

# Manual da ferramenta MSN - Resolução de Sistemas de Equações Lineares

MSN 2008.2

15 de dezembro de 2008

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Licença . . . . .	2
1.2	Código Fonte . . . . .	2
1.3	Equipe de Desenvolvedores . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Instalação</b>	<b>4</b>
2.1	Dependências . . . . .	4
2.2	Execução . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Resolução de Sistemas de Equações Lineares</b>	<b>5</b>
3.1	Usando a Ferramenta . . . . .	7
3.2	Métodos de Resolução de Sistemas de Equações Lineares . . . . .	7
3.2.1	Método da Eliminação de Gauss com e sem pivoteamento . . . . .	8
3.2.2	Método da Eliminação de Gauss-Jordan com e sem pivoteamento . . . . .	9
3.2.3	Método da Decomposição LU e SVD . . . . .	10
3.2.4	Método da Decomposição de Cholesky e QR . . . . .	10
3.2.5	Método de Gauss-Jacobi . . . . .	11
3.2.6	Método de Gauss-Seidel . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Manual do Desenvolvedor</b>	<b>13</b>
4.1	Organização do Código . . . . .	14
4.2	Arquitetura do Sistema . . . . .	14
4.3	Guia de Usabilidade da Interface . . . . .	17

# Capítulo 1

## Introdução

A ferramenta MSN - Resolução de Sistemas de Equações Lineares foi desenvolvida para a disciplina de *Métodos de Software Numérico* ministrada pelo professor Eustáquio Rangel na *Universidade Federal de Campina Grande* pelo *Departamento de Sistemas e Computação*. Tendo como desenvolvedores toda a equipe de alunos da disciplina, e usando a linguagem de programação Java, a ferramenta busca resolver sistemas de equações lineares usando diversos métodos pesquisados e discutidos em sala de aula.

Este documento descreve um manual de uso da ferramenta. No capítulo 2, é descrita a instalação e uso inicial da ferramenta. O capítulo 3 descreve o funcionamento da ferramenta: como usá-la para a resolução de sistemas lineares, incluindo um embasamento teórico dos procedimentos realizados. Por fim, o capítulo 4 descreve um pequeno manual para o desenvolvedor, com as decisões arquiteturais do projeto e uma descrição do funcionamento e organização do código da mesma.

### 1.1 Licença

Esta ferramenta está liberada sob a licença GPL 2.0[2].

### 1.2 Código Fonte

O acesso ao código fonte, documentação e informações sobre o projeto podem ser acessadas no site: <http://code.google.com/p/msn-sistemas-lineares/>. Para acessar o código fonte, basta usar o SVN [5], localizado no endereço: <http://msn-sistemas-lineares.googlecode.com/svn/trunk/>.

### 1.3 Equipe de Desenvolvedores

- Adauto Trigueiro
- Alan Farias
- Anderson Pablo

- Dayane Gaudencio
- Diego Melo Gurjão
- Everton Leandro
- Hugo Marques
- Jackson Porciuncula
- João Felipe Ouriques
- José Wilson
- José Gildo
- Leonardo Ribeiro Mendes
- Rafael Dantas
- Ricardo Araújo
- Roberta Guedes
- Rodrigo Pinheiro
- Theo Alves

## Capítulo 2

# Instalação

### 2.1 Dependências

A ferramenta executa sobre a plataforma Java, aproveitando todas as suas vantagens como, por exemplo, a independência de sistema operacional, desde que exista uma máquina virtual compatível com tal sistema.

### 2.2 Execução

Utilizando o jar disponibilizado, para executar o usuário necessita do comando:

```
java -jar nome_do_jar.jar
```

Dessa forma a ferramenta não necessita de instalação, trazendo uma vantagem ao usuário que não tem permissões para instalar aplicativos.

## Capítulo 3

# Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Esta seção descreve como a ferramenta trabalha para a resolução de sistemas de equações lineares. Para contextualizar o leitor, é importante entender como são definidos tais sistemas. Esta base é usada posteriormente na explicação dos métodos de resolução de sistemas de equações lineares.

Todo sistema de equações lineares representa uma composição de equações lineares, como mostra o exemplo a seguir:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

É possível obter uma matriz representando os coeficientes das equações lineares que compõe o sistema. Esta matriz é da forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Dois outros vetores também são obtidos a partir das equações lineares do sistema inicial. O primeiro vetor representa as incógnitas do sistema:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

E o segundo vetor composto pelos termos independentes do sistema:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Observe que ao multiplicar cada linha de  $A$ , ou seja, da *matriz dos coeficientes*, pelo vetor  $x$  (incógnitas do sistema), obtêm-se como resultado cada valor do vetor dos termos independentes,  $b$ . Assim, o sistema original pode ser representado por  $A$ ,  $x$  e  $b$  como descrito na equação 3.1.

$$Ax = b \quad (3.1)$$

Uma representação útil do sistema, a ser usado em alguns métodos a serem apresentados é a da matriz expandida do sistema. Esta matriz  $A_{expand}$  é definida como a matriz dos coeficientes acrescida ao vetor dos termos  $b$ . Ou seja:

$$A_{expand} = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

Visualizando o sistema como uma operação matricial, é possível identificar propriedades do sistema a partir das propriedades da matriz de coeficientes da equação. Em especial, a matriz  $A$  de tamanho  $m \times n$ , apresenta  $m$  incógnitas e  $n$  equações lineares.

Durante a resolução de tal sistema, três possibilidades de resultados estão descritos na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Possíveis Resultados de um Sistema

Tipo	Descrição
<b>Possível e Determinado</b>	O sistema é possível e apresenta uma única solução
<b>Possível e Indeterminado</b>	O sistema é possível, mas não apresenta uma única solução
<b>Impossível</b>	O sistema não tem solução

Num sistema onde  $m > n$ , ou seja, há mais incógnitas do que equações, não é possível determinar uma solução única para o sistema: cada equação representa um vetor no espaço de  $m$  dimensões, e a solução única só é possível quando a interseção de todas as equações forma um ponto no espaço. Note que tal sistema também poderia não ter solução: basta considerar o exemplo de quando dois vetores são paralelos no espaço, assim, não apresentando pontos comuns de interseção.

Quando  $m < n$ , o sistema possivelmente não apresenta soluções. Fazendo um análogo com a interpretação espacial de um sistema de equações lineares,  $m$  equações possivelmente apresentará como interseção um único ponto no espaço. A adição de uma nova equação pode não interceptar este mesmo ponto, fazendo com o que o sistema se torne impossível de ser solucionado. Observe que é possível que a nova equação ainda permita que o sistema tenha uma única

solução: basta que este vetor intercepte o mesmo único ponto que os demais vetores no espaço.

Devido as possíveis interpretações de um sistema em que  $m \neq n$ , a ferramenta limita-se apenas em explorar os sistemas homogêneos. Nestes sistemas  $m = n$ . Esta restrição permite explorar a matriz de entrada do sistema, verificado ao usuário qual a classificação do tipo do sistema (possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível).

Para realizar esta verificação, utiliza-se de parte da regra de Cramer [6]. Em especial, considerando que a matriz  $A$  tem tamanho  $n \times n$ , então:

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Ainda, pra cada incógnita existe um  $D_k$  tal que:

$$D_k \equiv \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Assim, considerando  $D$  e  $D_k$ , é possível determinar o tipo de resolução do sistema, como mostra as condições da tabela 3.2.

Tabela 3.2: Condições para Identificação das Soluções de um Sistema

Tipo	Condição
Possível e Determinado	$D \neq 0$
Possível e Indeterminado	$D = 0, \forall k, D_k = 0$
Impossível	$D = 0, \exists k   D_k \neq 0$

Assim, considerando a limitação da ferramenta em que apenas sistemas homogêneos são verificados, a ferramenta também verifica se o sistema tem solução possível e determinada, possível e indeterminada, ou se é impossível de ser resolvido. Este cálculo é feito a partir das determinantes do sistema, como apresentado anteriormente.

### 3.1 Usando a Ferramenta

TODO

### 3.2 Métodos de Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Os métodos usados pela ferramenta podem ser classificados como diretos ou iterativos. Nos métodos diretos, são conhecidos os números de passos e o procedimento para se obter um vetor de solução do sistema. Enquanto nos métodos iterativos, a solução é refinada até que seja obtido um vetor que satisfaça à precisão definida.



São métodos diretos:

- Método da Eliminação de Gauss
- Método da Eliminação de Gauss-Jordan
- Método da Decomposição LU e SVD
- Método da Decomposição de Cholesky e QR

São métodos iterativos:

- Método de Gauss-Jacobi
- Método de Gauss-Seidel

As soluções obtidas pelos métodos diretos são refinadas até atingirem um critério definido pelo usuário. Considerando que  $x$  representa um vetor de soluções, idealmente:

$$b - Ax = 0$$

Entretanto, pelos erros associados as operações numéricas do software, é possível que se obtenha um resíduo  $r$  no cálculo desta solução:

$$b - Ax = r \quad (3.2)$$

Para amenizar o resíduo, procura-se um vetor de correção  $c$  tal que:

$$\begin{aligned} A(x + c) - b &= 0 \\ Ax + Ac - b &= 0 \\ Ax - b + Ac &= 0 \\ Ac &= b - Ax \end{aligned}$$

Aplicando a equação 3.2:

$$Ac = r \quad (3.3)$$

Basta resolver a equação 3.3 para obter um novo vetor de soluções  $x^1$  tal que  $x^1 = x + c$ . Esta nova solução pode ser novamente refinada até que o vetor de resíduo satisfaça os critérios definidos pelo usuário.

### 3.2.1 Método da Eliminação de Gauss com e sem pivoteamento

O método da eliminação de Gauss faz uso de três operações básicas sobre a matriz expandida do sistema que não altera a solução do mesmo:

- Multiplicação de uma equação (linha) por uma constante não nula
- Soma do múltiplo de uma equação a outra
- Troca de posição de duas ou mais equações

O método utiliza de tais operações na busca de uma matriz triangular, isto é, na forma:

$$A_{expand} = \left[ \begin{array}{cccc|c} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \cdots & \delta_{1,n} & b_1 \\ 0 & \delta_{2,2} & \cdots & \delta_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

Para se obter esta matriz, considere-se este exemplo trivial:

$$Exemplo_{expand} = \left[ \begin{array}{cc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \end{array} \right]$$

Para anular o elemento  $a_{2,1}$ , a segunda linha ( $L_2$ ) é substituída por  $a_{2,1}/a_{1,1} \times L_1 - L_2$ , onde  $L_1$  representa a primeira linha. Ao realizar tal operação o termo  $a_{2,1}$  na matriz  $Exemplo_{expand}$  é anulado. O algoritmo de triangularização da matriz irá operar em diagonal, trocando as linhas que apresentem um valor nulo na diagonal por alguma linha abaixo que possua um valor não-nulo na mesma coluna, e, a partir disto, anulando todos os coeficientes abaixo do elemento da diagonal atual.

A partir da matriz resultante de tal operação, o cálculo da solução é direto: basta resolver recursivamente da última linha para primeira o valor de cada incógnita.

O uso de um pivô determina que o sistema fará a escolha da linha de referência para triangularizar a matriz de acordo com o maior elemento existente da coluna. A linha com o maior elemento, passa a ser a linha cuja diagonal da matriz irá possuir tal elemento nesta coluna. Ao escolher tal pivô, as operações usam como referência um valor maior, o que permite diminuir os erros gerados pelas operações de ponto flutuante do software.

### 3.2.2 Método da Eliminação de Gauss-Jordan com e sem pivoteamento

No método de Gauss-Jordan, deseja-se obter uma matriz expandida equivalente ao sistema original, onde os coeficientes apresentam em toda diagonal elementos não-nulos. Este método complementa o método de eliminação de Gauss apresentado anteriormente, eliminando a etapa da resolução recursiva da matriz triangular, pois o sistema estará na forma:

$$A_{expand} = \left[ \begin{array}{cccc|c} \delta_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \delta_{2,2} & \cdots & 0 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_{m,n} & \beta_m \end{array} \right]$$

Onde a solução é imediata:  $x_1 = \beta_1/\delta_{1,1}$ .

Para obter esta matriz, o método inicia triangularizando a matriz e, em seguida, tomando a última linha, como referência elimina todos os elementos da última coluna dos coeficientes da matriz. Em seguida, repete o processo para a penúltima linha e assim sucessivamente.

### 3.2.3 Método da Decomposição LU e SVD

#### Decomposição LU

A resolução do método da decomposição LU se baseia na decomposição da matriz  $A$  de  $A.x = b$  em duas outras matrizes  $L$  e  $U$ :

$$A = L.U$$

Onde  $L$  é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária, ou seja, todos elementos acima da diagonal são nulos e os da diagonal são iguais a 1; e  $U$  é uma matriz triangular superior, onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, de forma que:

$$LU.x = b$$

Dessa forma, a resolução do sistema  $A.x = b$  se reduz à resolução de dois sistemas triangulares:  $U.x = y$  e  $L.y = b$ . As matrizes  $L$  e  $U$  podem ser obtidas usando o processo de Gauss, onde a matriz  $U$  é a matriz resultante do processo e a matriz  $L$  é composta dos índices usados para multiplicar as linhas no processo e uma diagonal principal unitária.

#### Decomposição SVD

Quando a matriz  $A$  é singular, ou seja, não possui inversa (determinante igual a 0 no teste de Cramer), a decomposição SVD pode ser usada. Matrizes  $A(M \times N)$  tal que  $M$  seja maior ou igual a  $N$ , podem ser decompostas no produto de três matrizes:  $A = U.W.V^T$ , tal que  $U$  é uma matriz coluna ortogonal;  $W$  é uma matriz diagonal com elementos positivos ou nulos (valores singulares); e  $V$  é uma matriz ortogonal.

Se  $A$  for uma matriz quadrada então  $U$ ,  $W$  e  $V$  também o serão. Logo, de acordo com [3] podemos definir  $x$  como:

$$x = V.[diag(1/w_j)].(U^T.b) \quad (3.4)$$

Caso  $w_j$  seja nulo podemos substituir  $1/w_j$  por zero.

### 3.2.4 Método da Decomposição de Cholesky e QR

#### Decomposição de Cholesky

Quando a matriz  $A$  é simétrica e positiva definida, ou seja  $v.A.v > 0 \forall \text{vetor } v$ , há uma decomposição triangular mais eficiente. A decomposição de Cholesky constrói uma matriz  $L$  diagonal inferior tal que  $L^T$  serve como matriz  $U$ , de modo que  $L.L^T = A$ .

Dessa forma a equação da decomposição LU torna-se:

$$L.L^T.x = b$$

### Decomposição QR

A decomposição QR consiste em decompor a matriz  $A$  no produto  $QR$  onde  $R$  é uma matriz triangular superior e  $Q$  é uma matriz ortogonal, ou seja,  $Q.Q^T = 1$ . Substituindo na equação  $Ax = b$  temos que:

$$\begin{aligned}Q.R.x &= b \\ R.x &= Q^T.b\end{aligned}$$

### 3.2.5 Método de Gauss-Jacobi

O método de Gauss-Jacobi fundamenta-se em resolver a equação:

$$Ax = b$$

Sabendo que a matriz  $A$  pode ser escrita na forma  $A = D + (L + U)$  onde  $D$  representa a diagonal,  $L$  a matriz estritamente inferior e  $U$  a matriz estritamente superior. Substituindo o resultado na equação e isolando a variável  $x$  no primeiro membro, temos que:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}[b - (L + U)x^{(k)}]$$

com  $k$  sendo o contador de iterações. Assim sendo, uma abordagem iterativa para a equação acima seria:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j^{(k)})$$

Com o uso dessa equação os termos da matriz na iteração  $k+1$  são calculados única e exclusivamente com os valores na iteração  $k$ . O processo converge quando a matriz é estritamente diagonal dominante, ou seja, o módulo do elemento na diagonal é maior que a soma do módulo de todos os outros elementos (não diagonais) da linha em questão. Mais precisamente:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i$$

Há alguns casos onde o método converge sem satisfazer a condição anterior, sendo necessário que os elementos na diagonal principal sejam maiores em magnitude que os outros elementos.

### 3.2.6 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é uma melhoria no método de Gauss-Jacobi, logo se baseia nos mesmos princípios. A principal diferença é que enquanto o método de Gauss-Jacobi usa única e exclusivamente os elementos da matriz da iteração anterior, o método de Gauss-Seidel utiliza os elementos já calculados na iteração corrente. Dessa forma a iteração de Gauss-Seidel é definida como sendo:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b - \sum_{j < i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij}x_j^{(k)})$$

Assim como o método de Gauss-Jacobi, o método de Gauss-Seidel também converge para uma matriz  $A$  tal que  $A$  é estritamente diagonais dominantes. O método também converge para matrizes definidas positivas.

## Capítulo 4

# Manual do Desenvolvedor

A ferramenta **MSN - Resolução de Sistemas de Equações Lineares** foi feita em Java seguindo princípios básicos de desenvolvimento. Foram requisitos de desenvolvimento:

- Codificação de testes para os métodos
- Separação da lógica de negócio da lógica de interface
- Compatibilidade com o código da ferramenta desenvolvida no semestre anterior[1]
- Codificação em inglês
- Facilidade na instalação e uso

O código disponibiliza um arquivo `build.xml` a ser usado pelo Ant[4] para realizar tarefas comuns de desenvolvimento como:

**clean** Limpa o código gerado automaticamente pelo projeto (classes e documentação);

**prepare** Prepara o código para uso, criando os diretórios necessários;

**javadoc** Cria a documentação associada as classes do sistema;

**make-jar** Prepara um arquivo JAR executável;

**test** Testa o sistema;

**release** Prepara uma versão para uso contendo documentação e JAR.

Para executar qualquer uma destas tarefas, basta executar `ant tarefa` no diretório do projeto. Como pré-requisito o `ant` precisa estar devidamente configurado.

Tabela 4.1: Estrutura de Diretórios

Diretório	Descrição
<b>src</b>	Código fonte da aplicação
<b>tests</b>	Código de teste da aplicação
<b>lib</b>	Bibliotecas utilizadas no desenvolvimento da ferramenta
<b>docs</b>	Diretório com a documentação da ferramenta

## 4.1 Organização do Código

Todo o código segue a codificação UTF-8, permitindo maior compatibilidade entre os sistemas existentes. O sistema disponibiliza uma estrutura de diretórios para os recursos adequados referentes ao projeto:

O diretório **src** tem **br.edu.ufcg.msnlab** como pacote base da ferramenta, apresentando os seguintes sub-pacotes:

Tabela 4.2: Estrutura de Pacotes

Pacote	Descrição
<b>br.edu.ufcg.msnlab.exceptions</b>	Exceções dos métodos
<b>br.edu.ufcg.msnlab.facade</b>	Facade para comunicação da interface e métodos de resolução
<b>br.edu.ufcg.msnlab.methods</b>	Pacote para armazenar os métodos de resolução de sistemas
<b>br.edu.ufcg.msnlab.util</b>	Pacote com classes utilitárias comuns ao projeto

O diretório de testes segue uma mesma estrutura de pacotes, colocando as classes de teste no mesmo pacote a qual o teste se refere.

## 4.2 Arquitetura do Sistema

Seis componentes básicos descrevem a arquitetura do sistema:

**GUI** Componente responsável pela interface gráfica com o usuário

**SystemLogic** Lógica do sistema, responsável por invocar os métodos, fazer a checagem inicial e executar o *parser* das equações recebidas

**SystemParser** Componente para *parser* das equações recebidas pela interface

**Checker** Componente para a avaliação das soluções das matrizes de acordo com a regra de Cramer

**Solver** Componente de interface para invocação dos métodos do sistema

**Methods** Componente com os métodos do sistema

A interação estática destes elementos é descrita na figura 4.1, enquanto a interação dinâmica dos elementos é representada no diagrama de sequência da figura 4.2.

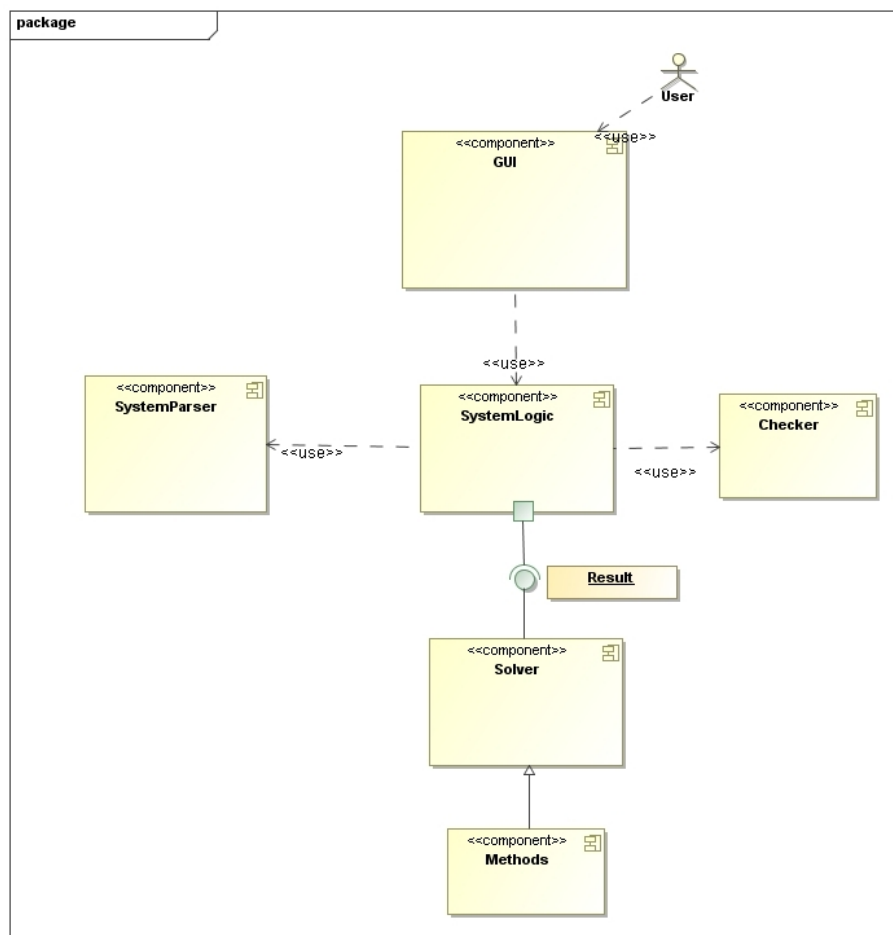


Figura 4.1: Arquitetura do Sistema



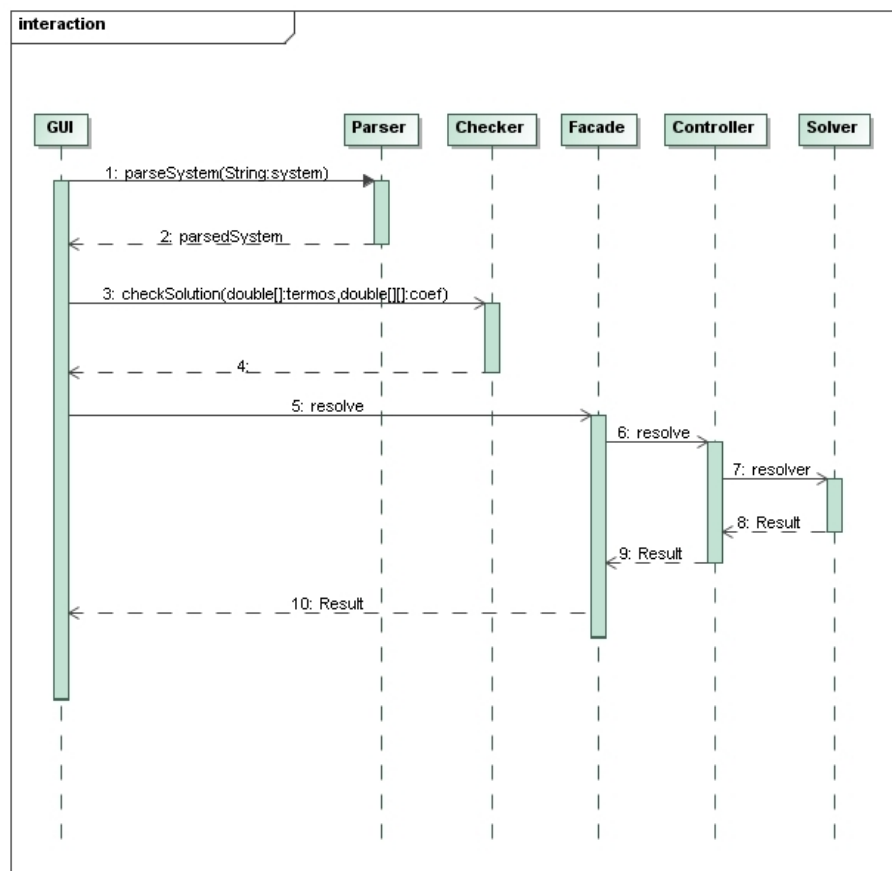


Figura 4.2: Fluxo de Execução do Sistema

### 4.3 Guia de Usabilidade da Interface

Este guia levanta requisitos a serem usados na interface gráfica na forma de uma lista de fatores de usabilidade a serem adotados na construção da interface.

- Diálogo simples e claro
- Linguagem do usuário
- Minimizar carga de memória
- Consistência
- Feedback
- Atalhos
- Documentação e ajuda
- Saídas claras
- Boas mensagens de erro
- Evitar erros

### Agradecimentos

# Referências Bibliográficas

- [1] MSN 2008.1. Msn 2008.1. <http://code.google.com/p/msnlab/>, 2008.
- [2] Inc. Free Software Foundation. Gpl 2.0. <http://www.gnu.org/licenses/gpl-2.0.txt>, 1989, 1991.
- [3] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [4] The Apache Ant Project. The apache ant project. <http://ant.apache.org/>, 2008.
- [5] Tigris.org. Subversion. <http://subversion.tigris.org/>, 2008.
- [6] Eric W. Weisstein. Cramer’s rule. MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CramersRule.html>, 2008.