Exercícios Resolvidos de Dinâmica Clássica

Jason Alfredo Carlson Gallas, professor titular de física teórica,

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

Matéria para a QUARTA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro
"Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/~jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`listam3.tex`)

17 MOVIMENTO ONDULATÓRIO

17.1 Questionário

17-2. Energia pode ser transferida por partículas bem como por ondas. Como podemos distinguir experimentalmente esses métodos de transferência de energia?

▶ A energia é transferida entre partículas nos eventos de colisão, como acontece, por exemplo, num jogo com bolas de bilhar. Quando a energia é tranferida por onda, *também* se dá pelas colisões das partículas do meio, no caso das ondas mecânicas, mas as partículas movem-se localizadamente, enquanto a onda se propaga por uma extensão muito maior. Um exemplo notório é o das ondas sonoras.

17-6. Compare o comportamento de (a) um sistema massa-mola oscilando num movimento harmônico simples e (b) um elemento de uma corda esticada onde uma onda senoidal se propaga. Discuta do ponto de vista do deslocamento, velocidade vetorial, aceleração e transferências de energia.

▶ (a) No sistema massa-mola, a energia é localizada, isto é, a massa detém a energia cinética e a mola, suposta sem massa, detém a energia potencial. Se a energia total é constante, em algum instante ela é toda da massa, quando esta passa pela posição de equilíbrio e em outro instante será toda potencial, quando a mola estiver na sua máxima deformação. Sendo o deslocamento medido em relação à posição de equilíbrio, a velocidade nessa posição é máxima, enquanto a aceleração é nula. Nos pontos de máximo deslocamento, a velocidade é nula e a aceleração é máxima.
(b) Para o elemento da corda esticada, a energia está distribuída em vez de localizada, porque todas as partículas do elemento se movem e sofrem a ação da tensão de deformação. O elemento está sob a máxima deformação quando está na posição de equilíbrio do MHS executado pelas partículas e é também nessa posição que a velocidade transversal atinge o seu máximo. Nos pontos de maior deslocamento das partículas em relaçã à posição de equilíbrio, elas tem velocidade e aceleração nulas.

17-8. Quando duas ondas interferem, uma atrapalha a propagação da outra? Explique.

▶ Não. As ondas se combinam pelo prinípio de superposição formando uma onda progressiva com uma redistribuição apropriada da sua energia, ou formando uma onda estacionária, com outra redistribuição de energia.

17-9. Quando duas ondas interferem, existe perda de energia? Justifique sua resposta.

▶ Não. Existe uma redistribuição da energia. Nos pontos de inter ferência destrutiva, a energia é nula, mas, conseqüentemente será maior nos pontos de interferência construtiva.

17-11. Se duas ondas diferem somente em amplitude e se propagam em sentidos opostos através de um meio, produzirão elas ondas estacionárias? Existirá energia transportada? Existirão nós?

▶ Não.

17-13. Uma onda transmite energia. Ela também transfere momento linear. Será possível transferir momento angular?

▶

17-15. Uma corda é esticada entre dois suportes fixos separados de uma distância l. (a) Para quais harmônicos existirá um nó no ponto que dista $l/3$ de um dos suportes? Existirá um nó, um antinó ou uma condição intermediária num ponto que dista $2l/5$ de um dos suportes, se (b) o quinto harmônico foi gerado? (c) o décimo harmônico foi gerado?

▶ (a) Se o nó dista $l/3$ de um dos suportes, a corda está vibrando na forma de 3 meios comprimentos de onda. Então trata-se do terceiro harmônico.
(b) No ponto que dista $2l/5$ de um dos suportes, existirá um nó tanto para o quinto quanto para o décimo harmônicos.

17-17. Violonistas sabem que, antes de um concerto, deve-se tocar um pouco o violão e ajustar suas cordas porque, após alguns minutos de execução, as cordas se aquecem e cedem ligeiramente. Como esse pequeno afrouxamento afeta as freqüências de ressonância das cordas?

▶ O afrouxamento das cordas tem como conseqüência a diminuição da velocidade de propagação das ondas na corda ($v = \sqrt{\tau/\mu}$), alterando o conjunto das freqüências de ressonância, isto é, o violão fica "desafinado".

17.2 Exercícios e Problemas

Seção 17-5 A Velocidade Escalar de Propagação de uma Onda

17-3E. Balançando um barco, um menino produz ondas na superfície de um lago até então quieto. Ele observa que o barco realiza 12 oscilações em 20 s, cada oscilação produzindo uma crista de onda 15 cm acima da superfície do lago. Observa ainda que uma determinada crista de onda chega à terra, a doze metros de distância, em $6,0$ s. Quais são (a) o período, (b) a velocidade escalar, (c) o comprimento de onda e (d) a amplitude desta onda?

▶ Inicialmente, calculamos a freqüência, que é $f = 12/20 = 0,6$ Hz. As grandezas pedidas são aplicações diretas de "fórmulas":

(a)

$$T = f^{-1} = 1,67 \text{ s}$$

(b)

$$v = \frac{x}{t} = \frac{12}{6,0} = 2,0 \text{ m/s}.$$

(c)

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2,0}{0,6} = 3,33 \text{ m}.$$

(d)

$$y_{\text{m}} = 0,15 \text{ m}.$$

17-6E. Escreva a equação para uma onda se propagando no sentido negativo do eixo x e que tenha uma amplitude de $0,010$ m, uma freqüência de 550 Hz e uma velocidade de 330 m/s.

▶ A forma da onda progressiva é

$$y(x,t) = y_{\text{m}}\, sen(kx + \omega t).$$

Precisamos calcular o número de onda angular k e a freqüência angular ω:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{(2\pi)(550)}{330} = 10,47 \text{ rad/m}$$

$$\omega = kv = (10,47)(330) = 3455 \text{ rad/s}$$

Então, a onda em questão é

$$y(x,t) = 0,010\, sen(10,47x + 3455t)$$

17-14P. (a) Escreva uma expressão que descreva uma onda transversal se propagando numa corda, no sentido $+x$ com um comprimento de onda de 10 cm, uma freqüência de 400 Hz e uma amplitude de $2,0$ cm. (b) Qual é a velocidade escalar máxima de um ponto da corda? (c) Qual é a velocidade escalar da onda?

▶ (a) Começamos calculando as quantidades k e ω para montar a equação da onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10} = 0,20\pi \text{ rad/cm},$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(400) = 800\pi \text{ rad/s} \;\; \text{e}$$

$$y(x,t) = (2,0 \text{ cm})\, sen(0,20\pi x - 800\pi t).$$

(b)

$$u_{\text{máx.}} = y_{\text{m}}\omega = (2,0)(800\pi) = 5026 \text{ cm/s}$$

(c)

$$v = \lambda f = (10)(400) = 4000 \text{ cm/s}.$$

17-16P. Uma onda de freqüência 500 Hz tem uma velocidade de 350 m/s. (a) Quão afastados estão dois pontos que tem uma diferença de fase de $\pi/3$ rad? (b) Qual é a diferença de fase entre dois deslocamentos, num determinado ponto, em tempos separados de $1,00$ ms?

▶ (a) Consideremos a função $y(x,0)$ da Fig. 17-4a. As fases da onda nesses dois pontos defasados devem ser iguais:

$$kx_1 = kx_2 + \phi$$

$$k(x_1 - x_2) = \phi$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\lambda\phi}{2\pi} = \frac{v\phi}{2\pi f} = \frac{(350)(\pi/3)}{(2\pi)(500)} = 0,117 \text{ m}.$$

(b) Agora consideramos a função $y(0,t)$ da Fig. 17-4b:

$$-\omega t_1 = -\omega t_2 + \phi$$

$$\omega(t_2 - t_1) = \phi$$

$$\phi = 2\pi f\,\Delta t = (2\pi)(500)(0,001) = \pi \text{ rad}.$$

Seção 17-6 Velocidade Escalar da Onda numa Corda Esticada

17-18E. As cordas de um violino, respectivamente mais leve e mais pesada, tem densidades lineares de $3,0$ g/m e $2,9$ g/m. Qual é a relação dos diâmetros dessas cordas, da mais pesada para a mais leve, supondo que são feitas do mesmo material?

▶ A densidade volumétrica das cordas é $\rho = m/\pi r^2 L$. Em termos da densidade linear dada, escrevemos $\rho = \mu/\pi r^2$. Como as cordas são feitas do mesmo material,

$$\frac{\mu_1}{r_1^2} = \frac{\mu_2}{r_2^2}.$$

Substituindo os dados fornecidos, chegamos à relação entre os diâmetros d_1 e d_2:

$$d_1 = 1,017 d_2.$$

17-25P. Uma corda esticada tem uma massa por unidade de comprimento de $5,0$ g/cm e uma tensão de 10 N. Uma onda senoidal nessa corda tem uma amplitude de $0,12$ mm e uma freqüência de 100 Hz e se propaga no sentido de x decrescente. Escreva uma equação para essa onda.

▶ Com os dados fornecidos, calculamos inicialmente as grandezas v, ω e k necessárias para explicitar a onda:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{10}{0,5}} = 4,47 \text{ m/s}$$

$$\omega = 2\pi f = (2\pi)(100) = 628,32 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{628,32}{4,47} = 140,50 \text{ m}^{-1}$$

Como a onda se propaga no sentido negativo do eixo x, temos

$$y(x,t) = (1,2 \times 10^{-4})\, sen(140,50\, x + (628,32\, t).$$

17-31P. O tipo de elástico usado no interior de algumas bolas de beisebol e de golfe obedece à lei de Hooke para uma larga faixa de alongamento do elástico. Um segmento deste material tem um comprimento (não esticado) l e uma massa m. Quando uma força F é aplicada, o elástico estica de um comprimento adicional Δl. (a) Qual é a velocidade escalar (em termos de m, Δl e a constante elástica k) das ondas transversais neste elástico? (b) Usando sua resposta em (a), mostre que o tempo necessário para um pulso transversal percorrer o comprimento do elástico é proporcional a $1/\sqrt{\Delta l}$ se $\Delta l << l$ e é constante se $\Delta l >> l$.

▶ (a) Com a força aplicada $F = k\,\Delta l$ e a densidade do elástico dada por $\mu = m/(l + \Delta l)$, calculamos a velocidade escalar:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{k\Delta l(l+\Delta l)}{m}}$$

(b) O tempo necessário para o pulso transversal percorrer o comprimento do elástico é

$$t = \frac{l}{v} = \frac{l\,\sqrt{m}}{\sqrt{kl\Delta l + k(\Delta l)^2}}$$

Se $\Delta l << l$, $(\Delta l)^2$ é desprezível e a expressão para t reduz-se a

$$t \approx \sqrt{\frac{lm}{k\Delta l}},$$

ou seja, o tempo é proporcional a $1/\sqrt{\Delta l}$.
Se $\Delta l >> l$, então $t = \Delta l/v$, caso em que a expressão para t reduz-se a

$$t \approx \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

17-32P*. Uma corda uniforme de massa m e comprimento l está pendurada no teto. (a) Mostre que a velocidade de uma onda transversal na corda é função de y, a distância até a extremidade mais baixa, e é dada por $v = \sqrt{gy}$. (b) Mostre que o tempo que uma onda transversal leva para percorrer o comprimento da corda é dado por $t = 2\sqrt{l/g}$.

► (a) Consideremos o eixo y ao longo da corda, com origem na extremidade inferior da mesma. Para um elemento infinitesimal dm da massa da corda localizado em y a partir da origem, temos

$$d\tau = (dm)g = \mu g dy$$

que, integrando ao longo da corda, fornece

$$\tau(y) = \int_0^y \mu g dy' = \mu g y.$$

Levando este resultado para a relação da velocidade, obtemos

$$v(y) = \sqrt{\frac{\tau(y)}{\mu}} = \sqrt{gy}.$$

(b) Usando o resultado de (a),

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{gy}$$

$$\int_0^t dt' = \int_0^l (gy)^{-1/2}\, dy$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{g}}\,[2y^{1/2}]_0^l$$

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Seção 17-8 Energia e Potência numa Onda Progressiva

17-33E. A potência P_1 é transmitida por uma onda de freqüência f_1 numa corda sob tensão τ_1. Qual é a potência transmitida P_2 em termos de P_1 (a) se a tensão na corda for aumentada para $\tau_2 = 4\tau_1$ e (b) se, ao invés, a freqüência for diminuída para $f_2 = f_1/2$?

► (a) Se a tenão na corda for quadruplicada, a velocidade de porpagação fica duplicada. Sendo a potência média transmitida por uma onda dada por $\overline{P} = \frac{1}{2}\,\mu v\omega^2 y_{\rm m}^2$, a duplicação da velocidade implica na duplicação da potência transmitida.
(b) Como a freqüência aparece ao quadrado na expressão da potência, sua diminuição pela metade, implicará na redução da potência a um quarto do seu valor inicial.

17-35P. Uma onda senoidal transversal é gerada numa extremidade de uma longa corda horizontal, por uma barra que se move para cima e para baixo entre extremos que distam $1,00$ cm. O movimento é contínuo e repetido regularmente 120 vezes por segundo. A corda tem uma densidade linear de 120 g/m e é mantida sob uma tensão de 90 N. Ache (a) o valor máximo da velocidade transversal u e (b) o valor máximo da componente transversal da tensão. (c) Mostre que os dois valores máximos, calculados acima, ocorrem para os mesmos valores de fase da onda. Qual é o deslocamento transversal y da corda nessas fases? (d) Qual é a máxima potência transferida ao longo da corda? (e) Qual é o deslocamento transversal y quando esta transferência máxima de potência acontece? (f) Qual é a transferência mínima de potência ao longo da corda? (g) Qual é o deslocamento transversal y quando esta transferência mínima de potência ocorre?

► Comecemos por construir a equação da propagação da onda na corda:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{90}{0,120}} = 27,39 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{27,39}{120} = 0,23 \text{ m}$$

$$y(x,t) = (5,0\times 10^{-3}) sen\ 2\pi(4,38x - 120t),$$

sendo x em metros e t em segundos.
(a) A velocidade transversal escalar máxima $u_{\text{máx.}}$ obtemos de

$$\begin{aligned} u_{\text{máx.}} &= (\frac{\partial y}{\partial t})_{\text{máx.}} = \omega y_{\rm m} \\ &= (2\pi)(120)(5,0\times 10^{-3}) \\ &= 3,77 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(b) A componente transversal da tensão é

$$\tau_{\text{transv.}} = \tau\,(\frac{\partial y}{\partial x}),$$

e o valor máximo da componente transversal é

$$
\begin{aligned}
(\tau_{\text{transv.}})_{\text{máx.}} &= \tau k y_{\text{m}} \\
&= (90)(4,38)(2\pi)(5,0\times 10^{-3}) \\
&= 12,38 \text{ N}.
\end{aligned}
$$

(c) Tanto a velocidade transversal u como a tensão transversal $\tau_{\text{transv.}}$ tem as suas fases sob a função cosseno. Então, o mesmo par (x,t) maximiza ambas as grandezas, mas se esse par maximiza a função cosseno, ele anula a função seno, ou seja, se $kx-\omega t=0$, $y(x,y)=0$. (d) A potência transmitida ao longo da corda é dada por

$$P = (-\,\tau\,\frac{\partial y}{\partial x})\,(\frac{\partial y}{\partial t}) = \tau k\omega y_{\text{m}}^2\, cos^2(kx-\omega t)$$

Para a potência máxima transmitida temos então,

$$
\begin{aligned}
P_{\text{máx.}} &= \tau k\omega y_{\text{m}}^2 \\
&= (90)(2\pi)(4,38)(240\pi)(5,0\times 10^{-3})^2 \\
&= 47 \text{ W}.
\end{aligned}
$$

(e) O deslocamento y correspondente à máxima potência transmitida é $y=0$, já que o par (x,t) que maximiza a função cosseno é o que anula a função seno.
(f) A potência mínima transmitida é nula.
(g) A mínima potência transmitida acontece para $y=y_{\text{m}}$, já que o par (x,t) que anula o cosseno é aquele que maximiza o seno.

Secção 17-11 Interferência de Ondas

17-38P. Uma fonte S e um detector de ondas de rádio D estão localizados ao nível do solo a uma distância d (Fig. 17-26). Ondas de rádio de comprimento λ chegam a D, pelo caminho direto ou por reflexão, numa certa camada da atmosfera. Quando a camada está numa altura H, as duas ondas chegam em D exatamente em fase. À medida que a camada sobe, a diferença de fase entre as duas ondas muda, gradualmente, até estarem exatamente fora de fase para uma altura da camada $H+h$. Expresse λ em termos de d, h e H.

▶ Após a reflexão na altura H, as ondas chegam em D em fase:

$$2r_1 - d = 0,$$

sendo $r_1 = \sqrt{H^2+(d/2)^2}$.
Após a reflexão na altura $H+h$, as ondas chegam em D em oposição de fase:

$$2r_2 - d = \lambda/2,$$

sendo $r_2 = \sqrt{(H+h)^2+(d/2)^2}$. Combinando as duas equações para as interferências construtiva e destrutiva, vem

$$2r_2 - 2r_1 = \lambda/2,$$

$$\lambda = 4[\sqrt{(H+h)^2+(d/2)^2} - \sqrt{H^2+(d/2)^2}].$$

17-41P*. Determine a amplitude da onda resultante da combinação de duas ondas senoidais que se propagam no mesmo sentido, possuem mesma freqüência, tem amplitudes de $3,0$ cm e $4,0$ cm e diferença de fase de $\pi/2$ rad.

▶ Consideremos as duas ondas senoidais na posição $x=0$:

$$y_1 = 3,0\, sen\,\omega t \text{ e}$$

$$y_2 = 4,0\, sen\,(\omega t + \pi/2).$$

Agora, usando a relação trigonométrica $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sen\beta$ na onda onda y_2, efetuamos sua soma com y_1:

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = 3,0\, sen\,\omega t + 4,0\, cos\,\omega t$$

$$y = 3,0\,[sen\,\omega t + 1,33\, cos\,\omega t].$$

A superpsição dessas ondas produz uma onda da mesma forma de cada uma delas, que escrevemos genericamente como

$$y = y_{\text{m}}\, sen(\omega t + \phi),$$

e, usando a mesma identidade trigonométrica, obtemos

$$y = y_{\text{m}}\,(sen\,\omega t\, cos\,\phi + cos\,\omega t\, sen\,\phi),$$

onde ϕ é a diferença de fase de y em relação a y_1. Comparando as duas formas que temos para y, escrevemos

$$\alpha\, sen\,\phi = 1,33 \;\; e$$

$$\alpha \, cos \, \phi = 1,$$

onde α é um fator de proporcionalidade entre as duas formas da função y. Dividindo as duas relações acima obtemos a constante de fase ϕ:

$$tg \, \phi = 1,33$$

$$\phi = 0,93 \text{ rad}.$$

Elevando as relações acima ao quadrado e somando, obtemos o fator α:

$$\alpha^2 \, (sen^2 \, \phi + cos^2 \, \phi) = 2,7689,$$

$$\alpha = 1,664.$$

Agora podemos explicitar a função $y = y_1 + y_2$:

$$y(t) = 0,05 \, sen(\omega t + 0,93),$$

onde $y_m = 1,664 \times 0,03 = 0,05$ m. Este problema também pode ser facilmente resolvido pelo método dos fasores. Com a escolha de uma escala adequada, a amplitude e a constante de fase são diretamente medidas com régua e transferidor. Refaça o problema usando os fasores para confirmar o resultado obtido pelo método analítico.

Seção 17 -13 Ondas Estacionárias e Ressonância

17-42E. Uma corda sob tensão τ_i oscila no terceiro harmônico com uma freqüência f_3, e as ondas na corda tem comprimento de onda λ_3. Se a tensão for aumentada para $\tau_f = 4\,\tau_i$ e a corda novamente levada a oscilar no terceiro harmônico, qual será (a) a freqüência de oscilação em termos de f_3 e (b) o comprimento de onda em termos de λ_3?

▶ (a) Da relação $v_i = \sqrt{\tau_i/\mu}$, obtemos com a tensão final $\tau_f = 4\tau_i$ que $v_f = 2v_i$. Então, para o "novo" terceiro harmônico teremos

$$f_{3f} = \frac{3}{2l}(2v_i) = 2f_{3i}.$$

(b) Para o comprimento de onda, teremos

$$\lambda_{3f} = \frac{2v_i}{2f_{3i}} = \lambda_{3i},$$

ou seja, a variação na tensão da corda duplica a velocidade e a freqüência, mantendo inalterado o comprimento de onda.

17-46E. Uma corda de violão, de náilon, tem uma densidade linear de $7,2$ g/m e está sob uma tensão igual a 150 N. Os suportes fixos estão distanciados 90 cm. A corda está oscilando de acordo com o padrão de onda estacionária mostrado na Fig. 17-27. Calcule (a) a velocidade escalar, (b) o comprimento de onda e (c) a freqüência das ondas cuja superposição origina esta onda estacionária.

▶ A onda estacionária indicada está vibrando no terceiro harmônico, ou seja, $n = 3$.
(a) Para a velocidade temos

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{150}{7,2 \times 10^{-3}}} = 144 \text{ m/s}.$$

(b) Para o comprimento de onda,

$$\lambda_n = \frac{2l}{n},$$

$$\lambda_3 = \frac{(2)(0,90)}{3} = 0,60 \text{ m}.$$

(c) E para a freqüência,

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{144}{0,60} = 240 \text{ Hz}.$$

17-48E. Uma corda de 120 cm de comprimento é esticada entre suportes fixos. Quais são os três comprimentos de onda mais longos possíveis para ondas estacionárias nessa corda? Esboce as ondas estacionárias correspondentes.

▶ O comprimento de onda é dado por $\lambda_n = 2l/n$, com $n = 1, 2, 3, ...$ se a corda está fixa nas duas extremidades. Os três maiores comprimentos de onda serão então,

$$\lambda_1 = 2l = 2,40 \text{ m},$$

$$\lambda_2 = l = 1,20 \text{ m e}$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}\, l = 0,80 \text{ m}.$$

17-52E. Uma ponta de uma corda de 120 cm é mantida fixa. A outra ponta é presa a um anel sem peso que pode deslizar ao longo de uma haste sem atrito, conforme mostrado na Fig. 17-28. Quais são os três mais longos comprimentos de onda possíveis para ondas estacionárias nessa corda? Esboce as ondas estacionárias correspondentes.

▶ Quando a corda está presa em só em uma extremidade, os comprimentos de onda possíveis são fornecidos pela relação $\lambda_n = 4l/n$, com $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$. Os três maiores comprimentos de onda serão

$$\lambda_1 = 4l = 4,80 \text{ m},$$

$$\lambda_3 = \frac{4}{3}\,l = 1,60 \text{ m e}$$

$$\lambda_5 = \frac{4}{5}\,l = 0,96 \text{ m}.$$

17-54P. Duas ondas estão se propagando na mesma corda, muito comprida. Um vibrador no extremo esquerdo da corda gera uma onda dada por

$$y = (6,0 \text{ cm}) = cos\,\frac{\pi}{2}\,[(2,0 \text{ m}^{-1})\,x + (8,0 \text{ s}^{-1})\,t],$$

enquanto um outro no extremo direito gera a onda

$$y = (6,0 \text{ cm}) = cos\,\frac{\pi}{2}\,[(2,0 \text{ m}^{-1})\,x - (8,0 \text{ s}^{-1})\,t].$$

(a) Calcule a freqüência, o comprimento de onda e a velocidade escalar de cada onda. (b) Determine os pontos onde não existe movimento (os nós). (c) Em quais pontos o movimento da corda é máximo?

▶ (a) Para obter as grandezas pedidas só precisamos observar as quantidades fornecidas nas duas ondas dadas:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2,0 \text{ Hz},$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2,0 \text{ m e}$$

$$v = \lambda\,f = (2,0)(2,0) = 4,0 \text{ m/s}.$$

(b) A superposição das ondas dadas produz a onda estacionária

$$Y(x,t) = 2y_m\; cos\pi x\; cos4\pi t,$$

cujos nós obtemos fazendo $cos\pi x = 0$, condição satisfeita para

$$x = 0.50 \text{ m}; 1.5 \text{ m}; 2.5 \text{ m}; \ldots$$

(c) Os antinós devem satisfazer a condição $cos\pi x = \pm 1$, cujas posições são

$$x = 1.0 \text{ m}; 2.0\text{m}; 3.0 \text{ m}; \ldots$$

17-56P. Uma corda está esticada entre suportes fixos separados por 75 cm. Observou-se que tem freqüências ressonantes em 420 e 315 Hz e nenhuma outra neste intervalo. (a) Qual é a freqüência de ressonância mais baixa dessa corda? (b) Qual é a velocidade de onda para essa corda?

▶ Para uma corda fixa nas duas extremidades, temos $2lf_n = nv$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$ Para as duas freqüências dadas, escrevemos

$$\frac{420}{n_a} = \frac{315}{n_b},$$

onde n_a e n_b são valores consecutivos dos harmônicos n, tal que $n_a = n_b + 1$. Substituindo essa condição na igualdade acima, encontramos os harmônicos que correspondem às freqüências dadas, $n_a = 4$ e $n_b = 3$.
(a) Para a freqüência fundamental temos

$$f_1 = \frac{420}{4} = 105 \text{ Hz}.$$

(b) A velocidade da onda é

$$v = 2lf_1 = 157.5 \text{ m/s}.$$

17-60P. Uma corda de $3,0$ m de comprimento está oscilando na forma de uma onda estacionária de três meios comprimentos de onda, cuja amplitude é $1,0$ cm. A velocidade escalar da onda é de 100 m/s. (a) Qual é a freqüência? (b) Escreva equações para duas ondas que, combinadas, resultem nessa onda estacionária.

▶ A corda está vibrando no terceiro harmônico, com comprimento de onda $\lambda = 2.0$ m. Então, (a)

$$f = \frac{v}{\lambda} = 50 \text{ Hz}$$

(b) Se a amplitude da onda estacionária é 1.0 cm, a amplitude de cada uma das ondas combinadas é 0.5 cm. O número de onda angular é $k = 2\pi/\lambda = \pi$

rad/m e a freqüência angular é $\omega = 2\pi f = 100\pi$ rad/s. Portanto,

$$y_1 = (0.5)\, sen\, \pi\, (x - 100t) \text{ e}$$

$$y_2 = (0.5)\, sen\, \pi\, (x + 100t).$$

17-63P. Considere uma onda estacionária que é a soma de duas ondas idênticas se propagando em sentidos opostos. Mostre que a energia cinética máxima em cada meio comprimento de onda dessa onda estacionária é $2\pi^2 \mu\, y_{\rm m}^2\, f v$.

► A velocidade transversal de um elemento do meio é

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\, 2y_{\rm m}\, senkx\, sen\omega t,$$

tal que sua energia cinética é dada por

$$\begin{aligned} dK &= \frac{1}{2}\, dm\, u^2 \\ &= 2\mu dx y_{\rm m}^2 \omega^2\, sen^2 kx\, sen^2 \omega t. \end{aligned}$$

A energia cinética máxima do elemento é

$$dK_{\rm m} = 2\mu dx y_{\rm m}^2 \omega^2\, sen^2 kx.$$

Lembrando que $\omega = 2\pi f$, integramos $dK_{\rm m}$ desde $x = 0$ até $x = \lambda/2 = \pi/k$:

$$\begin{aligned} K_{\rm m} &= 2\mu y_{\rm m}^2 \omega^2 \int_0^{\pi/k} sen^2 x dx \\ &= 2\mu y_{\rm m}^2 \omega^2 \int_0^{\pi/k} \left[\frac{x}{2} - \frac{sen2kx}{4k}\right]_0^{\mu/k} \\ &= 2\mu\pi^2 y_m^2 f v. \end{aligned}$$

17-64P. Um fio de alumínio de comprimento $l = 60,0$ cm com área de seção transversal igual a $1,00 \times 10^{-2}$ cm^2 e densidade $2,60$ g/cm^3 é conectado a um fio de aço, de densidade $7,80$ g/cm^3 e mesma área de seção transversal. O fio composto é conectado a um bloco de massa $m = 10,0$ kg, conforme a Fig. 17-30, de forma que a distância l_2 entre a junção e a roldana de suporte seja $86,6$ cm. Ondas transversais são estabelecidas no fio usando-se uma fonte externa de freqüência variável. (a) Ache a mais baixa freqüência de vibração que dará origem a uma onda estacionária com nó no ponto de junção. (b) Quantos nós são observados nessa freqüência?

► O fio composto está submetido à tensão $T = mg = 98$ N e, lembrando que $\rho = m/Al$, a densidade linear de cada parte, de alumínio e aço, é, respectivamente,

$$\mu_1 = \rho_1 A = 2.6 \times 10^{-3} \text{ kg/m e}$$

$$\mu_2 = \rho_2 A = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/m}.$$

A tensão no fio é $T = \mu v^2 = \mu\lambda^2 f^2$ e lembrando que $l = n\lambda/2$, temos

$$\begin{aligned} \mu_1 \lambda_1^2 f^2 &= \mu_2 \lambda_2 f^2 \\ \mu_1 \frac{4l_1^2}{n_1^2} &= \mu_2 \frac{4l_2^2}{n_2^2}, \end{aligned}$$

que nos fornece

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{l_2\sqrt{\mu_2}}{l_1\sqrt{\mu_1}} = 2.5$$

Os valores de n que satisfazem a razão acima são $n_1 = 2$ e $n_2 = 5$, do que obtemos

$$\lambda_1 = \frac{2l_1}{n_1} = 0.60 \text{ m e}$$

$$\lambda_2 = \frac{2l_2}{n_2} = 0.35 \text{ m}.$$

Voltando à relação da tensão, $T = \mu_1 \lambda_1^2 f^2$, obtemos a mais baixa freqüência de vibração do sistema,
(a) $f = 324$ Hz.
(b) As extremidades fixas são nós, evidentemente. O comprimento l_1 acomoda um comprimento λ_1, com 3 nós, inclusive o do ponto de junção dos fios. O comprimento l_2 acomoda 2.5 comprimentos λ_2, com 6 nós, incluindo o do ponto de junção. Então, o fio composto tem um total de 8 nós nesse modo vibrante.

17.3 Problemas Adicionais

17-65. Uma corda, submetida a uma tensão de 200 N e presa em ambas as extremidades, oscila no segundo harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento da corda é dado por

$$y = (0,10\,\mathrm{m})(sen\,\pi x/2)\,sen\,12\pi t,$$

onde $x = 0$ numa das pontas da corda, x é dado em metros e t em segundos. Quais são (a) o comprimento da corda, (b) a velocidade escalar das ondas na corda e (c) a massa da corda? (d) Se a corda oscilar num padrão de onda estacionária referente ao terceiro harmônico, qual será o período de oscilação?

► (a) Da forma da onda dada, temos $k = \pi/2$ rad/m e $\lambda = 2\pi/k = 4.0$ m. Como a corda vibra no segundo harmônico, $n = 2$, resulta que

$$l = \lambda = 4.0m.$$

(b) A velocidade das ondas na corda obtemos de

$$v = \frac{\omega}{k} = 24\ \mathrm{m/s}$$

(c) Com a tensão aplicada e a velocidade do ítem (b), temos

$$\mu = \frac{\tau}{v^2} = 0.347\ \mathrm{kg/m}$$

A massa da corda então é

$$m = \mu l = 1.39\ \mathrm{kg}.$$

(d) Se a corda vibra no terceiro harmônico, a freqüência é $f = nv/2l = 9.0$ Hz e o período de oscilação é $T = f^{-1} = 0.11$ s.

17-67. Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas por

$$y_1 = 0,050\,cos(\pi x - 4\pi t),$$

$$y_2 = 0,050\,cos(\pi x + 4\pi t),$$

onde x, y_1 e y_2 estão em metros e t em segundos. (a) Qual é o menor valor positivo de x que corresponde a um nó? (b) Em quais instantes no intervalo $0 \leq t \leq 0,50$ s a partícula em $x = 0$ terá velocidade zero?

► (a) Usando a identidade trigonométrica,

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\,\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta)\,cos\,\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta),$$

chegamos à forma da onda estacionária resultante:

$$Y(x,t) = 0.10\,cos\pi x\,cos 4\pi t.$$

A cada nó, devemos ter $Y = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} cos\pi x &= 0 \\ \pi x &= \frac{\pi}{2} \\ x &= 0.5\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

(b) A velocidade para qualquer partícula da corda oscilante é

$$u(x,t) = \frac{\partial Y}{\partial t} = -\,(4\pi)(0.10)\,cos\pi x\,sen 4\pi t.$$

Em $x = 0$, a partícula tem velocidade nula quando

$$\begin{aligned} sen 4\pi t &= 0 \\ 4\pi t &= n\pi \\ t &= \frac{n}{4}, \end{aligned}$$

onde $n = 0, 1, 2, ...$ Dentro do intervalo em questão, a velocidade é nula para $t = 0$ s, $t = 0.25$ s e $t = 0.5$ s.