

Tarefa para entregar - Zero de funções

Lançamento de projétil

Nesta atividade vamos calcular o ângulo θ que devemos lançar um projétil com velocidade v_0 de forma que ele atinja um alvo a uma distância x . A Figura 1 ilustra o problema, onde consideraremos o lançador de projéteis a uma altura y_0 em relação ao chão, nível onde está o alvo a ser atingido.

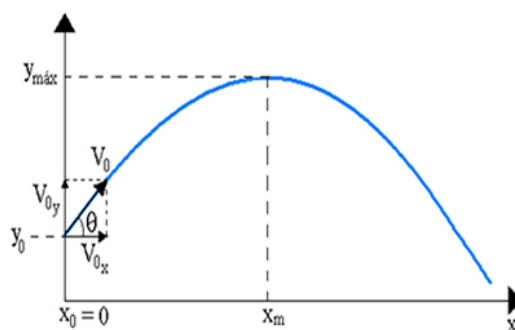


Figure 1: Ilustração do lançamento de um projétil. Fonte: <https://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/trajetoria-projeteis.htm>

Para resolver esse problema, vamos relembrar de algumas equações básicas de cinemática. A distância horizontal percorrida pelo projétil em um tempo t é

$$x = v_0 \cos(\theta) t. \quad (1)$$

Já a posição ao longo do eixo vertical do projétil em um tempo t é

$$y = y_0 + v_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (2)$$

onde $g = 9.98 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade. O tempo t no qual o projétil atinge o alvo pode ser obtido fazendo $y = 0$ e resolvendo a equação (2), o que leva a

$$t = -\frac{1}{g} \left[-v_0 \sin(\theta) \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gy_0} \right]. \quad (3)$$

Como estamos interessados na solução com tempo positivo, temos:

$$t = \frac{1}{g} \left[v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gy_0} \right]. \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1), encontramos:

$$x(\theta) = \frac{v_0 \cos(\theta)}{g} \left[v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gy_0} \right], \quad (5)$$

ou seja, fixados a posição do lançador de projéteis e a velocidade inicial do projétil, dado o ângulo de lançamento podemos determinar a posição em que o projétil atingirá o solo (e o alvo). Entretanto, estamos interessados no problema inverso: qual deve ser o ângulo que o projétil deve ser lançado para atingir um alvo a uma certa distância? É possível encontrar uma expressão algébrica para θ em função de x , mas não é tão simples e nem tão bonita. Em vez disso, resolveremos a equação (5) numericamente.

Nesta atividade consideraremos que o lançador de projéteis está a uma altura $y_0 = 5\text{m}$ e que o projétil é lançado com velocidade $v_0 = 120\text{km/h}$. Vamos determinar os ângulos que o projétil deve ser lançado para atingir um alvo que está a 80m distante do lançador na direção horizontal (ou seja, $x = 80\text{m}$). Para isso vamos encontrar o zero da função

$$f(\theta) = x - \frac{v_0 \cos(\theta)}{g} \left[v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gy_0} \right]. \quad (6)$$

Tarefa:

1. Construa um gráfico de $f(\theta)$ em função de θ usando a equação (6).
2. Utilize um dos métodos vistos em aula para determinar os valores de θ que correspondem aos zeros dessa função, ou seja, onde a função cruza o eixo das abscissas.
3. Para cada um dos ângulos θ , grafique a correspondente trajetória do projétil, $y(t) \times x(t)$. Você pode usar a equação (4) para determinar o tempo no qual o projétil atinge o alvo. Coloque as duas trajetórias em uma mesma figura, indicando na legenda do gráfico qual o valor de θ cada trajetória corresponde.
4. Faça esse exercício no Colab, salve o trabalho em pdf e envie pelo Moodle no local adequado. Coloque o link do Colab no comentário de envio do Moodle.