UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ENGENHARIA DE SISTEMAS

Fluidos e Termodinâmica Computacional

2023/2

Matheus Vinícius Freitas Oliveira dos Santos
2020027172

Belo Horizonte

1ª Questão – Óleo (SAE 30 - $\mu = 0{,}29\, kgm^{-1}s^{-1}$ e $\rho = 891\, kgm^{-3}$) está em repouso próximo a uma placa horizontal quando ela começa a se mover subitamente a uma velocidade constante (U0) de 1 m/s. A equação diferencial que modela este fenômeno é a seguinte:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

em que u representa a velocidade (m/s) ao longo da direção x, t representa o tempo (s), y representa a distância vertical a partir da placa, μ representa a viscosidade dinâmica do fluido e ρ representa a massa específica do fluido. Usando o método de diferenças finitas, avalie a velocidade do óleo em um ponto localizado a 3 cm da placa após 0,5 segundo e 1 segundo da movimentação da placa. Para efeito de análise, considere que o domínio se estende até uma distância de 10 cm da placa. Compare os resultados com a solução analítica dada a seguir

$$\frac{u}{U_0} = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}t}}\right)$$

em que

$$erf(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta} e^{-x^2} dx$$

é chamada função erro.

Solução analítica

Para resolver a equação diferencial dada, podemos utilizar o método de separação de variáveis. Vamos considerar que a solução para a velocidade u pode ser expressa na forma de uma função separável, ou seja, $u(y,t) = F(y)G(t)$.

Substituindo essa forma na equação diferencial, obtemos:

$$\frac{\partial(F(y)G(t))}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 (F(y)G(t))}{\partial y^2}$$

Dividindo ambos os lados da equação por $F(y)G(t)$, obtemos:

$$\frac{1}{G(t)}\frac{\partial G(t)}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{1}{F(y)}\frac{\partial^2 F(y)}{\partial y^2}$$

Agora, podemos reescrever essa equação em termos das variáveis t e y separadamente, igualando cada lado a uma constante $-\lambda^2$. Assim, temos:

$$\frac{1}{G(t)}\frac{\partial G(t)}{\partial t} = -\lambda^2$$

e

$$\frac{1}{\mathrm{F(y)}}\frac{\partial^2 \mathrm{F(y)}}{\partial \mathrm{y}^2} = -\frac{\rho}{\mu}\lambda^2$$

A primeira equação é uma equação diferencial ordinária em relação a t, cuja solução é dada por

$$G(t) = e^{-\lambda^2 t}$$

A segunda equação é uma equação diferencial ordinária em relação a y, cuja solução é dada por

$$F(y) = Ae^{-\frac{\rho}{2\mu}},$$

onde A é uma constante a ser determinada pelas condições iniciais. A solução geral é idêntica à solução para a equação da condução do calor. Considerando as condições iniciais

$$u(y,t) = \begin{cases} 0, & se\ y < 0, \quad \forall t \\ U_0 = 1, & se\ y = 0, \quad t \geq 0 \\ 0, & se\ y\beta_\infty, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

que resulta na solução

$$\frac{u(y,t)}{U_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}t}}} e^{-x^2} dx$$

Resolvendo para valores específicos do enunciado, obtemos:

Para $y = 0.03\ m\ e\ t = 0.5\ s$, temos $u(y,t) = 0.09634\ m/s$.

Para $y = 0.03\ m$ e $t = 1.0\ s$, temos $u(y,t) = 0.23966\ m/s$.

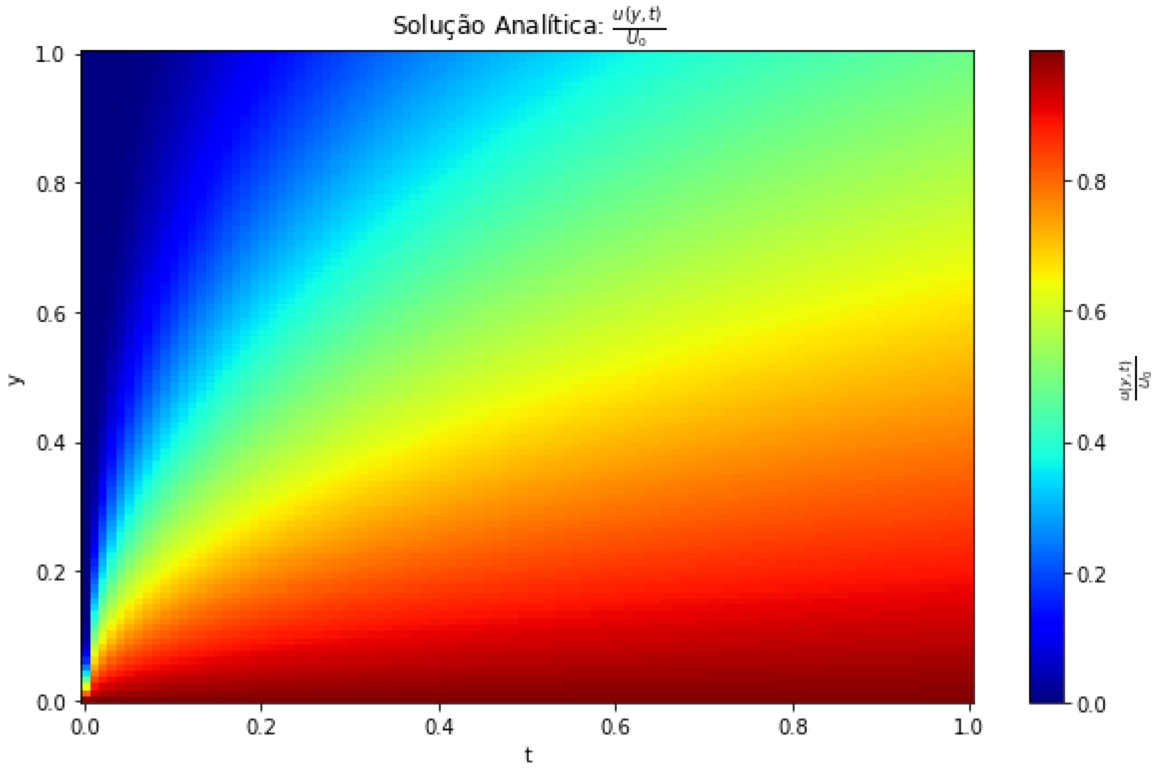

Figura 1. Solução analítica da equação diferencial parcial visualizada como um gráfico de cores

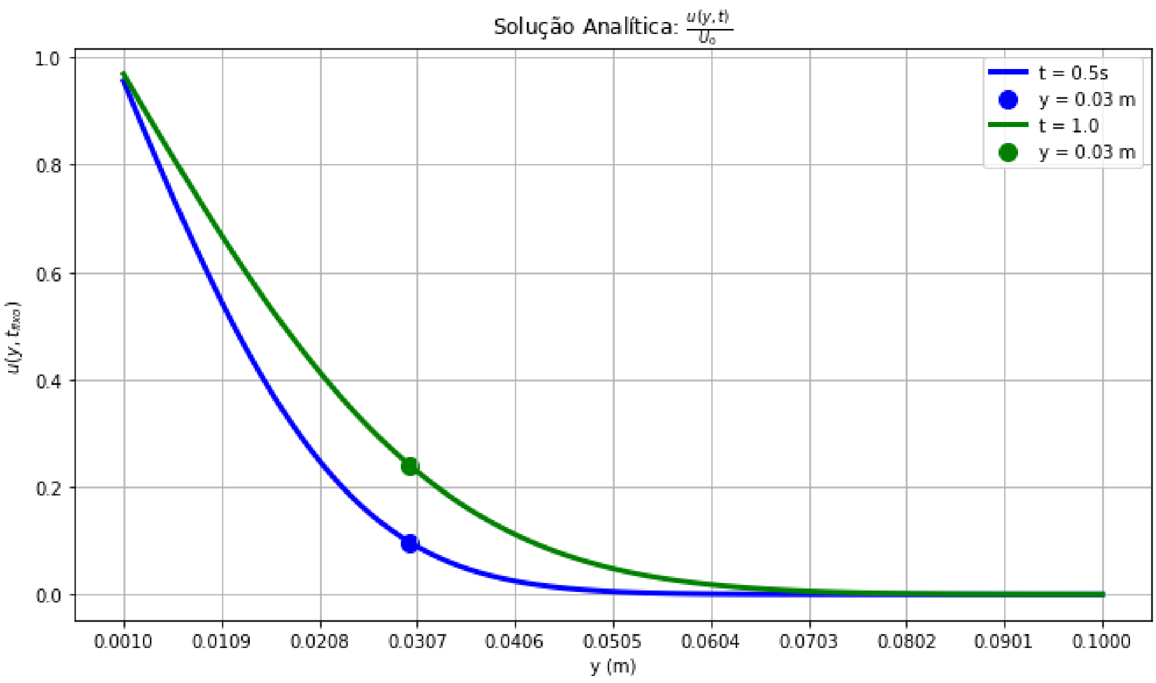

Figura 2. Curvas para t = 0.5s e t = 1s, com o ponto em ambas as curvas igual a y = 0,03m

Solução numérica

Manipulando a expressão a seguir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\mu}{\rho}\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+i}^n}{\Delta \boldsymbol{y}^2}$$

$$U_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n+1}} = U_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\Delta t}{\Delta y^2}(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+i}^n)$$

A constante

$$\propto = \frac{\mu}{\rho}\frac{\Delta t}{\Delta y^2}$$

é a responsável por criar a relação entre as discretizações temporal e espacial. Para a estabilidade do algoritmo, devemos ter:

$$\Delta t \leq \frac{\mu}{\rho}\frac{\Delta t}{2} \ ,$$

$$U_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n+1}} = U_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}} + \propto (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+i}^n)$$

Com as condições de contorno

$$U_0^n = U_0 \ = 1$$

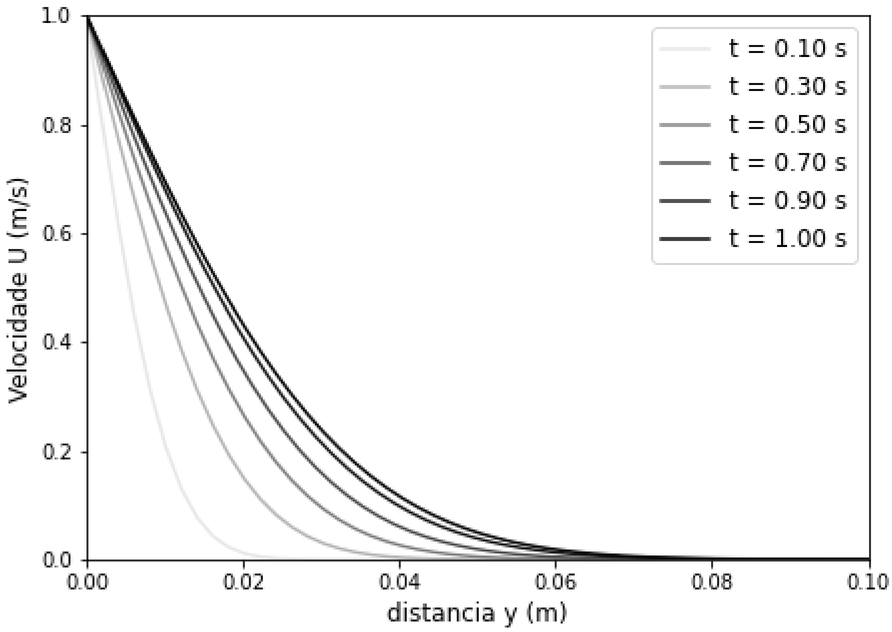

Figura 3. Perfil de velocidade em função da distância para valores de tempo variando de 0.1 a 1s

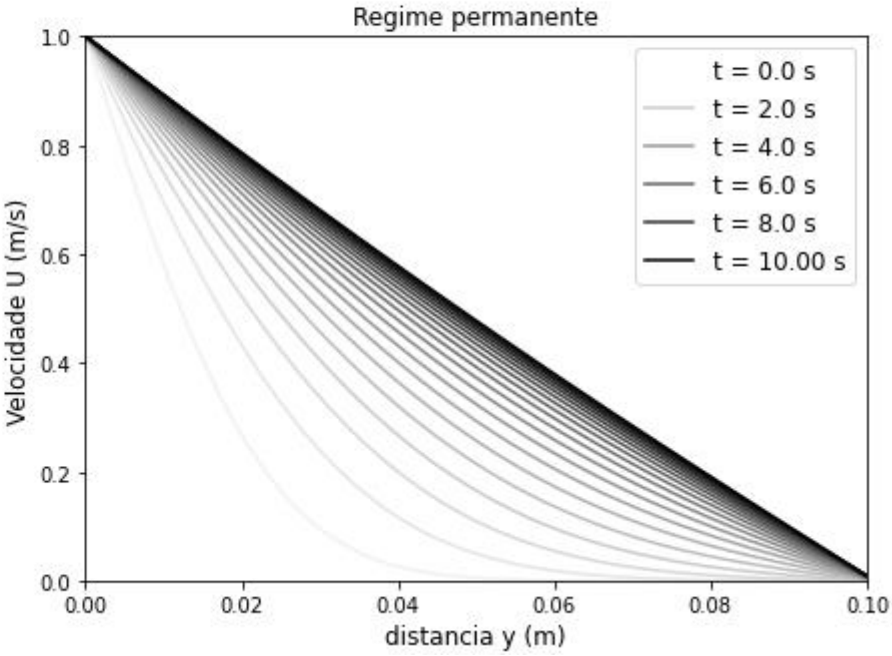

Figura 4. Perfil de velocidade em função da distância com t até 10s evidenciar a transição do regime transiente para a condição estacionária do regime permanente

2ª Questão – O escoamento de um fluido, em regime permanente, plenamente desenvolvido, ao longo de uma tubulação pode ser modelado pela seguinte equação diferencial.

$$-1\frac{d\rho}{dz}+\frac{\mu}{\rho}\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr})\;=\;0$$

em que u representa a velocidade axial (m/s), r a coordenada radial com origem na linha de centro do tubo, μ representa a viscosidade dinâmica do fluido, ρ representa a massa específica do fluido e dp/dz representa o gradiente de pressão que é constante. Quais são as condições de contorno a serem utilizadas na solução da equação diferencial? Obtenha uma expressão para o perfil de velocidade.

Discretize a equação diferencial usando o método de diferenças finitas. Considere um tubo com raio interno de 25 mm, que o fluido que escoa é água ($\mu = 1{,}01x10kgm^{-1}s^{-1}$ $e\ \rho = 998kgm^{-3}$) e que o gradiente de pressão tem valor de -12,928 N/m. Resolva o problema usando diferentes malhas e compare os resultados numéricos com aqueles obtidos por meio do uso da solução analítica.

Solução

Para facilitar a compreensão da resolução, a questão será dividida em três partes:

a) Quais são as condições de contorno a serem utilizadas na solução da equação diferencial?

Considerando que o escoamento atingiu a condição de regime permanente, podemos definir as seguintes condições de contorno:

1) **Velocidade axial** $u(r)$:

Assumimos que a velocidade do fluido é máxima na linha central do tubo $(r = 0)$, e essa velocidade é expressa como u_0. A derivada radial $\frac{du}{dr}$ é igual a zero na linha central $(r = 0)$,. Portanto, temos:

$$u(z, r = 0) = u0$$

$$\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=0} = 0$$

2) **Simetria axial** (θ): O fluxo é simétrico em relação ao ângulo radial θ, e sendo o mesmo apenas radial, temos que:

$$u_\theta(L, r) = 0$$

$$\left.\frac{du}{d\theta}\right| = 0$$

3) **Gradiente de pressão constante**: A condição de que $\frac{d\rho}{dz}$ é constante implica em uma relação linear entre a pressão e a coordenada z. Podemos expressar essa relação como:

$$\rho(z) = \rho_0 + (\frac{d\rho}{dz})\, z$$

onde ρ_0 é a pressão no ponto $z = 0$ e $(\frac{d\rho}{dz})$ é o valor constante do gradiente de pressão ao longo da tubulação. Quanto à pressão, temos em $z = 0$:

$$p(0, r) = \rho_0$$

e em $z = L$:

$$\rho(L) = \rho_0 + (\frac{d\rho}{dz})\, L$$

Essas são as condições de contorno apropriadas para a equação diferencial dada, considerando o escoamento em regime permanente, plenamente desenvolvido em uma tubulação. A primeira condição de contorno na entrada representa a velocidade máxima na linha central do tubo, enquanto a segunda condição de contorno na saída indica que a velocidade é uniforme em toda a seção transversal do tubo.

b) Obtenha uma expressão para o perfil de velocidade.

Considerando a equação diferencial dada:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{du}{dr}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} \ ,$$

e integrando ambos os lados em relação a r, obtemos

$$r \cdot \frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz} \cdot r^2 + C1$$

onde $C1$ é uma constante de integração.

Agora, dividindo ambos os lados por r e rearranjando os termos, temos:

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz} \cdot r + \frac{C1}{r}$$

Integrando novamente em relação a r, obtemos:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz} \cdot r^2 + C1\ln(r) + C2$$

onde $C2$ é outra constante de integração.

Usando as condições de contorno, podemos determinar os valores das constantes $C1$ e $C2$.

No centro da tubulação $(r = 0)$, temos $u(r = 0) = u_0$ e $\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=0} = 0$. Substituindo essas condições na expressão para $\frac{du}{dr}$, temos:

$$r \cdot \frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz} \cdot r^2 + C1$$

$$C1 = 0$$

Portanto, $C1 = 0$.

Já na parede do tubo $(r = R)$, temos $u(r = R) = 0$, resultando em:

$$u(R) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz} \cdot R^2 + C2$$

$$C2 = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}$$

Finalmente, substituindo os valores de $C1$ e $C2$ na expressão para $u(r)$, obtemos o perfil de velocidade completo:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz} \cdot r^2 - \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz} \cdot R^2$$

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dz} \cdot \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

Portanto, a velocidade máxima ocorre em $r = 0$, e é numericamente igual a $u(0) = 2.000\ m/s$.

c) Solução numérica

A solução é dita discreta porque só é obtida em um número finito de pontos chamados nós ou vértices. A localização radial dos nós é r_j onde $j = 1, \dots, M$ é o índice do nó e M é o número total de nós (incluindo os nós localizados nas posições de contorno). Consideramos uma geometria radial, com uma malha de espessura constante dada por:

$$\Delta \mathrm{r} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{M} - 2}$$

com os nós posicionados no centro de cada intervalo de malha e de igual espessura, ou seja, $\delta r = \Delta r$. Sendo assim, para cada intervalo de malha, temos a discretização da equação diferencial como se segue, onde os índices r_s e r_n são as posições limítrofes inferior (sul) e superior (norte) de cada elemento da malha:

$$\int_{r_s}^{r_n} \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{du}{dr}\right) dr = \int_{r_s}^{r_n} \frac{1}{\mu}\left(\frac{d\rho}{dz}\right) \cdot r \cdot dr \ ,$$

Cujo resultado é:

$$\left(r \cdot \frac{du}{dr}\right)_{r_n} - \left(r \cdot \frac{du}{dr}\right)_{r_s} = \frac{1}{\mu}\frac{d\rho}{dz} \cdot r_j \cdot \Delta r$$

A discretização entao é definida a seguir:

$$\left(r \cdot \frac{du}{dr}\right)_{r_n} \approx r_n \frac{u_{j+1} - u_j}{r_{j+1} - r_j} = r_n \frac{u_{j+1} - u_j}{(\delta r)_j}$$

$$\left(r \cdot \frac{du}{dr}\right)_{r_s} \approx r_s \frac{u_j - u_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} = r_s \frac{u_j - u_{j-1}}{(\delta r)_{j-1}}$$

que resulta em uma equação diferencial discretizada da forma

$$\frac{2\mu}{r_j \cdot \Delta \mathrm{r}}\left[\frac{r_n}{(\delta r)_j} u_{j+1} + \frac{r_s}{(\delta r)_{j-1}} u_{j-1} - \left(\frac{r_n}{(\delta r)_j} + \frac{r_n}{(\delta r)_j}\right) u_j\right] = \frac{d\rho}{dz}$$

Definindo

$$a_S = \frac{2\mu \cdot r_s}{r_j \cdot \Delta r (\delta r)_{j-1}}$$

$$a_N = \frac{2\mu \cdot r_n}{r_j \cdot \Delta r (\delta r)_j}$$

$$a_P = a_S + a_N$$

podemos escrever de forma mais compacta:

$$a_S u_{j-1} + a_N u_{j+1} - a_P u_j = \frac{d\rho}{dz}$$

$$u_{j+1} = \frac{1}{a_N}\frac{d\rho}{dz} - \frac{a_S}{a_N}u_{j-1} + \frac{a_P}{a_N}u_j$$

As condições de contorno na forma discreta são:

$$u_2 = u_1 \ ,$$

que é o resultado da derivada do perfil de velocidade ser nula no centro, e

$$u_M = 0 \ ,$$

para que a velocidade seja nula na superfície da tubulação. Portanto, temos:

$$\begin{cases} u_1 - u_2 & = 0, & Nó\ 1 \\ a_{S,2}u_1 + a_{N,2}u_3 - a_{P,2}u_2 & = \dfrac{d\rho}{dz}, & Nó\ 2 \\ a_{S,i}u_{i-1} + a_{N,i}u_{i+1} - a_{P,i}u_i & = \dfrac{d\rho}{dz}, & Nó\ i - ésimo \\ u_M & = 0, & Nó\ M \end{cases}$$

Resultados e gráficos obtidos pelo algoritmo:

```
A velocidade máxima, em r=0 é u(0)=2.0000m/s
```

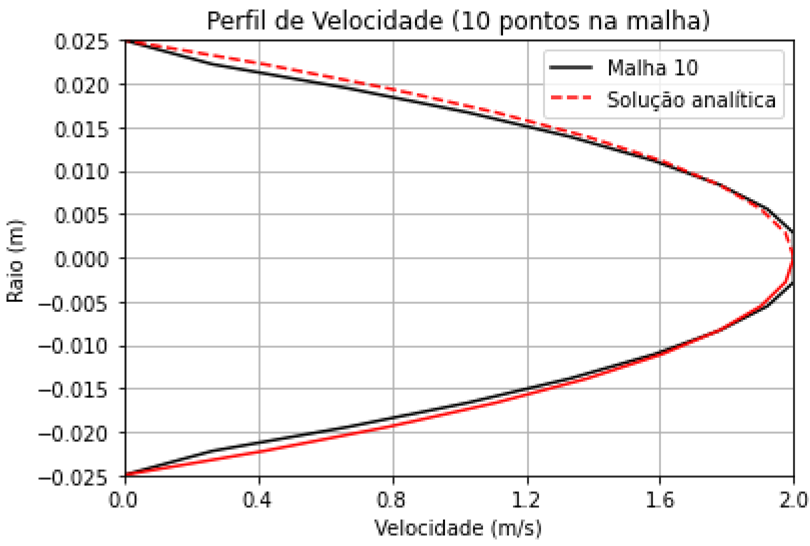

Figura 5. Comparação entre as soluções analítica e numérica, a equação diferencial foi discretizada com diferenças progressivas e resolvida sequencialmente

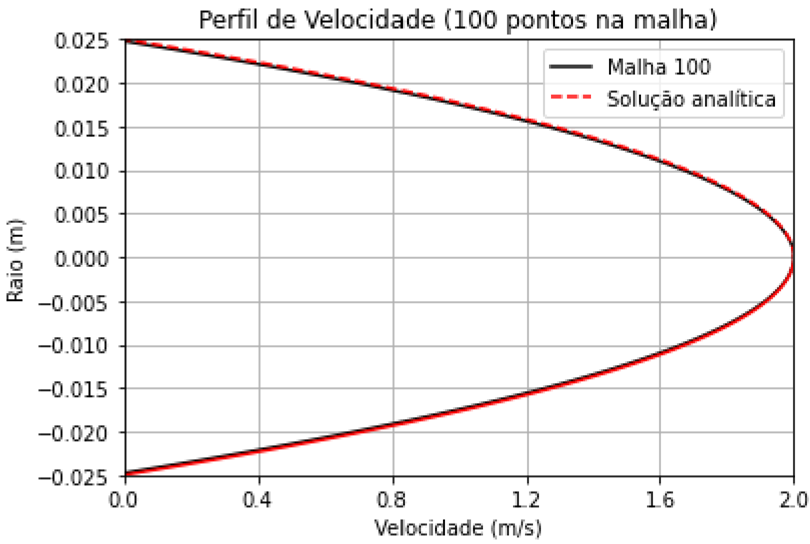

Figura 6. Comparação entre as soluções analítica e numérica, a equação diferencial foi discretizada com diferenças progressivas e resolvida sequencialmente

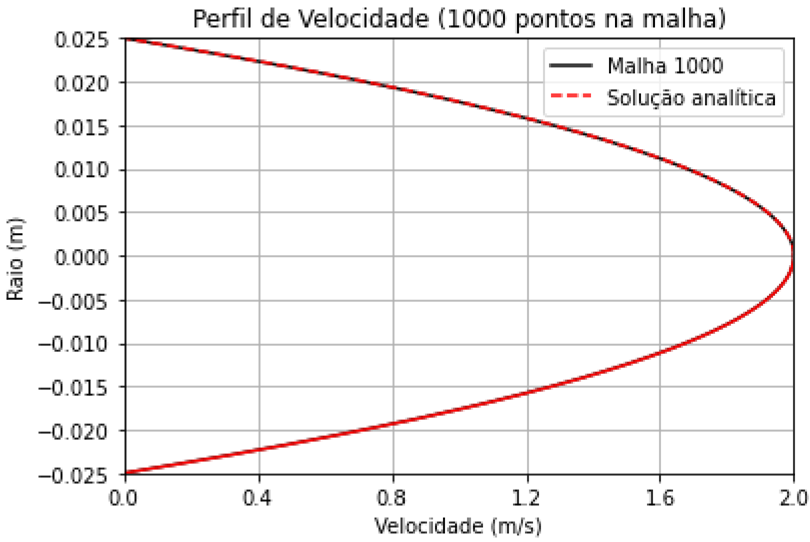

Figura 7. Comparação entre as soluções analítica e numérica, a equação diferencial foi discretizada com diferenças progressivas e resolvida sequencialmente

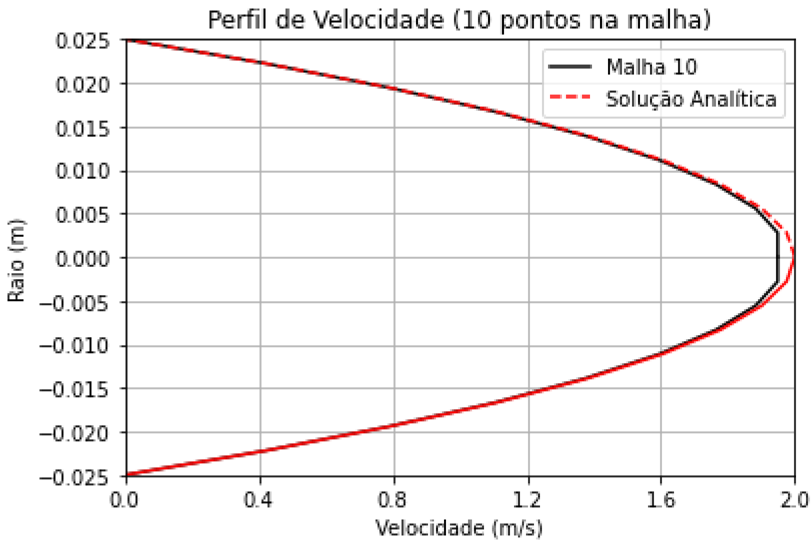

Figura 8. Comparação entre as soluções analítica e numérica, a equação diferencial foi discretizada com diferenças centrais e resolvida com diagonalização matricial

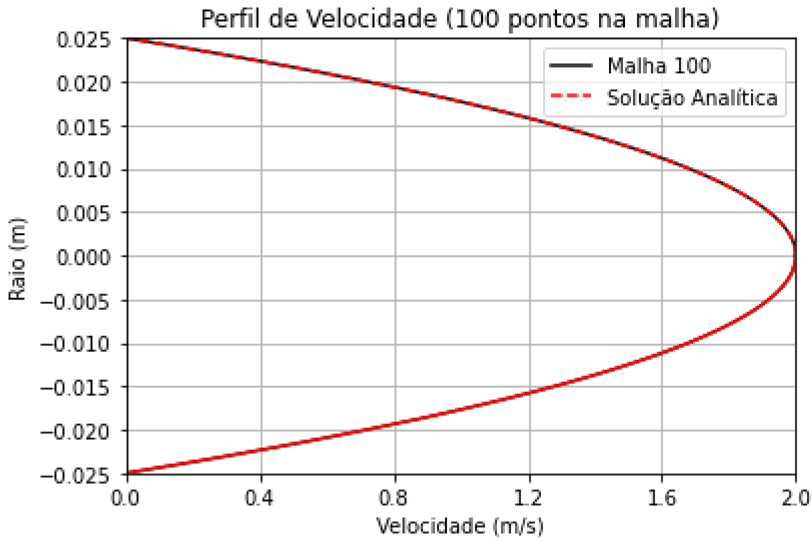

Figura 9. Comparação entre as soluções analítica e numérica, a equação diferencial foi discretizada com diferenças centrais e resolvida com diagonalização matricial

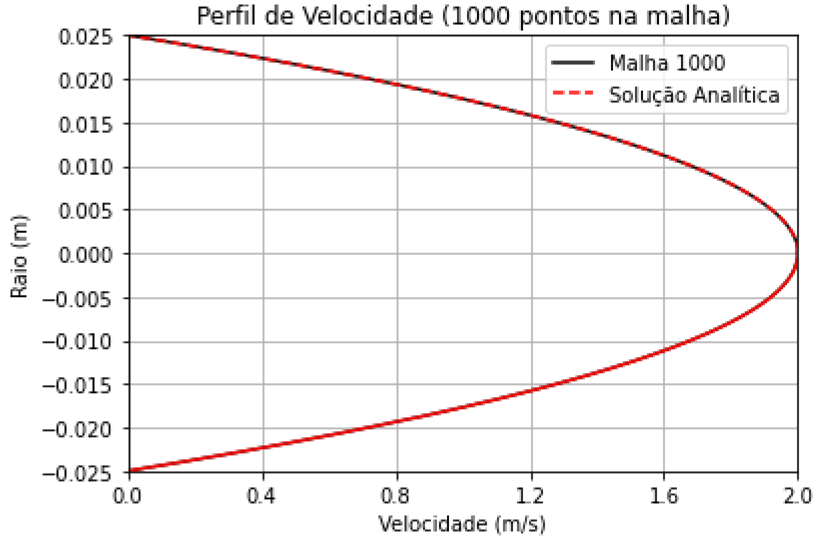

Figura 10. Comparação entre as soluções analítica e numérica, a equação diferencial foi discretizada com diferenças centrais e resolvida com diagonalização matricial

3ª Questão - Considere o escoamento de glicerina (μ = 1,49 kgm-1 s -1) entre duas placas planas horizontais e distantes 10 mm entre si, conforme mostra a figura 1. A placa superior se move a uma velocidade constante de 1 ms-1 . Considere que há um gradiente de pressão ao longo da direção do escoamento.

Apresente a modelagem matemática do problema e mostre que a solução analítica tem a forma

$$\frac{\mathrm{u(y)}}{\mathrm{U}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right) + \mathrm{P}\left(1+\frac{y^2}{h^2}\right),$$

onde

$$P = -\frac{dp}{dx}\left(\frac{h^2}{2\mu U}\right)$$

Nestas equações, y representa a distância vertical a partir da linha de centro localizada entre as placas, u(y) representa o perfil de velocidade da glicerina, U a velocidade da placa superior, h (±5 mm) a distância entre as placas até a linha de centro, dp/dx representa o gradiente de pressão ao longo da direção do escoamento e μ representa a viscosidade dinâmica da glicerina.

Discretize a equação diferencial usando o método de diferenças finitas. Considerando um gradiente de pressão igual a -178800 Pa/m, obtenha, numericamente, a distribuição de velocidade e compare os resultados numéricos com a solução analítica.

Solução

Assim como na questão anterior, para facilitar a compreensão da resolução, a questão será dividida em duas partes:

a) Apresente a modelagem matemática do problema e mostre que a solução analítica tem a forma

$$\frac{\mathrm{u(y)}}{\mathrm{U}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)+\mathrm{P}(1+\frac{y^2}{h^2}) \,,$$

onde

$$P = -\frac{dp}{dx}(\frac{h^2}{2\mu U})$$

Considerando a equação de Navier-Stokes para fluidos em regime laminar e estacionário aplicada a um escoamento unidimensional na direção vertical, temos:

$$\rho\left(\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}\right) = -\frac{dp}{dx}+\mu(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2})$$

Considerando as características do fluxo descritas no enunciado, podemos assumir que:

$\frac{du}{dt}=0,$ pois estamos considerando o regime permanente.

$\frac{du}{dx}=0,$ porque o perfil de velocidade na direção x não varia.

$\frac{d^2u}{dx^2}=0,$ pelo mesmo motivo do item acima.

$v=0,$ porque não há componente da velocidade na direção y (fluxo laminar).

Aplicando as condições acima à equação de Navier-Stokes, temos:

$$0 = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$$

Abaixo, obtemos a solução geral desta equação diferencial parcial por integração direta:

$$\int\frac{d^2u}{dy^2}\cdot dy = \int\frac{1}{\mu}\cdot\frac{dp}{dx}dy$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{dp}{dx}\cdot y + C_1$$

$$\int\frac{du}{dy}\cdot dy = \int(\frac{1}{\mu}\cdot\frac{dp}{dx}\cdot y + C_1)dy$$

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\cdot\frac{dp}{dx}\cdot y^2 + C_1\cdot y + C_2$$

Considerando as condições de contorno:

$u(-h)=0,$ representa a velocidade da placa inferior, que está fixa.

$u(h)=U,$ representa a velocidade constante da placa superior.

$\frac{dp}{dx} = cte$, é o gradiente de pressão constante na direção paralela às placas.

Podemos obter os valores específicos das constantes de integração C_1 e C_2:

$$u(y = h) = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot h^2 + C_1 \cdot h + C_2$$

$$u(y = -h) = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot (-h)^2 - C_1 \cdot h + C_2$$

$$U = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot h^2 + C_1 \cdot h + C_2$$

$$0 = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot h^2 - C_1 \cdot h + C_2$$

Resolvendo o sistema linear acima para C1 e C2, obtemos:

$$C_2 = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot h^2 + \frac{U}{2}$$

$$C_1 = \frac{U}{2h}$$

Portanto, temos a solução específica para as condições de contorno dadas:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot y^2 + \frac{U}{2h} \cdot y - \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot h^2 + \frac{U}{2}$$

$$\frac{u(y)}{U} = \left(\frac{h^2}{2\mu U}\right)\left(\frac{y^2}{h^2} - 1\right) + \frac{1}{2}(\frac{y}{h} + 1)$$

Definindo

$$P = -\left(\frac{h^2}{2\mu U} \cdot \frac{dp}{dx}\right)$$

obtemos, finalmente:

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h} + 1\right) + P(1 - \frac{y^2}{h^2})$$

A velocidade máxima ocorre em r = 0.000836 m, e é igual a $u(r_{max})$ = 2.0417m/s.

b) Solução numérica

Aplicando a mesma discretização da Questão 2, definimos a localização vertical dos nós em y_j onde $j = 1, \ldots, M$ é o índice do nó e M é o número total de nós (incluindo os nós localizados nas posições de contorno). Consideramos uma geometria cartesiana, com uma malha de espessura constante dada por:

$$\Delta y = \frac{2h}{M-2}$$

com os nós posicionados no centro de cada intervalo de malha e de igual espessura, ou seja, $\delta y = \Delta y$. Sendo assim, para cada intervalo de malha, temos a discretização da equação diferencial como se segue, onde os índices y_s e y_n são as posições limítrofes inferior (sul) e superior (norte) de cada elemento da malha:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y + \frac{U}{2h}$$

$$\int_{y_s}^{y_n} \frac{d^2u}{dy^2} \cdot dy = \int_{y_s}^{y_n} \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} dy,$$

cujo resultado é:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y_n} - \left(\frac{du}{dy}\right)_{y_s} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\Delta y$$

A discretização então é definida a seguir:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y_n} \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{y_{j+1} - y_j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{(\delta y)_j}$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y_s} \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{y_i - y_{j-1}} = \frac{u_j - u_{j-1}}{(\delta y)_{j-1}}$$

que resulta em uma equação diferencial discretizada da forma

$$\frac{\mu}{\Delta \mathrm{y}}\left[\frac{1}{(\delta y)_j}u_{j+1} + \frac{1}{(\delta y)_{j-1}}u_{j-1} - \left(\frac{1}{(\delta y)_j} + \frac{1}{(\delta y)_{j-1}}\right)u_j\right] = \frac{d\rho}{dx}$$

$$\frac{\mu}{\Delta \mathrm{y} \cdot \delta y}\left[u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j\right] = \frac{d\rho}{dx}$$

$$u_j = -\left(\frac{\Delta \mathrm{y} \cdot \delta y}{2\mu}\right)\frac{d\rho}{dx} + \frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2}$$

Definindo

$$a_p = -\left(\frac{\Delta \mathrm{y} \cdot \delta y}{\mu}\right)\frac{d\rho}{dx},$$

temos

$$u_j = a_p + \frac{u_{j+1} + u_{j-1}}{2}$$

As condições de contorno na forma discreta são:

$$u_1 = 0,$$

Que é o resultado da placa inferior, e

$$u_M = U,$$

representando o movimento da placa superior. Portanto, a matriz de discretização resultante é:

$$\begin{cases} u_1 & = 0, & Nó\ 1 \\ u_2 - \dfrac{u_3}{2} & = a_p, & Nó\ 2 \\ u_1 - \dfrac{u_{i+1} + u_{i-1}}{2} & = a_p, & Nó\ i - ésimo \\ u_M & = U, & Nó\ M \end{cases}$$

```
A velocidade máxima em r=0.6428m é u(0)=2.0417m/s
```

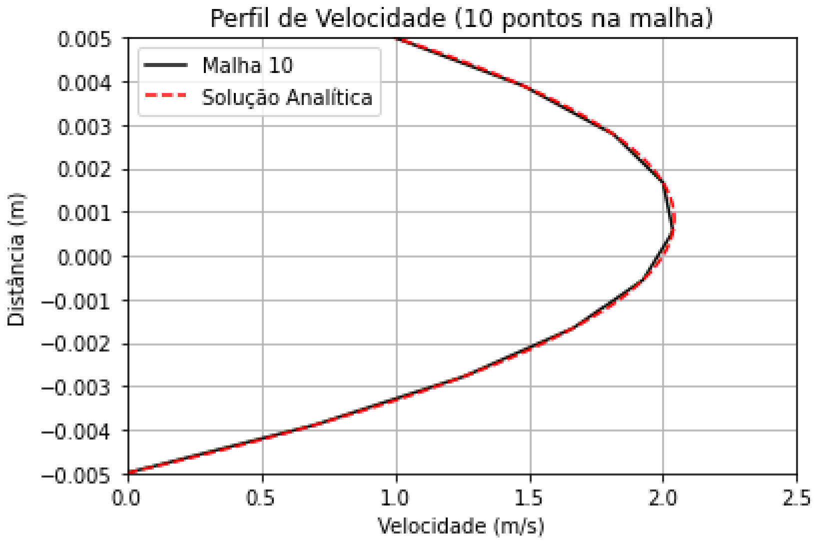

Figura 11. Comparação entre as soluções analítica e numérica, onde a equação diferencial foi discretizada com diferenças centrais e resolvida com diagonalização matricial.

```
A velocidade máxima em r=0.0539m é u(0)=2.0417m/s
```

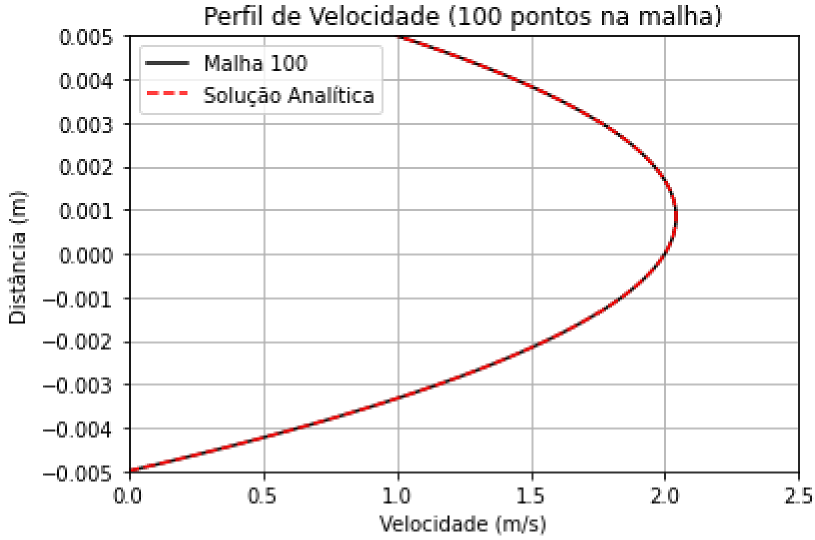

Figura 12. Comparação entre as soluções analítica e numérica, onde a equação diferencial foi discretizada com diferenças centrais e resolvida com diagonalização matricial.

```
A velocidade máxima em r=0.0008m é u(0)=2.0417m/s
```

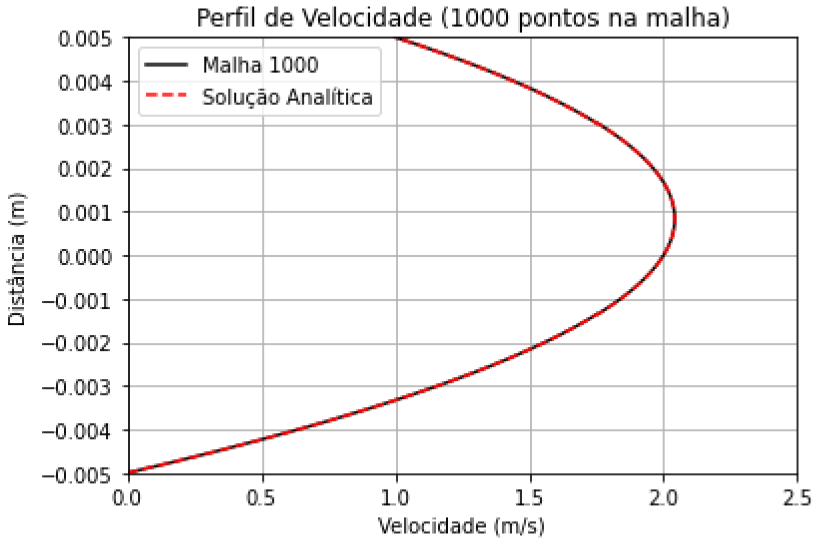

Figura 13.. Comparação entre as soluções analítica e numérica, onde a equação diferencial foi discretizada com diferenças centrais e resolvida com diagonalização matricial.

.

4ª Questão – Considere o escoamento de ar, plenamente desenvolvido, ao longo de uma placa plana porosa. A camada de ar tem 1 cm de espessura, a velocidade de sucção (V_w) é igual a -0,01 m/s e a viscosidade cinemática ($\nu = \mu/\rho$) do ar é igual a 1,5e-5 (m^2/s). A velocidade (U) do ar, a uma distância de 1 cm da placa, é de 10 m/s. Simplifique as equações de Navier-Stokes e mostre que a equação diferencial que descreve este escoamento tem a seguinte forma:

$$\rho\left(V_w \frac{du}{dy}\right) = \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$

Mostre que a solução da equação diferencial é dada por

$$\frac{u(y)}{U} = 1 - e^{\frac{yV_w}{v}}$$

em que y é distância vertical, medida a partir da placa. Discretize a equação diferencial usando o método de diferenças finitas. Usando uma malha com 11 pontos nodais, sendo o primeiro junto à placa, obtenha a solução numérica e compare com a solução analítica.

Solução

Considerando a equação de Navier-Stokes para fluidos, temos:

$$\rho\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + V\frac{du}{dy}\right) = -\frac{d\rho}{dx} + \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right)$$

Considerando as características do fluxo descritas no enunciado e um escoamento plenamente desenvolvido (sem variação na direção x), podemos assumir que:

$\frac{du}{dt} = 0$, pois estamos considerando o regime permanente.

$\frac{du}{dx} = 0$, porque o perfil de velocidade na direção x não varia.

$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, pelo mesmo motivo do item acima.

$V = V_w$

Aplicando as condições acima à equação de Navier-Stokes, temos:

$$\rho\left(V_w\frac{du}{dy}\right) = \mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

Substituindo

$$\frac{\mu}{\rho} = v,$$

temos:

$$\left(V_w\frac{du}{dy}\right) = \mathrm{v}\frac{d^2u}{dy^2}$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{1}{U}$ e integrando em relação a y duas vezes, obtemos:

$$\frac{u(y)}{U} = 1 - e^{\frac{yV_w}{v}}$$

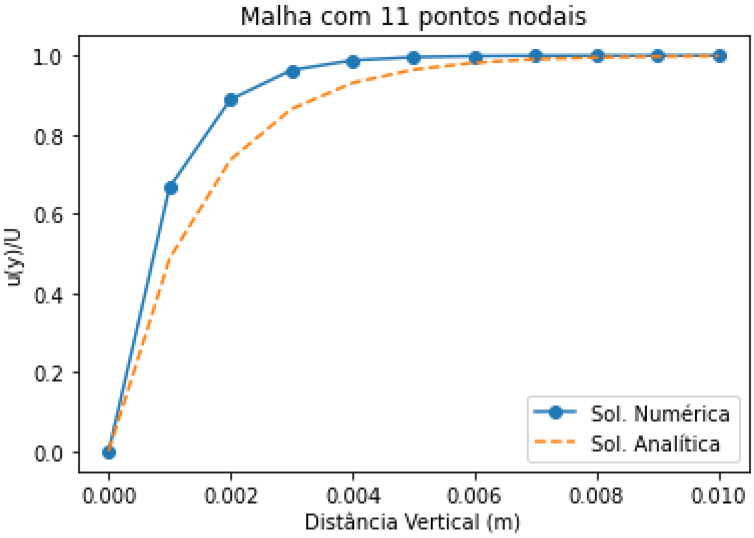

Figura 14. Comparação entre a solução numérica e a analítica

Observação: todas as simulações forem feitas usando a linguagem de programação Python (versão 3.9.7). Os códigos estão disponíveis em:

https://github.com/matheusviniciusmv/termocomp