

## RESUMO

**A Extensão de Maxwell da Lei de Ampère**

Na Tabela 37-1, resumimos as equações básicas do eletromagnetismo do modo como foram apresentadas nos capítulos anteriores. Analisando a simetria destas equações, vimos que, para fazer a lei de Ampère simétrica com a lei de Faraday, devemos escrevê-la como

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i \quad (\text{lei de Ampère - Maxwell}). \quad (37-6)$$

O novo termo da direita afirma que um *campo elétrico variável* ( $d\Phi_E/dt$ ) gera um *campo magnético* ( $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ ). Ele é o correspondente simétrico da lei de Faraday: um *campo magnético variável* ( $d\Phi_M/dt$ ) gera um *campo elétrico* ( $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ ).

**Corrente de Deslocamento**

Definimos a corrente de deslocamento devida a um campo elétrico variável como

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (\text{corrente de deslocamento}). \quad (37-8)$$

A Eq. 37-6, então, se escreve

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (i_d + i) \quad (\text{lei de Ampère - Maxwell}). \quad (37-9)$$

Deste modo podemos manter a noção de continuidade da corrente (corrente de condução + corrente de deslocamento). A corrente de deslocamento envolve um campo elétrico variável e *não* um deslocamento de cargas.

**Equações de Maxwell**

As equações de Maxwell, mostradas na Tabela 37-2, resumem todo o eletromagnetismo e constituem seu fundamento.

## QUESTIONÁRIO

1. Com suas próprias palavras explique por que a lei da indução de Faraday (veja a Tabela 37-2) pode ser interpretada dizendo-se: “um campo magnético variável gera um campo elétrico”.

2. Quando um fluxo uniforme  $\Phi_E$  através de um anel circular está diminuindo com o tempo, o campo magnético induzido (visto ao longo do sentido de  $\mathbf{E}$ ), está no sentido horário ou anti-horário?

3. Por que é tão fácil mostrar que “um campo magnético variável produz um campo elétrico”, mas é tão difícil mostrar de um modo simples que “um campo elétrico variável produz um campo magnético”?

4. Na Fig. 37-1a, considere um círculo com raio  $r > R$ . Como se pode induzir um campo magnético em torno deste círculo, como mostra o Exemplo 37-1? Afinal de contas, não há campo elétrico no local deste círculo e, assim,  $dE/dt = 0$ .

5. Na Fig. 37-1a,  $\mathbf{E}$  está entrando na figura e seu módulo está crescendo. Determine o sentido de  $\mathbf{B}$  no caso em que, (a)  $\mathbf{E}$  está entrando na figura e seu módulo está diminuindo, (b)  $\mathbf{E}$  está saindo da figura e seu módulo está aumentando, (c)  $\mathbf{E}$  está saindo da figura e seu módulo está diminuindo e (d)  $\mathbf{E}$  permanece constante.

6. Na Fig. 35-1c, é necessária uma corrente de deslocamento para manter a continuidade da corrente no capacitor. Como é possível a existência de tal corrente, se não há cargas no capacitor?

7. Nas Figs. 37-1a e 37-1b, qual é o sentido da corrente de deslocamento  $i_d$ ? Nestas mesmas figuras, podemos encontrar alguma regra relacionando os sentidos de (a)  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  e (b) de  $\mathbf{B}$  e  $d\mathbf{E}/dt$ ?

8. Que vantagens existem em chamar-se o termo  $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ , na Eq. IV da Tabela 37-2, de corrente de deslocamento?

9. Podemos medir uma corrente de deslocamento usando um amperímetro? Explique.

10. Explique por que os efeitos magnéticos das correntes de condução em fios são facilmente detectados, enquanto que os efeitos magnéticos das correntes de deslocamento em capacitores são tão difíceis de detectar?

11. Na Tabela 37-2, existem três espécies de aparente falta de simetria nas equações de Maxwell. (a) As grandezas  $\epsilon_0$  e/ou  $\mu_0$  aparecem em I e IV mas não em II e III. (b) Existe um sinal negativo em III mas nenhum sinal negativo em IV. (c) Faltam os “termos polos magnéticos” em II e III. Quais destes itens representam uma verdadeira falta de simetria? Se os monopólos magnéticos fossem descobertos, como reescreveríamos estas equações para incluí-los? (Sugestão: Seja  $p$  a intensidade do polo magnético.)

## EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

**Seção 37-2 As Equações de Maxwell: Uma Lista Provisória**

1E. Verifique o valor numérico da velocidade escalar da luz usando a Eq. 37-1 e mostre que a equação está dimensionalmente correta. (Veja o Apêndice B.)

2E. (a) Mostre que  $\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 377 \, \Omega$ . (Esta grandeza é chamada de “impedância do vácuo”.) (b) Mostre que a frequência angular correspondente a 60 Hz é igual a 377 rad/s. (c) Compare os itens (a) e (b). Você acha que esta coincidência tenha influído na escolha de 60 Hz para os geradores de ca? Lembre-se de que, na Europa, é usado 50 Hz.

**Seção 37-3 Campos Magnéticos Induzidos**

3E. Para a situação do Exemplo 37-1, onde o campo magnético induzido se reduz à metade de seu valor máximo?

4P. Suponha que um capacitor de placas paralelas circulares tenha um raio  $R$  de 30 mm e que a separação entre as placas seja de 5,0 mm. Uma diferença de potencial senoidal com um valor máximo de 150 V e uma frequência de 60 Hz é aplicada entre as placas. Determine  $B_m(r)$ , o valor máximo do campo magnético induzido para  $r = R$ .

5P. Para as condições do Problema 4, faça um gráfico de  $B_m(r)$  para o intervalo  $0 < r < 10$  cm.

#### Seção 37-4 Corrente de Deslocamento

6E. Prove que a corrente de deslocamento num capacitor de placas paralelas pode ser escrita como

$$i_d = C \frac{dV}{dt}$$

7E. Dispõe-se de um capacitor de placas paralelas de  $1,0 \mu\text{F}$ . Como seria possível obter uma corrente de deslocamento (instantânea) de  $1,0$  A no espaço entre as placas?

8E. Para a situação do Exemplo 37-1, mostre que a densidade de corrente de deslocamento  $J_d$ , para  $r \leq R$ , é dada por

$$J_d = \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

9E. A Fig. 37-5 mostra as placas  $P_1$  e  $P_2$  de um capacitor de placas paralelas circulares de raio  $R$ . Elas são ligadas, conforme se vê, a fios retilíneos longos que transportam uma corrente de condução constante  $i$ .

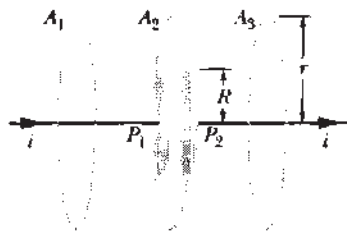


Fig. 37-5 Exercício 9.

$A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  são círculos hipotéticos de raios iguais a  $r$ , dois deles fora do capacitor e um entre as placas. Mostre que o módulo do campo magnético na circunferência de cada um destes círculos é dado por

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

10P. No Exemplo 37-1 mostre que as expressões deduzidas para  $B(r)$  podem ser escritas como

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} \quad (\text{para } r \geq R)$$

e

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d r}{2\pi R^2} \quad (\text{para } r \leq R).$$

Note que estas expressões têm a mesma forma que as deduzidas no Cap. 31, exceto que a corrente de condução  $i$  foi substituída pela corrente de deslocamento  $i_d$ .

11P. Enquanto um capacitor de placas paralelas circulares, de diâmetro 20 cm, está sendo carregado, a densidade de corrente de deslocamento através da região entre as placas é uniforme e tem módulo igual a  $20 \text{ A/m}^2$ . (a) Calcular o módulo  $B$  do campo magnético numa distância  $r = 50$  mm do eixo de simetria da região. (b) Calcular  $dE/dt$  nesta região.

12P. Um campo elétrico uniforme cai a zero a partir de uma intensidade inicial de  $6,0 \times 10^5 \text{ N/C}$  num intervalo de tempo igual a  $15 \mu\text{s}$ , do

modo indicado na Fig. 37-6. Calcular a corrente de deslocamento que atravessa uma área de  $1,6 \text{ m}^2$  ortogonal à direção do campo, durante cada um dos intervalos de tempo (a), (b) e (c), indicados no gráfico. (Ignore o comportamento nas extremidades dos intervalos.)

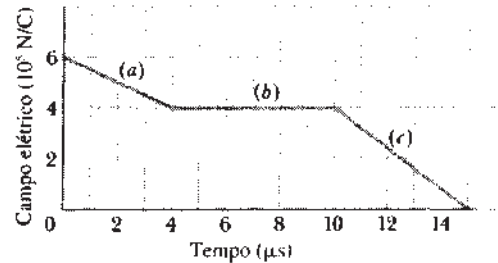


Fig. 37-6 Problema 12.

13P. Um capacitor de placas paralelas quadradas, de  $1,0$  m de lado, como o da Fig. 37-7, está sendo carregado por uma corrente de  $2,0$  A que chega a uma das placas e sai da outra. (a) Qual é a corrente de deslocamento na região entre as placas? (b) Qual é o valor de  $dE/dt$  nesta região? (c) Qual é a corrente de deslocamento através da trajetória quadrada tracejada entre as placas? (d) Qual é o valor de  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  ao longo desta trajetória?

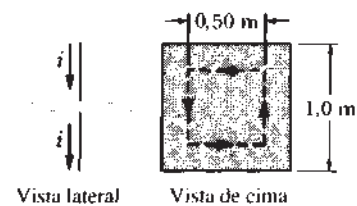


Fig. 37-7 Problema 13.

14P. Em 1929, M. R. Van Cauwenberghe conseguiu medir diretamente, pela primeira vez, a corrente de deslocamento  $i_d$  entre as placas de um capacitor de placas paralelas, submetido a uma diferença de potencial alternada, como está sugerido na Fig. 37-1. Ele usou placas circulares cujo raio efetivo era de 40 cm e cuja capacitância era de  $100 \text{ pF}$ . A diferença de potencial aplicada tinha um valor máximo  $V_m$  de  $174 \text{ kV}$  na frequência de  $50 \text{ Hz}$ . (a) Qual foi a corrente de deslocamento máxima obtida entre as placas? (b) Por que foi escolhida uma diferença de potencial tão elevada? (A delicadeza destas medidas é tal que elas só foram realizadas diretamente mais de 60 anos depois de Maxwell ter enunciado o conceito de corrente de deslocamento!)

15P. O capacitor na Fig. 37-8 consistindo em duas placas circulares de raio  $R = 18,0$  cm está ligado a uma fonte de fem  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ , onde  $\mathcal{E}_m = 220 \text{ V}$  e  $\omega = 130 \text{ rad/s}$ . O valor máximo da corrente de deslocamento é  $i_d = 7,60 \mu\text{A}$ . Despreze a distorção do campo elétrico nas bordas das placas. (a) Qual é o valor máximo da corrente  $i$ ? (b) Qual é o valor máximo

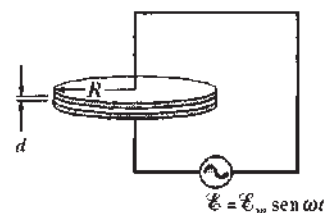


Fig. 37-8 Problema 15.

de  $d\Phi_E/dt$ , onde  $\Phi_E$  é o fluxo elétrico na região entre as placas? (c) Qual a separação  $d$  entre as placas? (d) Determine o valor máximo do módulo de  $\mathbf{B}$  entre as placas a uma distância  $r = 11,0$  cm do centro.

### Seção 37-5 Equações de Maxwell: A Lista Completa

**16E.** Qual das equações de Maxwell na Tabela 37-2 está mais intimamente relacionada com cada uma das seguintes experiências: (a) Toda carga colocada num condutor isolado desloca-se totalmente para a sua superfície externa. (b) Ao variar-se a corrente numa bobina, verifica-se o aparecimento de uma corrente numa segunda bobina situada nas proximidades da primeira. (c) Dois fios paralelos transportando correntes de mesmo sentido atraem-se.

**17P.** Uma propriedade de autoconsistência de duas das equações de Maxwell (Eqs. III e IV da Tabela 37-2). A Fig. 37-9 mostra dois percursos fechados  $abef$  e  $bdeb$  que possuem um lado comum  $be$ . (a) Pode-se aplicar  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$  (Eq. III) a cada uma das trajetórias fechadas separadamente. Mostre que, a partir destes resultados, a Eq. III é automaticamente satisfeita para o percurso fechado composto  $abcdefa$ . (b) Repita o item (a) para a Eq. IV.

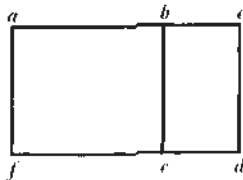


Fig. 37-9 Problema 17.

**18P.** Uma propriedade de autoconsistência de duas das equações de Maxwell (Eqs. I e II da Tabela 37-2). Dois paralelepípedos adjacentes partilham uma face comum  $abcd$ , como mostra a Fig. 37-10. (a) Pode-

se aplicar  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0$  (Eq. I) a cada uma destas duas superfícies fechadas separadamente. Mostre que, a partir destes resultados, a Eq. I é automaticamente satisfeita para a superfície fechada composta. (b) Repita o item (a) para a Eq. II.



Fig. 37-10 Problema 18.

**19P.** As equações de Maxwell como mostradas na Tabela 37-2 valem somente na ausência de materiais dielétricos. Como seriam escritas estas equações se esta restrição fosse eliminada?

**20P\*.** Uma longa barra cilíndrica condutora, de raio  $R$ , está centrada ao longo do eixo  $x$  como mostra a Fig. 37-11. A barra possui um corte muito fino em  $x = b$ . Uma corrente de condução  $i$ , aumentando no tempo e dada por  $i = \alpha t$ , percorre a barra da esquerda para a direita;  $\alpha$  é uma constante de proporcionalidade (positiva). No instante  $t = 0$  não existe carga nas faces do corte próximas de  $x = b$ . (a) Determine o módulo da carga nessas faces em função do tempo. (b) Use a Eq. I da Tabela 37-2 para determinar  $E$  no intervalo entre as faces em função do tempo. (c) Esboce as linhas de  $\mathbf{B}$  para  $r < R$ , onde  $r$  é a distância ao eixo  $x$ . (d) Use a Eq. IV da Tabela 37-2 para determinar  $B(r)$  no intervalo entre as faces para  $r \leq R$ . (e) Compare a resposta do item (d) com  $B(r)$  na barra para  $r \leq R$ .

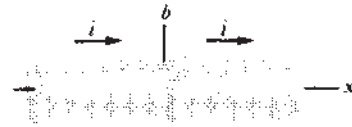


Fig. 37-11 Problema 20.

## PROBLEMAS ADICIONAIS

**21.** Um fio de prata tem resistividade  $\rho = 1,62 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  e seção transversal de área  $5,00 \text{ mm}^2$ . A corrente no fio está variando na taxa de  $2,000 \text{ A/s}$  quando a corrente é  $100 \text{ A}$ . (a) Qual é o campo elétrico no fio quando a corrente que o percorre é de  $100 \text{ A}$ ? (b) Qual é a corrente de deslocamento no fio neste instante? (c) Qual é a razão entre o campo magnético criado pela corrente de deslocamento e o campo magnético criado pela corrente a uma distância  $r$  do fio?

**22.** Um capacitor de placas paralelas de área  $A$  e separação  $d$  está preenchido com um material de constante de permissividade  $\epsilon_i$  e condutividade  $\sigma$ . O capacitor está inicialmente carregado sob uma diferença de potencial

$V$ ; o capacitor, então, descarrega através do material entre as placas. Qual é o campo magnético entre as placas durante esta descarga?

**23.** Um capacitor de placas paralelas preenchido com um material de constante dielétrica  $\kappa$  está carregando. Mostre que, enquanto o capacitor está sendo carregado, a densidade de corrente de deslocamento no dielétrico é

$$\mathbf{J}_d = \frac{d\mathbf{D}}{dt},$$

onde  $\mathbf{D} = \kappa\epsilon_0\mathbf{E}$ .