

LISTA DE CÁLCULO III – CÁLCULO VETORIAL

Seção 16.2 - Integrais de Linha

1 – 16 Calcule a integral de linha onde C é a curva dada.

1. $\int_C y^3 ds$, $C : x = t^3, y = t, 0 \leq t \leq 2$
2. $\int_C xy ds$, $C : x = t^2, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$
3. $\int_C xy^4 ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.
4. $\int_C x \sin y ds$, C é o segmento de reta que liga $(0, 3)$ a $(4, 6)$.
5. $\int_C (x^2 y^3 - \sqrt{x}) dy$, C é o arco da curva $y = \sqrt{x}$ de $(1, 1)$ a $(4, 2)$.
6. $\int_C \sin x dx$, C é o arco da curva $x = y^4$ de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.
7. $\int_C xy dx + (x - y) dy$, C consiste no segmento de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$.
8. $\int_C x\sqrt{y} dx + 2y\sqrt{x} dy$, C consiste na metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ de $(0, 1)$ a $(1, 0)$ e no segmento de reta de $(1, 0)$ a $(4, 3)$.
9. $\int_C xy^3 ds$, $C : x = 4 \sin t, y = 4 \cos t, z = 3t, 0 \leq t \leq \pi/2$
10. $\int_C xyz^2 ds$, C é o segmento de reta de $(-1, 5, 0)$ a $(1, 6, 4)$.
11. $\int_C xe^{yz} ds$, C é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.
12. $\int_C (2x + 9z) ds$, $C : x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$
13. $\int_C x^2 y \sqrt{z} dz$, $C : x = t^3, y = t, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$
14. $\int_C z dx + x dy + y dz$, $C : x = t^2, y = t^3, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$
15. $\int_C (x + yz) dx + 2x dy + xyz dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(1, 0, 1)$ a $(2, 3, 1)$ e de $(2, 3, 1)$ a $(2, 5, 2)$
16. $\int_C x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, -1)$ e de $(1, 2, -1)$ a $(3, 2, 0)$
17. Seja F um campo vetorial mostrado na figura.

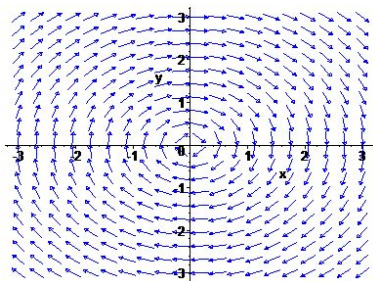


Figura 1: Campo Vetorial F

- a) Se C_1 é o segmento de reta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine se $\int_{C_1} F \cdot dr$ é positiva, negativa ou zero.

- b) Se C_2 é o círculo de raio 3 e centro na origem percorrido no sentido anti-horário, determine se $\int_{C_2} F \cdot dr$ é positiva, negativa ou zero.
18. A figura mostra um campo vetorial F e duas curvas, C_1 (em verde no sentido anti-horário) e C_2 (em vermelho no sentido horário). As integrais e linha de F sobre C_1 e C_2 são positivas, negativas ou nulas? Explique.

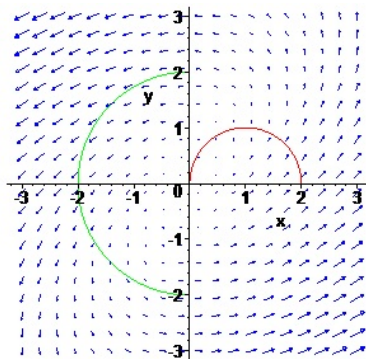


Figura 2: Campo Vetorial F

- 19 – 22 Calcule a integral de linha $\int_C F dr$, onde C é a curva dada pela função vetorial $r(t)$.
19. $F(x, y) = xyi + 3y^2j, r(t) = 11t^4i + t^3j, 0 \leq t \leq 1$
20. $F(x, y, z) = (x + y)i + (y - z)j + z^2k, r(t) = t^2i + t^3j + t^2k, 0 \leq t \leq 1$
21. $F(x, y, z) = \sin xi + \cos yj + xzk, r(t) = t^3i - t^2j + tk, 0 \leq t \leq 1$
22. $F(x, y, z) = zi + yj - xk, r(t) = ti + \sin tj + \cos tk, 0 \leq t \leq \pi$
33. Um arame fino é entortado no formato da semicircunferência $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0$. Se a densidade linear for uma constante K , determine a massa e o centro de massa do arame.
34. Um arame fino tem a forma da parte que esta no primeiro quadrante da circunferência com centro na origem e raio a . Se a função densidade for $\delta(x, y) = kxy$, encontre a massa e o centro de massa do arame.
35. Determine o centro de massa de um arame com o formato da hélice $x = 2 \sin t, y = 2 \cos t, z = 3t, 0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade for uma constante k .
36. Determine a massa e o centro de massa de um arame com o formato da hélice $x = t, y = \cos t, z = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade em qualquer ponto for igual ao quadrado da sua distância do ponto a origem.
37. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y)$ está sobre uma curva plana C , seus momentos de inércia em relação aos eixos x e y são definidos por:
- $$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) ds \quad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) ds$$

Determine o momento de inércia de um arame com o formato de um semicírculo $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, é mais grosso perto da base do que perto do topo, sendo a sua função densidade em qualquer ponto proporcional a sua distância a reta $y = 1$.

38. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y, z)$ está sobre uma curva plana C , seus momentos de inércia em relação aos eixos x , y e z são definidos por:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y) ds \\ I_y &= \int_C (x^2 + z^2) \rho(x, y) ds \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y) ds \end{aligned}$$

Determine o momento de inércia de um arame com o formato da hélice $x = 2 \sin t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, se a densidade for uma constante k .

39. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $F(x, y) = xi + (y + 2)j$ sobre um objeto que se move sobre um arco da cicloide $r(t) = (t - \sin t)i + (1 - \cos t)j$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
40. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $F(x, y) = x \sin yi + yj$ em uma partícula que se move sobre a parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(2, 4)$.
41. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $F(x, y) = (y + z)i + (x + z)j + (x + y)k$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta $(1, 0, 0)$ a $(3, 4, 2)$.
42. A força exercida pela carga elétrica colocada na origem sobre uma partícula carregada em um ponto (x, y, z) com vetor posição $r = (x, y, z)$ é $F(r) = kr/|r|^3$, onde k é uma constante. Determine o trabalho realizado quando a partícula se move sobre o segmento de reta de $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.
43. Um homem pesando 160 lb carrega uma lata de tinta de 25 lb por uma escada helicoidal em torno de um silo com raio de 20 pés. Se o silo tem 90 pés de altura e o homem dá três voltas completas em torno do silo, quanto trabalho é realizado pelo homem contra a gravidade para subir ao topo?
44. Suponha que exista um furo na lata de tinta do Exercício 43 e 9 lb de tinta vazam da lata de modo contínuo e uniforme durante a subida do homem. Quanto trabalho é realizado?
47. Um objeto se move sobre a curva C , mostrada na figura, de $(1, 2)$ a $(9, 8)$. Os comprimentos dos vetores do campo de força F são medidos em newtons pela escala nos eixos. Estime o trabalho realizado por F sobre o objeto.

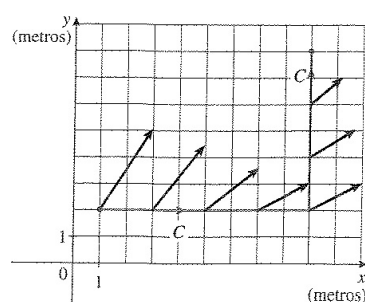


Figura 3: Campo de Força F

RESPOSTAS – SEÇÃO 16.2 – INTEGRAIS DE LINHA

1. $(145\sqrt{145} - 1)/54$
2. $(8/15)(\sqrt{2} + 1)$
3. $8192/5$
4. $(20 \sin 6 - 60 \cos 6 - 20 \sin 3)/9$
5. $243/8$
6. 0
7. $17/3$
8. $(226 + 84\sqrt{3})/15$
9. 320
10. $236\sqrt{21}/15$
11. $(\sqrt{14}/12)(e^6 - 1)$
12. $(14\sqrt{14} - 1)/6$
13. $1/5$
14. $3/2$
15. $97/3$
16. $35/3$
17. a) Positiva
b) Negativa
18. C_1 Positiva
 C_2 Negativa
19. 45
20. $17/15$
21. $6/5 - \cos 1 - \sin 1$
22. π
33. $2k\pi, (\pi/4, 0)$
34. $ka^3/2, (2a/3, 2a/3)$
35. $(0, 0, 3\pi)$
36. $\frac{2\sqrt{2}\pi(4\pi^2+3)}{3}, (\frac{3\pi(2\pi^2+1)}{4\pi^2+3}, \frac{6}{4\pi^2+3}, \frac{-6\pi}{4\pi^2+3})$
37. $((3\pi - 8)k/6, (3\pi - 4)k/6)$
38. $(4k\pi\sqrt{13}(1 + 6\pi^2), 4k\pi\sqrt{13}(1 + 6\pi^2), 8k\pi\sqrt{13})$
39. $2\pi^2$
40. $(15 - \cos 4 + \cos 1)/2$
41. 26
42. $(k/30)(15 - \sqrt{30})$
43. 1.67×10^4 pés-lb
44. 1.62×10^4 pés-lb
47. 22