros vértices em um mesmo grafo. Como exemplo, vamos considerar o grafo abaixo. Note que os pares de vértices *Ven* e *Est*, *Pag* e *Clie* tem um papel semelhante na estrutura deste grafo, de forma que podemos mapear *Ven* em *Est* (e as respectivas arestas incidentes) e *Pag* em *Clie* (e as respectivas arestas incidentes) através da seguinte permutação:

$$\boldsymbol{\alpha} = \{Ven \rightarrow Est; Clie \rightarrow Pag;\ Est \rightarrow Ven;\ Pag \rightarrow Clie\}$$

Observe que se $\boldsymbol{\alpha}(Ven) = Est$; $\boldsymbol{\alpha}(Clie) = Pag$; a aresta *VenClie* existe, então *EstPag* também existe.



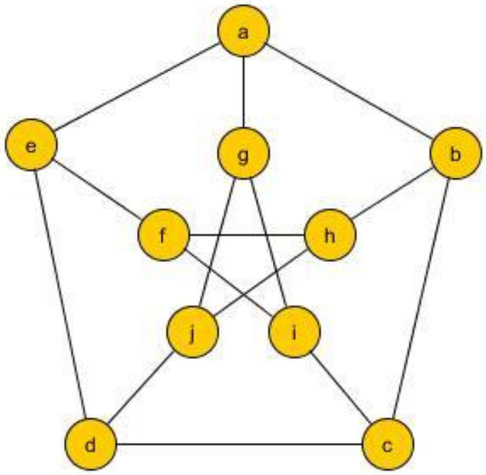
Para todo grafo simples G, é possível definir um automorfismo trivial que consiste em mapear cada vértice para ele mesmo. Como exemplo, considere um mapeamento trivial para o grafo acima.

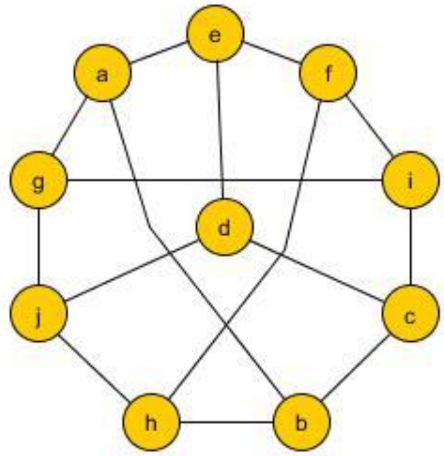
$\boldsymbol{\alpha} = \{Ven \rightarrow Ven;\ Clie \rightarrow Clie;\ Est \rightarrow Est;\ Pag \rightarrow Pag\}$

Na prática, apenas automorfismos não-triviais são interessantes porque estes nos ajudam a identificar vértices similares. Dentre outras possíveis aplicações, esta informação é importante para algoritmos que calcula representações gráficas automaticamente a fim tornar simetrias na estrutura do grafo visíveis (estudaremos mais adiante estes conceitos).

Grafo Vértice Transitivo

Um grafo é **vértice-transitivo** se todos os seus vértices são similares. Isto é, neste grafo, é possível definir uma permutação α que mapeia quaisquer pares de vértices. O grafo de Petersen abaixo ilustrado em duas representações diferentes é um exemplo de um grafo vértice-transitivo. Note, representação a direita deixa mais evidente a similaridade entre os vértices, inclusive o vértice central pode ser qualquer um outro do grafo.

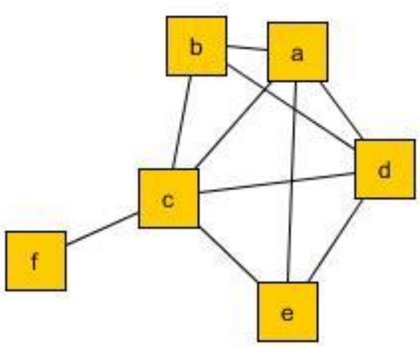
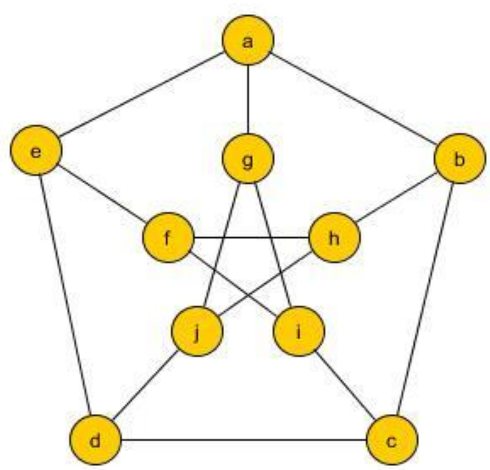




O grafo completo $\mathbf{K_n}$, o grafo bipartido completo $\mathbf{K_{n,n}}$, são outros exemplos de grafos de **vértice-transitivo**. Note que em um $\mathbf{K_n}$, todos os vértices são similares: possuem o mesmo grau e são adjacentes a todos os outros. Em um grafo bipartido completo $\mathbf{K_{n,n}}$, onde as duas partições possuem o mesmo tamanho, todos os vértices possuem o mesmo grau e são adjacentes a todos os vértices da outra partição. Assim, todos os vértices são similares.

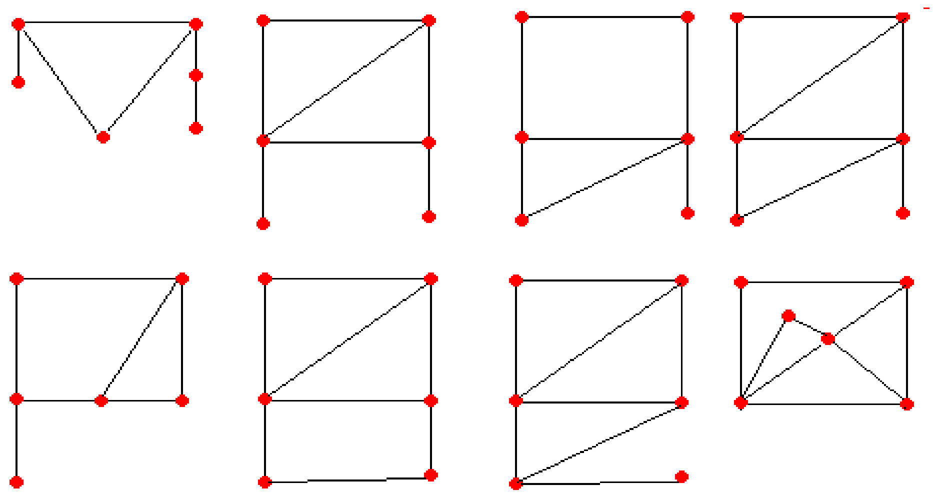
Grafo Simétrico

Um grafo simples G é **simétrico** quando possui um automorfismo não-trivial. Abaixo temos dois exemplos de grafos simétricos e um dos seus possíveis automorfismos.

	
α = {a→ d, b→ e, c→ c, d→ a, e→ b, f→ f}	α = { a→ j, b→ g, c→ i, d→ f, e→ h, f→ b, g→ d, h→ a, i→ c, j→ e}

Grafo Assimétrico

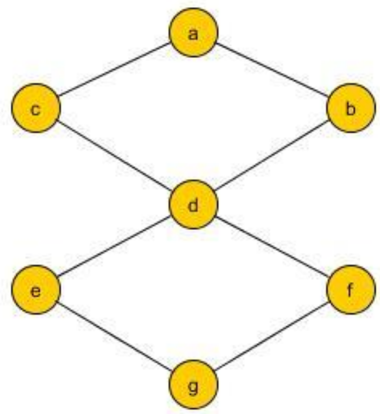
Um grafo simples é **assimétrico** quando não possui automorfismos não-triviais. Neste grafo, não existem vértices similares. A seguir, alguns exemplos destes grafos[2].



[2] Imagem de: https://en.wikipedia.org/wiki/Asymmetric_graph

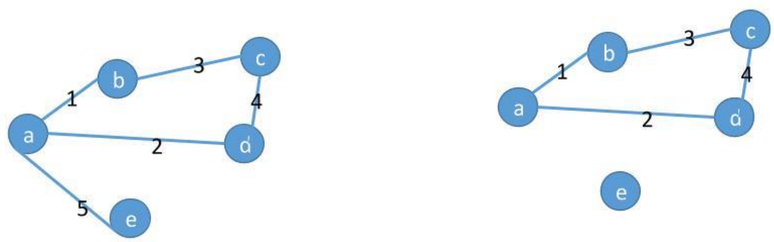
Exercícios Propostos

1. Encontre um automorfismo para o grafo abaixo, se existir.

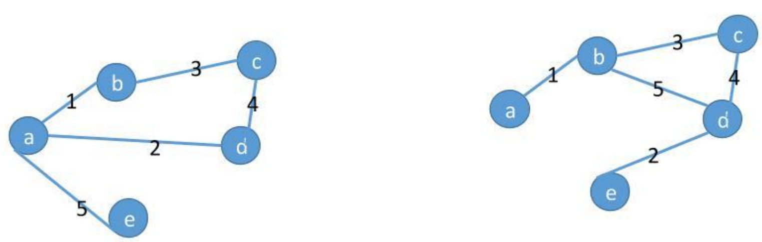


2. Estes grafos são isomórficos? Justifique.

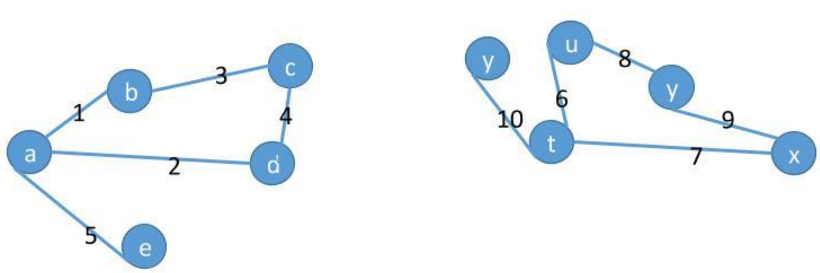
a)



b)



c)



3. Os grafos G e H descritos a seguir são isomorfos? V(G) = {a, b, c, d, e, f, g}, E(G) = {ab, bc, cd, cf, fe, gf, ga, gb} V(H) = {h, i, j, k, l, m, n}, E(H) = {hk, nj, jk, lk, lm, li, ij, in}? E se trocarmos hk por hn em E(H)?

4. Sejam G e H dois grafos simples e isomórficos. É verdade que o complemento de G é isomórfico ao complemento de H? Justifique.

5. Sejam G e H dois grafos isomórficos. É verdade que se G é bipartido, H também é bipartido? Justifique.

6. Sejam G e H dois grafos. Quais das seguintes implicações são verdadeiras? 1. Se $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ então $G \cup H$ não é conexo. 2. Se $G \cup H$ é conexo então $V(G) \cap V(H) <> \emptyset$. 3. Se $G \cup H$ não é conexo, então $V(G) \cap V(H) = \emptyset$.

7. Uma roda (= wheel) é qualquer grafo da forma $G \cup H$, onde G é um circuito e H é uma estrela com centro v tal que $V(H) \setminus r\{v\} = V(G)$. Faça figuras de rodas com 4, 5 e 6 vértices. Quanto valem os parâmetros m, δ e Δ de uma roda com n vértices?[3]

Referências

J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer, 2008,2010. (Seção 1.2 (excluindo labelled graphs))

https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_automorphism

https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_graph

https://en.wikipedia.org/wiki/Asymmetric_graph

[3] Adaptado de https://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/texto/ETG.pdf