Exercícios Resolvidos de Dinâmica Clássica

Jason Alfredo Carlson Gallas, professor titular de física teórica,

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

Matéria para a QUARTA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/~jgallas*

Conteúdo

15 Gravitação 2
- 15.1 Questões 2
- 15.2 Problemas e Exercícios 2
  - 15.2.1 A Lei da Gravitação de Newton 2
  - 15.2.2 Gravitação e o Princípio de Superposição 2
  - 15.2.3 Gravitação Próximo à Superfície da Terra 3
  - 15.2.4 Gravitação no Interior da Terra 4
  - 15.2.5 Energia Potencial Gravitacional 5
  - 15.2.6 Planetas e Satélites: Leis de Kepler 7
  - 15.2.7 Órbitas de Satélites e Energia 9
  - 15.2.8 Problemas Adicionais 10

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`

(`listam3.tex`)

15 Gravitação

15.1 Questões

Q 15-11

A força gravitacional exercida pelo Sol sobre a Lua é quase duas vezes maior que aquela exercida pela Terra. Por que a Lua não escapa da Terra?

▶

15.2 Problemas e Exercícios

15.2.1 A Lei da Gravitação de Newton

E 15-1 (14-1/6ª edição)

Qual deve ser a separação entre uma partícula de 5.2 kg e outra de 2.4 kg, para que sua força de atração gravitacional seja 2.3×10^{-12} N?

▶ O módulo da força gravitacional é $F = Gm_1 m_2/r^2$, donde tiramos que

$$\begin{aligned} r = \sqrt{\frac{Gm_1 m_2}{F}} &= \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.2)(2.4)}{2.3 \times 10^{-12}}} \\ &= 19 \text{ m.} \end{aligned}$$

E 15-4 (14-3/6ª)

Um dos satélites *Echo* consistia em um balão esférico de alumínio inflado, com 30 m de diâmetro e massa igual a 20 kg. Suponha que um meteoro de 7 kg passe a 3 m da superfície do satélite. Qual a força gravitacional sobre o meteoro, devida ao satélite, nesse instante?

▶ Use $F = Gm_s m_m/r^2$, onde m_s e m_m são as massas do satélite e do meteoro, respectivamente. A distância entre os centros é $r = R + d = 15 + 3 = 18$ m, onde R é o raio do satélite e d a distância entre sua superfície e o centro do meteoro. Portanto

$$F = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(20)(7)}{18^2} = 2.9 \times 10^{-11} \text{ N.}$$

15.2.2 Gravitação e o Princípio de Superposição

E 15-6 (14-7/6ª)

A que distância da Terra, medida ao longo da linha que une os centros da Terra e do Sol, deve estar uma sonda espacial para que a atração gravitacional anule a da Terra?

▶ No ponto onde as forças se equilibram temos

$$\frac{GM_T m}{r_1^2} = \frac{GM_S m}{r_2^2},$$

onde M_T e M_S são as massas da Terra e do Sol, m é a massa da sonda, r_1 a distância do centro da Terra até a sonda, e r_2 a distância do centro do Sol até a sonda. Chamando de d a distância do centro da Terra até o centro do Sol, temos que $r_2 = d - r_1$ e, portanto, que

$$\frac{M_T}{r_1^2} = \frac{M_S}{(d - r_1)^2},$$

donde, extraindo a raiz quadrada e re-arranjando, segue

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{d\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_T} + \sqrt{M_S}} &= \frac{d}{1 + \sqrt{M_S/M_T}} \\ &= \frac{150 \times 10^9}{1 + \sqrt{\frac{1.99 \times 10^{30}}{5.98 \times 10^{24}}}} \\ &= 2.595 \times 10^8 \text{ m.} \end{aligned}$$

Perceba quão útil foi realizar a simplificação algebricamente *antes* de substituir os valores numéricos.

P 15-15 (14-13/6ª)

O problema que segue foi retirado do exame "Olímpico" de 1946, da Universidade Estatal de Moscou (veja Fig. 15-31). Fazemos uma cavidade esférica numa bola de chumbo de raio R, de tal modo que sua superfície toca o exterior da esfera de chumbo, passando também pelo seu centro. A massa da esfera, antes de ser feita a cavidade, era M. Qual a intensidade da força gravitacional com que a esfera côncava atrairá uma pequena esfera de massa m, que está a uma distância d do seu centro, medida ao longo da linha que passa pelos centros das esferas e da cavidade?

▶ Se a esfera de chumbo não fosse oca, a magnitude da força que ela exerceria em m seria $F_1 = GMm/d^2$. Parte desta força é devida ao material que é removido. Calcule a força exercida sobre m por uma esfera que encha a cavidade, na posição da cavidade, e subtraia-a da força feita pela esfera sólida.
A cavidade tem raio $r = R/2$. O material que preenche-a tem a mesma densidade (= massa/volume) que a esfera sólida. Ou seja, já cancelando-se o fator comum $4\pi/3$, temos que $M_c/r^3 = M/R^3$, onde M_c é a massa que preenche a cavidade. Portanto, com $r = R/2$, temos

$$M_c = \frac{r^3}{R^3}\,M = \frac{R^3/8}{R^3}\,M = \frac{M}{8}.$$

O centro da cavidade está a uma distância $d - r = d - R/2$ da massa m, de modo que a força que a cavidade exerce sobre m é

$$F_2 = \frac{G(M/8)m}{(d-R/2)^2}.$$

A magnitude da força exercida pela esfera furada é

$$\begin{aligned} F = F_1 - F_2 &= GMm\Big[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8(d-R/2)^2}\Big] \\ &= \frac{GMm}{d^2}\Big[1 - \frac{1}{8[1-R/(2d)]^2}\Big]. \end{aligned}$$

15.2.3 Gravitação Próximo à Superfície da Terra

E 15-16 (14-??/6^a)

Se o período de um pêndulo é exatamente 1 s no equador, qual será seu período no pólo sul? Utilize a Fig. 15-7.

▶ O período de um pêndulo simples é dado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, onde L é o comprimento do pêndulo. Como g é diferente em lugares diferentes da superfície da Terra, o período de um pêndulo varia quando ele é carregado de um lugar para outro. Portanto, os períodos no pólo sul e no equador são, respectivamente,

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_p}}, \qquad \text{e} \qquad T_e = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_e}},$$

cuja razão é $T_p/T_e = \sqrt{g_e/g_p}$. Desta última expressão obtemos

$$T_p = \sqrt{\frac{g_e}{g_p}}\,T_e = \sqrt{\frac{9.780}{9.835}}\,(1\text{ s}) = 0.997\text{ s},$$

onde os valores numéricos provém da Fig. 15-7.

E 15-18 (14-15/6^a)

A que altura, medida a partir da superfície da Terra, a aceleração da gravidade será 4.9 m/s^2?

▶ Para começar, perceba que $4.9 = 9.8/2$.
A aceleração devida gravidade é dada por $g = GM/r^2$, onde M é a massa da Terra e r é a distância do centro da Terra até o ponto onde se mede a aceleração. Substituindo $r = R+h$, onde R é o raio da Terra e h é a altitude, obtemos $g = GM/(R+h)^2$. Resolvendo-se esta equação para h e usando os valores numéricos fornecidos no Apêndice C, temos

$$\begin{aligned} h &= r - R \\ &= \sqrt{\frac{GM}{g}} - R \\ &= \sqrt{\frac{(6.67\times10^{-11})(5.98\times10^{24})}{4.9}} - 6.37\times10^6 \\ &= 2.6\times10^6\text{ m}. \end{aligned}$$

Este valor representa uma fração considerável do raio da Terra:

$$h = \frac{2.6\times10^6}{6.37\times10^6}\,R = \frac{2.6}{6.37}\,R = 0.4\,R.$$

P 15-29 (14-??/6^a)

Um corpo está suspenso numa balança de mola num navio que viaja ao longo do equador com velocidade v. **(a)** Mostre que a leitura da balança será muito próxima de $W_0(1 \pm 2\omega v/g)$, onde ω é a velocidade angular da Terra e W_0 é a leitura da balança quando o navio está em repouso. **(b)** explique o sinal de mais ou menos.

▶ **(a)** As forças que atuam num objeto sendo pesado são a força da gravidade, para baixo, e a força da mola, para cima, cujas magnitudes chamaremos de F_g e W, respectivamente. A leitura da balança fornece o valor de W. Como o objeto está viajando num círculo de raio R, possui uma aceleração centrípeta. A segunda lei de Newton fornece-nos

$$F_g - W = m\frac{V^2}{R},$$

onde V é a velocidade do objeto medida num referencial inercial e m é a massa do objeto.
A relação entre as velocidades é $V = \omega R \pm v$, onde ω é a velocidade angular da Terra quando gira, e v é a velocidade do navio em relação à Terra. O sinal $+$ é usado se o navio estiver navegando no mesmo sentido que a porção de água sob ele (de oeste para leste) e negativa se navegar no sentido contrário (de leste para oeste). Com isto tudo, a segunda lei de Newton fica

$$F_g - W = m\frac{(\omega R \pm v)^2}{R}.$$

Ao expandir o parentesis podemos desprezar o termo v^2 pois a magnitude de v é *muito* menor que ωR. Portanto

$$F_g - W = m\frac{\omega^2 R^2 \pm 2\omega R v}{R},$$

de modo que

$$F = F_g - m\omega^2 R \mp 2m\omega v.$$

Com o navio parado, $v = 0$, a leitura é $W_0 = F_g - m\omega^2 R$ e, portanto, $W = W_0 \mp 2m\omega v$. Substituindo agora m por W_0/g obtemos, finalmente, que

$$W = W_0\Big(1 \mp \frac{2\omega v}{g}\Big).$$

(b) O sinal $-$ é usado se o navio navegar em direção ao leste, enquanto que o sinal $+$ é usado quando navegar em direção ao oeste.

15.2.4 Gravitação no Interior da Terra

P 15-34 (14-25/6^a)

A Fig. 15-35 mostra, em corte, o interior da Terra (a figura não está em escala). Longe de ser uniforme, a Terra está dividida em três regiões: uma *crosta* exterior, o *manto* e um *núcleo* interior. A figura mostra as dimensões radiais destas regiões, bem como as massas contidas em cada uma. A massa total da Terra é 5.98×10^{24} kg e seu raio é 6370 km. Supondo que a Terra é esférica e ignorando sua rotação, **(a)** calcule g na superfície. **(b)** Suponha que um poço (o *Moho*) é escavado desde a superfície até a região que separa a crosta do manto, a 25 km de profundidade; qual o valor de g no fundo deste poço? **(c)** Considerando que a Terra é uma esfera uniforme com massa e raios iguais aos da verdadeira Terra, qual seria o valor de g a uma profundidade de 25 km? (Veja o Exercício 15-33.)(Medidas precisas de g funcionam como sondas bastantes sensíveis para estudar a estrutura do interior da Terra, embora os resultados possam ser mascarados por variações de densidade locais.)

▶ **(a)** A magnitude da força numa partícula com massa m na superfície da Terra é dada por $F = GMm/R^2$, onde M é a massa total da Terra e R é o raio da Terra. A aceleração devida à gravidade é

$$\begin{aligned} g = \frac{F}{m} &= \frac{GM}{R^2} \\ &= \frac{(6.67\times10^{-11})(5.98\times10^{24})}{(6.37\times10^6)^2} \\ &= 9.83 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

(b) Agora $g = GM/R^2$, onde M é a massa conjunta do núcleo mais o manto e R é o raio externo do manto, 6.345×10^6m, de acordo com a Fig. 15-35. A massa em questão é $M = 1.93\times10^{24} + 4.01\times10^{24} = 5.94\times10^{24}$ kg, onde a primeira parcela é a massa do núcleo e a segunda a do manto. Portanto

$$g = \frac{(6.67\times10^{-11})(5.94\times10^{24})}{(6.345\times10^6)^2} = 9.84 \text{ m/s}^2.$$

(c) Um ponto a 25 km abaixo da superfície está na interface manto-núcleo, na superfície de uma esfera de raio $R = 6.345\times10^6$m. Como a massa é suposta uniformemente distribuida, pode ser encontrada multiplicando-se a massa por unidade de volume pelo volume da esfera: $M = (R^3/R_t^3)M_T$, onde M_T é a massa total da Terra e R_T é o raio da Terra. Portanto, simplificando de antemão um fator 10^6 comum a ambos os raio, temos

$$\begin{aligned} M &= \Big[\frac{R^3}{R_t^3}\Big] M_T \\ &= \Big[\frac{6.345}{6.37}\Big](5.98\times10^{24}) = 5.91\times10^{24} \text{ kg}. \end{aligned}$$

A aceleração da gravidade é

$$g = \frac{(6.67\times10^{-11})(5.91\times10^{24})}{(6.345\times10^6)^2} = 9.79 \text{ m/s}^2.$$

15.2.5 Energia Potencial Gravitacional

P 15-46 (14-31/6^a)

As três esferas da Fig. 15-38, com massas $m_1 = 800$g, $m_2 = 100$g e $m_3 = 200$g, estão com seus centros alinhados, sendo $L = 12$ cm e $d = 4$ cm. Você movimenta a esfera do meio até que a sua distância centro a centro de m_3 seja $d = 4$ cm. Qual o trabalho realizado sobre m_2 **(a)** por você e **(b)** pela força gravitacional resultante sobre m_2, devido às outras esferas?

▶ **(a)** O trabalho feito por você ao mover a esfera de massa m_2 é igual à variação da energia potencial do sistema das três esferas. A energia potencial inicial é

$$U_i = -\frac{Gm_1m_2}{d} - \frac{Gm_1m_3}{L} - \frac{Gm_2m_3}{L-d},$$

enquanto que a energia potencial final é

$$U_f = -\frac{Gm_1m_2}{L-d} - \frac{Gm_1m_3}{L} - \frac{Gm_2m_3}{d}.$$

O trabalho é, portanto,

$$\begin{aligned} W = U_f - U_i &= Gm_2(m_1 - m_3)\Big(\frac{1}{d} - \frac{1}{L-d}\Big) \\ &= (6.67\times 10^{-11})(0.10)\times \\ &\quad (0.80 - 0.20)\Big(\frac{1}{0.04} - \frac{1}{0.08}\Big) \\ &= +5.0\times 10^{-11} \text{ J.} \end{aligned}$$

Perceba quão útil foi realizar a simplificação algebricamente *antes* de substituir os valores numéricos. Em particular, existe um termo em ambas expressões de U_i e U_f que se cancelam ao considerarmos o trabalho.
(b) O trabalho feito pela força gravitacional é

$$-W = -(U_f - U_i) = -5.0\times 10^{-11} \text{ J.}$$

P 15-47 (14-33/6^a)

Um foguete é acelerado até uma velocidade $v = 2\sqrt{gR_T}$ próximo à superfície da Terra (aqui R_T é o raio da Terra) e, então, orientado para cima. **(a)** Mostre que ele escapará da Terra. **(b)** Mostre que a sua velocidade, quando estiver muito distante da Terra, será $v = \sqrt{2gR_T}$.

▶ **(a)** Basta usar-se o princípio da conservação da energia. Inicialmente o foguete está na superfície da Terra e a energia potencial é $U_i = -GMm/R_T = -mgR_T$, onde M é a massa da Terra, m a massa do foguete, e R_T é o raio da Terra. Usamos o fato que $g = GM/R_T^2$. A energia cinética inicial é $K_i = mv^2/2 = 2mgR_T$ onde, de acordo com os dados do problema, usamos $v = 2\sqrt{gR_T}$.
Para o foguete conseguir escapar, a conservação da energia deve fornecer uma energia cinética final *positiva*, não importando quão longe da Terra o foguete ande. Considere a energia potencial final como sendo zero e seja K_f a energia cinética final. Então

$$\begin{aligned} K_f = K_f + \overbrace{U_f}^{U_f=0} &= U_i + K_i \\ &= -mgR_T + 2mgR_T \\ &= mgR_T. \end{aligned}$$

Como o resultado é positivo, o foguete tem energia cinética suficiente para escapar do campo gravitacional terrestre.
(b) Chamemos de $mv_f^2/2$ a energia cinética final. Então $mv_f^2/2 = mgR_T$ e, portanto,

$$v_f = \sqrt{2gR_T}.$$

P 15-48 (14-35/6^a)

(a) Qual é a velocidade de escape num asteróide cujo raio tem 500 km e cuja aceleração gravitacional na superfície é de 3 m/s^2? **(b)** A que distância da superfície irá uma partícula que deixe o asteróide com uma velocidade radial de 1000 m/s? **(c)** Com que velocidade um objeto atingirá o asteróide, se cair de uma distância de 1000 km sobre a superfície?

▶ **(a)** Usamos aqui o princípio da conservação da energia. Inicialmente a partícula está na superfície do asteróide e tem uma energia potencial $U_i = -GMm/R$, onde M é a massa do asteróide, R é o seu raio, e m é a massa da partícula ejetada. Considere a energia cinética inicial como sendo $K_i = mv^2/2$. A partícula consegue apenas escapar se sua energia cinética for zero quando ela estiver infinitamente afastada do asteróide. As energias cinética e potencial são nulas. Portanto, a conservação da energia nos diz que

$$U_i + K_i = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = 0.$$

Substituindo GM/R por gR, onde g é a aceleração da gravidade na superfície, e resolvendo para v encontramos que

$$\begin{aligned} v = \sqrt{2gR} &= \sqrt{2(3)(500\times10^3)} \\ &= 1.7\times10^3 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

(b) Inicialmente a partícula está na superfície. A energia potencial é $U_i = GMm/R$ e a energia cinética é $K_i = mv^2/2$. Suponha a partícula a uma distância h acima da superfície quando ela atinge momentaneamente o repouso. A energia potencial final é $U_f = -GMm/(R+h)$ e a energia cinética final é $K_f = 0$. Com isto, a conservação da energia nos fornece que

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{R+h}.$$

Substituindo-se GM por gR^2 e cancelando m obtemos

$$-gR + \frac{1}{2}v^2 = -\frac{gR^2}{R+h},$$

donde tiramos que

$$\begin{aligned} h &= \frac{2gR^2}{2gR - v^2} - R \\ &= \frac{2(3)(500\times10^3)^2}{2(3)(500\times10^3) - (1000)^2} - 500\times10^3 \\ &= 2.5\times10^5 \text{ m}. \end{aligned}$$

(c) Inicialmente a partícula está a uma distância h acima da superfície, em repouso. Sua energia potencial é $U_i = -GMm/(R+h)$ e sua energia cinética inicial é $K_i = 0$. Imediatamente antes de atingir o asteróide a energia potencial é $U_f = -GMm/R$. Escrevendo $mv^2/2$ para energia cinética, a conservação da energia nos diz que

$$-\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Cancelando-se m e substitutindo-se GM por gR^2 obtemos

$$-\frac{gR^2}{R+h} = -gR + \frac{1}{2}v^2.$$

Resolvendo então para v encontramos

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gR - \frac{2gR^2}{R+h}} \\ &= \sqrt{2(3)(500\times10^3) - \frac{2(3)(500\times10^3)^2}{(500+1000)\times10^3}} \\ &= \sqrt{(3000-1000)\times10^3} = \sqrt{2}\times10^3 \\ &= 1.414\times10^3 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Observe que se pode simplificar "de cabeça" o que esta dentro do radical. Esta prática é salutar!!! :-))

P 15-51 **(14-37/6^a)**

Duas estrelas de nêutrons estão separadas por uma distância de 10^{10} m. Ambas possuem massa de 10^{30} kg e raio de 10^5 m. Se estiverem inicialmente em repouso uma em relação à outra: **(a)** com que rapidez estarão se movendo, quando sua separação tiver diminuído para a metade do valor inicial? **(b)** Qual a velocidade das duas estrelas, imediatamente antes de colidirem?

▶ **(a)** O momento das duas estrelas é conservado, e como elas tem a mesma massa, suas velocidades e energias cinéticas são iguais. Usamos o princípio da conservação da energia.

A energia potencial inicial é $U_i = -GM^2/r_i$, onde M é massa de qualquer uma das estrelas e r_i sua separação inicial centro a centro. A energia cinética inicial é zero, $U_i = 0$, pois as estrelas estão em repouso. A energia potencial final é $U_f = -2GM^2/r_i$, uma vez que a separação final é $r_i/2$. A energia cinética final do sistema é $K_f = Mv^2/2 + Mv^2/2 = Mv^2$. Com isto tudo, a conservação da energia nos diz que

$$-\frac{GM^2}{r_i} = -\frac{2GM^2}{r_i} + Mv^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM}{r_i}} \\ &= \sqrt{\frac{(6.67\times10^{-11})(10^{30})}{10^{10}}} = 8.2\times10^4 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

(b) Imediatamente antes de colidirem a separação dos centros é $r_f = 2R = 2\times10^5$ m, onde R é o raio de qualquer uma das estrelas. A energia potencial final é dada por $U_f = -GM^2/r_f$ e a equação da conservação da energia fica agora sendo

$$-\frac{GM^2}{r_i} = -\frac{GM^2}{r_f} + Mv^2,$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{GM\Big(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\Big)} \\ &= \sqrt{6.67 \times 10^{-11+30}\Big(\frac{1}{2\times 10^5} - \frac{1}{10^{10}}\Big)} \\ &= 1.8 \times 10^7 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

15.2.6 Planetas e Satélites: Leis de Kepler

P 15-56 (14-41/6^a)

Um dos satélites de Marte, Fobos, está numa órbita circular de raio 9.4×10^6 m com um período de 7 h e 39 m. A partir destes dados, calcule a massa de Marte.

▶ O período T e o raio r da órbita estão relacionados pela lei dos períodos (de Kepler): $T^2 = [4\pi^2/(GM)]\ r^3$, onde M é a massa de Marte. O período é 7h 39m, que perfaz $(7 \times 60 + 39) \times 60 = 27540$ s. Portanto

$$\begin{aligned} M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} &= \frac{4\pi^2 (9.4 \times 10^6)^3}{(6.67 \times 10^{-11})(27540)^2} \\ &= 6.5 \times 10^{23} \text{ kg.} \end{aligned}$$

O Apêndice C informa que a massa M_M de Marte é igual a 0.107 vezes a massa da Terra. Portanto

$$M_M = 0.107 M_T = 6.3986 \times 10^{23} \text{ kg},$$

uma boa concordância. Não seria de se esperar que o autor do livro deixasse de verificar isto ao escolher os dados do problema, claro... ;-)

E 15-58 (14-43/6^a)

O Sol, cuja massa vale 2×10^{30} kg, orbita em torno da Via Láctea, que está a uma distância de 2.2×10^{20} m, com período de 2.5×10^8 anos. Supondo que todas as estrelas da Galáxia têm massa igual à do Sol e que estão distribuídas de maneira uniforme num volume esférico em torno do centro da Galáxia e, além disto, que o Sol está praticamente na superfície desta esfera, faça uma estimativa grosseira do número de estrelas na Galáxia.

▶ Chamemos de N o número de estrelas na Galáxia, de M a massa do Sol, e R o raio de Galáxia. A massa total da Galáxia é NM e a magnitude da força gravitacional atuante no Sol é $F = GNM^2/R^2$. A força aponta para o centro da Galáxia. A magnitude da aceleração do Sol é $a = v^2/R$, onde v é a sua velocidade. Chamando de T o período do movimento do Sol em torno do centro da Galáxia, então $v = 2\pi R/T$ e $a = 4\pi^2 R/T^2$. A segunda lei de Newton fornece-nos $GNM^2/R^2 = 4\pi^2 MR/T^2$. O número N desejado é, portanto,

$$N = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2 M}.$$

Como 2.5×10^8 anos são 7.88×10^{15} segundos, temos

$$N = \frac{4\pi^2 (2.2 \times 10^{20})^3}{(6.67)(7.88)^2(2) \times 10^{-11+30+30}} = 5.1 \times 10^{10},$$

o que é um número e tanto de estrelas, não?...

E 15-60 (14-45/6^a)

(a) Qual a velocidade linear que um satélite da Terra deve ter para ficar em órbita circular a uma altitude de 160 km? **(b)** Qual o período de revolução desse satélite?

▶ **(a)** Chamando de r o raio da órbita, então a magnitude da força gravitacional que atua no satélite é dada por GMm/r^2, onde M é a massa da Terra e m é a massa do satélite. A magnitude da aceleração do satélite é dada por v^2/r. onde v é a sua velocidade. A segunda lei de Newton fornece-nos $GMm/r^2 = mv^2/r$. Como o raio da Terra é 6.37×10^6 m, o raio da órbita é $r = 6.37 \times 10^6 + 160 \times 10^3 = 6.53 \times 10^6$ m. Portanto, a velocidade é dada por

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})}{6.53 \times 10^6}} \\ &= 7.82 \times 10^3 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

(b) Como a circunferência da órbita é $2\pi r$, o período é

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6.53 \times 10^6)}{7.82 \times 10^3} = 5.25 \times 10^3 \text{ s},$$

ou, equivalentemente, 87.4 minutos.

E 15-62 (14-47/6^a)

Um satélite da Terra está numa órbita elíptica com apogeu de 360 km e perigeu de 180 km. Calcule **(a)** o semi-eixo maior e **(b)** a excentricidade da órbita. (*Sugestão*: Veja o exemplo 15-10.)

▶ **(a)** A maior distância entre o satélite e o centro da Terra (i.e., o apogeu), é $R_a = 6.37\times10^6 + 360\times10^3 = 6.73\times10^6$m. A menor distância (o perigeu) é $R_p = 6.37\times10^6 + 180\times10^3 = 6.55\times10^6$m. Em ambas expressões, 6.37×10^6m é o raio da Terra. Da Fig. 15-16 vemos que o semi-eixo maior é

$$\begin{aligned} a &= \frac{R_a+R_p}{2} \\ &= \frac{(6.73+6.55)\times10^6}{2} = 6.64\times10^6 \text{ m.} \end{aligned}$$

(b) As distâncias do perigeu e apogeu estão relacionadas com o semi-eixo maior e a excentricidade através das fórmulas

$$R_a = a(1+e), \qquad \text{e} \qquad R_p = a(1-e).$$

Somando obtemos

$$R_a + R_p = 2a, \qquad \text{isto é} \qquad a = \frac{R_a+R_p}{2}.$$

Subtraindo obtemos

$$R_a - R_p = 2ae, \qquad \text{isto é} \qquad e = \frac{R_a-R_p}{2a}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} e = \frac{R_a-R_p}{2a} &= \frac{R_a-R_p}{R_a+R_p} \\ &= \frac{6.73-6.55}{6.73+6.55} = 0.0136. \end{aligned}$$

Observe que já simplificamos o fator 10^6 que aparece no numerador e denominador acima.

P* 15-74 (14-55/6^a)

Três estrelas idênticas, de massa M, estão nos vértices de um triângulo equilátero de lado L. Qual deve ser sua velocidade, se elas se movem numa órbita circular que circunscreve o triângulo, sob a influência somente de sua interação gravitacional mútua e mantendo suas posições relativas nos vértices do triângulo?

▶ Cada estrela é atraida em direção a cada uma as outras duas por uma força de magnitude GM^2/L^2, ao longo a linha que une cada par de estrelas. A força resultante em cada estrela tem magnitude $GM^2\cos 30^o/L^2$ e aponta para o centro do triângulo (i.e. para o centro de massa do sitema). Tal força é uma força centrípeta e mantém as estrelas na mesma órbita circular se suas velocidades forem apropriadas para manter a configuração. Chamando de R o raio da órbita circular, a segunda lei de Newton fornece-nos

$$\frac{GM^2\cos 30^o}{L^2} = M\frac{v^2}{R}.$$

As estrelas orbitam em torno do seu centro de massa, que coincide com o centro do triângulo e o centro do círculo. Suponha que o triângulo tenha um de seus lados alinhados com a horizontal e escolha um sistema de coordenadas com o eixo horizontal x passando por este lado, com a origem situada na estrela à esquerda, e com o eixo vertical y passando por esta mesma estrela. A altitude de um triângulo equilátero é $L\sqrt{3}/$ e, portanto, as estrela estão localizadas nos pontos $(0,0)$, $(L,0)$ e $(L/2, L\sqrt{3}/2)$. A coordenada x_c do centro de massa é $x_c = (0M + LM/2 + LM)/(3M) = (L/2+L)/3 = L/2$ enquanto que $y_c = (0M + ML\sqrt{3}/2 + 0M)/(3M) = (L\sqrt{3}/2)/3 = L/(2\sqrt{3})$. A distância de uma estrela qualquer até o centro de massa é

$$R = \sqrt{x_c^2+y_c^2} = \sqrt{\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{12}} = \frac{L}{\sqrt{3}}.$$

Substituindo-se este valor de R da lei de Newton acima, obtemos

$$\frac{GM^2\cos 30^o}{L^2} = M\frac{\sqrt{3}\,v^2}{L}.$$

Como $\cos 30^o = \sqrt{3}/2$, dividindo a equação acima por M obtemos $GM/L^2 = v^2/L$, ou seja,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{L}}.$$

15.2.7 Órbitas de Satélites e Energia

E 15-76 (14-57/6ª)

Um asteróide, com massa 2×10^{-4} vezes a massa da Terra, está numa órbita circular em torno do Sol, a uma distância igual a duas vezes à distância da Terra ao Sol. **(a)** Calcule o período orbital do asteróide em anos. **(b)** Qual a razão entre a energia cinética do asteróide e a da Terra?

▶ **(a)** Usamos a lei dos períodos $T^2 = (4\pi/GM)r^3$, onde $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg é a massa do Sol e r é o raio da órbita. O raio da órbita é duas vezes o raio da órbita da Terra, ou seja, $r = 2r_T = 2(150 \times 10^9)$ m. Portanto

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2(300 \times 10^9)^3}{(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}} \\ &= 8.96 \times 10^7 \text{ s.} \end{aligned}$$

Este valor equivale a

$$\frac{8.96 \times 10^7}{(365)(24)(60)(60)} = 2.8 \text{ anos.}$$

(b) A energia cinética de qualquer asteróide ou planeta numa órbita circular de raio r é dada por $K = GMm/(2r)$, onde m é a massa do asteróide ou planeta. Tal energia é proporcional à massa e inversamente a r. A razão entre a energia cinética do asteróide e a energia cinética da Terra é

$$\frac{K}{K_T} = \frac{m}{m_T}\frac{r_T}{r} = \frac{2 \times 10^{-4} m_T}{m_T}\frac{r_T}{2\, r_T} = 1 \times 10^{-4}.$$

P 15-79 (14-59/6ª)

Usando a conservação da energia e a Eq. 15-47, mostre que, para um objeto em órbita elíptica em torno de um planeta de massa M, sua distância ao centro do planeta, r, e sua velocidade v estão relacionadas por

$$v^2 = GM\Big(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\Big).$$

▶ A energia total é dada por $E = -GMm/(2a)$, onde M é a massa do corpo central (o Sol, por exemplo), m é a massa do objeto (um planeta, por examplo), e a é o semi-eixo maior da órbita.

P 15-84 (14-63/6ª)

Calcule **(a)** a velocidade e **(b)** o período de um satélite de 220 kg numa órbita, aproximadamente circular, em torno da Terra, a uma altitude de 640 km. Suponha, agora, que o satélite está perdendo energia a uma taxa média de 1.4×10^5 J, em cada volta completa em torno da Terra. Tomando como aproximação razoável que a órbita passe a ser um "círculo cujo raio diminui lentamente", determine são, para este satélite, **(c)** a altitude, **(d)** a velocidde e **(e)** o período, quando o satélite completar 1500 voltas. **(f)** Qual o módulo da força resistente média sobre o satéliet? **(g)** O momento angular deste sistema em torno do centro do centro da Terra é conservado?

▶ **(a)** A força que atua no satélite tem magnitude de igual a GMm/r^2, onde M é a massa do corpo atraente central (o Sol, por exemplo), m é a massa do satélite, e r é o raio da órbita. A força aponta para o centro da órbita. Como a aceleração do satélite é v^2/r, onde v é a velocidade, a segunda lei de Newton fornece-nos que $GMm/r^2 = mv^2/r$, donde tiramos que $v = \sqrt{GM/r}$. O raio da órbita é a soma do raio Terra com a altitude da órbita, ou seja, $r = 6.37 \times 10^6 + 640 \times 10^3 = 7.01 \times 10^6$ m. Portanto

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})}{7.01 \times 10^6}} \\ &= 7.54 \times 10^3 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

(b) O período é

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi r}{v} &= \frac{2\pi(7.01 \times 10^6)}{7.54 \times 10^3} \\ &= 5.84 \times 10^3 \text{ s,} \end{aligned}$$

que equivalem a $5840/60 = 97.3$ minutos.

(c) Chamando-se de E_0 a energia inicial, então a energia após n órbitas é $E = E_0 - nC$, onde $C = 1.4 \times 10^5$ J/orbita. Numa órbita circular, a energia e o raio da órbita estão relacionados pela fórmula $E = -GMm/(2r)$, de modo que o raio após n órbitas é dado por $r = -GMm/(2E)$. A energia inicial é

$$E_0 = -\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})(220)}{2(7.01 \times 10^6)}$$

$$= -6.26 \times 10^9 \text{ J.}$$

A energia após $n = 1500$ órbitas é

$$\begin{aligned} E &= E - nC \\ &= -6.26 \times 10^9 - (1500)(1.4 \times 10^5) \\ &= -6.47 \times 10^9 \text{ J.} \end{aligned}$$

O raio após 1500 órbitas é, portanto,

$$\begin{aligned} r &= -\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})(220)}{-6.47 \times 10^9} \\ &= 6.78 \times 10^6 \text{ m.} \end{aligned}$$

A altitude desejada é

$$h = r - r_T = (6.78 - 6.37) \times 10^6 = 4.1 \times 10^5 \text{ m},$$

onde r_T é o raio da Terra.
(d) A velocidade é

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})}{6.78 \times 10^6}} \\ &= 7.67 \times 10^3 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

(e) O período é

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6.78 \times 10^6)}{7.67 \times 10^3} = 5.6 \times 10^3 \text{ s},$$

o que equivale a $5600/60 = 93.3$ minutos.
(f) Chamando de F a magnitude da força média e de s a distância viajada pelo satélite, então o trabalho feito pela força é $W = -Fs$. Este trabalho é a varaição da energia: $\Delta E = -Fs$, donde obtemos $F = -\Delta E/s$. Calculemos esta expressão para a primeira órbita. Para uma órbita completa temos

$$s = 2\pi r = 2\pi(7.01 \times 10^6) = 4.40 \times 10^7 \text{ m},$$

e $\Delta E = -1.4 \times 10^5$ J. Portanto

$$F = -\frac{\Delta E}{s} = -\frac{-1.4 \times 10^5}{4.4 \times 10^7} = 3.3 \times 10^{-3} \text{ N.}$$

(g) A força resistiva exerce um torque no satélite, de modo que o momento angular não é conservado. Observe que como o sistema Terra-satélite e quase isolado, seu momento angular conserva-se com boa aproximação.

15.2.8 Problemas Adicionais

E 15-?? (15-??/6[a])