Exercícios Resolvidos de Termodinâmica

Jason Alfredo Carlson Gallas, professor titular de física teórica,

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

Matéria para a QUARTA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/~jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`

(`lista4.tex`)

19 Temperatura

19.1 Questões

Q 19-3.

Um pedaço de gelo e um termômetro mais quente são colocados num recipiente hermeticamente fechado, no vácuo. O gelo e o termômetro estão suspensos de tal maneira, que não ficam em contato. Por que a leitura do termômetro diminui, após algum tempo?

▶ O termômetro transfere calor por irradiação. As formas de tranferência de calor serão estudadas no capítulo 20.

Q 19-7.

Embora pareça impossível atingir o zero absoluto de temperatura, temperaturas tão baixas quanto 0.000000002 K foram alcançadas em laboratórios. Isto não seria suficiente para todos os fins práticos? Por que os físicos deveriam (como realmente fazem) tentar obter temperaturas ainda mais baixas?

▶ Porque a muito baixas temperaturas os materiais exibem propriedades não observadas a temperaturas usuais. A supercondutividade é um exemplo dessas propriedades. A motivação para esse tipo de pesquisa está na possibilidade de encontrar novos fenômenos e propriedades físicas dos materiais. A tentativa de reduzir os limites físicos induz o desenvolvimento de instrumentos de medida mais e mais sofisticados, que são posteriormente usados em outros campos.

Q 19-14.

Explique por que, quando colocamos um termômetro de mercúrio numa chama, a coluna de mercúrio desce um pouco, antes de começar a subir.

▶ Porque o vidro que contém o mercúrio inicia seu processo de dilatação primeiro. Depois, a dilatação do mercúrio é mais notável, porque este tem um coeficiente de dilatação maior do que o do vidro.

Q 19-18.

Duas lâminas, uma de ferro e outra de zinco, são rebitadas uma na outra, formando uma barra que se encurva quando é aquecida. Por que a parte de ferro fica sempre no interior da curva?

▶ Porque o zinco tem coeficiente linear de expansão térmica maior que o ferro. Procure tais valores em alguma Tabela.

Q 19-22.

Explique por que a dilatação aparente de um líquido num tubo de vidro, quando aquecido, não corresponde à verdadeira expansão do líquido.

▶ Porque o vidro que contém o líquido também se expande.

19.2 Exercícios e Problemas

19.2.1 Medindo temperatura

P 19-6 (19-1/6[a])

Dois termômetros de gás a volume constante são usados em conjunto. Um deles usa nitrogênio e o outro, hidrogênio. A pressão do gás em ambos os bulbos é $p_3 = 80$ mm de Hg. Qual é a diferença de pressão nos dois termômetros, se colocarmos ambos em água fervendo? Em qual dos termômetros a pressão será mais alta?

▶ Tomamos p_3 como sendo 80 mm de mercúrio para ambos termômetros. De acordo com a Fig. 19-6, o termômetro de N_2 fornece 373.35 K para o ponto de ebulição da água. Usamos a Eq. 19-5 para determinar a pressão:

$$\begin{aligned} p_N = \frac{T}{273.16}\,p_3 &= \left(\frac{373.35}{273.16}\right)(80) \\ &= 109.343 \text{ mm de mercúrio.} \end{aligned}$$

Analogamente, o termômetro de hidrogênio fornece 373.16 para o ponto de ebulição da água e

$$\begin{aligned} p_H &= \left(\frac{373.16}{273.16}\right)(80) \\ &= 109.287 \text{ mm de mercúrio.} \end{aligned}$$

A pressão no termômetro de nitrogênio é maior que a pressão no termômetro de hidrogênio por 0.056 mm de mercúrio.

19.2.2 As escalas Celsius e Fahrenheit

E 19-14 (19-5/6^a)

A que temperatura os seguintes pares de escalas dão a mesma leitura: **(a)** Fahrenheit e Celsius (veja Tabela 19-2), **(b)** Fahrenheit e Kelvin e **(c)** Celsius e Kelvin?

▶ **(a)** As temperaturas Fahrenheit e Celsius estão relacionadas pela fórmula $T_F = 9T_C/5 + 32$. Dizer que a leitura de ambas escalas é a mesma significa dizer que $T_F = T_C$. Substituindo esta condição na expressão acima temos $T_C = 9T_C/5 + 32$ de onde tiramos

$$T_C = -\tfrac{5}{4}\,(32) = -40^o \text{ C}.$$

(b) Analogamente, a condição para as escalas Fahrenheit e Kelvin é $T_F = T$, fornecendo

$$T = \tfrac{9}{5}(T - 273.15) + 32,$$

ou seja,

$$T = \tfrac{5}{4}\Big[\frac{(9)(273.15)}{5} - 32\Big] = 575 \text{ K}.$$

(c) Como as escala Celsius e Kelvin estão relacionadas por $T_C = T - 273.15$, vemos que não existe nenhuma temperatura para a qual essas duas escalas possam fornecer a mesma leitura.

P 19-17 (19-7/6^a)

Observamos, no dia-a-dia, que objetos, quentes ou frios, esfriam ou aquecem até adquirir a temperatura ambiente. Se a diferença de temperatura ΔT entre o objeto e o ambiente não for muito grande, a taxa de esfriamento ou aquecimento será proporcional à diferença de temperatura, isto é,

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\,A\,(\Delta T),$$

onde A é uma constante. O sinal menos aparece porque ΔT diminui com o tempo, se for positivo, e aumenta, se negativo. Esta é a *lei de Newton do resfriamento*. **(a)** De que fatores depende A? Qual a sua dimensão? **(b)** Se no instante $t = 0$ a diferença de temperatura for ΔT_0, mostre que

$$\Delta T = \Delta T_0\, e^{-A\,t}$$

num instante posterior t.

▶ **(a)** Mudanças na temperaturam ocorrem através de radiação, condução e convecção. O valor de A pode ser reduzido isolando os objetos através de uma camada de vácuo, por exemplo. Isto reduz condução e convecção. Absorção de radiação pode ser reduzida polindo-se a superfície até ter a aparência de um espelho. Claramente A depende da condição da superfície do objeto e da capacidade do ambiente de conduzir ou convectar energia do e para o objeto. Como podemos reconhecer da equação diferencial acima, A tem dimensão de (tempo)$^{-1}$.
(b) Rearranjando a equação diferencial dada obtemos

$$\frac{1}{\Delta T}\,\frac{d\Delta T}{dt} = -A.$$

Integrando-a em relação a t e observando que

$$\int \frac{1}{\Delta T}\,\frac{d\Delta T}{dt}\,dt = \int \frac{1}{\Delta T} d(\Delta T),$$

temos

$$\begin{aligned}\int_{\Delta T_0}^{\Delta T} \frac{1}{\Delta T} d(\Delta T) &= -\int_0^t A\,dt\\ \ln \Delta T\Big|_{\Delta T_0}^{\Delta T} &= -At\Big|_0^t.\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\ln \Delta T - \ln \Delta T_0 = \ln \frac{\Delta T}{\Delta T_0} = -At,$$

que reescrita de modo equivalente fornece o resultado desejado:

$$\Delta T = \Delta T_0\, e^{-A\,t}.$$

19.2.3 Expansão térmica

E 19-24 (19-12/6^a)

Uma barra feita com uma liga de alumínio mede 10 cm a 20^o C e 10.015 cm no ponto de ebulição da água. **(a)** Qual o seu comprimento no ponto de congelamento da água? **(b)** Qual a sua temperatura, se o seu comprimento é 10.009 cm?

▶ **(a)** Para poder determinar o comprimento da barra no ponto de congelamento precisamos primeiro determinar o valor do coeficiente de expansão linear, α, da liga de alumínio. Tal valor pode ser obtido usando-se o fato que $\Delta L = L\,\alpha\Delta T$. Portanto,

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L\,\Delta T} = \frac{0.015}{(10)(80)} = 1.875 \times 10^{-5}\ {}^oC^{-1}.$$

Agora, ao baixarmos a temperatura até o ponto de congelamento da água a barra sofre uma variação de comprimento dada por

$$\begin{aligned}\Delta L' &= L\,\alpha(t_f - t_i)\\ &= (10)(1.875\times 10^{-5})(0-20)\\ &= -0.0037 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Portanto o comprimento procurado é

$$L' = L + \Delta L' = 10 - 0.0037 = 9.9963 \text{ cm.}$$

(b) Usamos novamente a relação

$$L_f - L_i = \Delta L = L_i\,\alpha\Delta t = L_i\,\alpha(t_f - t_i)$$

para extrair a temperatura final procurada:

$$\begin{aligned}t_f = t_i + \frac{L_f - L_i}{L_i\,\alpha} &= 20 + \frac{10.009 - 10}{(10)(1.875\times 10^{-5})}\\ &= 20 + 48 = 68^o \text{ C.}\end{aligned}$$

E 19-30.

Um cubo de latão tem aresta de 30 cm. Qual o aumento de sua área superficial, se a temperatura subir de 20 para 75 ^{o}C?

▶ Aqui consideramos a equação da expansão superficial, com coeficiente de dilatação

$$2 \times \alpha_{\text{latão}} = 38\ \times 10^{-6}\ {}^oC^{-1},$$

onde tiramos o $\alpha_{\text{latão}}$ da Tabela 19-3, pag. 176. Portanto, para uma face do cubo temos

$$\begin{aligned}\Delta A &= A\,(2\alpha)\,\Delta T,\\ &= (900)(38\times 10^{-6})(55) = 1.881 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Portanto, a expansão da área superficial será

$$\Delta A_s = 6\ \Delta A = (6)(1.881) = 11.29 \text{ cm}^2.$$

NOTA: no livro original (americano), o enunciado deste problema fala em área *superficial*, palavra que não apareceu na tradução brasileira.

P 19-36 (19-19/6^a)

Uma barra de aço a 25 ^oC tem 3 cm de diâmetro. Um anel de latão tem diâmetro interior de 2.992 cm a 25 ^oC. A que temperatura comum o anel se ajustará exatamente à barra?

▶ Após a mudança de temperatura o diâmetro da barra de aço é $D_a = D_{a0} + \alpha_a D_{a0}\Delta T$ a o diâmetro do anel de latão é $D_\ell = D_{\ell 0} + \alpha_\ell D_{\ell 0}\Delta T$, onde D_{a0} a $D_{\ell 0}$ são os diâmetros originais, α_a a α_ℓ são os coeficientes lineares de expansão, e ΔT é a mudança da temperatura.
A barra se ajustará exatamente à barra quando tivermos $D_a = D_\ell$, os seja quando

$$D_{a0} + \alpha_a D_{a0}\Delta T = D_{\ell 0} + \alpha_\ell D_{\ell 0}\Delta T,$$

de onde obtemos ΔT:

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{D_{a0} - D_{\ell 0}}{\alpha_\ell D_{\ell 0} - \alpha_a D_{a0}}\\ &= \frac{3 - 2.992}{(19\times 10^{-6})(2.992) - (11\times 10^{-6})(3)}\\ &= 335^o \text{ C.}\end{aligned}$$

Portanto a temperatura procurada é

$$T = 25 + 335 = 360^o \text{ C.}$$

P 19-39.

Densidade é massa dividida por volume. Como o volume depende da temperatura, a densidade também depende. Mostre que, se a temperatura variar de ΔT, a variação da densidade será

$$\Delta\rho = -\,\beta\,\rho\,\Delta T,$$

onde β é o coeficiente de dilatação volumétrica. Explique o sinal negativo.

▶ Sabemos que $\Delta V = V\beta\Delta T$, ou seja, que

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = V\beta.$$

Da definição de densidade $\rho = m/V$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\rho}{\Delta T} = \frac{\Delta\rho}{\Delta V}\,\frac{\Delta V}{\Delta T} &= -\,\frac{m}{V^2}\,V\beta\\ &= -\,\frac{m}{V}\beta = -\rho\beta.\end{aligned}$$

Comparando as duas extremidades obtemos que

$$\Delta\rho = -\,\beta\,\rho\,\Delta T.$$

Quando ΔT é positivo, o volume aumenta e a densidade diminui, ou seja, $\Delta\,\rho$ é negativo. Se ΔT é negativo, o volume diminui e a densidade aumenta, isto é, $\Delta\,\rho$ é positivo.

P 19-41 (19-??/6ª)

Mostre que quando a temperatura de um líquido num barômetro varia de ΔT e a pressão é constante, a altura muda de $\Delta h = \beta h\,\Delta T$, onde β é o coeficiente de expansão volumétrica. Despreze a expansão do tubo de vidro.

▶ A mudança no volume do líquido é dada por $\Delta V = \beta V\,\Delta T$. Sendo A a área da secção reta do tubo e h a altura do líquido, então $V = Ah$ é o volume original e a variação de volume é, consequentemente, $\Delta V = A\,\Delta h$. Desprezar a expansão do tubo equivale dizer que a área da secção reta do líquido permanece a mesma. Portanto $A\,\Delta h = \beta Ah\,\Delta T$. Desta expressão vemos que, realmente,

$$\Delta h = \beta h\,\Delta T.$$

P 19-42 (19-22/6ª)

A temperatura de uma moeda de cobre aumenta de $100\,^oC$ e seu diâmetro cresce 0.18 %. Dê o aumento percentual, com dois algarismos significativos, **(a)** na área, **(b)** na espessura, **(c)** no volume e **(d)** na massa da moeda. **(e)** Qual o coeficiente de dilatação linear da moeda?

▶ **(a)** Como sabemos que o coeficiente de expansão superficial é o **dobro** do coeficiente de expansão linear, podemos afirmar imediatamente que o aumento percentual na área será o dobro do aumento percentual linear, ou seja 0.36%.
Mais formalmente, podemos ver isto comparando as fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{\Delta L}{L} &= \alpha\,\Delta T = 0.0018\\ \frac{\Delta A}{A} &= 2\alpha\,\Delta T = (2)(0.0018) = 0.36\,\%.\end{aligned}$$

(b) A espessura h da moeda varia *linearmente* e, portanto, sua variação percentual coincide com a do item anterior:

$$\frac{\Delta h}{h} = \alpha\,\Delta T = 0.0018 = 0.18\,\%.$$

(c) A variação no volume é:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\alpha\Delta T = (3)(0.0018) = 0.54\,\%.$$

(d) Não há variação na massa da moeda.
(e) Qualquer das relações acima pode ser usada para determinar α.
Por exemplo, usando a do item (a) temos:

$$\frac{\Delta d}{d} = \alpha\Delta T = \alpha\,(100) = 0.0018,$$

donde tiramos que

$$\alpha = 18\times 10^{-6}\ \ ^oC^{-1}.$$

Perceba que para responder aos itens (a)-(d) *não* é necessário conhecer-se α. Esta é a razão do livro pedir para determinar α apenas ao final do exercício.

P 19-43 (∼ 19-23/6ª)

Um relógio de pêndulo feito de Invar (veja Tabela 19-3) tem um período de 0.5 s e é exato a 20^{o}C. Se o relógio é usado num clima onde a temperatura média é 30^{o}C, que correção (aproximada) é necessária ao final de 30 dias para colocar o relógio novamente na hora certa?

▶ O período do pêndulo é dado por $P = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, onde ℓ é o seu comprimento. Quando a temperatura é aumentada o pêndulo encomprida, seu período aumenta, e o relógio anda mais devagar. Se o comprimento mudar de $\Delta\ell$, o período muda de

$$\Delta P = \frac{dP}{d\ell}\,\Delta\ell = \pi\frac{1}{\sqrt{\ell g}}\,\Delta\ell = \tfrac{1}{2}\,\frac{P}{\ell}\,\Delta\ell.$$

O aumento no comprimento é dado por $\Delta\ell = \alpha\ell\,\Delta T$, onde α é o coeficiente de expansão linear do Invar e ΔT é o aumento de temperatura. Portanto

$$\Delta P = \tfrac{1}{2}\alpha P\,\Delta T.$$

Multiplique o número de períodos em 30 dias para obter o tempo em que o erro acumula-se. Seja $t = 30$ dias e Δt o erro acumulado. Então

$$\begin{aligned}\Delta t = \tfrac{1}{2}\alpha t\,\Delta T &= \tfrac{1}{2}(0.7\times 10^{-6})(30\text{ dias})(10)\\ &= 1.05\times 10^{-4}\text{ dias} = 9.1\text{ s}.\end{aligned}$$

P 19-46.

(a) Mostre que, se os comprimentos de duas barras de materiais diferentes são inversamente proporcionais aos seus respectivos coeficientes de dilatação linear, à mesma temperatura inicial, a diferença em comprimento entre elas será a mesma, a todas as temperaturas. **(b)** Quais devem ser os comprimentos de uma barra de aço e outra de latão a 0 ^{o}C, tais que, a qualquer temperatura, a diferença de comprimento seja 0.30 m?

▶ **(a)** À temperatura inicial, considere-se os comprimentos das duas barras dados por:

$$L_{1o} = \frac{N}{\alpha_1} \quad \text{e} \quad L_{2o} = \frac{N}{\alpha_2},$$

onde N é a constante de proporcionalidade.
Quando a temperatura varia de um ΔT, tem-se:

$$L_1 = \frac{N}{\alpha_1} + N\,\Delta T \qquad \text{e} \qquad L_2 = \frac{N}{\alpha_2} + N\,\Delta T.$$

A diferença entre os comprimentos iniciais das barras é:

$$\begin{aligned} \Delta L_o = L_{1o} - L_{2o} &= \frac{N}{\alpha_1} - \frac{N}{\alpha_2}, \\ &= N\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1\,\alpha_2}. \end{aligned}$$

A diferença entre os comprimentos das barras quando a temperatura variou de ΔT é:

$$\begin{aligned} \Delta L = L_1 - L_2 &= \frac{N}{\alpha_1} + N\,\Delta T - \frac{N}{\alpha_2} - N\,\Delta T \\ &= N\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1\,\alpha_2} \\ &= \Delta L_o \end{aligned}$$

(b) Sendo $\Delta L = 0.30$ m e os valores dos coeficientes de expansão do aço e do latão dados por

$$\alpha_2 = \alpha_{\text{aço}} = 11 \times 10^{-6}\,{}^oC^{-1}$$

e

$$\alpha_1 = \alpha_{latão} = 19 \times 10^{-6}\,{}^oC^{-1},$$

obtemos

$$\begin{aligned} N = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\,\Delta L &= \frac{(19)(11) \times 10^{-12}}{(19-11) \times 10^{-6}}\,(0.30) \\ &= 7.84 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L_{1o} &= \frac{7.84 \times 10^{-6}}{19 \times 10^{-6}} = 0.4125 \text{ m} \\ L_{2o} &= \frac{7.84 \times 10^{-6}}{11 \times 10^{-6}} = 0.7125 \text{ m} \end{aligned}$$

donde tiramos

$$\Delta L_o = L_{1o} - L_{2o} = 0.30 \text{ m}.$$

P 19-47 (19-25/6^a)

Como resultado de uma elevação de temperatura de 32^{o}C, uma barra com uma fissura no seu centro empena para cima (Fig. 19-16 [19-32]). Se a distância fixa L_0 for de 3.77 m e o coeficiente de expansão linear da barra for de $25 \times 10^{-6}/\text{C}^o$, determine a elevação x do centro.

▶ Considere metade da barra. Seu comprimento original é $\ell_0 = L_0/2$ e seu comprimento após o aumento da temperatura é $\ell = \ell_0 + \alpha\ell_0\,\Delta T$. A posição antes de empenar, depois de empenar e o deslocamento x de uma das extremidades formam um triângulo retângulo, com hipotenusa de comprimento ℓ, um lado ℓ_0 e o outro lado de comprimento x. O teorema de Pitágoras fornece-nos

$$x^2 = \ell^2 - \ell_0^2 = \ell_0^2(1 + \alpha\,\Delta T)^2 - \ell_0^2.$$

Como α é um número pequeno, α^2 é menor ainda! Portanto, é razoável usar-se a aproximação

$$(1 + \alpha\,\Delta T)^2 \simeq 1 + 2\alpha\,\Delta T,$$

onde, é claro, a pequena contribuição do termo $(\alpha\,\Delta T)^2$ foi desprezada. Com isto, segue

$$x^2 = \ell_0^2 + 2\ell_0^2\alpha\,\Delta T - \ell_0^2 = 2\ell_0^2\alpha\,\Delta T$$

donde obtemos facilmente que

$$\begin{aligned} x &= \ell_0\sqrt{2\alpha\,\Delta T} \\ &= \frac{3.77}{2}\sqrt{2(25 \times 10^{-6})(32)} \\ &= 7.5 \times 10^{-2} \text{ m} = 7.5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

`Sugestão`: refaça as contas SEM desprezar o termo em α^2 e veja quão grande é a diferença do resultado acima.

P 19-50.

Uma barra composta, de comprimento $L = L_1 + L_2$, é feita de uma barra de material 1 e comprimento L_1, ligada à outra de material 2 e comprimento L_2 (Fig. 19-18). **(a)** Mostre que o coeficiente de dilatação efetivo para esta barra é

$$\alpha = \frac{(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)}{L}.$$

(b) Usando aço e latão, dimensione uma barra composta de 52.4 cm e o coeficiente de dilatação linear efetivo $13 \times 10^{-6}\ {}^oC^{-1}$.

► **(a)** A variação no comprimento da barra composta é dada por

$$\begin{aligned}\Delta L &= \Delta L_1 + \Delta L_2\\ &= L_1\,\alpha_1\,\Delta T + L_2\,\alpha_2\,\Delta T\\ &= (L_1\,\alpha_1 + L_2\,\alpha_2)\,\Delta T\end{aligned}$$

Por outro lado, também temos que

$$\Delta L = L\,\alpha\,\Delta T = (L_1 + L_2)\,\alpha\,\Delta T.$$

Igualando-se as duas expressões para ΔL obtemos que $L_1\,\alpha_1 + L_2\,\alpha_2 = (L_1 + L_2)\,\alpha$, ou seja, que

$$\alpha = \frac{L_1\,\alpha_1 + L_2\,\alpha_2}{L}.$$

(b) Reescrevendo a expressão acima e usando o fato que $L_2 = L - L_1$, obtemos

$$L\alpha = L_1\alpha_1 + (L - L_1)\alpha_2,$$

que nos da, com $\alpha_1 = 11 \times 10^{-6}$ e $\alpha_2 = 19 \times 10^{-6}$,

$$\begin{aligned}L_1 = \frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\,L &= \frac{(13-19)\times 10^6}{(11-19)\times 10^6}(0.524)\\ &= \tfrac{3}{4}(0.524) = 39.3 \text{ cm},\end{aligned}$$

onde já simplificamos o fator comum 10^{-6} que aparece no numerador e denominador da fração. Finalmente,

$$L_2 = L - L_1 = 52.4 - 39.3 = 13.1 \text{ cm}.$$

É claro que este valor também poderia ter sido obtido independentemente, subsituindo-se $L_1 = L - L_2$ na expressão acima para α:

$$\begin{aligned}L_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_2}\,L &= \frac{11-13}{11-19}\,(0.524)\\ &= \frac{0.524}{4} = 13.1 \text{ cm}.\end{aligned}$$

P 19-54*

Um cubo de alumínio de aresta 20 cm flutua em mercúrio. Quanto afundará o cubo, se a temperatura subir de 270 para 320 K? O coeficiente de dilatação do mercúrio é $1.8 \times 10^{-4}\ /{}^oC$.

► A força da gravidade no cubo é $\rho_A g V$, onde V é o volume do cubo e ρ_A é a densidade de massa do alumínio. O empuxo do mercúrio no cubo é $\rho_M g A y$, onde ρ_M é a densidade de massa do mercúrio, A é a área de uma das faces do cubo, e y é a profundidade de submersão, de modo que Ay fornece o volume do mercúrio deslocado.

O cubo está em equilíbrio, de modo que a magnitude das duas forças é o mesmo: $\rho_A g V = \rho_M g A y$. Substituindo-se $V = L^3$ e $A = L^2$ nesta expressão obtemos

$$y = \frac{\rho_A}{\rho_M}\,L.$$

Quando a temperatura muda, todas as três quantidades que aparecem em y também mudam, sendo tal mudança dada por

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{\partial y}{\partial \rho_A}\,\Delta\rho_A + \frac{\partial y}{\partial \rho_M}\,\Delta\rho_M + \frac{\partial y}{\partial L}\,\Delta L\\ &= \frac{L}{\rho_M}\,\Delta\rho_A - \frac{\rho_A L}{\rho_M^2}\,\Delta\rho_M + \frac{\rho_A}{\rho_M}\,\Delta L.\end{aligned}$$

Primeiro, consideremos a mudança da densidade do alumínio. Suponhamos que uma massa M de alumínio ocupe um volume V_A. A densidade sera, portanto, $\rho_A = M/V_A$, sendo a variação da densidade dada por

$$\Delta\rho_A = \frac{d\rho_A}{dV_A}\Delta V_A = -\frac{M}{V_A^2}\Delta V_A = -\frac{\rho_A}{V_A}\Delta V_A.$$

Como sabemos que $\Delta V_A = 3\alpha V_A \Delta T$, encontramos

$$\Delta\rho_A = -3\alpha\rho_A\,\Delta T,$$

onde α representa o coeficiente de expansão linear do alumínio.

Segundo, de modo análogo, para o mercúrio temos

$$\Delta\rho_M = -\frac{\rho_M}{V_M}\Delta V_M.$$

Agora porém, como tratamos com um líquido e não de um sólido como acima, $\Delta V_M = \beta V_M \Delta T$, onde

β representa o coeficiente de expansão volumétrica do mercúrio. Portanto

$$\Delta\rho_M = -\beta\rho_M\Delta T.$$

Terceiro, temos que $\Delta L = \alpha L\Delta T$.
Substituindo estes três resultados na expressão para Δy acima obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{L}{\rho_M}\,(-3\alpha\rho_A\Delta T) - \frac{\rho_A L}{\rho_M^2}\,(-\beta\rho_M\Delta T)\\ &\qquad +\frac{\rho_A}{\rho_M}\,(\alpha L\Delta T)\\ &= \frac{\rho_A}{\rho_M}\,L\big(\beta-2\alpha\big)\Delta T\\ &= \frac{2.7}{13.6}(20)\Big[1.8\times10^{-4}\\ &\qquad -(2)(23\times10^{-6})\Big](50)\\ &= 2.66\times10^{-2}\text{ cm} = 0.266\text{ mm},\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\Delta T = 320 - 270 = 50$ K.

► *Solução alternativa:* Para o bloco flutuando no mercúrio a 270 K, pelo Princípio de Arquimedes (Capítulo 15), tem-se para a força de empuxo F_e:

$$F_e = \rho_{Hg}\,L^2 y\,g = m_{Al}\,g = \rho_{Al}\,L^3 g$$

que simplifica-se em

$$\rho_{Al}\,L = \rho_{Hg}\,y, \qquad (1)$$

de onde tiramos

$$y = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Hg}}\,L = \frac{2.7\times10^3}{13.6\times10^3}\,(0.2) = 0.04\text{ m}.$$

Como $y = 0.04$ m representa 20% de $L = 0.2$ m, vemos que o cubo está com 20% da sua aresta submersa.

Porém, como *todas* as quantidades envolvidas na Eq. (1) variam com a temperatura, temos

$$\Delta\rho_{Hg}\,y + \rho_{Hg}\Delta y = \Delta\rho_{Al}\,L + \rho_{Al}\Delta L. \qquad (2)$$

A massa $m_{Al} = \rho_{Al}\,L^3$ do cubo não varia com a temperatura e, portanto,

$$\Delta m_{Al} = \Delta\rho_{Al}\,L^3 + 3\,L^2\,\Delta L\rho_{Al} = 0,$$

ou seja, que

$$L\,\Delta\rho_{Al} = -\,3\,\rho_{Al}\,\Delta L.$$

Substituindo este resultado na Eq. (2) acima, segue

$$\begin{aligned}\Delta\rho_{Hg}\,y + \Delta y\,\rho_{Hg} &= -\,3\,\Delta L\,\rho_{Al} + \Delta L\,\rho_{Al}\\ \Delta\rho_{Hg}\,y + \Delta y\,\rho_{Hg} &= -\,2\,\Delta L\,\rho_{Al}\\ \Delta\rho_{Hg} &= -\,\beta\,\rho_{Hg}\,\Delta T\\ -\,\beta\,\rho_{Hg}\,\Delta T\,y + \Delta y\,\rho_{Hg} &= -\,2\,\Delta L\,\rho_{Al}\end{aligned}$$

Substituindo-se ai acima o valor de y extraido da Eq. (1) temos

$$\Big(-\,\beta\rho_{Hg}\Delta T\Big)\Big(\frac{\rho_{Al}}{\rho_{Hg}}\,L\Big) + \Delta y\,\rho_{Hg} = -\,2\,\Delta L\,\rho_{Al}$$

ou seja

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{\beta L\rho_{Al}\Delta T - 2L\alpha_{Al}\Delta T\rho_{Al}}{\rho_{Hg}}\\ &= \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Hg}}L\,\Big(\beta - 2\alpha_{Al}\Big)\Delta T\end{aligned}$$

Substituindo-se os valores numéricos na equação acima, obtém-se, finalmente,

$$\Delta y = 2.66\times10^{-4}\text{ m} = 0.266\text{ mm}.$$