Aula 16 – Separações, Blocos e Conectividade

Notas de Aula de Teoria dos Grafos

Prof[a.]: Patrícia D. L. Machado

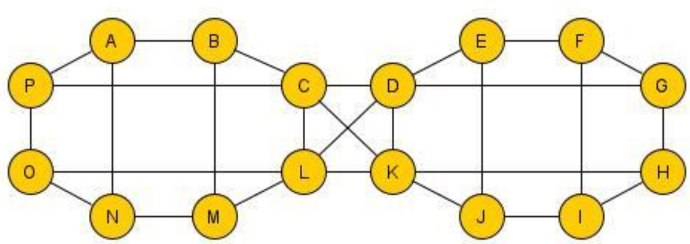
UFCG – Unidade Acadêmica de Sistemas e Computação

Sumário

Caminhos Internos Disjuntos

Suponha que, para aumentar a performance em uma rede de computadores, ao enviar uma mensagem de uma máquina para outra, esta mensagem possa ser quebrada em *n* pacotes e os *n* pacotes possam ser enviados ao mesmo tempo, percorrendo **caminhos disjuntos** (sem máquinas em comum). Qual a quantidade máxima de pacotes que podem ser enviados por caminhos disjuntos entre 2 máquinas quaisquer desta rede em um certo intervalo de tempo? A resposta pode ser dada calculando-se a conectividade de vértices do grafo. Este é o tema central desta aula.

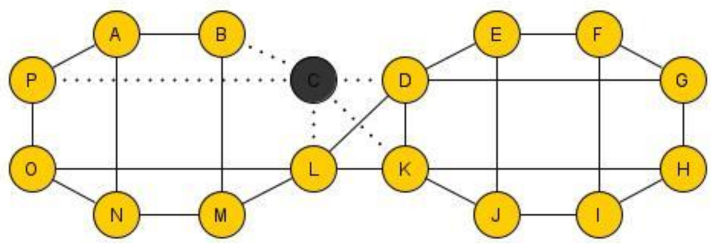
Abaixo temos um exemplo de um grafo que modela uma rede de computadores, onde os vértices representam as máquinas e as arestas a disponibilidade de conexão direta entre estas máquinas.



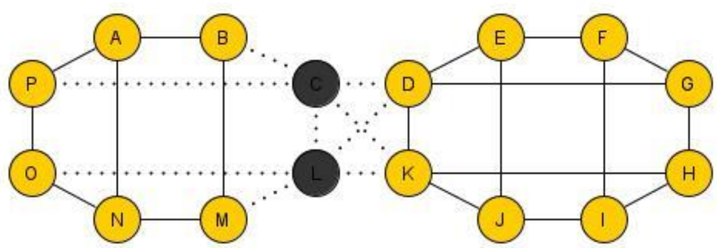
Em particular, quantos **caminhos disjuntos** existem entre os vértices P e G neste grafo? Podemos identificar no máximo 2. Por exemplo, (P,C,D,G) e (P,O,L,K,H,G). Todos os possíveis caminhos passam por dois dos vértices C, D, L e K.

A conectividade de um grafo é dada é termos do pior caso, ou seja, existem pares de vértices para os quais temos mais que 2 caminhos disjuntos (considere, por exemplo, os vértices M e N), mas nunca menos de 2. Portanto a conectividade deste grafo é 2. Veremos mais adiante como calcular esta conectividade para um grafo qualquer.

Agora considere a seguinte situação: o que acontece se a máquina C for desligada? A figura abaixo destaca o vértice a ser removido do grafo, incluindo as arestas incidentes. Passaremos a ter apenas um caminho disjunto entre P e G e, portanto, a conectividade do grafo cai para 1. O vértice L que definiremos mais a seguir como vértice de corte passa a ter suma importância.



Se a máquina L também for desligada, haverá uma quebra de comunicação entre as máquinas da esquerda e as máquinas da direita, representada pela falta de conectividade no grafo. A figura abaixo ilustra o impacto da remoção de C e L no grafo. Ou seja, a comunicação nesta rede pode ser quebrada se 2 máquinas específicas forem desligadas.

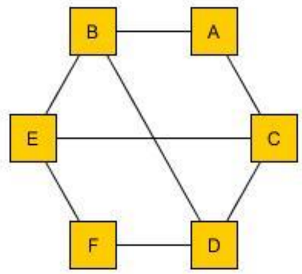


Corte de Vértices

Considerando o nosso exemplo anterior, podemos observar que a remoção dos vértices C e L deixará o grafo desconectado. Dizemos então que o conjunto formato por estes vértices é um **corte de vértices**.

Um grafo completo não possui um corte de vértices, já que a remoção de quaisquer subconjuntos de vértices deste tipo de grafo não o deixa desconectado. O mesmo ocorre para grafos cúbicos: estes grafos não possuem corte de vértices.

Considere também o grafo abaixo. Se o conjunto formado pelos vértices {B,C} for removido, este grafo ficará desconectado. Assim {B,C} é um corte de vértices.



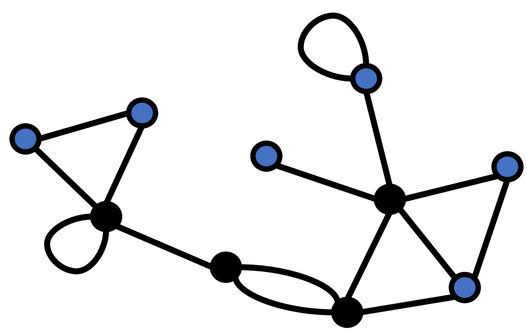
Vértice de Corte

Existe um tipo de vértice especial *v* que, sozinho, forma um corte de vértices {*v*}. Este vértice é chamado de vértice de corte.

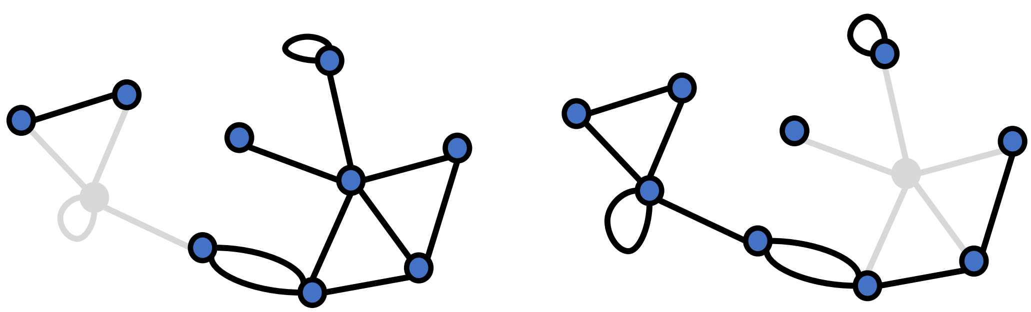
Formalmente, um **vértice de corte** em um grafo *G* é um vértice *v* tal que $c(G - v) > c(G)$, onde *c* é o número de componentes conectados de um grafo.

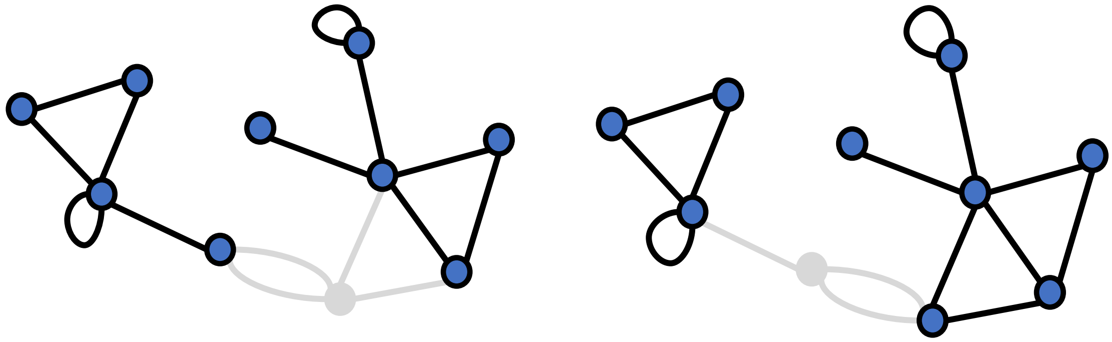
Em outras palavras, é um vértice cuja remoção em um grafo conectado resulta em um grafo desconectado ou em um grafo desconectado resulta em um grafo com mais componentes.

No grafo abaixo, os vértices em preto são vértices de corte.



A remoção destes vértices resulta nos componentes ilustrados na figura abaixo.





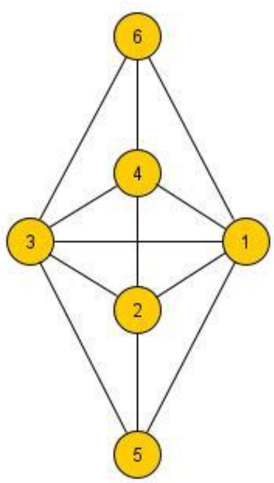
Teorema. Um grafo conectado em 3 ou mais vértices não tem vértices de corte *se e somente se* quaisquer 2 vértices distintos estão conectados por dois caminhos internos disjuntos (não possuem vértices em comum).

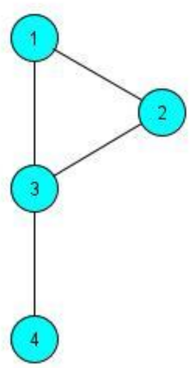
Prova.

$\Rightarrow$ Seja G um grafo conectado em 3 ou mais vértices que não tem vértices de corte. Então, podemos concluir que neste grafo existe mais de um caminho interno disjunto entre 2 vértices quaisquer. Por definição, um vértice de corte conecta diretamente vértices de 2 ou mais grupos de vértices de um grafo por um único caminho interno disjunto.

$\Leftarrow$ Seja G um grafo em que quaisquer 2 vértices distintos estão conectados por dois caminhos internos disjuntos. Se quaisquer 2 vértices de *G* estão conectados por 2 caminhos disjuntos, quaisquer 2 vértices de *G-v* estão conectados por pelo menos um caminho. Então *G-v* é conectado e *v* não é um vértice de corte.

A fim de exemplificar a aplicação deste teorema, vamos observar os exemplos abaixo.



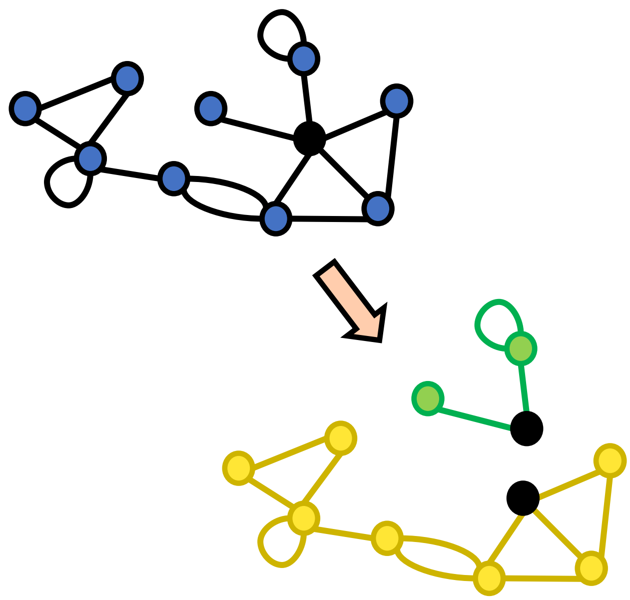


No grafo a esquerda, não há vértices de corte e quaisquer 2 pares de vértices possuem pelo menos 2 caminhos internos disjuntos. Por exemplo, entre 5 e 6, podemos identificar os caminhos (5,1,6), (5,3,6) e (5,2,4,6). Já o grafo a direita possui um vértice de corte, o vértice 3. Se considerarmos os vértices 1 e 4, existe apenas um caminho disjunto representado por (1,2,3,4) ou (1,3,4), ambos passando pelo vértice 3. Portanto estes caminhos não são disjuntos.

Separações e Blocos

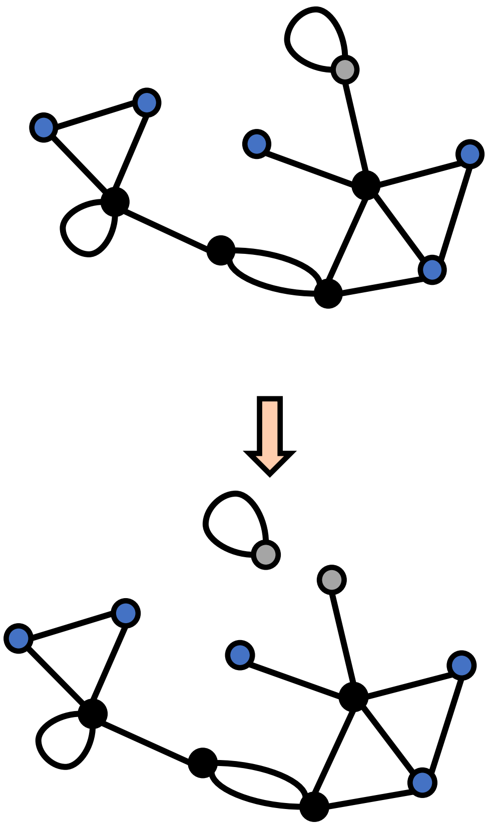
Uma **separação** em um grafo conectado é uma decomposição do grafo em 2 subgrafos conectados <u>não-vazios</u> com apenas <u>um vértice em comum</u>. Este vértice é chamado de **vértice de separação**.

Neste exemplo abaixo, o vértice em preto é um vértice de separação. Com base nele, o grafo pode ser decomposto, formando dois subgrafos conectados não vazios com apenas um vértice em comum.

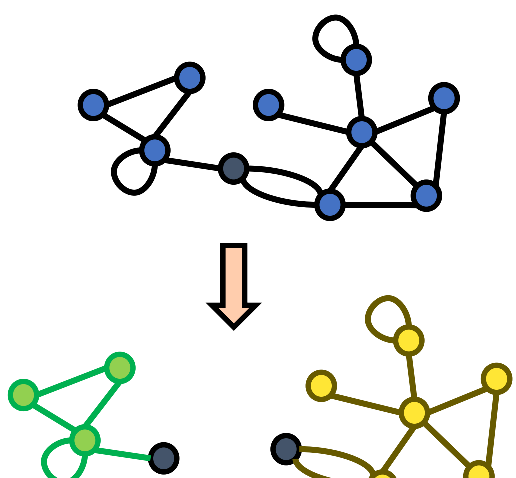


Todo vértice de corte é um vértice de separação, mas não o contrário: um vértice incidente com um *loop* é um vértice de separação, mas não um vértice de corte.

Como podemos ver em nosso exemplo abaixo, todos os vértices em preto, que são vértices de corte, também são vértices de separação. O vértice em vermelho é um vértice de separação, como podemos demonstrar na decomposição abaixo do grafo em 2 subgrafos não vazios. Mas o vértice em vermelho não é um vértice de corte: sua remoção não aumenta a quantidade de componentes do grafo.

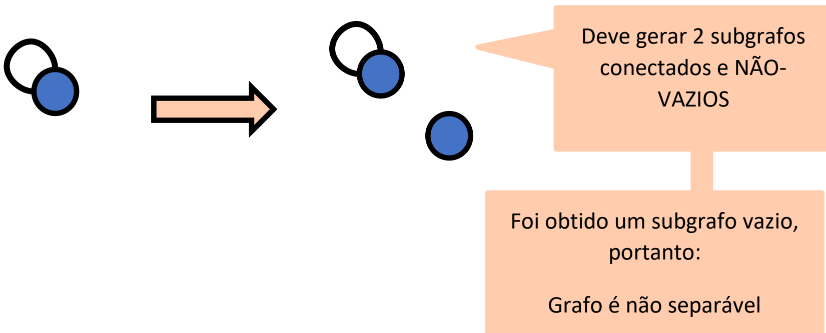


Abaixo temos outro exemplo de separação.



Um grafo é **não separável** se é conectado e não possui vértices de separação. Caso contrário, é **separável**.

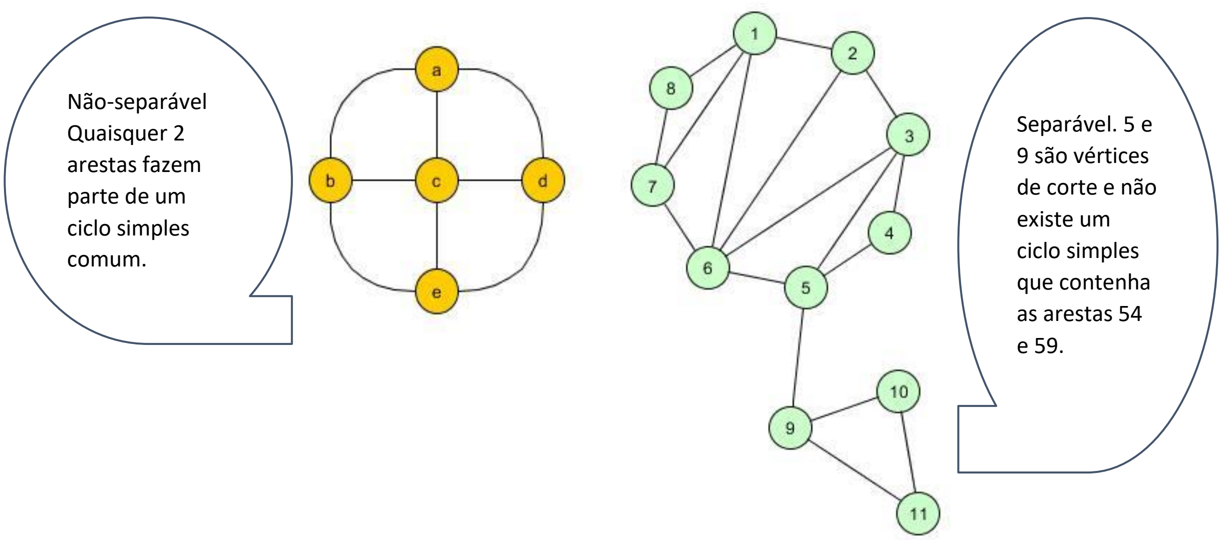
Exemplos de não-separáveis: K_1, K_1 com loop e grafos de 2 vértices sem *loop*. Considere o grafo K_1 com *loop* abaixo. Podemos observar que não é possível fazer uma decomposição em 2 subgrafos não-vazios neste grafo.



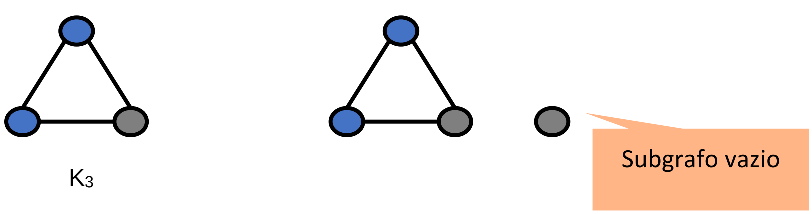
Teorema. Um grafo conectado é não-separável *se e somente se* para 2 arestas quaisquer, estas arestas fazem parte de um ciclo simples comum.

É fácil observar que se para cada 2 arestas quaisquer estas fazem parte de um ciclo comum então existem dois caminhos disjuntos entre quaisquer 2 pares de vértices. Portanto, o grafo não possui vértices de corte. Se o grafo possui um *loop*, este possui um vértice de separação e a aresta *loop* não faz parte de um ciclo comum com nenhuma outra aresta de um grafo.

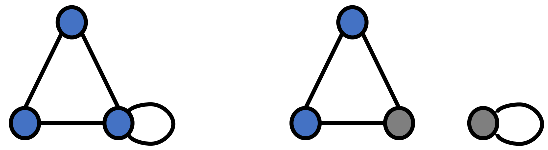
Os exemplos abaixo ilustram o teorema.



Como outro exemplo, considere o grafo K_3. Qualquer tentativa de separação resulta em um subgrafo vazio. Note que quaisquer 2 arestas fazem parte de um mesmo ciclo em comum.



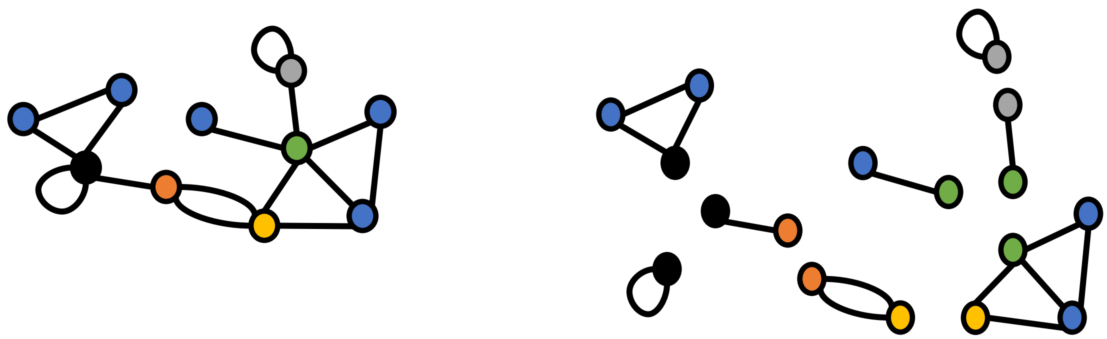
Porém, o K_3 com *loop* é separável.



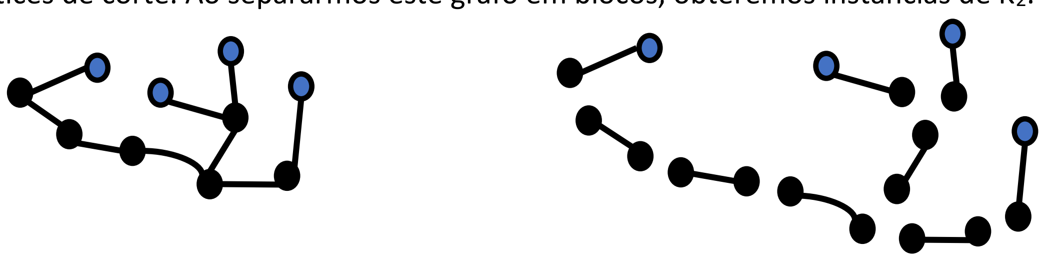
Um **bloco** (*block*) de um grafo é um subgrafo que é inseparável e é máximo com relação a esta propriedade. Ou seja, um bloco é um subgrafo inseparável que não contém outros blocos.

Para obtermos os blocos de grafo, devemos aplicar todas as operações de separação possíveis neste grafo e, sucessivamente nos subgrafos obtidos até que todos os subgrafos resultantes sejam inseparáveis.

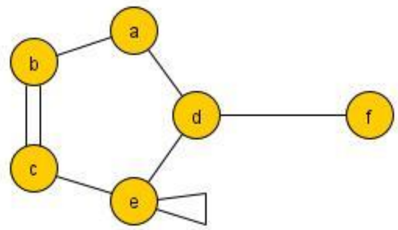
Considere o exemplo abaixo onde estão ilustrados, a direita, todos os blocos do grafo a esquerda. Note que os blocos foram obtidos através de sucessivas separações sobre os vértices de separação do grafo original.



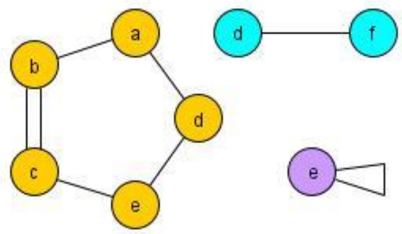
Os blocos de uma árvore não-trivial são instâncias de K_2 induzidos por suas arestas. Como podemos observar no exemplo abaixo, todos os vértices de uma árvore que não são folha são vértices de corte. Ao separarmos este grafo em blocos, obteremos instancias de K_2.



Exercício: Considere o grafo abaixo. Encontre, se existir: a) Vértices de Corte; b) Vértices de Separação; c) Blocos.

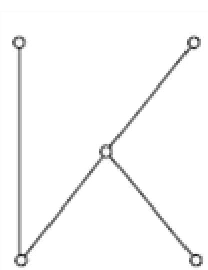


Este grafo possui um único vértice de corte: o vértice *d*. Mas possui dois vértices de separação: *d* e *e*. Os blocos deste grafo são obtidos através das separações que podem ser obtidas a partir do grafo original, as quais estão ilustradas abaixo.

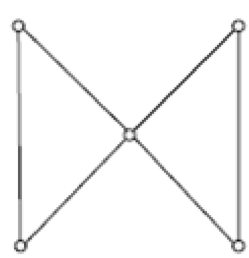


Conectividade

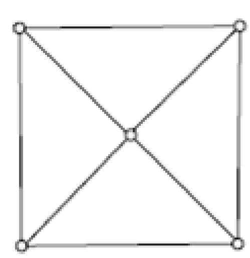
Todo grafo simples possui um padrão de conectividade que pode variar desde a conexão mínima no caso de uma árvore até a conectividade máxima em um grafo completamente conectado. Entre estes extremos, temos os grafos que não são árvores, mas possuem vértices de corte que ao ser removido pode desconectá-lo. Temos também os grafos sem arestas e vértices de corte, mas que não são completamente conectados. Estes tipos são ilustrados abaixo.



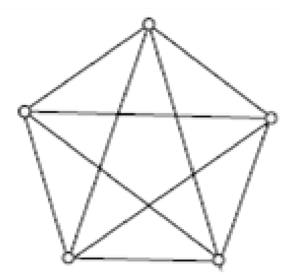
Árvore (Conexão Mímima)



Grafo com vértice de corte



Grafo sem arestas e sem vértices de corte



Grafo completo

A conectividade local de um grafo é uma medida utilizada para caracterizar o padrão de conectividade de um grafo.

Vamos agora aprender como calcular a conectividade local de um grafo. Inicialmente, precisamos entender alguns conceitos básicos.

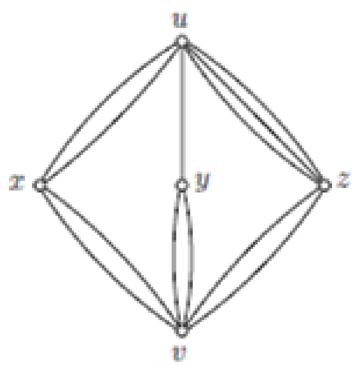
Dois caminhos *P* e *Q* entre dois vértices *x* e *y* são **internamente disjuntos** se não possuem vértices internos em comum: $V(P) \cap V(Q) = \{x,y\}$.

Note que duas arestas paralelas representam 2 caminhos disjuntos entre os vértices incidentes, pois não possuem vértices internos em comum.

Desta forma, a **conectividade local** entre dois vértices distintos *x* e *y* é o número máximo de caminhos internos disjuntos entre estes vértices, denotado por ***p(x,y).***

A conectividade local entre cada par de vértices pode ser representada através de uma matriz de conectividade local, onde cada elemento u_{xy} representa a quantidade de caminhos disjuntos entre o par de vértices *x* e *y* correspondente.

No exemplo abaixo, existem 3 caminhos disjuntos entre *x* e *u* e este valor é registrado na matriz. Os caminhos são representados pelas duas arestas paralelas entre *x* e *u* e temos outras duas opções, mas que não são disjuntos (*x*, *v*, *y*, *u*), (*x*, *v*, *z*, *u*). Portanto, contamos apenas um dos dois.



	u	x	y	z	v
u	*	3	2	4	3
x	3	*	2	2	3
y	2	2	*	2	3
z	4	2	2	*	3
v	3	3	3	3	*

A **conectividade *k(G)*** de *G* é definida como:

$$k(G) = \min\{p(u,v):\ u,v \in V, u \neq v\}$$

Ou seja, é o menor valor de conectividade local que o grafo possui. Para o grafo do exemplo anterior, observando a matriz de conectividade, observamos que K(G) = 2.

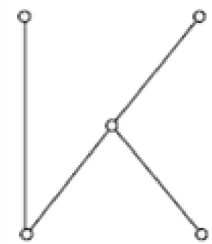
Um grafo não-trivial G é ***k*-conectado** se a sua conectividade é determinada por $K(G) \geq k$. Isto quer dizer, por exemplo, que se K(G) é 2, G é 2-conectado, 1-conectado e 0-conectado, mas não é 3-conectado. Por convenção, um grafo trivial é 0-conectado e 1-conectado, mas não é *k*-conectado para $k > 1$.

Um grafo é 1-conectado se e somente se é conectado. No caso da árvore, há exatamente um caminho entre dois pares de vértices. Para grafos com maior padrão de conectividade, a conectividade entre qualquer par de vértices vai ser no mínimo 1.

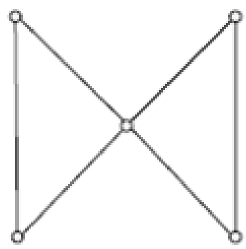
Um grafo é 0-conectado se somente se é desconectado. Neste caso, para pelo menos 2 vértices, a conectividade local vai ser 0.

Grafos não-separáveis com pelo menos 3 vértices são 2-conectados, visto que possuem pelo menos 2 caminhos internos disjuntos entre qualquer par de vértices distintos já que não possuem vértices de corte.

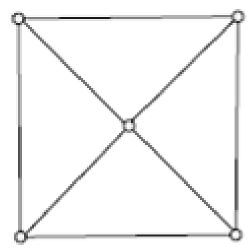
Retornando a escala de conectividade que vimos no início, podemos observar que a conectividade local de toda árvore é 1, bem como de todo grafo que possui um vértice de corte. Grafos sem vértice ou aresta de corte tem K(G) maior ou igual a 2 e a conectividade de um K_n é n-1.



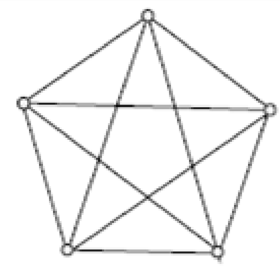
1-conectado
K(G) = 1



1 -conectado
K(G) = 1

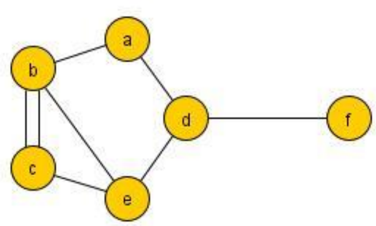


1-conectado
2-conectado
3-conectado
K(G) = 3



1,2,3,4-conectado
K(G) = 4

Exercício: Considere o grafo G abaixo. Encontre a matriz de conectividade local. Qual a conectividade do grafo?



Abaixo, temos a matriz de conectividade local para este grafo. A partir dela, concluímos que K(G) = 1.

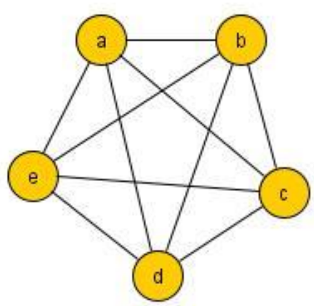
	A	B	C	D	E	F
A	*	2	2	2	2	1
B	2	*	3	2	2	1
C	2	3	*	2	3	1
D	2	2	2	*	2	1
E	2	3	2	2	*	1
F	1	1	1	1	1	*

Exercício: Calcule a conectividade de um grafo ciclo, caminho e completo com *n* vértices.

Em um grafo ciclo, existem exatamente 2 caminhos internos disjuntos entre quaisquer pares de vértices visto que fazem parte de um único ciclo comum. Assim, K(G) = 2.

Por definição, todo grafo caminho é uma árvore. Em uma árvore, existe exatamente um caminho entre 2 vértices quaisquer. Assim, K(G) = 1.

Por definição, em um grafo completo, todo vértice é adjacente a todos os outros vértices do grafo. Portanto, existe n-1 caminhos disjuntos entre 2 vértices quaisquer, sendo 1 através da aresta direta entre eles e n-2 passando por cada um dos outros n-2 vértices. Assim, K(G) = n-1. Abaixo temos um exemplo dos n-1 caminhos disjuntos entre dois pares de vértices em um K_5.



Caminhos disjuntos entre a e b:

(a,b)
(a,c,b)
(a,d,b)
(a,e,b)

Exercícios Propostos

1. Mostre que todo grafo não-trivial tem pelo menos 2 vértices que não são vértices de corte.

2. Seja G um grafo conectado de pelo menos 3 vértices e seja uv uma aresta de corte de G. Mostre que ou u ou v é um vértice de corte de G.

3. Qual a conectividade de vértices do grafo de Petersen?

4. Apresente um exemplo de um grafo conectado cuja remoção de qualquer aresta o torna desconectado.

5. Apresente um exemplo de um grafo conectado cuja remoção de um vértice torna-o desconectado.

6. É verdade que todo grafo sem arestas de corte (pontes) não tem vértices de corte?

7. É verdade que todo grafo não-trivial sem vértices de corte não tem arestas de corte (pontes)?

8. Seja *v* um vértice de um grafo G. Mostre que *v* é um vértice de corte se e somente se existem dois vértices *x* e *y* em V(G) tal que: (1) algum caminho em G vai de *x* a *y* e (2) todo caminho de *x* a *y* contém *v*.

Referências

J. A. Bondy and U. S. R. Murty.Graph Theory. Springer, 2008,2010.

5.1, 5.2, 9.1