UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Parná
Pato Branco
Engenharias

Lista de Exercícios

Aplicações das equações diferenciais de primeira ordem

1- Problemas de crescimento e decrescimeto

Seja $N(t)$ a quantidade de substância (ou população) sujeita a crescimento ou decaimento. Admitindo que $\dfrac{dN}{dt}$, a taxa de variação de substância em relação ao tempo seja proporcional a quantidade inicial, então: $\dfrac{dN}{dt} = kN$, onde k é a constante de proporcionalidade.

1.1- crescimento populacional

O modelo mais simples é o modelo de Malthus que é diz que a variação da população em relação ao tempo $\dfrac{dP}{dt}$ é proporcional a população presente.

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

onde k é uma constante. É fácil ver que se $k > 0$, teremos um crescimento na populaçãoe se $k < 0$, então teremos um decaimento.

Porém, podemos imaginar se uma população pode continuar crescendo indefinidamente.

1.2- crescimento populacional - Modelo Logístico (Verhust- Pearl).

Este modelo, procura remediar a limitação do modelo anterior. A EDO para este caso é

$$\frac{dP}{dt} = kP(1 - \frac{P}{L}),$$

onde L é o limite máximo para a população (capacidade do ambiente).

2- Problemas de Temperatura

A lei de resfriamento (aquecimento) de corpos de Newton, determina que a taxa de variação temporal da temperatura de um corpo é proporcional a diferença de temperatura entre o corpo e o meio. Assim, seja T a temperatura deo corpo e T_m a temperatura do meio. Então a taxa de variação da temperatura $\dfrac{dT}{dt}$ em relação ao tempo é dada por:

$$\frac{dt}{dt} = k(T - T_m).$$

3- Problemas de queda de corpos

Considerando um corpo de massa m em queda vertical, influenciado apenas pela gravidade g e por uma resis tência do ar proporcional a velocidade do corpo. Admitamos que a massa e a gravidade permaneçam constante durante a queda e adotamos o sentido positivo do movimento como sendo para baixo.

Lembrando da segunda lei de Newton, $F = ma$ ou $F = m\frac{dv}{dt}$, onde F é a força resultante e v é a velocidade do corpo no instante t.

No problema em questão existem duas forças atuando sobre o corpo. A força peso $P = mg$ e a resistência do ar kv. Assim, $mg - kv = m\frac{dv}{dt}$, ou seja,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

4- Problemas de diluição

Consideremos um tanque que contenha inicialmente V_0 litros de salmoura com a Kg de sal. Outra solução de salmoura contendo b Kg de sal por litro é derramada neste tanque a uma taxa de $e\frac{l}{min}$, enquanto, simultaneamente, a mistura homogeneizada, deixa o tanque a uma taxa de $f\frac{l}{min}$. O problema consiste em determinar a quantidade de sal no tanque no instante t.

Seja Q a quantidade de sal (em Kg) no tanque no instate t. A taxa de variação temporal de Q, $\frac{dQ}{dt}$ é igual a taxa, na qual o sal é adicionado ao tanque menos a taxa na qual o sal sai do tanque.

O sal entra no tanque a uma taxa de $b.e\frac{Kg}{min}$. Para determinarmos a taxa que sai do tanque, inicialmente calculamos o volume do tanque no instante t.

$$V(t) = V_0 + et - et.$$

A concentração de sal no instante t é $\frac{Q}{V(t)}$, Agora como sai do tanque a salmoura com uma vazão de $f\frac{l}{min}$, o sal deixa o tanque a uma taxa de $f\frac{Q}{V(t)}$. Então a taxa de variação é $\frac{dQ}{dt} = b.e - f\frac{Q}{V(t)}$, ou,

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0 + et - ft}Q = b.e$$

5- Problemas em circuitos elétricos

A equação básica que rege a quantidade de corrente I (em ampères) em um circuito simples RL com uma resistência R (em ohms), uma indutância L (em henries) e uma força eletromotriz (abreviadamente fem) E (em volts) é:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}.$$

Para um circuito RC consistindo em uma resistência, uma capacitância C (em farads), uma fem e nenhuma indutância, a equação que rege a quantidade de carga elétrica q (em coulombs) no capacitor é:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}.$$

A relação entre q e I é, $I = \dfrac{dq}{dt}$.

6- Trajetórias ortogonais

Considere uma família de curvas a um parâmetro, no plano xy definidas por $f(x, y, c) = 0$ onde c representa o parâmetro, x a variável independente e y é a variável dependente.

Definição: Diremos que duas curvas são ortogonais num ponto P_0 se as retas tangentes as duas curvas no ponto P_0 são ortogonais.

Na equação diferencial $y' = f(x, y)$, o valor da função $f(x, y)$ nos dá o valor da inclinação das retas tangentes a curva $y = y(x)$. Portanto para determinar a família de curvas ortogonais a y, bastará resolver a equaçao $y' = -\dfrac{1}{f(x, y)}$.

Exercícios

1) Coloca-se uma barra de metal, à temperatura de 100^oF em um quarto com temperatura constante de 0^oF. Se, após 20 minutos a temperatura da barra é de 50^oF, determine (a) o tempo necessário para a barra chegar à temperatura de 25^oF e (b) a temperatura da barra após 10 minutos.(rpta: $t = 39,6$ min; $T = 70,5$)

2) Um corpo à temperatura inicial de 50^oF é colocado ao ar livre, onde a temperatura ambiente é de 100^oF. Se após 5 minutos a temperatura do corpo é de 60^oF, determine (a) o tempo necessário para a temperatura do corpo atingir 75^oF e (b) a temperatura do corpo após 20 minutos.(rpta: $t = 15,4$ min; $T = 79,5$)

3) Coloca-se um corpo com temperatura desconhecida em um quarto mantido à temperatura constante de 30^oF. Se, após 10 minutos, a temperatura do corpo é 0^oF e após 20 minutos é de 15^oF, determine a temperatura inicial desconhecida.(rpta: $T = -30$)

4) Sabe-se que certa substância radioativa diminui a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se, inicialmente, a quantidade de material é 50 miligramas, e observa-se que, após duas horas, perderam-se 10% da massa original, determine (a) a expressão para a massa de substância restante em um tempo arbitrário t, (b) a massa restante após 4 horas, e (c) o tempo necessário para que a massa inicial fique reduzida à metade.(rpta:$N = 50e^{-0,053t}$ $N = 40,5$ mg; $t = 13$ horas)

5) Sabe-se que uma cultura de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade presente. Após 1 hora, observam-se 1000 núcleos de bactérias na cultura, e após 4 horas, 3000 núcleos. Determine (a) uma expressão para o número de núcleos presentes na cultura no tempo arbitrário t e (b) o número de núcleos inicialmente existentes na cultura.(rpta:$N = 694e^{0,366t}$ $N = 694$)

6) Sabe-se que a população de determinado Estado cresce a uma taxa proporcional ao número de habitantes existentes. Se após dois anos a população é o dobro da inicial, e após três anos é de 20000 habitantes, determine a população inicial.(rpta:$N = 7062$)

7)Uma conta rende juros compostos continuamente; qual é a taxa de juros necessária para que um depósito feito na conta duplique em 6 anos?(rpta:$11,55\%$)

8) Cinco ratos em uma população estável de 500 são intencionalmente infectados com uma doença contagiosa para testar uma teoria de disseminação de epidemia, segundo a taxa de variação da população infectada é proporcional ao produto entre o número de ratos infectados e o número de ratos sem a doença. Admitindo que esta teoria esteja correta, qual o tempo necessário para que a metade da população contraia a doença?(rpta:$t = 0,00919/k$)

9) Um corpo de 75 kg cai de uma altura de 30 m com velocidade inicial zro. Admitindo que não haja resistência do ar, determine a) a expressão da velocidade do corpo no instante t; b) A expressão da posição do corpo no instante t e c) o tempo necessário para o corpo atingir o solo.(rpta:$v = 9,81$; $x = 4,905t^2$; $t = 2,47$ segundos)

10) Um corpo de massa 2,548 Kg cai sem velocidade inicial e encontra uma resistência do ar proporcional ao quadrado de sua velocidade. Determine uma expressão para a velocidae no instante t.(rpta:$\frac{5+kv}{5-kv} = e^{\frac{\sqrt{k}}{0,065}t}$)

11) Um tanque contém inicialmente 350 l de salmoura com 10 Kg de sal. Em $t = 0$, outra solução de salmoura com 1Kg de sal por litro começa a ser adicionada ao tanque a uma razão começa a ser adicionada ao tanque a uma razão de $10l/min$, enquanto que a mistura homegeneizada sai do tanque a mesma taxa. Determine a)quantidade de sal no instante t; b) o instante em que a mistura do tanque contém 2 Kg de sal.(rpta:$Q = -344e^{-0,029t} + 345$ $t = 0,1$ min)

12) Um tanque de 50 litros contém inicialmente 10 litros de água pura. Em $t = 0$ começa a ser adicionada no tanque uma solução de salmoura contendo 0,1 Kg de sal por litro, a razão de $4l/min$ enquanto que a mistura homogeneizada sai do tanque à razão de $2l/min$. Determine a) o instante em que irá ocorrer o transbordamento e b) a quantidade de sal no tanque neste instante t.(rpta:$t = 20$ $Q = 4,8$ Kg;)

13) Um circuito RL tem uma fem (em volts) de $3\sin 2t$, uma resistência de 10 ohms, uma indutância de 0,5 henry e uma corrente inicial de 6 ampéres. Determine a corrente no circuito no instante de tempo arbitrário t.(rpta:$\frac{30}{101}\sin 2t - \frac{3}{101}\cos 2t$)

14) Um circuito RC tem uma fem (em volts) de $400\cos 2t$, uma resistência de 100 ohms, uma capacitância de 10^{-2} farad. Inicialmente não existe carga no capacitor. Determine a corrente no circuito no instante de tempo t.(rpta:$I = \frac{dq}{dt} = \frac{4}{5}e^{-t}\frac{16}{5}\cos 2t - \frac{8}{5}\sin 2t$)

15) Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $x^2 + y^2 = c^2$.(rpta:$y = kx$)

16) Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $y = cx^2$(rpta:$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = k$).