Aula 24 – Coloração

Notas de Aula de Teoria dos Grafos

Prof[a.]: Patrícia D. L. Machado

UFCG – Unidade Acadêmica de Sistemas e Computação

Sumário

Nesta aula, apresentamos o problema da coloração em grafos, considerando a coloração de faces, arestas e vértices.

O Problema das 4 Cores

O problema das 4 começou a ser investigado em meados do século 19, quando Augustus De Morgan, postulou a conjectura de que toda figura planar com regiões distintas, tal como um mapa territorial, pode ser colorida com no máximo 4 cores, garantindo que regiões vizinhas sempre recebem cores diferentes.

> *"A student of mine [Frederick Guthrie, brother of Francis] asked me today to give him a reason for a fact which I did not know was a fact – and do not yet. He says that if a figure be anyhow divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured – four colours may be wanted, but not more – the following is the case in which four colours are wanted. Query cannot a necessity for five or more be invented . . ."*

Matemáticos da época de fato acreditaram ser possível colorir qualquer mapa com no máximo 4 cores. Apesar de até hoje não existir uma prova para tal, esta conjectura passou a ser conhecida como **Conjectura das 4 cores**. A Figura 1 ilustra uma coloração com 4 cores.

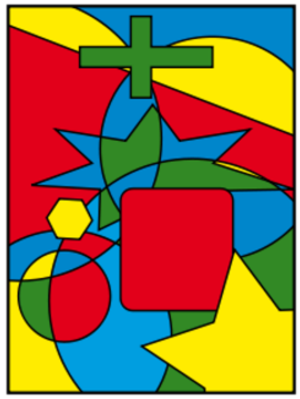


Figura 1[1]

O problema da coloração de mapas passou a ser intensivamente investigado dando origem ao desenvolvimento de soluções para vários problemas complexos de alocação e escalonamento usando teoria dos grafos. Como veremos nesta aula, podemos aplicar estratégias de coloração tanto para regiões/faces em grafos planares, quanto para vértices e arestas.

Coloração de Mapas Planares

Dado um grafo planar G, uma ***k*-coloração de faces** é uma atribuição de *k* cores a suas faces. Dizemos que uma coloração é **própria** se duas faces adjacentes não possuem a mesma cor.

Um grafo planar é ***k-faces colorível*** se possui uma *k*-coloração própria.

Na Figura 2, temos uma coloração com 4 cores, onde as cores estão representadas por números. Este grafo é 4-faces colorível.

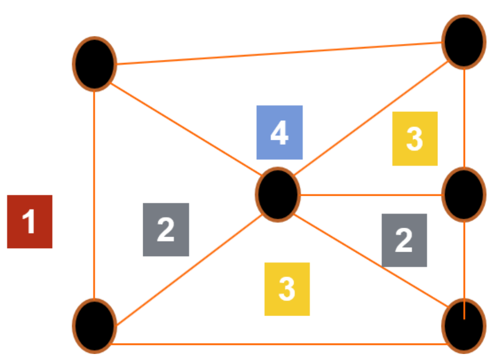


Figura 2

[1] Imagem: http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

Conjectura 1 (*De Morgan* 1852). Todo grafo planar sem arestas de corte é *4-faces colorível*.

Note que arestas de corte não são consideradas, pois fazem uma face ser adjacente a ela mesma, não sendo possível atribuir duas cores diferentes.

Em 1977, *Applel* e *Haken* apresentaram esta conjectura como um teorema, considerando uma prova mecânica por força bruta. A prova mostra que não há mapa para o qual 5 cores sejam necessárias para colorir 2000 casos gerados via computador. Matemáticos não aprovaram devido a possibilidade de um defeito no código e a limitação do número de casos.

Com o passar dos anos, diferentes tentativas de prova ou contra-prova foram apresentadas e refutadas, tal como o exemplo apresentado na Figura 3, onde a coloração da esquerda apresenta 5 cores, mas a da direita (a refutação) apresenta 4 cores.

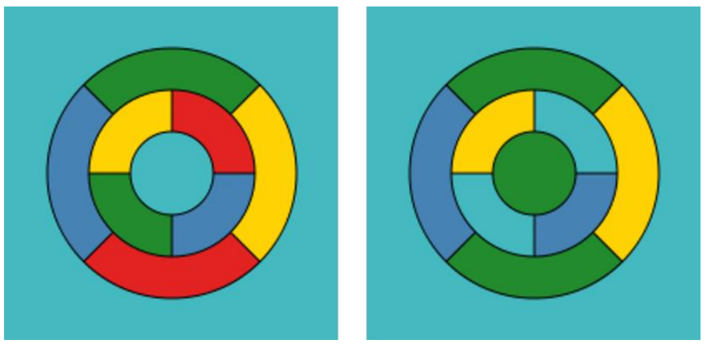


Figura 3[2]

Coloração de Arestas

Uma ***k*-coloração de arestas** em um grafo G é uma atribuição de *k* cores a suas arestas. A coloração é **própria** se duas arestas adjacentes não possuem a mesma cor. Um grafo é ***k-arestas colorível*** se possui uma *k*-coloração própria.

A Figura 4 apresenta uma coloração de arestas própria com 3 cores. O grafo é 3-arestas colorível.

[2] Image from: https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

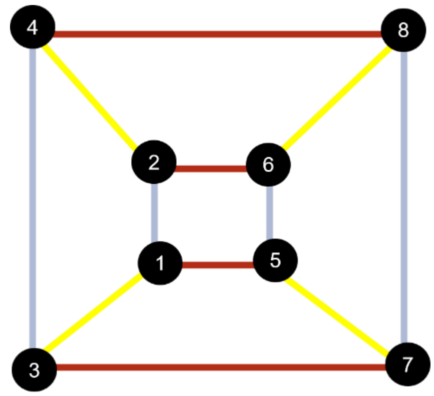


Figura 4

Teorema 1 (*Teorema de Tait's*). Um grafo planar cúbico 3-conectado é 4-faces colorível *se e somente se* é 3-arestas colorível.

Conjectura 2. Todo grafo ***planar*** 3-conectado é 3-arestas colorível.

Note que, para coloração de arestas em um grafo qualquer, a conjectura de 4 cores não é aplicável. Por exemplo, um grafo que possui um vértice grau n, precisamos de no mínimo n cores.

Vejamos um exemplo de aplicação de coloração de arestas. Considere que pessoas em grupo precisam se reunir em pares. Como mais de uma pessoa quer se reunir com uma mesma pessoa, como alocar os encontros? Quantas seções são necessárias?

Este problema pode ser representado através de um grafo onde cada vértice representa uma pessoa e cada aresta representa os pares que querem se reunir (como exemplo, podemos considerar o grafo da Figura 4). As cores atribuídas as arestas representam as sessões necessárias, visto que a coloração é própria. Assim, não há risco de alocar uma mesma pessoa para duas reuniões na mesma sessão, uma vez que arestas adjacentes recebem diferentes cores e, portanto, representam diferentes sessões.

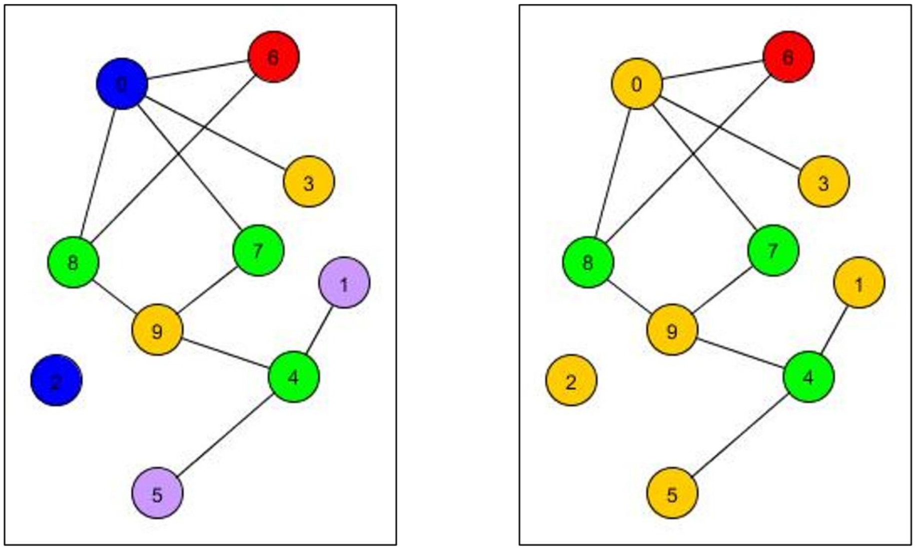
Coloração de Vértices

Uma ***k*-coloração de vértices** em um grafo G é uma atribuição de *k* cores aos vértices de *G*. A atribuição pode ser definida como um mapeamento C do conjunto de vértices para um conjunto de cores.

A coloração é **própria** se dois vértices adjacentes não possuem a mesma cor. Note que apenas grafos sem loop admitem uma coloração própria, visto que um vértice com loop é adjacente a ele mesmo.

Um grafo é ***k-vértices colorível*** se possui uma k-coloração própria.

A Figura 5 apresenta duas colorações próprias de vértice para um mesmo grafo. Note que o grafo é 3-vértices e 5-vértices colorível.



C = {0 → azul, 1→ roxo, 2 → azul,
3→ laranja, 4 → verde,
5→ roxo, 6→ vermelho,
7→ verde, 8→ verde, 9→ laranja}

C = {0 → laranja, 1→ laranja, 2 → laranja,
3→ laranja, 4 → verde,
5→ laranja, 6→ vermelho,
7→ verde, 8→ verde, 9→ laranja}

Figura 5

Conjectura 3. Todo grafo planar sem loops é 4-vértices colorível.

Note que, para coloração de vértices em um grafo qualquer, a conjectura de 4 cores não é aplicável. Por exemplo, para colorir um grafo completo de n vértices, precisaremos de no mínimo n cores.

Número Cromático

O valor mínimo de k para o qual o grafo é k-vértices colorível é chamado de **número cromático: χ(G)**. Se $\chi(G) = k$, o grafo é dito ser ***k*-cromático**. O grafo da Figura 5 é 3-cromático, ou seja, seu número cromático é 3.

Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

<u>Alocação de Exames em Sessões Paralelas</u>: Os estudantes de uma certa universidade participam de exames anuais em todos os cursos. Naturalmente, exames de disciplinas diferentes não

podem ser realizados em paralelo se as disciplinas possuem alunos em comum. Como os exames podem ser organizados para que se tenha o menor número de sessões paralelas?

Podemos representar este problema através de um grafo onde os vértices representam os cursos e as arestas representam o fato de que dois cursos possuem pelo menos um aluno em comum. Em seguida, aplicamos um algoritmo para coloração de vértices. Neste caso, as cores passam a representar as sessões e a quantidade mínima de cores necessária, que chamamos de número cromático, indica a quantidade de sessões necessárias. Como exemplo, considere o grafo da Figura 6.

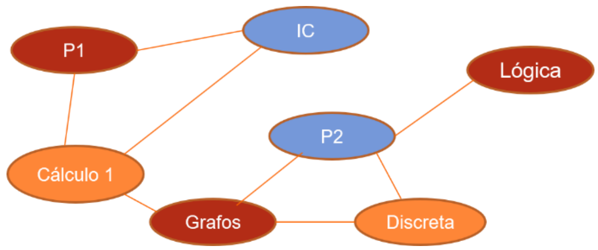


Figura 6

<u>Armazenamento de produtos químicos</u>: Uma companhia que manufatura produtos químicos $C_1, C_2, \cdots, C_n$ necessita armazená-los em depósitos de tal forma que produtos incompatíveis não fiquem no mesmo armazém a fim de evitar o risco de explosão. Qual o menor número de armazéns necessário? Considerando que este problema seja representado por um grafo, onde os vértices correspondem aos produtos e as arestas relacionam produtos incompatíveis, a resposta a questão pode ser dada através da determinação do número cromático do grafo. Aplicamos um algoritmo para coloração de vértices e as cores vão representar os diferentes armazéns necessários. Produtos com a mesma cor podem ser guardados no mesmo armazém. A Figura 7 apresenta um exemplo.

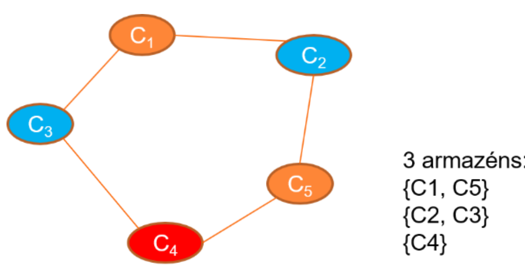


Figura 7

<u>Alocação de Frequência em Redes de Telefonia</u>: Alocação de recursos conflitantes em redes de telefonia é outra área de aplicação da coloração de vértices. Considere que uma rede de telefonia celular é formada por estações-torre que constituem células – área de cobertura da torre. Células vizinhas não podem usar a mesma frequência para evitar interferência. Qual o menor número de frequências necessário em uma certa área geográfica? Representamos o problema através de um grafo, onde os vértices são as estações

e as arestas a vizinhança entre estações. Desta forma, usando coloração de vértices, estações vizinhas receberão uma cor diferente. O número cromático obtido, indica a quantidade de frequências (cores) diferentes necessárias. A Figura 8 apresenta um exemplo.

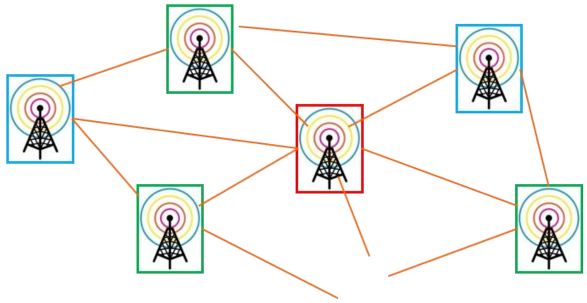


Figura 8

Classe de Cor e Estabilidade

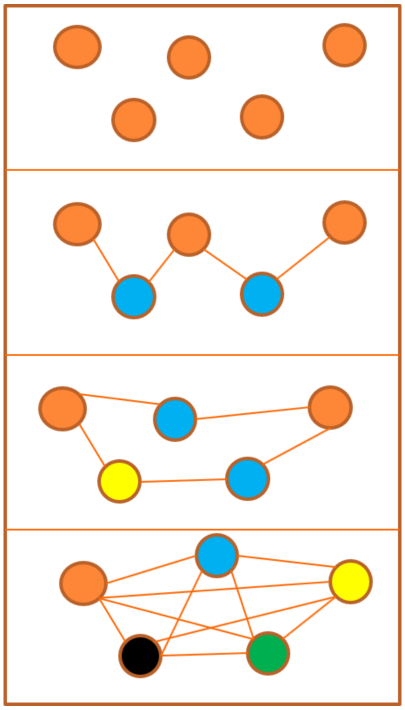
Uma ***k*-coloração de vértices** pode ser vista como uma **partição** $\{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de *V* onde V_i denota o conjunto de vértices para os quais a cor *i* $(1, ..., k)$ é atribuída. V_i é chamada de **classe da cor** ***i***.

No grafo da Figura 6 acima, temos três partições de vértices definidas pela 3-coloração atribuída: A classe da cor vermelho $\{P1, Grafos, Lógica\}$, azul $\{IC, P2\}$ e laranja $\{Cálculo\ 1, Discreta\}$.

Note que uma coloração própria é uma k-coloração onde **cada classe de cor é um conjunto estável**. Isto se deve ao fato de que vértices de uma cor não são mutuamente adjacentes, como podemos observar em nosso exemplo.

Vamos agora observar as seguintes relações as quais estão ilustradas na Figura 9.

- Um grafo é **1-cromático** se e somente se é vazio. Esta é a única situação em que podemos ter uma única classe de cor, já que nenhum vértice é adjacente a outro.
- Um grafo é **2-cromático** se e somente se é bipartido. Grafos bipartidos possuem 2 conjuntos estáveis, as partições, e cada uma pode receber uma cor, visto que os vértices dentro de uma partição não são adjacentes.
- O triângulo (K_3) e os ciclos de tamanho ímpar são **3-cromáticos**. Não são 2-coloríveis exatamente por não serem bipartidos.
- Todo grafo completo K_n é ***n*-cromático**, visto que, nestes grafos, todos os vértices são adjacentes.



Grafo vazio, 1-cromático

Grafo bipartido, 2-cromático

Grafo ciclo de tamanho ímpar, 3-cromático

Grafo completo de 5 vértices, 5-cromático

Figura 9

Todo grafo G satisfaz a seguinte inequação, onde n é o número de vértices e $\alpha(G)$ é o número de estabilidade de G e $\chi(G)$ é o número cromático de G.

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$$

Ou seja, o número cromático é sempre maior ou igual a razão entre o número de vértices do grafo e o seu número de estabilidade. Toda classe de cores é um conjunto estável, portanto, toda classe possui no máximo $\alpha(G)$ vértices, visto que o grafo não possui um conjunto estável maior que $\alpha(G)$. Quanto menor a estabilidade, maior a quantidade de cores necessárias. Por exemplo, em um grafo completo de n vértices, o número de estabilidade é 1, tamanho do maior conjunto estável possível, enquanto o número cromático é n. No outro extremo, em um grafo vazio de n vértices, o número de estabilidade é n, enquanto o número cromático é 1.

A Figura 10 abaixo ilustra esta relação.

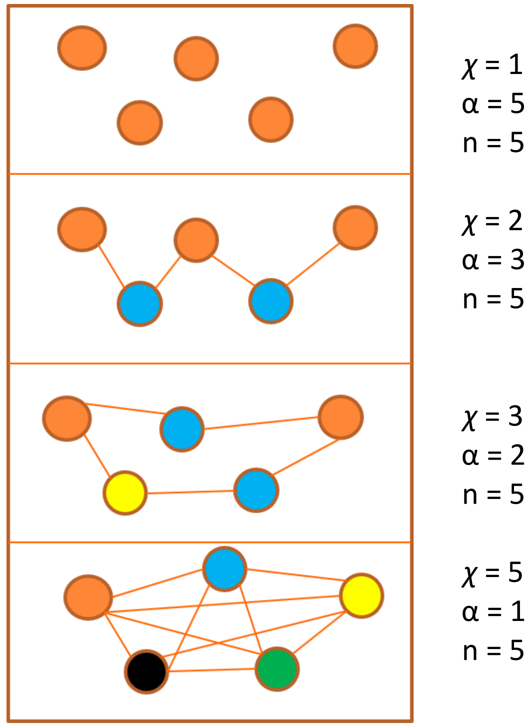


Figura 10

Determinando a Coloração de Vértices

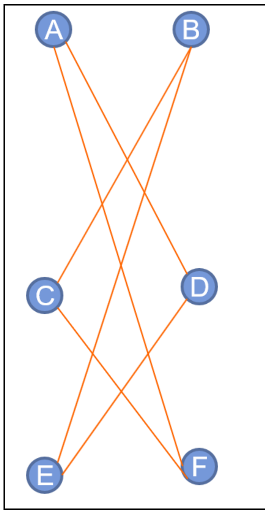
Como um grafo é 2-colorível se somente se é bipartido, existe um algoritmo em tempo polinomial para decidir se um grafo é 2-colorível (usando BFS). No entanto, o problema da 3-coloração ainda é NP-completo. Na prática, existem heurísticas eficientes, mas que podem cometer erros ou seja determinar uma coloração qualquer é fácil, mas determinar o número cromático exato é difícil.

Vejamos um exemplo de uma heurística gulosa para coloração. A heurística recebe como entrada um grafo G e gera como saída uma coloração de G. A heurística, abaixo ilustrada, consiste em 2 passos.

1. *Organize os vértices de G em uma ordem linear:* $v_1, v_2, \ldots, v_n$
2. *Considere que as cores são representadas por números. Pinte os vértices 1 por 1 nesta ordem, atribuindo para* v_i *o menor inteiro positivo r ainda não atribuído para algum dos seus vizinhos já coloridos, isto é, nenhum vértice em* C_r *é vizinho de* v_i

No passo 1, objetivo é organizar os vértices em uma ordem para receber as cores. Como veremos esta organização é determinante para o algoritmo encontrar o número cromático exato ou um número aproximado, com uma certa margem de erro. No passo 2, os vértices serão pintados de acordo com a ordem, atribuindo o menor número ainda não atribuído a um dos vizinhos do vértice.

A heurística sempre retorna como número cromático um valor que é menor ou igual a $\Delta(G) + 1$ (grau máximo do grafo somado a 1). Um exemplo onde o pior caso pode ocorrer é quando vértices de um conjunto estável máximo recebem cores diferentes. Como estes vértices podem formar uma classe de cor, idealmente deveriam receber a mesma cor. A Figura 11 ilustra resultados obtidos com a aplicação da heurística a um mesmo grafo, considerando ordenações diferentes.



Ordem: A, C, E, B, D, F
A →1, C→1, E → 1, B→ 2, D→ 2, F → 2

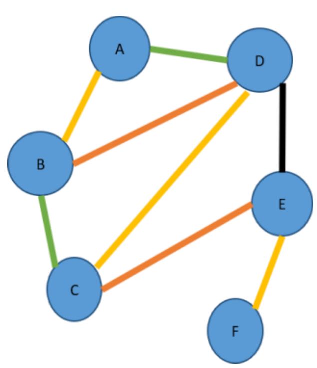
Ordem: A, B, C, D, E, F
A →1, B→ 1, C→2, D→2, E→ 3, F →3

Figura 11

A **JGraphT** disponibiliza no pacote [org.jgrapht.alg.color]() tanto algoritmos quanto heurísticas que determinam uma coloração de vértices para um grafo, juntamente com seu número cromático. Note que as heurísticas podem cometer erro.

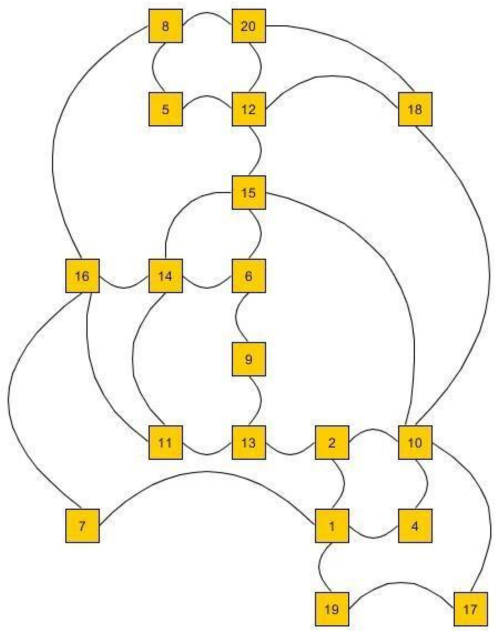
Exercício: Seja G um grafo simples qualquer. É verdade que o número cromático de G é sempre maior ou igual ao grau máximo de G, ou seja, $\chi(G) >= \Delta(G)$?

A resposta é não. Podemos observar no exemplo abaixo que o grau máximo do vértice pode ser usado para determinar o número mínimo de cores em uma **coloração de arestas**. No entanto, para este exemplo, $\chi(G) = 3$ e $\Delta(G) = 4$. O grau máximo não determina o número cromático.



Exercícios Propostos

1. Para o grafo abaixo, encontre uma coloração própria e mínima de faces. Encontre uma coloração própria e mínima de arestas.



2. Encontre uma coloração mínima do mapa dos estados do Brasil.

3. Qual o menor número de cores necessárias para uma coloração mínima em um K_n? Qual o menor número de cores necessárias para uma coloração mínima em um $K_{p,q}$?

4. Mostre que qualquer coloração própria de arestas em um grafo possui pelo menos $\Delta(G)$ cores, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo do grafo.

5. Encontre uma coloração mínima do mapa dos estados do Brasil.

6. Mostre que o número cromático é invariante sob isomorfismo. Em outras palavras, se G e H são grafos isomorfos então $\chi(G) = \chi(H)$.
Questão adaptada de: http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/

7. Encontre uma coloração mínima dos vértices de um caminho. Repita com um circuito no lugar do caminho. Repita com uma grade no lugar do caminho.
Questão adaptada de: http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/

8. Encontre uma coloração mínima dos vértices do grafo de Petersen.
Questão adaptada de: http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/

9. Exiba um grafo G com duas colorações mínimas diferentes dos vértices de G.
Questão adaptada de: http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/

10. Seja H um subgrafo de um grafo G. Qual a relação entre $\chi(H)$e $\chi(G)$?
Questão adaptada de: http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/

11. Sejam G1 e G2 dois grafos que possuem o mesmo conjunto de vértices. Mostre que o número cromático de G1 U G2 é, no máximo, $\chi(G1)\chi(G2)$.

12. Um jogo de Sudoko n x n pode ser modelado em um grafo onde os vértices de uma mesma linha, coluna ou bloco são adjacentes. Uma solução para um Sudoko é uma coloração própria mínima de vértices. Construa um exemplo.

13. Veja este exemplo de aplicação retirado de https://www.geeksforgeeks.org/graph-coloring-applications/: "Akamai runs a network of thousands of servers and the servers are used to distribute content on Internet. They install a new software or update existing softwares pretty much every week. The update cannot be deployed on every server at the same time, because the server may have to be taken down for the install. Also, the update should not be done one at a time, because it will take a lot of time. There are sets of servers that cannot be taken down together, because they have certain critical functions. This is a typical scheduling application of graph coloring problem. It turned out that 8 colors were good enough to color the graph of 75000 nodes. So they could install updates in 8 passes." Construa um exemplo menor relacionado.

Referências

J. A. Bondy and U. S. R. Murty.Graph Theory. Springer, 2008,2010.

- 11.1 e 14.1

https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring