

RELATÓRIO DE FUNDAMENTOS DE CONTROLE

Data: 04 de abril de 2017

Matheus Francisco Batista Machado

Matrícula : 14202492

Luan Lorenzo dos Santos Borges

Matrícula : 15104328

Relatório : Fundamentos de Controle

Parte 1:

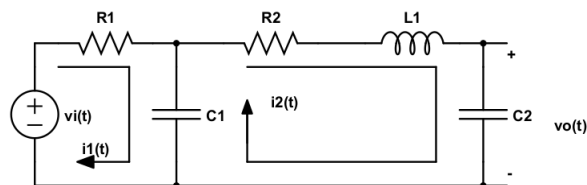


Figure 1: Circuito elétrico

As equações que descrevem o circuito matematicamente:

$$v_i(t) = R_1 i_1(t) + (1/C_1) \int (i_1(t) - i_2(t)) dt \quad (1)$$

$$(1/C_1) \int (i_1(t) - i_2(t)) dt = R_2 i_2(t) + L_1 (d(i_2(t))/dt) + (1/C_2) \int (i_2(t)) dt \quad (2)$$

$$v_o(t) = (1/C_2) \int (i_2(t)) dt \quad (3)$$

Encontrando a função de transferência $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$.

Desenvolvimento matemático

Aplicando a transformada de laplace nas equações do circuito foi obtido:

$$V_i(s) = (R_1 + \frac{1}{C_1 s}) I_1(s) - \frac{I_2(s)}{C_1 s} \quad (4)$$

$$0 = (-\frac{1}{C_1 s}) I_1(s) (R_2 + L_1 s + \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s}) I_2(s) \quad (5)$$

$$V_0(s) = \frac{I_2(s)}{C_2 s} \quad (6)$$

Realizando o desenvolvimento do sistema de equações pelo método de Cramer , tem-se que a função transferência é dada por $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

Desenvolvimento:

$$I_2 = \begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{C_1 s} & V_i(s) \\ -\frac{1}{C_1 s} & 0 \end{vmatrix} = \frac{R_1 + \frac{1}{C_1 s} 0 - (-\frac{1}{C_1 s} V_i(s))}{\Delta}$$

onde Δ é

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{C_1 s} & -\frac{1}{C_1 s} \\ R_2 + L_1 s + \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s} & \frac{1}{C_2 s} \end{vmatrix} = (R_1 + \frac{1}{C_1 s})(R_2 + L_1 s + \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s}) - ((-\frac{1}{C_1 s})(-\frac{1}{C_2 s}))$$

Na equação 6 tem-se que $V_0(s)(C_2 s) = I_2(s)$ substituindo $I_2(s)$ e Δ na equação 7

$$I_2 = \frac{R_1 + \frac{1}{C_1 s} 0 - (-\frac{1}{C_1 s} V_i(s))}{\Delta} \quad (7)$$

Assim pode-se isolar $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$, logo a função de transferência do circuito é:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + (\frac{R_2}{L_1} + \frac{1}{R_1 C_1})s^2 + (\frac{1}{C_2 L_1} + \frac{1}{C_1 L_1} + \frac{R_2}{R_1 C_1 L_1})s + \frac{1}{R_1 C_1 C_2 L_1}} \quad (8)$$

Diagrama de blocos Simulink: Foi realizado a conversão do circuito da figura 1 para um diagrama de blocos logo em seguida foi utilizando o simulink, para verificar se o diagrama é igual a função calculada.

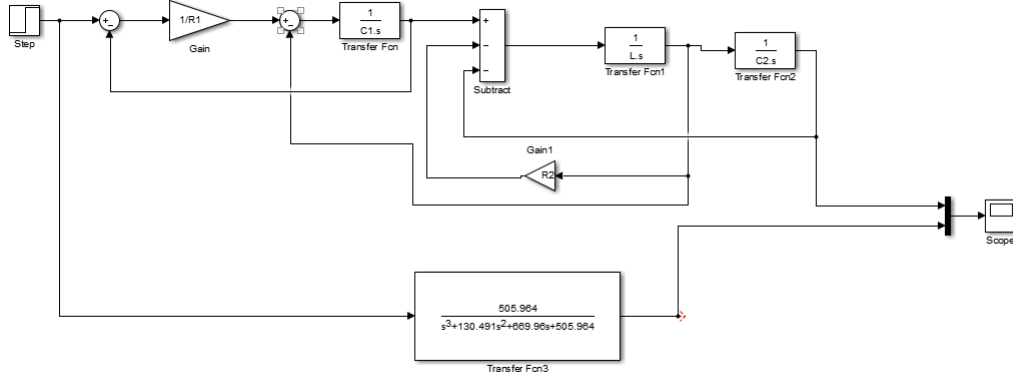


Figure 2: Diagrama de blocos

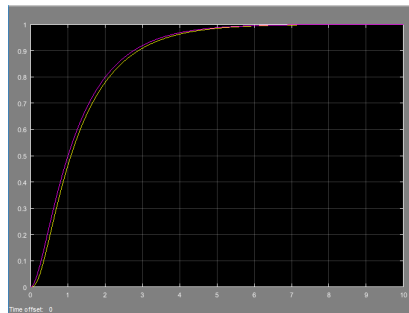


Figure 3: Resultado simulink

Foi realizado a comparação no simulink entre a função de transferência encontrada e o diagrama de blocos montado, com isso pode-se perceber que o diagrama de blocos e a função de transferência encontrada no desenvolvimento matemático são iguais. Os valores utilizados foram: $R_1 = \sqrt[3]{K/10}$, $R_2 = \sqrt[3]{K}$, $C_2 = \sqrt[3]{1/K}$, $C_1 = \sqrt[3]{0.1/K}$, $L_1 = 1H$ dado que $K = 10 + a$ onde a é o número 6.

Vantagens e desvantagens das representações em diagrama e função de transferência

Vantagens:

- A representação por diagramas de blocos tem como principal vantagem a simplificação da análise dos sistemas.
- Qualquer sistema linear pode ser representado por um diagrama de blocos constituído por blocos, somadores e pontos de ramificação.
- Podemos analisar as contribuições de cada componente no sistema.

Desvantagens:

- O diagrama de blocos não contém nenhuma informação relativa à estrutura física do sistema.
- Há montagem do diagrama de blocos, dependendo o circuito pode levar algum trabalho

Diagrama de polos e zeros:

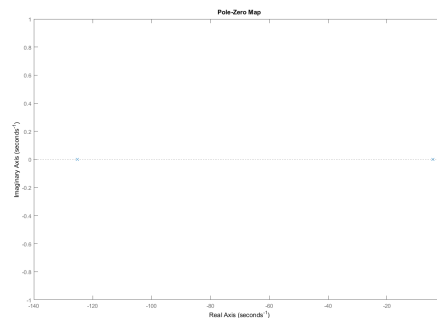


Figure 4: Diagrama de polos e zeros

O sistema obtido é de 3 ordem não tem nenhum zero porém há três polos que são: -125.1709, -4.418, -0.9183.

Aproximação de um sistema de 3 ordem para 2 ordem

Foi realizado a aproximação do sistema devido a sua 3 raiz ser 10 vezes maior que as outras raízes, assim utiliza-se apenas as raízes: -4.4-18,-0.9183. para realizar a aproximação. Foi aplicado o método do teorema do valor final para achar o ganho do novo sistema e comparar a resposta a frequência.

$$G(s) = \frac{A}{(s + 4.418)(s + 0.9183)}. \quad (9)$$

Agora aplicamos o teorema do valor final

$$\lim_{x \rightarrow 0} sF(s) = \text{valor final} \quad (10)$$

Aplicando a um degrau na função de transferência

$$\lim_{x \rightarrow 0} s \frac{A}{s(s + 4.418)(s + 0.9183)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A}{(0 + 4.418)(0 + 0.9183)} = 1$$

$$\frac{A}{(4.418)(0.9183)} = 1$$

$$A = 4.0570494$$

logo tem-se uma função de transferência aproximada de segunda ordem igual

$$G(s) = \frac{4.0570494}{(s + 4.418)(s + 0.9183)}. \quad (11)$$

Em seguida foi feito a simulação com uma entrada a o degrau para comparar a validade da função anterior com a função aproximada.

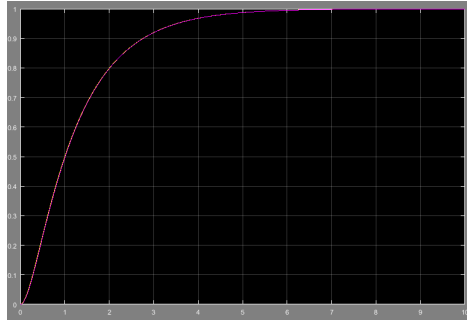


Figure 5: Comparação do sistema 3 com de 2 ordem

Pode-se perceber que tem-se duas retas praticamente sobrepostas, logo dizemos que o sistema foi aproximado para um de segunda ordem devido seu 3 polo ser 10 vezes maior que os demais.

Parte 2:

Na segunda parte do trabalho, os valores dos parâmetros utilizados para obter a função transferência do circuito são: $R_1 = \sqrt[3]{K/10}$, $R_2 = \sqrt[3]{K}$, $C_1 = 0.1/K$, $C_2 = 1/K$, $L_1 = \sqrt[3]{K}$, dado que $K = 10 + a$ onde a é o número 6.

Sabe-se, da primeira parte do trabalho, que a função de transferência do circuito é dada pela função (8). Substituindo os valores dos parâmetros obtêm-se a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{803.1889}{s^3 + 128.079s^2 + 270.644s + 803.1889} \quad (12)$$

O diagrama de polos e zeros do sistema é ilustrado na Figura 7. A função transferência apresenta polos em $p_1 = -1.05 + 2.3j$, $p_2 = -1.05 - 2.3j$ e $p_3 = -126$.

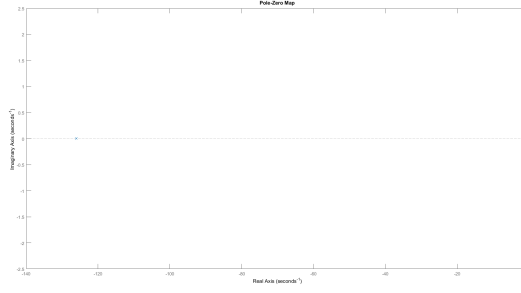


Figure 6: Diagrama de polos e zeros da função (12)

A seguir, foi realizado a simulação do sistema em resposta ao degrau unitário. O comportamento da saída do sistema pode ser visto na Figura 8. É perceptível que o sistema apresenta uma resposta subamortecida quando submetido à um degrau.

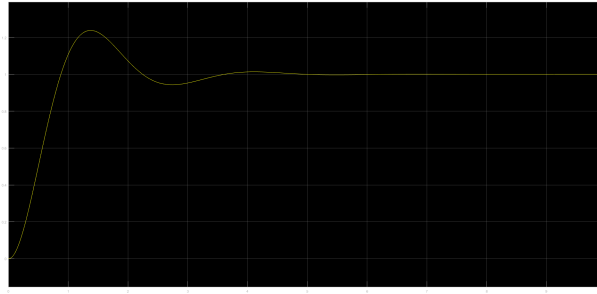


Figure 7: Resposta ao degrau do sistema (12)

A partir dos resultados da simulação foi obtido os seguintes valores para o tempo de pico (t_p), pico máximo (M_p), tempo de subida (t_r) e tempo de acomodação (t_s):

$$t_p = 1.374s \quad (13)$$

$$M_p = 0.239 \quad (14)$$

$$t_r = 0.59s \quad (15)$$

$$t_s = 3.34s \quad (16)$$

A próxima etapa é obter o fator de amortecimento (ξ) e a frequência natural (ω_n) do sistema e estabelecer um sistema de segunda ordem.

Para obter o ξ será utilizado o valor do pico máximo e as seguintes relações:

$$x = (\ln(M_p)/\pi)^2 \quad (17)$$

$$\xi = \sqrt[2]{x/(1+x)} \quad (18)$$

Substituindo o valor de M_p visto em (14), encontra-se o valor de x :

$$x = (\ln(0.239)/\pi)^2 = 0.207 \quad (19)$$

Com o valor de x é calculado o fator de amortecimento ξ :

$$\xi = \sqrt[2]{0.207/(1+0.207)} = 0.414 \quad (20)$$

Para calcular ω_n deve-se encontrar a frequência de oscilação amortecida (ω_d) a partir de sua relação com o tempo de pico (t_p) do sistema, cujo valor é mostrado em (13):

$$t_p = \pi/\omega_d \quad (21)$$

$$\omega_d = \pi/1.374 = 2.286 \quad (22)$$

A partir da seguinte relação é obtido ω_n :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (23)$$

$$\omega_n = 2.286 / \sqrt{1 - 0.414^2} = 2.511 \quad (24)$$

Um sistema de segunda ordem é descrito pela seguinte função (sabendo que o valor final é 1):

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (25)$$

Substituindo os parâmetros ξ e ω_n , obtêm-se o sistema de segunda ordem:

$$G(s) = \frac{6.307}{s^2 + 2.079s + 6.307} \quad (26)$$

O diagrama de polos e zeros do sistema de segunda ordem é mostrado na Figura 9. Os polos do sistema estão localizados em $p_1 = -1.04 + 2.29j$ e $p_2 = -1.04 - 2.29j$.

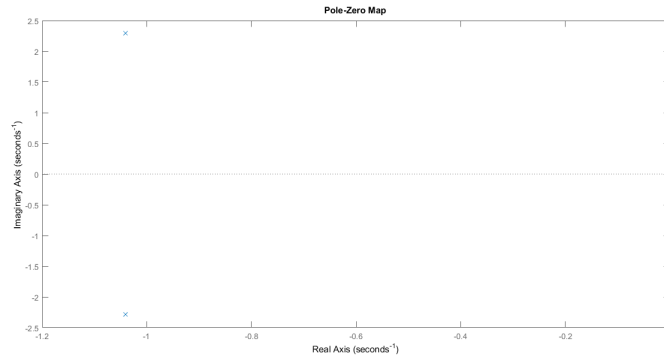


Figure 8: Diagrama de polos e zeros do sistema de segunda ordem

Visto que o terceiro polo da função de transferência (12) ($p_3 = -126$) obedece o critério de estar mais de 10 vezes longe dos demais polos, é garantido a validade da aproximação pelo sistema de segunda ordem (26). A simulação do sistema de segunda ordem e do sistema original, em resposta ao degrau unitário, é mostrado na Figura 10.

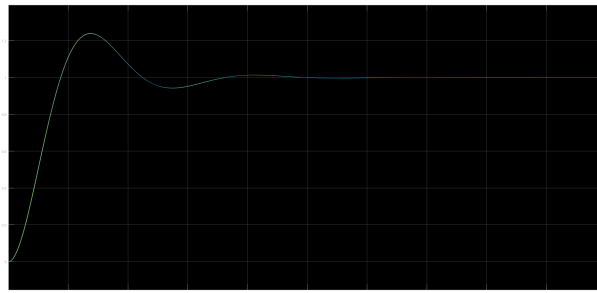


Figure 9: Resposta ao degrau do sistema original e de segunda ordem

Visto a validade da aproximação, observa-se na simulação que o sistema de segunda ordem apresenta o comportamento esperado quando submetido a um degrau.