Exercícios Resolvidos de Dinâmica Clássica

Jason Alfredo Carlson Gallas, professor titular de física teórica,

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

Matéria para a QUARTA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro
"Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/~jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`listam3.tex`)

14 Capítulo 14 - OSCILAÇÕES

14.1 QUESTIONÁRIO

2. Quando a massa m_1 é suspensa de uma determinada mola A e a massa menor m_2 é suspensa da mola B, as molas são distendidas da mesma distância. Se os sistemas forem colocados em movimento harmônico simples vertical com a mesma amplitude, qual deles terá mais energia?

► Da equação de equilíbrio para um corpo suspenso de uma mola, $mg = k\,\Delta\,y$, concluimos que $k_1 > k_2$. A energia do oscilador é $E = \frac{kx_m^2}{2}$, portanto $E_1 > E_2$.

4. Suponhamos que um sistema consiste em um bloco de massa desconhecida e uma mola de constante tambem desconhecida. Mostre como podemos prever o período de oscilação deste sistema bloco-mola simplesmente medindo a extensão da mola produzida, quando penduramos o bloco nela.

► No equilíbrio temos $mg = k\,\Delta\,y$. O período do oscilador é $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, onde a razão desconhecida $\frac{m}{k}$ pode ser substituída pela razão $\frac{\Delta\,y}{g}$.

5. Qualquer mola real tem massa. Se esta massa for levada em conta, explique qualitativamente como isto afetará o período de oscilação do sistema mola-massa.

►

7. Que alterações você pode fazer num oscilador harmônico para dobrar a velocidade máxima da massa oscilante?

► A velocidade máxima do oscilador é $v_m = \omega\,x_m$. As possibilidades de duplicar essa velocidade seriam (i) duplicando a amplitude x_m, (ii) trocar a mola de constante k por outra de constante $4k$, (iii) trocar a massa m por outra massa $m/4$. Claro, há inúmeras possibilidades de alterar k e m tal que $\omega^{'} = 2\omega$.

10. Tente prever com argumentos qualitativos se o período de um pêndulo irá aumentar ou diminuir, quando sua amplitude for aumentada.

► Para pequenas amplitudes, o pêndulo é *isócrono*, isto é, o período não depende da amplitude. Contudo, quando as oscilações se dão a ângulos maiores, para os quais a aproximação $sen\,\theta \approx \theta$ já não é válida, o período torna-se uma função *crescente* de θ_o, o ângulo de máximo afastamento da posição de equilíbrio. Uma discussão interessante a esse respeito está feita no volume 2, capítulo 3 do Moysés Nussenzveig.

11. Um pêndulo suspenso do teto de uma cabine de elevador tem um período T quando o elevador está parado. Como o período é afetado quando o elevador move-se (a) para cima com velocidade constante, (b) para baixo com velocidade constante, (c) para baixo com aceleração constante para cima, (d) para cima com aceleração constante para cima, (e) para cima com aceleração constante para baixo $a > g$, e (f) para baixo com aceleração constante para baixo $a > g$? (g) Em qual caso, se ocorre em algum, o pêndulo oscila de cabeça para baixo?

►

16. Um cantor, sustentando uma nota de freqüência apropriada, pode quebrar uma taça de cristal, se este for de boa qualidade. Isto não pode ser feito, se o cristal for de baixa qualidade. Explique por quê, em termos da constante de amortecimento do vidro.

► O cristal da taça é um sistema oscilante fortemente amortecido. Quando uma força externa oscilante é removida, as oscilações de pequena amplitude no sistema diminuem rapidamente. Para uma força externa oscilante cuja freqüência coincida com uma das freqüências de ressonância da taça, a amplitude das oscilações é limitada pelo amortecimento. Mas, quando a amplitude máxima é atingida, o trabalho efetuado pela força externa supera o amortecimento e a taça pode então vir a romper-se.

14.2 EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

Seção 14-3 Movimento Harmônico Simples: A Lei de Força

3E. Um bloco de $4,00$ kg está suspenso de uma certa mola, estendendo-se a $16,0$ cm além de sua posição de repouso. (a) Qual é a constante da mola? (b) O bloco é removido e um corpo com $0,500$ kg é suspenso da mesma mola. Se esta for então puxada e solta, qual o período de oscilação?

▶ (a) No equilíbrio, a força exercida pela mola é igual ao peso da massa. Então

$$k = \frac{mg}{\Delta y} = \frac{(4,00)(9,81)}{0.16} = 245 \text{ N/m}$$

(b) O período será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.500}{245}} = 0,28 \text{ s}$$

10E. Uma massa de $50,0$ g é presa à extremidade inferior de uma mola vertical e colocada em vibração. Se a velocidade máxima da massa é $15,0$ cm/s e o período $0,500$ s, ache (a) a constante de elasticidade da mola, (b) a amplitude do movimento e (c) a freqüência de oscilação.

▶ Aí temos um exercício que é aplicação direta de "fórmulas":

(a)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,500} = 12,57 \text{ rad/s}$$

$$k = \omega^2\, m = (12,57)^2(0,050) = 7,90 \text{ N/m}$$

(b)

$$y_m = \frac{v_m}{\omega} = \frac{0,15}{12,57} = 0,012 \text{ m}$$

(c)

$$f = T^{-1} = 2,0 \text{ Hz}$$

16E. Um corpo oscila com movimento harmônico simples de acordo com a equação

$$x = (6,0\,\text{m})\, cos\,[(3\,\pi\,\text{rad/s})t\; +\; \pi/3\,\text{rad}].$$

Em $t = 2,0$ s, quais são (a) o deslocamento, (b) a velocidade, (c) a acelera ção e (d) a fase do movimento? Também, quais são (e) a freqüência e (f) o período do movimento?

▶ (a)

$$x(t = 2,0) = (6,0)\; cos\; (6\pi + \frac{\pi}{3}) = 3,0\text{m}$$

(b)

$$v(t = 2,0) = -\;(3\pi)(6,0)\; sen\; (6\pi + \frac{\pi}{3} = -\;49 \text{ m/s}$$

(c)

$$a(t = 2,0) = -(3\pi)^2(6,0)cos(6\pi + \frac{\pi}{3}) = -266,5 \text{ m/s}^2$$

(d)

$$\text{fase} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{19\pi}{3}$$

(e)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = 1,5 \text{ Hz}$$

(f)

$$T = f^{-1} = 0,67 \text{ s.}$$

20P. Um bloco de $2,00$ kg está suspenso de uma certa mola. Se suspendermos um corpo de 300 g embaixo do bloco, a mola esticará mais $2,00$ cm. (a) Qual a constante da mola? (b) Se removermos o corpo de 300 g e o bloco for colocado em oscilação, ache o período do movimento.

▶ (a) Para calcular a constante da mola usamos a condição de equilíbrio com a segunda massa, responsável pela deformação adicional da mola:

$$m^{'}g = kx^{'}$$

$$(0,300)(9,81) = k(0,02$$

$$k = 150 \text{ N/m}$$

(b) Calculada a constante da mola, vamos ao período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2,00}{150}} = 0,73 \text{ s}$$

26P. Um bloco está numa superfície horizontal (uma mesa oscilante), que se agita horizontalmente num movimento harmônico simples com a freqüência de $2,0$ Hz. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície é $0,5$. Qual pode ser a maior amplitude do MHS, para que o bloco não deslize sobre a superfície?

▶ A força responsável pela oscilação não deve exceder a força máxima do atrito estático:

$$kx_m = \mu_e mg$$

$$\omega^2 x_m = \mu_e g$$

$$4\pi^2 f^2 x_m = \mu_e g$$

$$x_m = \frac{\mu_e g}{4\pi^2 f^2}$$

$$x_m = 3,10\,\text{cm}$$

30P. Certa mola sem massa está suspensa do teto com um pequeno objeto preso à sua extremidade inferior. O objeto é mantido inicialmente em repouso, numa posição y_i tal que a mola não fique esticada. O objeto é então liberado e oscila para cima e para baixo, sendo sua posição mais baixa 10 cm de y_i. (a) Qual a freqüência da oscilação? (b) Qual a velocidade do objeto quando está $8,0$ cm abaixo da posição inicial? (c) Um objeto de massa de 300 g é ligado ao primeiro objeto; logo após, o sistema oscila com metade da freq'üência original. Qual a massa do primeiro objeto? (d) Com relação a y_i, onde é o novo ponto de equilíbrio (repouso) com ambos os objetos presos à mola?

▶ (a) Os dados do problema sugerem o uso do princípio da conservação da energia. Colocamos o referencial para a energia potencial gravitacional na posição mais baixa:

$$mgy = \frac{ky^2}{2}$$

$$2g = \omega^2\ y$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{y}}$$

$$\omega = 14\ \text{rad/s}$$

(b) Ainda trabalhando com a conservação da energia, mudamos o referencial agora para a posição a $8,0$ cm abaixo de y_i:

$$mgy^{'} = \frac{mv^2}{2} + \frac{ky^{'2}}{2}$$

$$2gy^{'} - \omega^2 y^{'2} = v^2$$

$$v = 0,56\ \text{m/s}$$

Também podemos chegar a este resultado pela equação de movimento. A amplitude do MHS subseqüente é $y_m = 0,05$ m e tomando $t = 0$ quando a massa está em y_i, temos a constante de fase $\varphi = 0$:

$$y(t) = y_m\, cos\, \omega\, t$$

$$-\,0,03 = 0,05\, cos\, \omega\, t$$

$$cos\, \omega\, t = 2,2143\,\text{rad}$$

Para a velocidade da massa,

$$v(t) = -\,\omega\, y_m\, sen\, \omega\, t$$

$$v = (14)(0,05) sen\,(2,2143) = -\,0,56\,\text{m/s}$$

O sinal negativo indica que a massa está abaixo da posição de equilíbrio, dirigindo-se para a posição de máximo afastamento, do "lado negativo".

(c) Para determinar a massa do primeiro objeto ligado à mola, usamos a relação $k = m\omega^2$, tomando $\omega^{'} = \omega/2$:

$$k = (m + m^{'})\omega^{'2}$$

$$m\omega^2 = (m + m^{'})\frac{\omega^2}{4}$$

$$m = 0,10\ \text{kg}$$

(d) Quando as oscilações acontecem com ambos os objetos presos à mola, a posição de equilíbrio do sistema passa a ser

$$(m + m^{'})g = (m + m^{'})\omega^{'2} y^{''}$$

$$y^{''} = \frac{4g}{\omega^2} = 0,20\ \text{m}$$

33P. Duas molas idênticas estão ligadas a um bloco de massa m e aos dois suportes mostrados na Fig. $14-27$. Mostre que a freqüência da oscilação na superfície sem atrito é

$$f\ =\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\,k}{m}}.$$

▶ Qualquer deslocamento da massa produz um igual Δx de distenção e compressão das molas, tal que a força resultante atuando na massa é

$$2k\Delta x = m\omega^2\Delta x$$

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

35P. Duas molas são ligadas e conectadas a determinada massa m, como mostrado na Fig. 14−28. A superfície é sem atrito. Se ambas as molas tiverem uma constante de força k, mostre que a freq'üência da socilação de m é

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

▶ Suponhamos que as molas tem constantes diferentes, k_1 e k_2. Qualquer deslocamento da massa produz a deformação $x_t = x_1 + x_2$, que também podemos escrever como

$$x_t = F(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}) = \frac{F}{k_{equivalente}}$$

$$\frac{1}{k_{equivalente}} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$$

Para a freqüência teremos então

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2})m}$$

Considerando as molas iguais, com $k_1 = k_2 = k$, vem

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

.

Seção 14-4 Movimento Harmônico Simples: Considerações Sobre Energia

42E. Um objeto de $5,00$ kg numa superfície horizontal sem atrito é ligado a uma mola com constante 1000 N/m. O objeto é deslocado $50,0$ cm horizontalmente e empurrado a uma velocidade inicial de $10,0$ m/s, na direção do ponto de equilíbrio. (a) Qual a freqüência do movimento? Quais são (b) a energia potencial inicial do sistema bloco-mola, (c) a energia cinética inicial e (d) a amplitude da oscilação?

▶ (a) A freqüência do movimento é

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2,25 \text{ Hz}$$

(b) A energia potencial inicial é

$$U_0 = \frac{k\Delta x^2}{2}$$

$$U_0 = (0,50)(1000)(0,5)^2 = 125 \text{ J}$$

(c) A energia cinética inicial é

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$K_0 = (0,5)(5,0)(10,0)^2 = 250 \text{ J}$$

(d) Com a conservação da energia temos

$$E = U_0 + K_0 = \frac{kx_m^2}{2}$$

$$x_{\text{m}} = 0,87 \text{ m}$$

46P. Uma partícula de $3,0$ kg está em movimento harmônico simples em uma dimensão e move-se de acordo com a equação

$$x = (5,0\,\text{m})\, cos\,[(\pi/3\,\text{rad/s})t - \pi/4\,\text{rad}].$$

(a) Em qual valor de x a energia potencial da partícula é igual à metade da energia total? (b) Quanto tempo leva para que a partícula mova-se para esta posição x, a partir do ponto de equilíbrio?

▶

50P*. Um cilindro sólido está ligado a uma mola horizontal sem massa de forma que ele possa rolar, sem deslizamento, sobre uma superfície horizontal (Fig. 14-32). A constante da mola k é $3,0$ N/m. Se o sistema for liberado de uma posição de repouso em que a mola esteja estendida de $0,25$ m, ache (a) a energia cinética translacional e (b) a energia cinética rotacional do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio. (c) Mostre que nessas condições o centro de massa do cilindro executa um movimento harmônico simples com período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}},$$

onde M é a massa do cilindro. (*Sugestão*: Ache a derivada da energia mecânica total em relação ao tempo.)

▶ A energia mecânica total do oscilador é $E = \frac{1}{2}kx_m^2$. Com os dados fornecidos, obtemos $E = 0,10$ J. Na posição de equilíbrio, a energia total é só cinética

$$E = \frac{1}{2}\, Mv^2 + \frac{1}{2}\, I\omega^2.$$

Como o cilindro rola sem escorregar, $v = \omega R$ e a energia cinética rotacional pode ser expressa em termos da velocidade linear v:

$$E = \frac{1}{2}\, Mv^2 + \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\, MR^2)(\frac{v}{R})^2$$

$$E = \frac{1}{2}\, Mv^2 + \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\, Mv^2)$$

A energia cinética de rotação vale a metade da energia cinética de translação. Portanto, (a)

$$K_{translação} = 0,067 \text{ J}$$

(b)

$$K_{rotação} = 0,033 \text{ J}.$$

(c) Seguindo a sugestão do enunciado, a energia mecânica total do oscilador é

$$E = \frac{1}{2}\, Mv^2 + \frac{1}{2}\, I\omega^2 + \frac{1}{2}\, kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}\, Mv^2 + \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\, MR^2)(\frac{v}{R})^2 + \frac{1}{2}\, kx^2$$

$$E = \frac{3}{4}\, Mv^2 + \frac{1}{2}\, kx^2$$

Como a energia mecânica total é constante, $\frac{dE}{dt} = 0$. Usando nas duas parcelas do lado direito da equação acima as relações para a posição, velocidade e aceleração do MHS, obtemos

$$0 = \frac{3}{2}\, Mv\frac{dv}{dt} + kx\,\frac{dx}{dt}$$

$$0 = \frac{3}{2}M(-\omega x_{\text{m}} sen\omega t)(-\omega^2 x_{\text{m}} cos\omega t) + kx_{\text{m}} cos\omega t(-\omega x_{\text{m}} sen\omega t)$$

Após as devidas simplificações, resulta

$$\omega^2 = \frac{2k}{3M}$$

Outra forma de se chegar ao período pedido é "construindo" a equação diferencial que descreve o MHS. A força resultante atuando é

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\,kx - f_{\text{atrito}}$$

A segunda na lei na forma angular fornece a força de atrito estático

$$Rf_{\text{atrito}} = I\alpha = (\frac{1}{2}\, MR^2)(\frac{1}{R})\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$f_{\text{atrito}} = \frac{1}{2}\, M\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

Levando este resultado para a equação da força resultante, vem

$$(M + \frac{1}{2}\, M)\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{3M}\, x = 0$$

Na segunda parcela da equação acima, a quantidade multiplicando x é igual a ω^2, levando ao período do MHS do cilindro.

Seção 14-5 Um Oscilador Harmônico Simples Angular

52P. Uma esfera sólida de 95 kg com um raio de 15 cm é suspensa de um fio vertical preso ao teto de uma sala. Um torque de $0,20$ N.m é necessário para girar a esfera de um ângulo de $0,85$ rad. Qual o período da oscilação, quando a esfera é liberada desta posição?

▶ O momento de inércia da esfera sólida é

$$I = \frac{2}{5}\, MR^2 = 0,855 \text{ kg.m}^2$$

A constante de torção do fio é

$$\kappa = \frac{\tau}{\theta} = 5,03 \text{ N.m/rad}$$

O período das oscilações então é

$$T = 2\pi\,\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2,59 \text{ s}$$

54P. A roda de balanço de um relógio oscila com uma amplitude angular de π rad e um período de $0,50$ s. Ache (a) a velocidade angular máxima da roda, (b) a velocidade angular da roda quando seu deslocamento é de $\pi/2$ rad e (c) a aceleração angular da roda, quando seu deslocamento é de $\pi/4$ rad.

▶ (a) Assumimos, claro, que o movimento oscilatório inicia na posição de máximo deslocamento angular, de modo que a constante de fase $\phi = 0$:

$$\omega_{máx.} = \omega\,\theta_m = 4\pi^2 \text{ rad/s}$$

(b)

$$\theta(t) = \theta_m\, cos\, \omega t$$

$$\frac{\pi}{2} = \pi\, cos\, 4\pi t$$

$$4\pi t = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Levamos este resultado para a equação da velocidade do MHSA:

$$\omega(t) = -\,\omega^2\theta_m\, sen\, \omega t$$

$$\omega = -\,4\pi^2 sen 0,5 = -\,3,45\,\pi^2 \text{ rad/s}$$

(c) Na equação para a aceleração angular, quando $\theta(t) = \frac{\pi}{4}$ rad, temos

$$\alpha(t) = -\,\omega^2\,\theta_m\, cos\, \omega t$$

$$\alpha(t) = -\,4\pi^3 \text{ rad/s}^2.$$

Seção 14-6 Pêndulos

64E. Um pêndulo físico consiste em um disco sólido uniforme (de massa M e raio R), suportado num plano vertical por um eixo localizado a uma distância d do centro do disco (Fig. 14-35). O disco é deslocado de um pequeno ângulo e liberado. Ache uma expressão para o período do movimento harmônico simples resultante.

▶ Usamos aqui diretamente a equação para o período do pêndulo físico, mas antes precisamos aplicar o teorema dos eixos paralelos para ter o momento de inércia do eixo de rotação passando pelo ponto se suspensão do disco:

$$I = I_{\text{cm}} + md^2 = \frac{1}{2}\,MR^2 + md^2$$

A expresão para o período então é

$$T = 2\pi\,\sqrt{\frac{R^2 + 2d^2}{2gd}}$$

69P. Uma haste com comprimento L oscila como um pêndulo físico, com eixo no ponto O na Fig. 14-37. (a) Deduza uma expressão para o período do pêndulo em termos de L e x, a distância do ponto de suspensão ao centro de massa do pêndulo. (b) Para qual valor de x/L o período é mínimo? (c) Mostre que, se $L = 1,00$ m e $g = 9,80$ m/s^2, este mínimo é $1,53$ s.

▶ (a) Repetimos aqui o problema anterior; com a aplicação do teorema dos eixos paralelos para obter o momento de inércia, temos para o período:

$$T = 2\pi\,\sqrt{\frac{L^2 + 12x^2}{12gx}}$$

(b) Precisamos agora derivar a expressão do período em relação à variável x e fazendo a derivada igual a zero, obtemos

$$24x^2 = L^2 + 12x^2$$

$$\frac{x}{L} = \sqrt{\frac{1}{12}} = 0,289$$

(c) Aplicando este valor obtido, $x = 0,289L$, e os demais dados na expressão do período encontramos o valor $T_{\text{mín.}} = 1,53$ s.

72P. Um pêndulo simples de comprimento L e massa m está suspenso em um carro que está viajando a uma velocidade constante v, em um círculo de raio R. Se o pêndulo executa pequenas oscilações numa direção radial em torno da sua posição de equilíbrio, qual será a sua freqüência de oscilação?

▶ Além da força gravitacional, o pêndulo está sob a ação da força centrípeta do movimento circular uniforme. Sua aceleração efetiva vale então $a_{\text{efetiva}} = \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}$. A força restauradora do MHS é $F = -\,ma_{\text{efetiva}}sen\theta$. Para pequenas oscilações, $sen\,\theta \approx \theta$ e fazendo $\theta = \frac{s}{L}$, podemos escrever a equação do MHS para a variaável s

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\sqrt{g^2 + v^4/R^2}}{L}\,s = 0,$$

onde

$$\omega^2 = (\frac{\sqrt{g^2 + v^4/R^2}}{L})$$

nos leva à freqüência $f = \frac{2\pi}{\omega}$.

75P. Uma haste longa e uniforme de comprimento L e massa m gira livremente no plano horizontal em torno de um eixo vertical, através do seu centro.

Uma determinada mola com constante de força k é ligada horizontalmente entre uma extremidade da haste e uma parede fixa, como mostra a Fig. 14-38. Quando a haste está em equilíbrio, fica paralela à parede. Qual o período das pequenas oscilaçãoes que resultam, quando a haste é ligeiramente girada e liberada?

► A mola exerce um torque restaurador sobre a barra dado por

$$\tau = -\,kx\,\frac{L}{2} = -\,k(\frac{L}{2}\,\theta)\,\frac{L}{2}$$

Da segunda lei angular, $\tau = I\,\alpha$, com $I = \frac{mL^2}{12}$, escrevemos a equação para o MHS da barra

$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{kL^2}{4}\,\theta = 0,$$

na qual identificamos $\omega^2 = \frac{3k}{m}$, do que resulta o período

$$T = 2\pi\,\sqrt{\frac{m}{3k}}.$$

Seção 14-8 Movimento Harmônico Simples Amortecido

83P. Um oscilador harmônico amortecido consiste em um bloco ($m = 2,00$ kg), uma mola ($k = 10,0$ N/m) e uma força de amortecimento $F = -\,bv$. Inicialmente, ele oscila com uma amplitude de $25,0$ cm; devido ao amortecimento, a amplitude é reduzida para três quartos do seu valor inicial, quando são completadas quatro oscilações. (a) Qual o valor de b? (b) Quanta energia foi "perdida" durante essas oscilações?

► Considerando $b << \sqrt{\frac{k}{m}}$, da equação para a posição obtemos

$$\frac{3}{4}\,x_{\rm m} = x_{\rm m}\,e^{-\,\frac{4bT}{2m}}$$

Como b é suposto pequeno, $T = 2\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}} = 2,81$ s que, levado à equação anterior, fornece o valor de $b = 0,102$ kg/s.

(b) A energia inicial do oscilador é $E_{\rm o} = \frac{1}{2}\,kx_{\rm m}^2 = 0,313$ J. Para $t = 4T$, teremos

$$E(4T) = E_{\rm o}\,e^{-\,\frac{4bT}{m}} = 0,176 \text{ J}$$

Descontando esse valor da energia inicial, teremos a energia perdida pelo amortecimento, que é $0,137$ J.

85P. Considere que você está examinando as características do sistema de suspensão de um automóvel de 2000 kg. A suspensão "cede" 10 cm, quando o peso do automóvel inteiro é colocado sobre ela. Além disso, a amplitude da oscilação diminui 50 % durante uma oscilação completa. Estime os valores de k e b para o sistema de mola e amortecedor em uma roda, considerando que cada uma suporta 500 kg.

► Escrevendo a condição de equilíbrio para cada uma das rodas, temos

$$(500)(9,81) = k(0,10)$$

$$k = 4,905\,\times\,10^4 \text{ N/m}$$

Pressupondo um pequeno valor para b, tomamos $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 9,905$ rad/s e o período $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,63$ s e levamos estes resultados para a equação da posição do movimento amortecido:

$$0,50x_{\rm m} = x_{\rm m}\,e^{-\,\frac{bT}{2m}}$$

Tomando o logaritmo natural dos dois lados da equação chegamos ao valor da constante de amortecimento

$$b = 1100 \text{ kg/s}$$

Seção 14-9 Oscilações Forçadas e Ressonância

87P. Um carro de 2200 libras, transportando quatro pessoas de 180 libras, viaja em uma estrada de terra coberta de pequenas ondulações (costelas), com saliências separadas de 13 pés. O carro balança com amplitude máxima quando sua velocidade é de 10 milhas/h. O carro então pára e os quatro passageiros desembarcam. Quanto sobe a carroceria do carro em sua suspensão devido ao decréscimo de peso?

► Vamos resolver o problema em unidades SI. A massa total é

$$m_{\rm total} = m_{\rm carro} + m_{\rm passageiros}$$

$$m_{\rm total} = 998 + (4)(81,65) = 1324,50 \text{ kg}$$

A amplitude máxima ocorre quando $v = 4,47$ m/s. Para a distância entre as costelas temos $x = 3,96$ m. Agora podemos calcular o período

$$T = \frac{x}{v_{\text{máx.}}} = \frac{3,96}{4,47} = 0,886\text{s}$$

A freqüência angular é $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,09$ rsd/s e a constante elástica do sistema de suspensão é $k = m_{\text{total}}\,\omega^2 = 66580$ N/m. Com os passageiros a bordo, a deformação da suspensão é

$$y_1 = \frac{m_{\text{total}}g}{k} = \frac{1324,5 \times 9,81}{66580} = 0,195 \text{ m}$$

Sem os passageiros, a deformação é

$$y_2 = \frac{m_{\text{carro}}g}{k} = \frac{998 \times 9,81}{66580} = 0,147 \text{ m}$$

O quanto a carroceria sobe após o desembarque dos passageiros, calculamos pela diferença

$$y_1 - y_2 = 0,048 \text{ m}$$

Convertendo as unidades para confirmar o resultado, $0,048$ m correspondem às $1,90$ polegadas nas respostas do livro.

14.3 PROBLEMAS ADICIONAIS

88. Um oscilador harmônico simples consiste em um bloco ligado a uma mola de constante $k = 200$ N/m. O bloco desliza para frente e para trás ao longo de uma linha reta, numa superfície sem atrito, com ponto de equilíbrio em $x = 0$ e amplitude $0,20$ m. Um gráfico da velocidade v do bloco como uma função do tempo t é mostrado na Fig. 14-42. Quais são (a) o período do movimento harmônico simples, (b) a massa do bloco, (c) o deslocamento do bloco em $t = 0$, (d) a aceleração do bloco em $t = 0,10$ s e (e) a energia cinética máxima alcançada pelo bloco.

▶ (a) Basta observar o gráfico para obter o período: $T = 0,20$ s.
(b) A massa do bloco calculamos pela relação $k = m\,\omega^2$,

$$m = \frac{k}{2\pi/T} = \frac{200}{10\pi^2} = 0,20 \text{ kg}$$

(c) O deslocamento do bloco em $t = 0$ é

$$x(0) = x_{\text{m}} = 0,20 \text{ m}$$

(d) Para a aceleração em $t = 0,10$ s,

$$a(t = 0,10) = -\,(100\pi^2)(0,20)\,cos\,\pi = 197,40 \text{ m/s}^2$$

(e) A energia cinética máxima alcançada pelo bloco é

$$K_{\text{m}} = \frac{1}{2}\,mv_{\text{m}}^2 = 3,95 \text{ J}$$

91. Um pêndulo físico consiste em duas hastes com um metro de comprimento que são ligadas como mostra a Fig. 14-44. Qual o período de oscilação com um eixo inserido no ponto A?

▶ Precisamos primeiro determinar a posição do centro de massa das duas hastes. Do capítulo 9 sabemos que

$$y_{\text{cm}} = \frac{m(0) + m(-\,L/2)}{2m} = -\,\frac{L}{4},$$

onde L e m são, respectivamente, o comprimento e a massa de cada uma das hastes. A origem do sistema de referência está colocado no ponto A. Então, o centro de massa do sistema formado pelas duas hastes está à distância $L/4$ abaixo do ponto A. Portanto, aí temos a distância "d" do centro de massa do pêndulo ao ponto de suspensão. O momento de inércia do sistema é

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \frac{1}{3}\,mL^2 + \frac{1}{12}\,mL^2 = \frac{5}{12}\,mL^2$$

Levando os valores de I e d para a expressão do período, teremos

$$T = 2\pi\,\sqrt{\frac{5L}{3g}} = 2,59 \text{ s.}$$