Árvores

Profª. Rose Yuri Shimizu

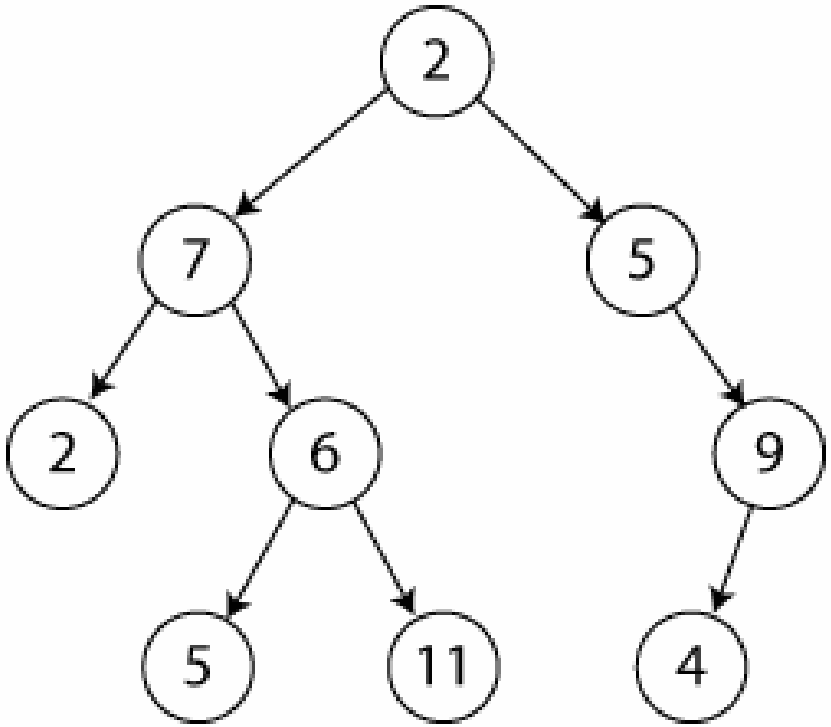
Roteiro

Referências

- https://www.ic.unicamp.br/~rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf
- https://www.inf.ufpr.br/carmem/ci057/apostila.pdf
- https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/bint.html
- https://www.ime.usp.br/~song/mac5710/slides/05tree
- https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_bin%C3%A1ria
- https://ww2.inf.ufg.br/~hebert/disc/aed1/AED1_10_Arvores.pdf

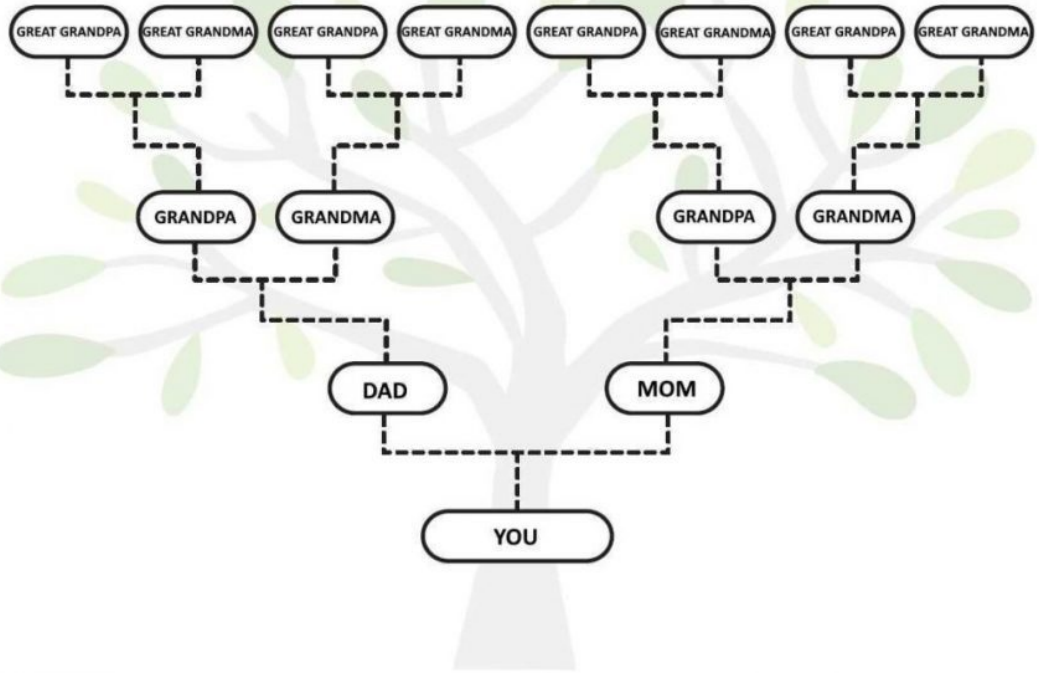
Árvore

- Estrutura não linear com relacionamentos hierárquicos entre os elementos (node, vértices)



Árvores

- Amplamente utilizadas na computação para modelagem de problemas reais: representação computacional
- Representação hierárquica:
  - Estrutura de organização que favorece consultas eficientes
  - Cada ramificação possui um conjunto de informações específicas



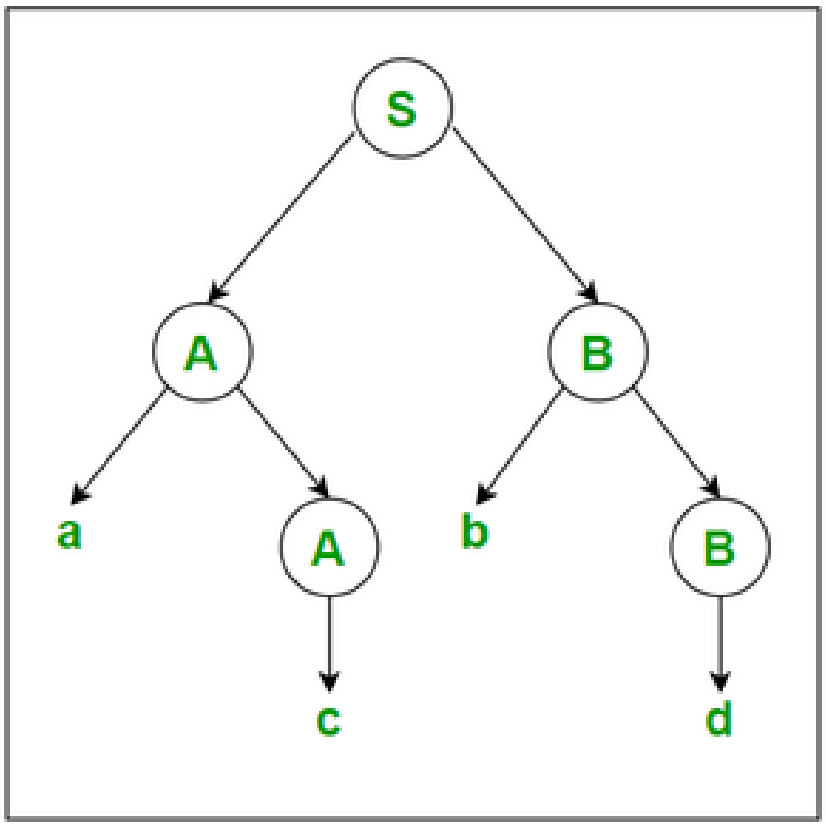
https://genealogizando.com.br/arvore-genealogica/afinal-o-que-e-arvore-genealogica/

Árvores - analisador de expressões

- Regra gramatical (lógica hierárquica): gera-se árvores validam uma entrada
- Exemplo de gramática (regras de produção):

```
S := AB
A := c|aA
B := d|bB
```

- Árvore sintática (parse): resultado da análise sintática
- Dada a entrada "acbd", a árvore de análise sintática gerada:

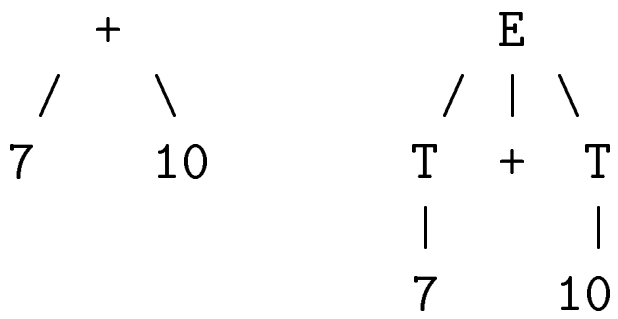


Árvores - analisador de expressões

- Exemplo de gramática (regras de produção):

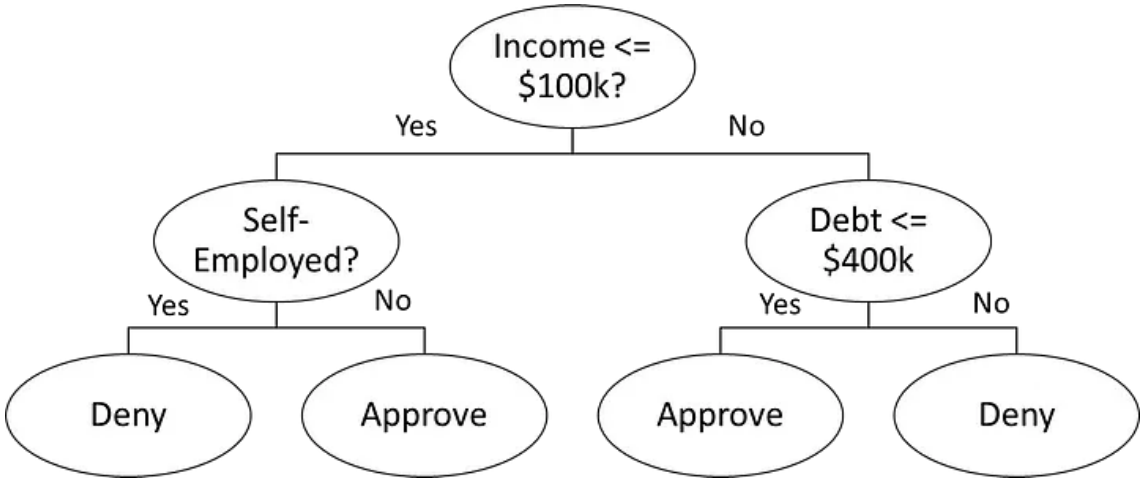
```
E := T + T
T := numeros
```

- Dada a entrada "7 + 10", a árvore da análise sintática gerada:

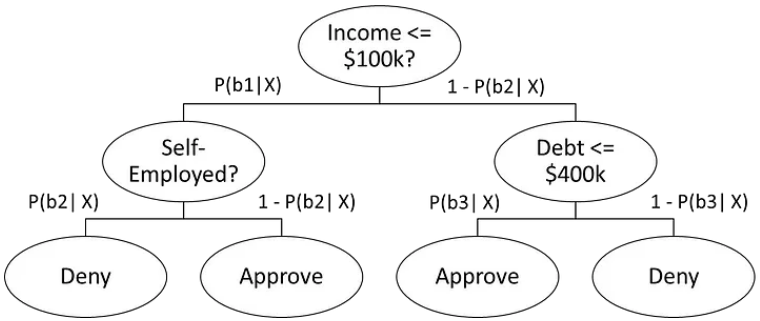


Árvores - aprendizagem de máquina

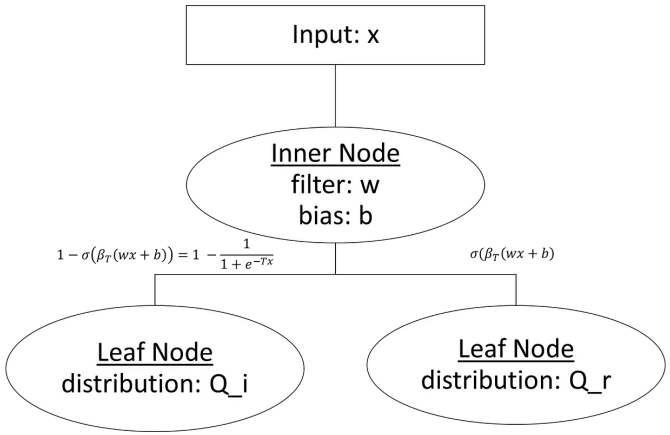
- Árvores de decisão: sequencias de decisões baseadas em uma modelagem hierárquica



Determinística

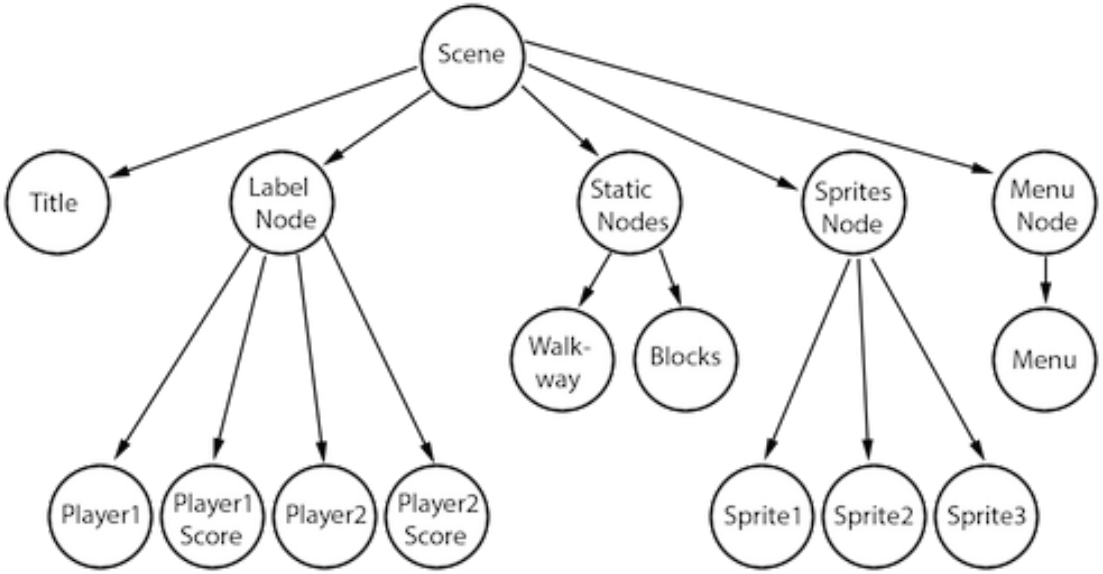


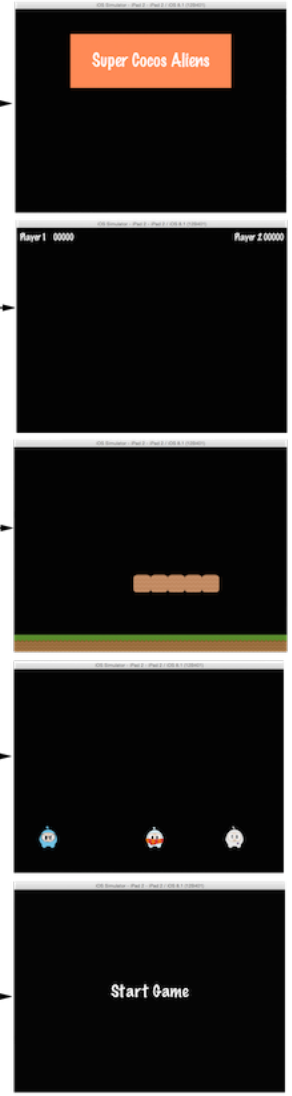
Probabilística (condicional) - Bayes



Distribuição de probabilidade - redes neurais

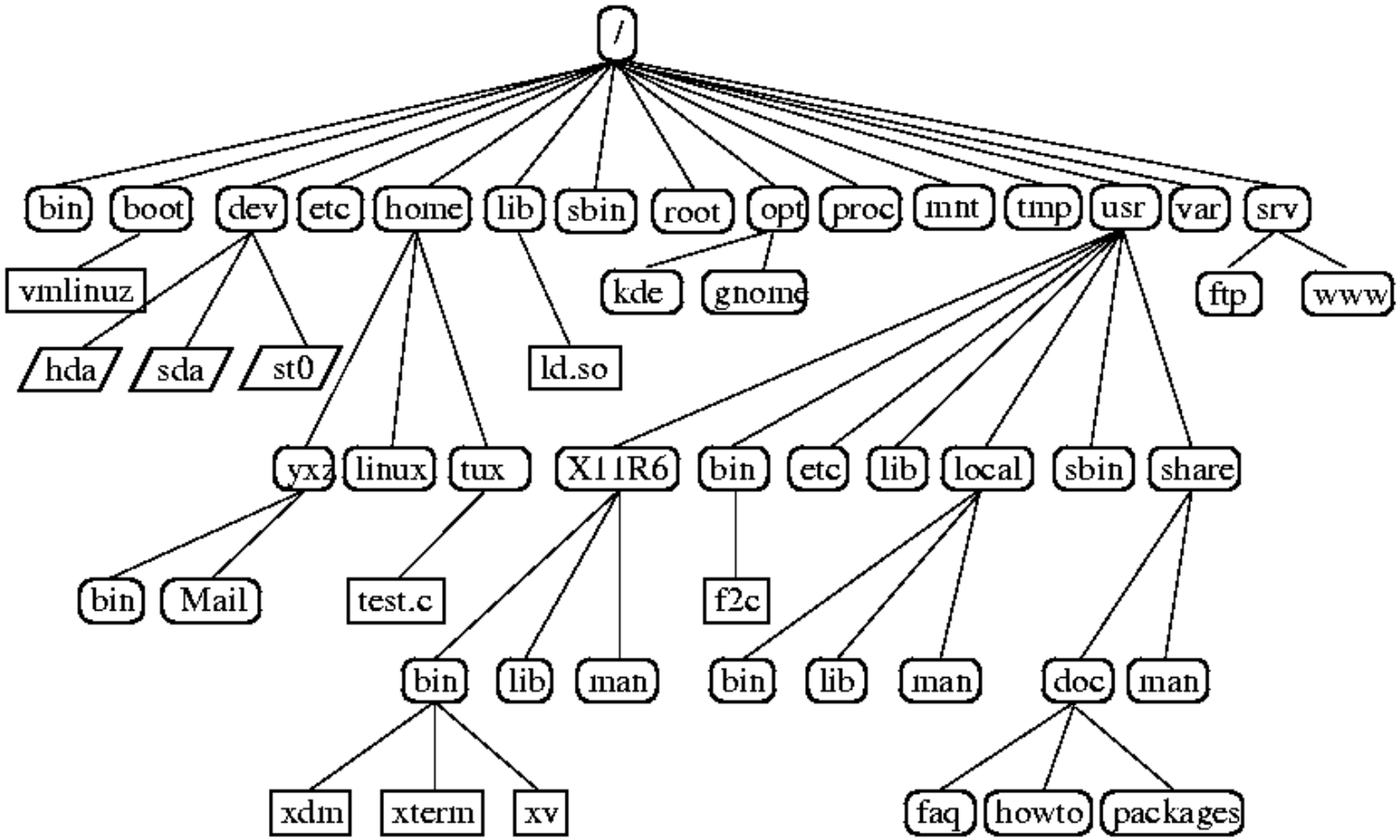
Árvores - Engine





Árvores - sistemas de arquivos

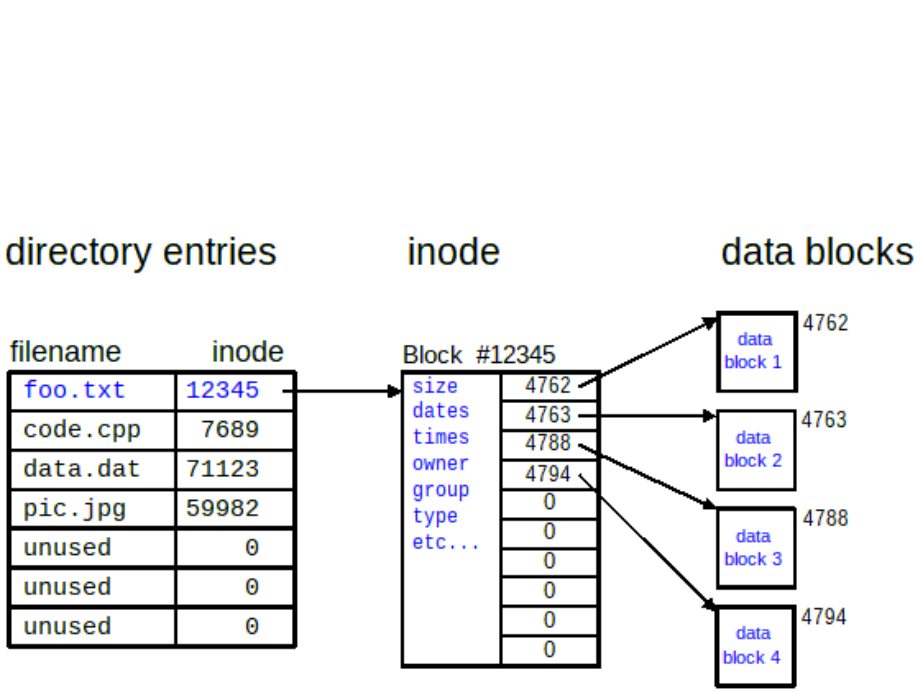
- Árvore de diretórios (Unix-like)

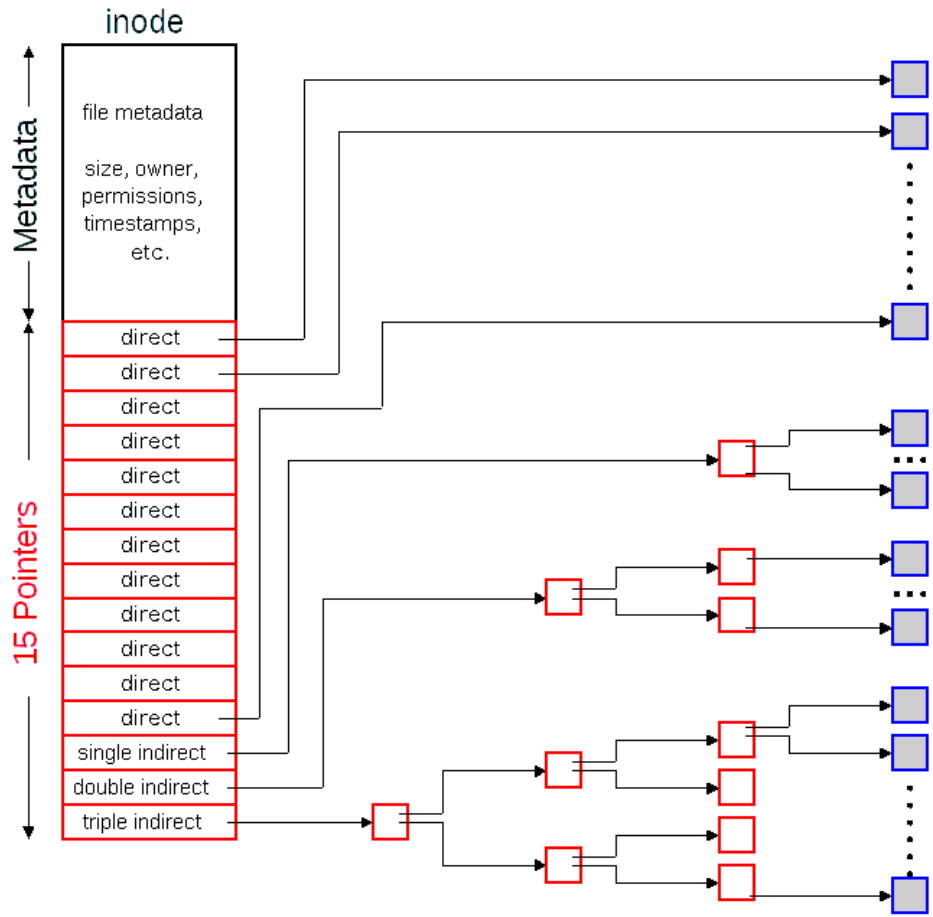


https://vedslinux.blogspot.com/2013/10/linux-filesystem-hierarchy.html

Árvores - sistemas de arquivos

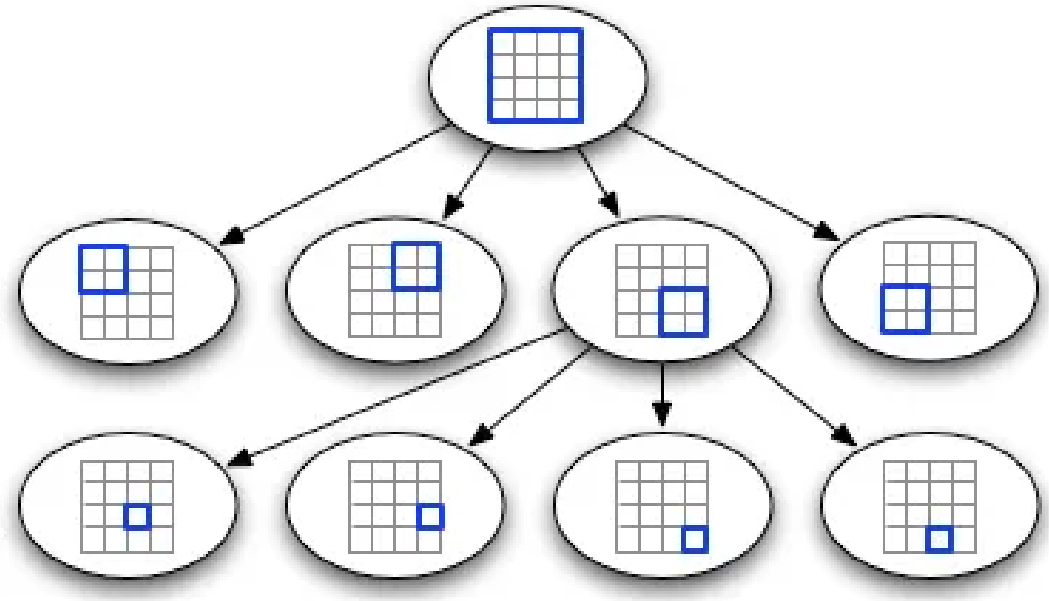
- Árvore de inodes
  - Inode (index node): estrutura de dados que descreve um arquivo (Unix-like)
    - ★ Atributos (dados temporais, proprietário, permissões) e endereços de blocos de memória (dados)

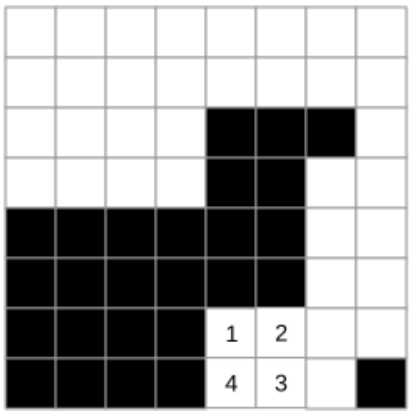


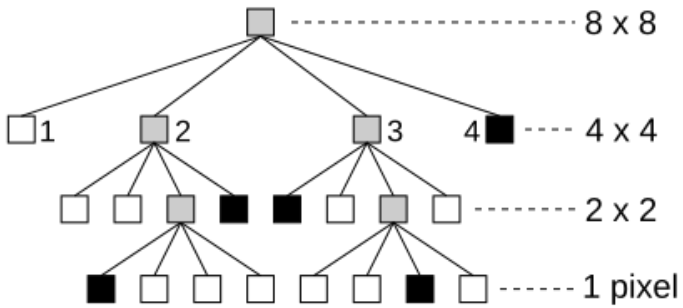


https://azrael.digipen.edu/ mmead/www/Courses/CS180/FileSystems-1.html

Árvores - representação de imagens





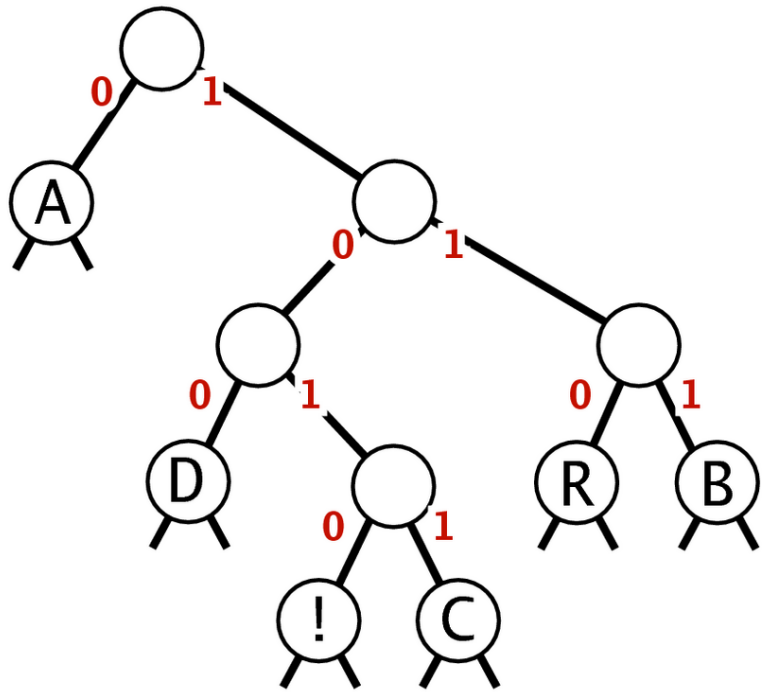


Árvores - compressão de arquivos

Codeword table

key	*value*
!	1010
A	0
B	111
C	1011
D	100
R	110

Trie representation



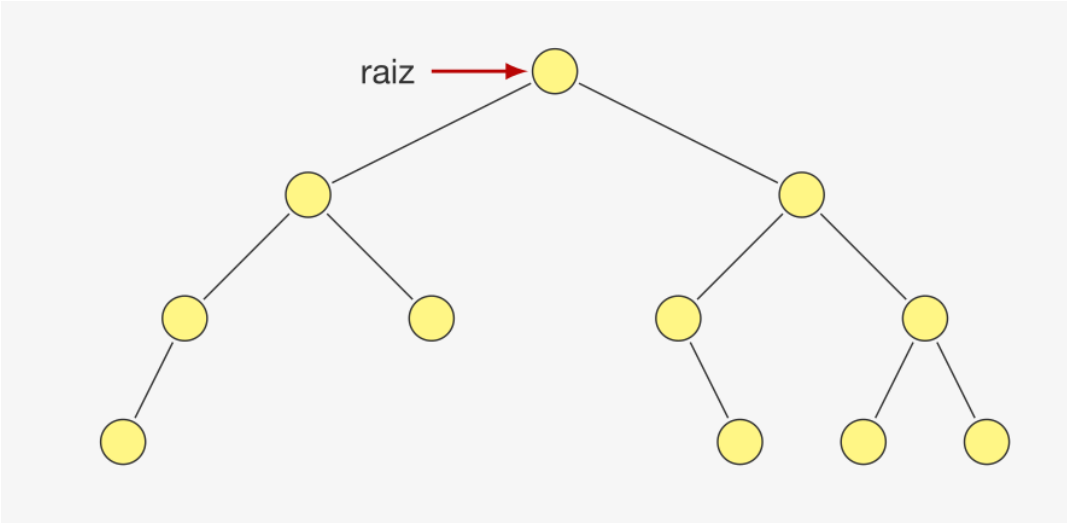
A Huffman code

Árvore decodificadora gerada pelo código de Huffman

- ABRACADABRA!: sem compressão 12*8 = 96 bits
- ABRACADABRA!: com compressão 29 bits
- 0 111 110 0 1011 0 100 0 111 110 0 1010

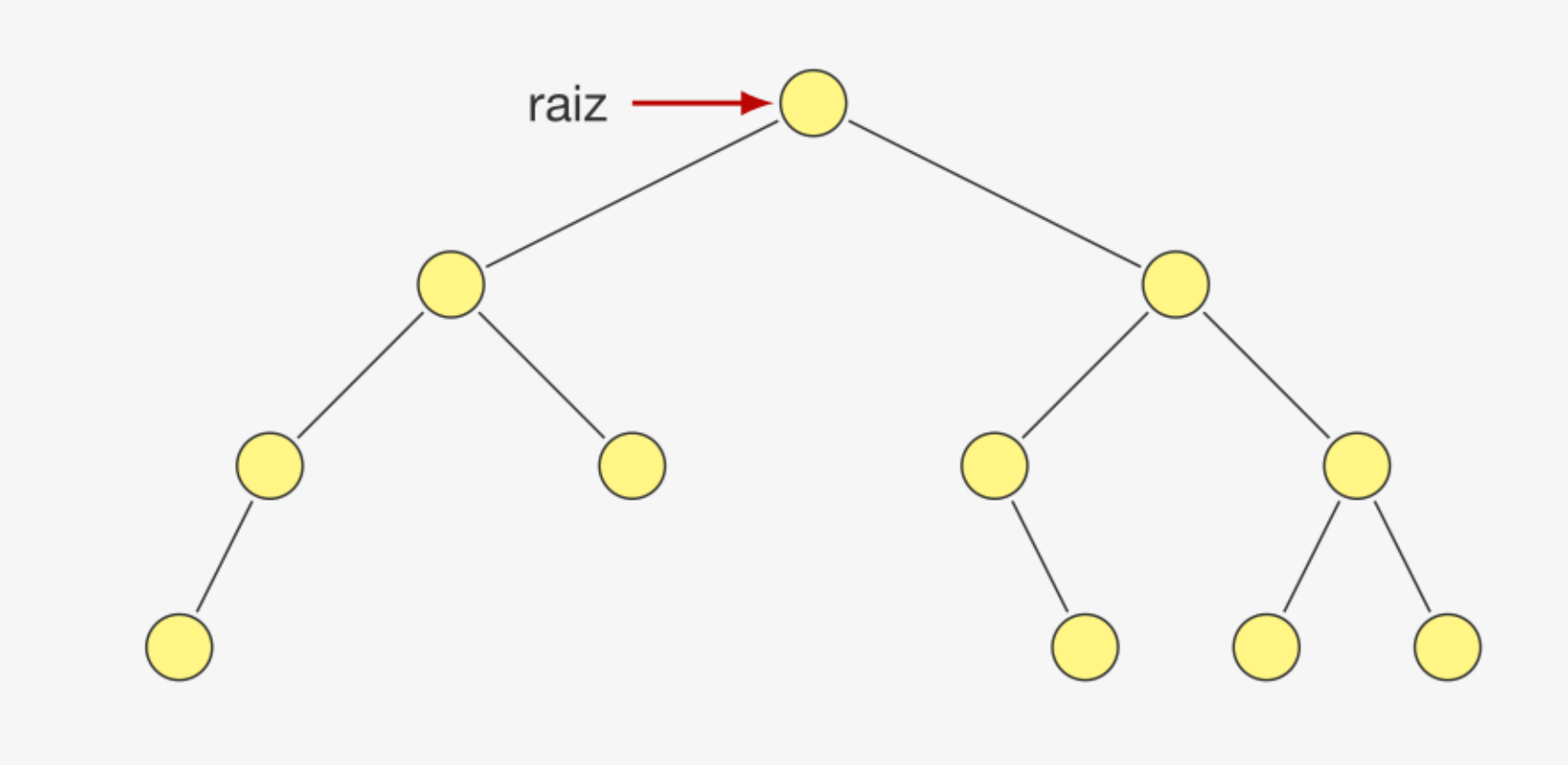
Árvores - Definições

- Árvores
  - Grafo acíclico
  - Conexo/conectado: existe caminho entre quaisquer dois de seus vértices
- Árvores enraizadas
  - Possui 1 elemento nó chamado raiz



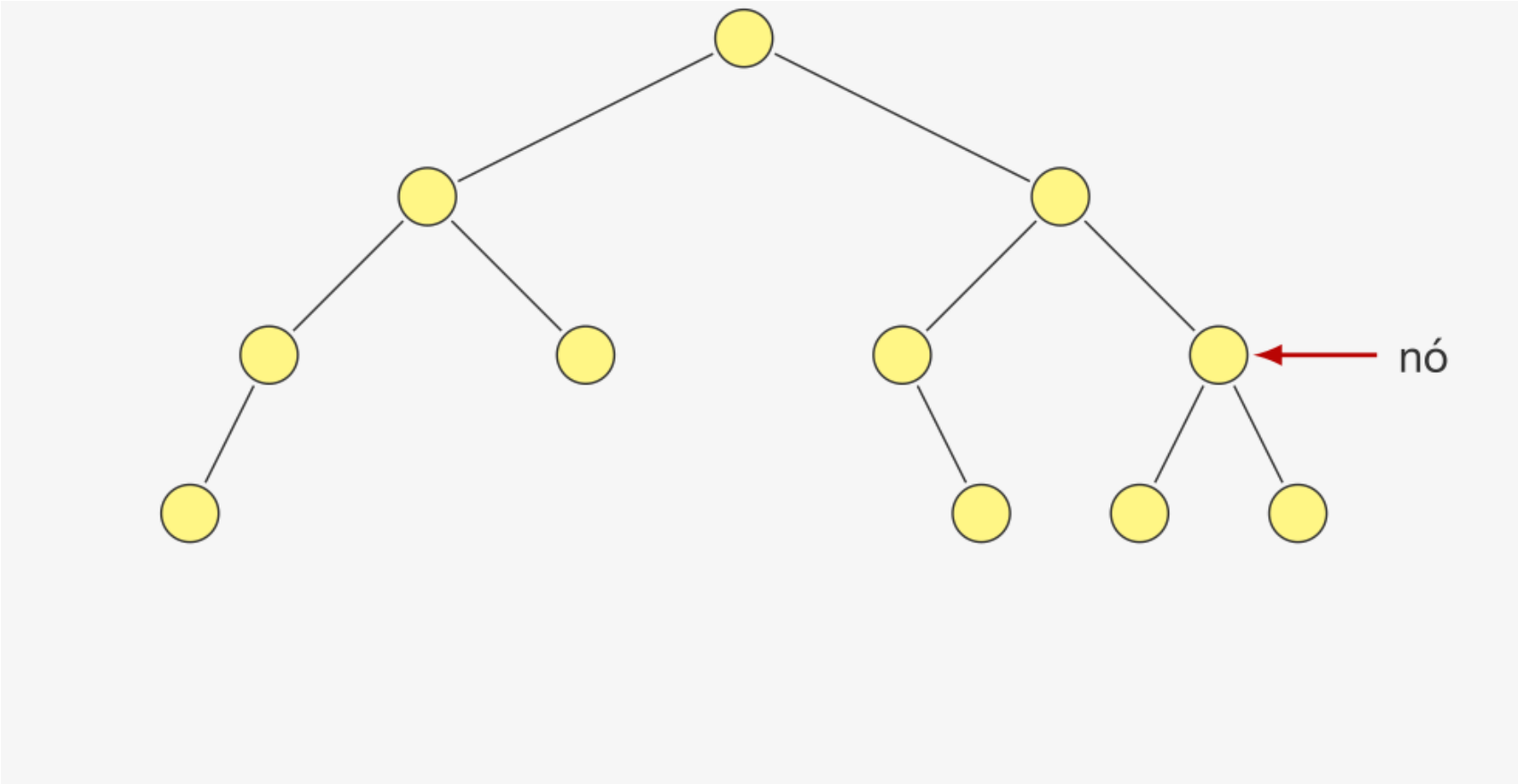
https://www.ic.unicamp.br/ rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - nós (node)



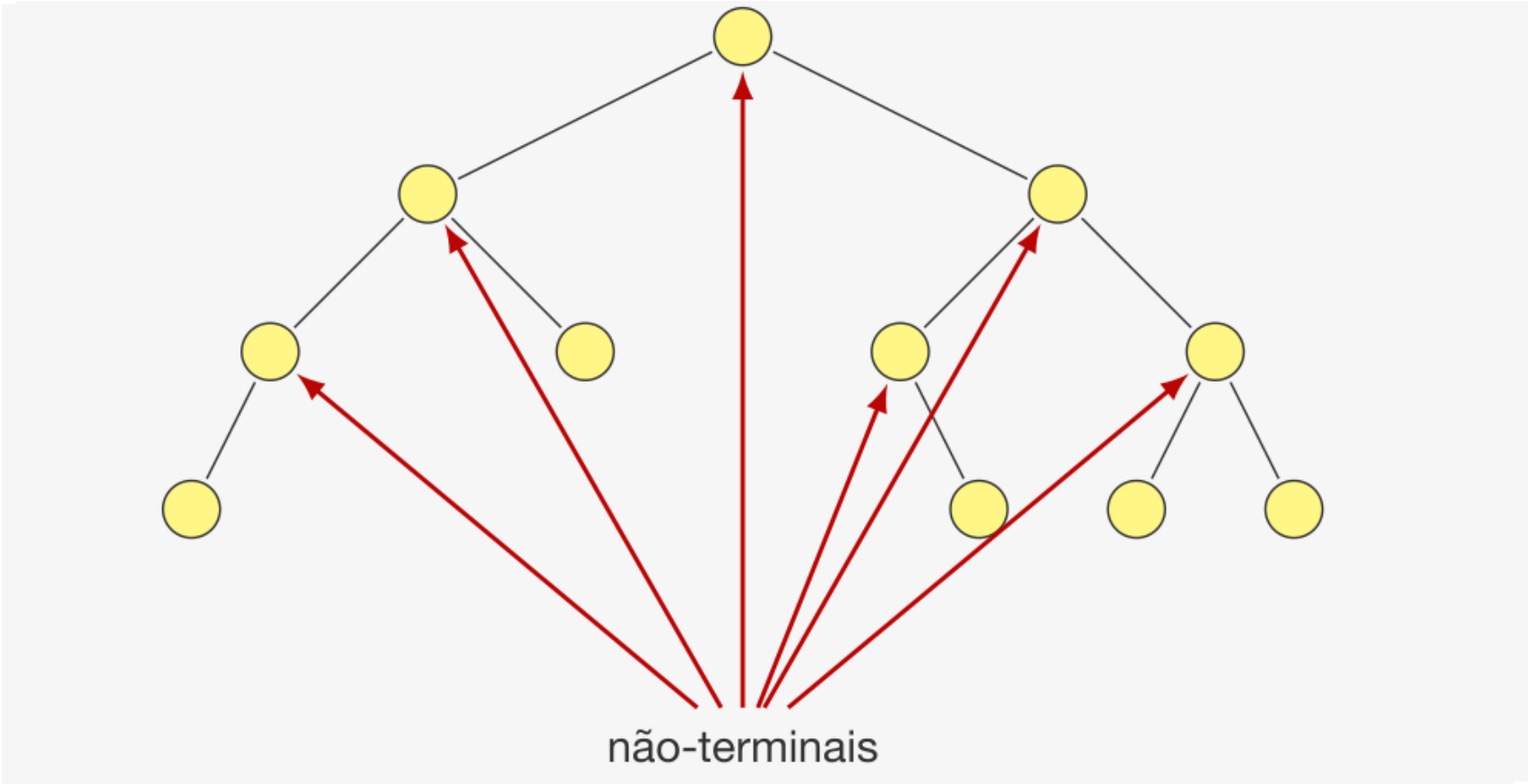
https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - nós (node)



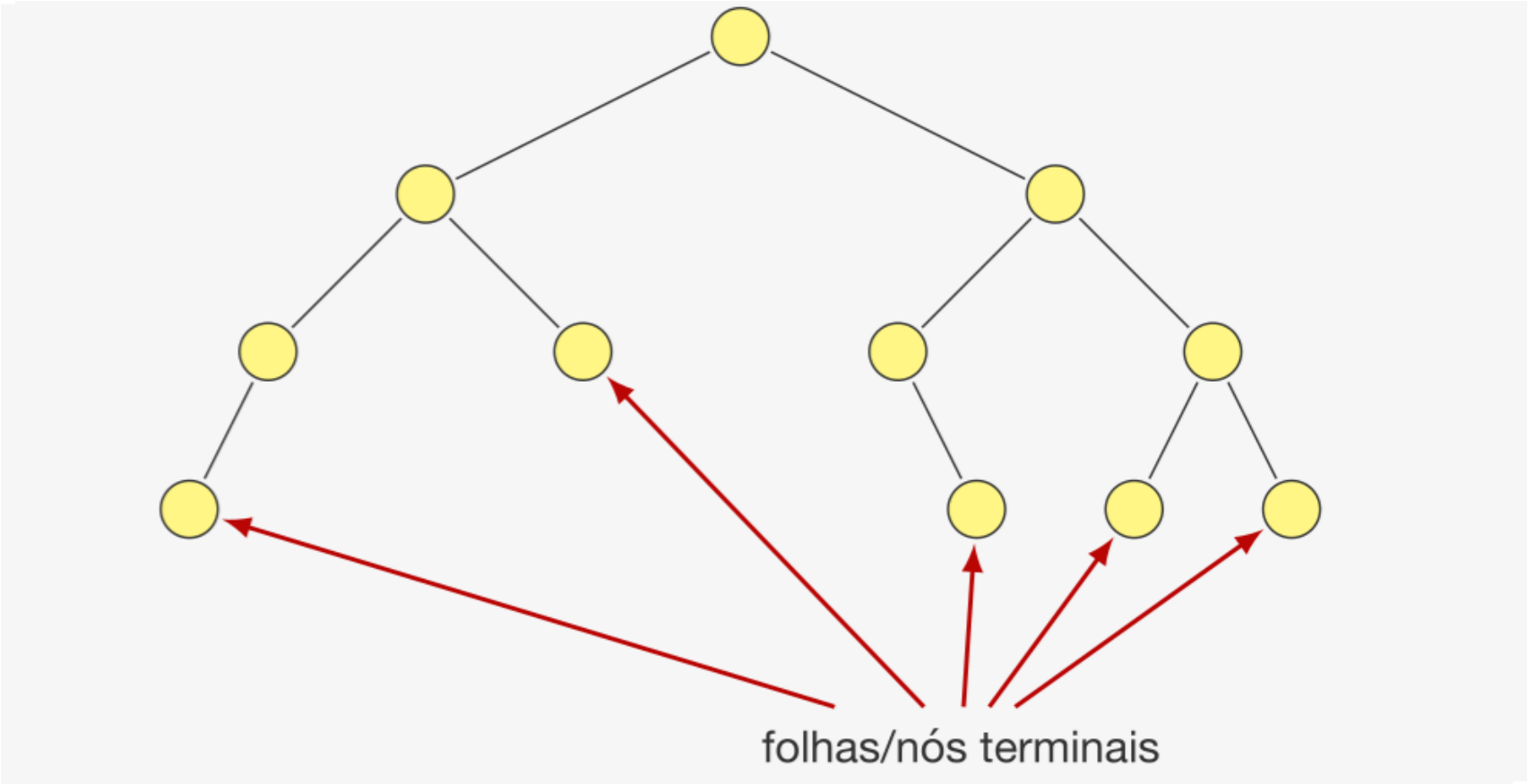
https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - nós (node)



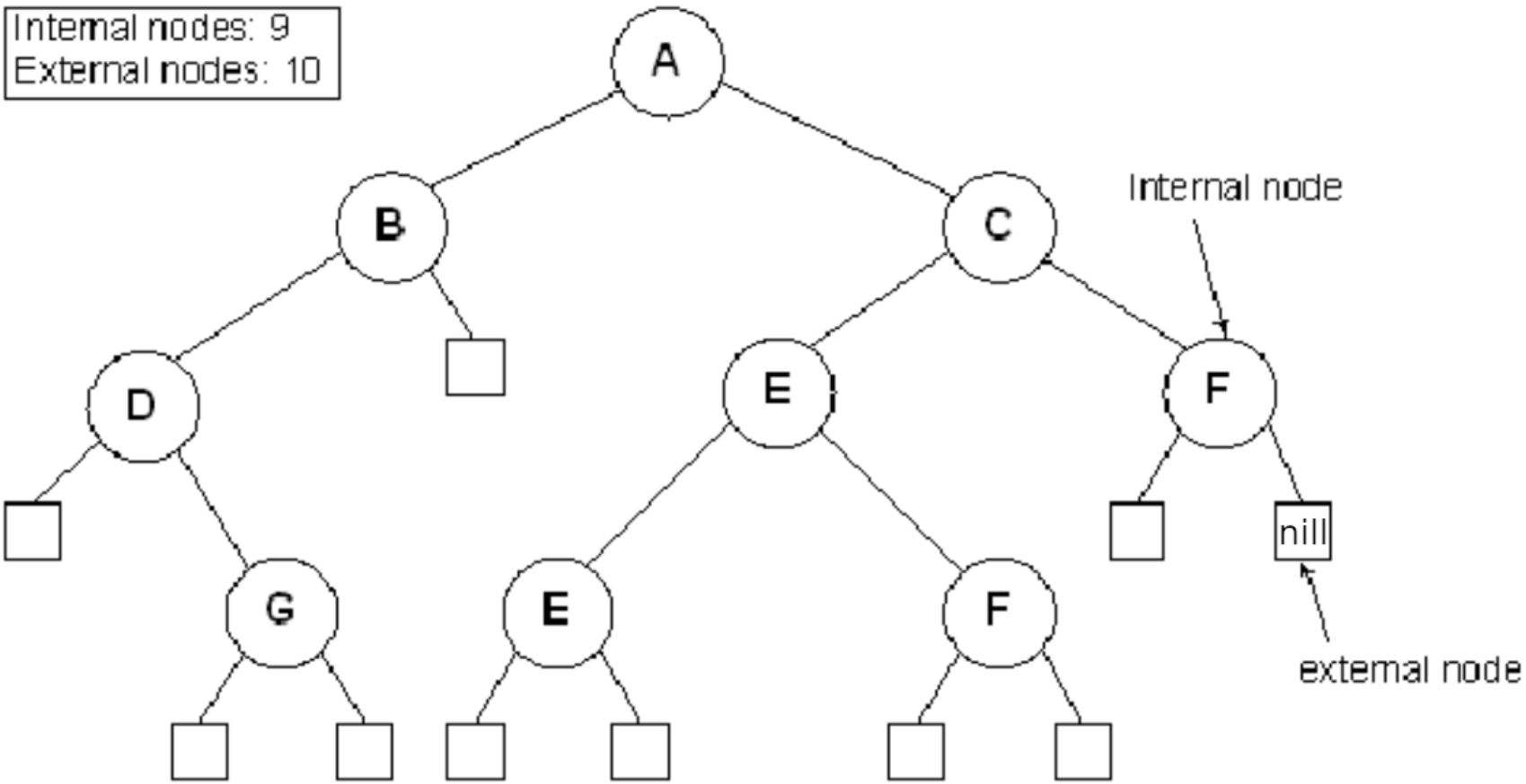
https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - nós (node)



https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

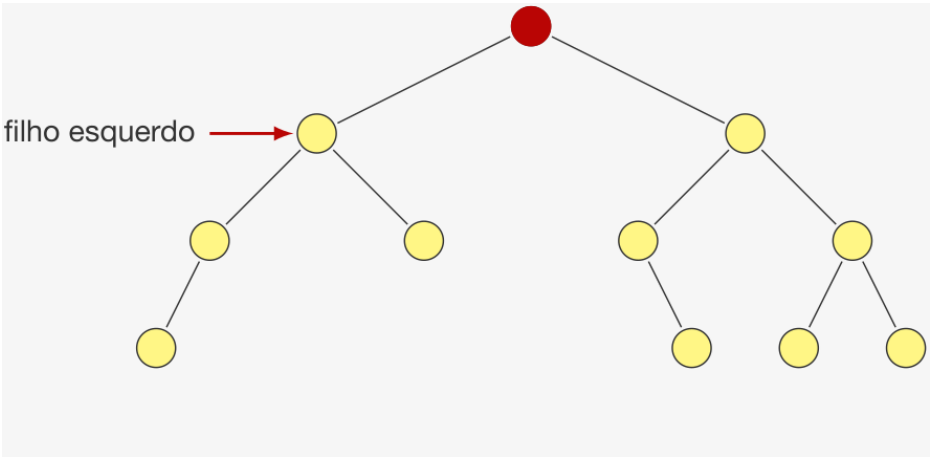
Árvores enraizadas - nós (node)

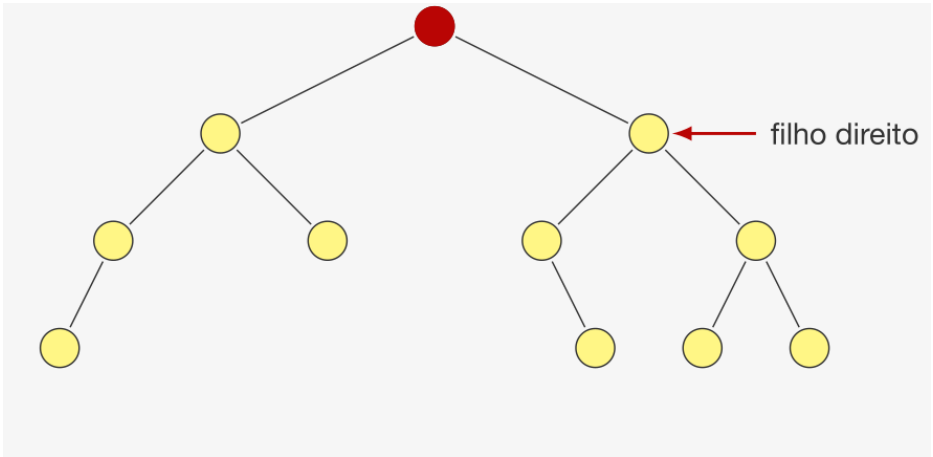


https://cs-study.blogspot.com/2012/11/properties-of-binary-tree.html

- Nós externos (sem filhos - NULL - NIL - nada/zero)

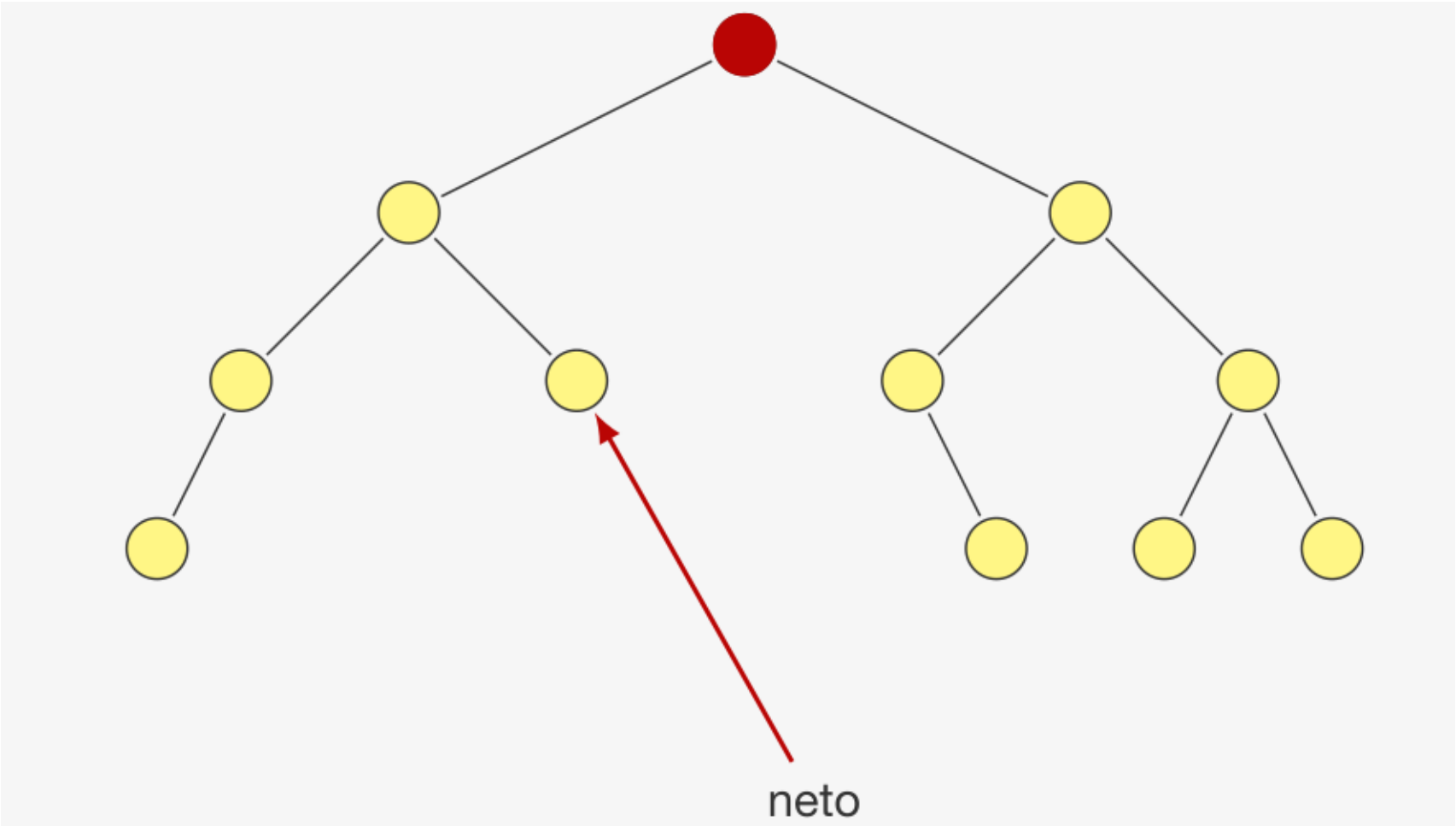
Árvores enraizadas - Genealogia dos nós





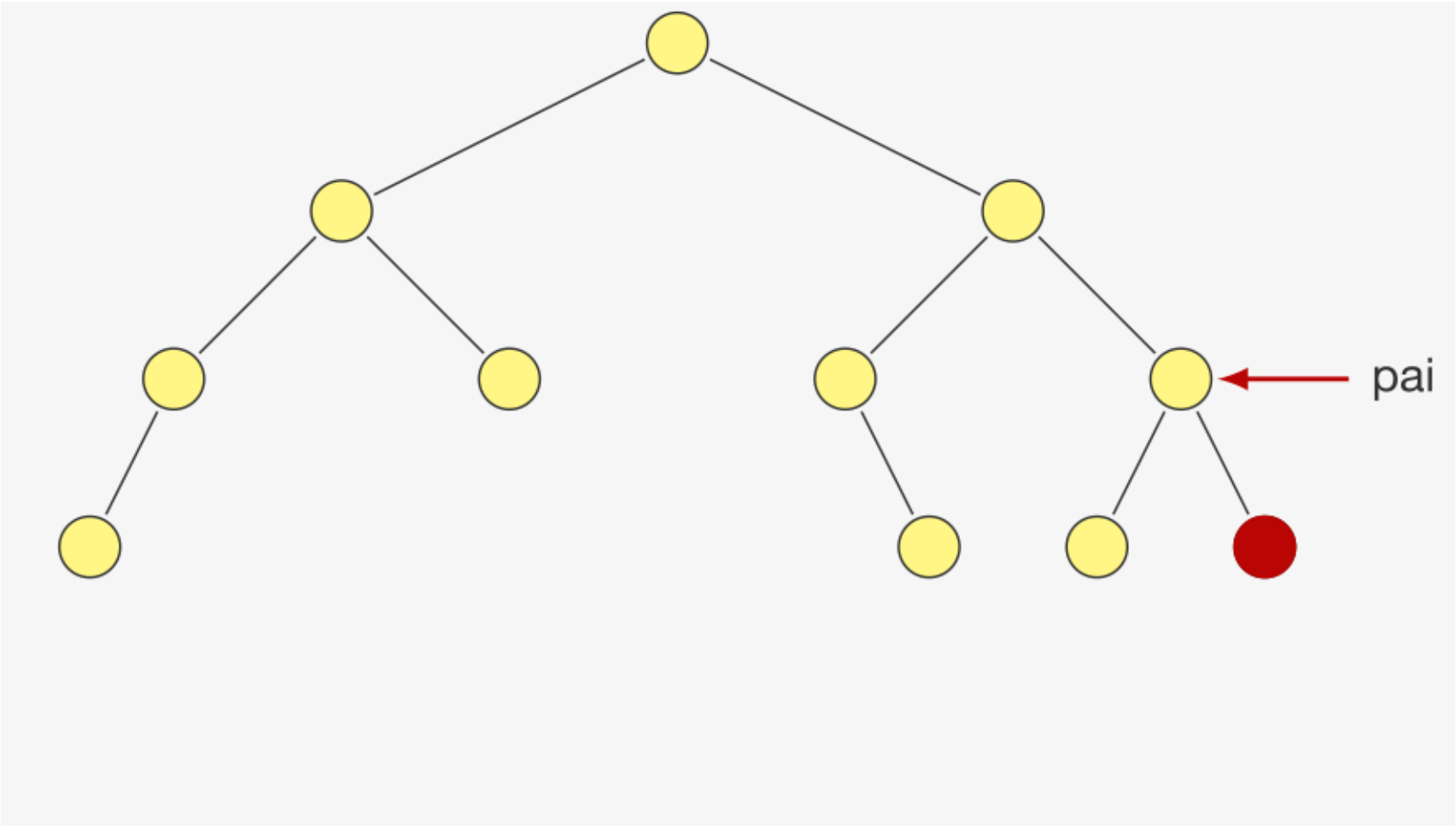
https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - Genealogia dos nós



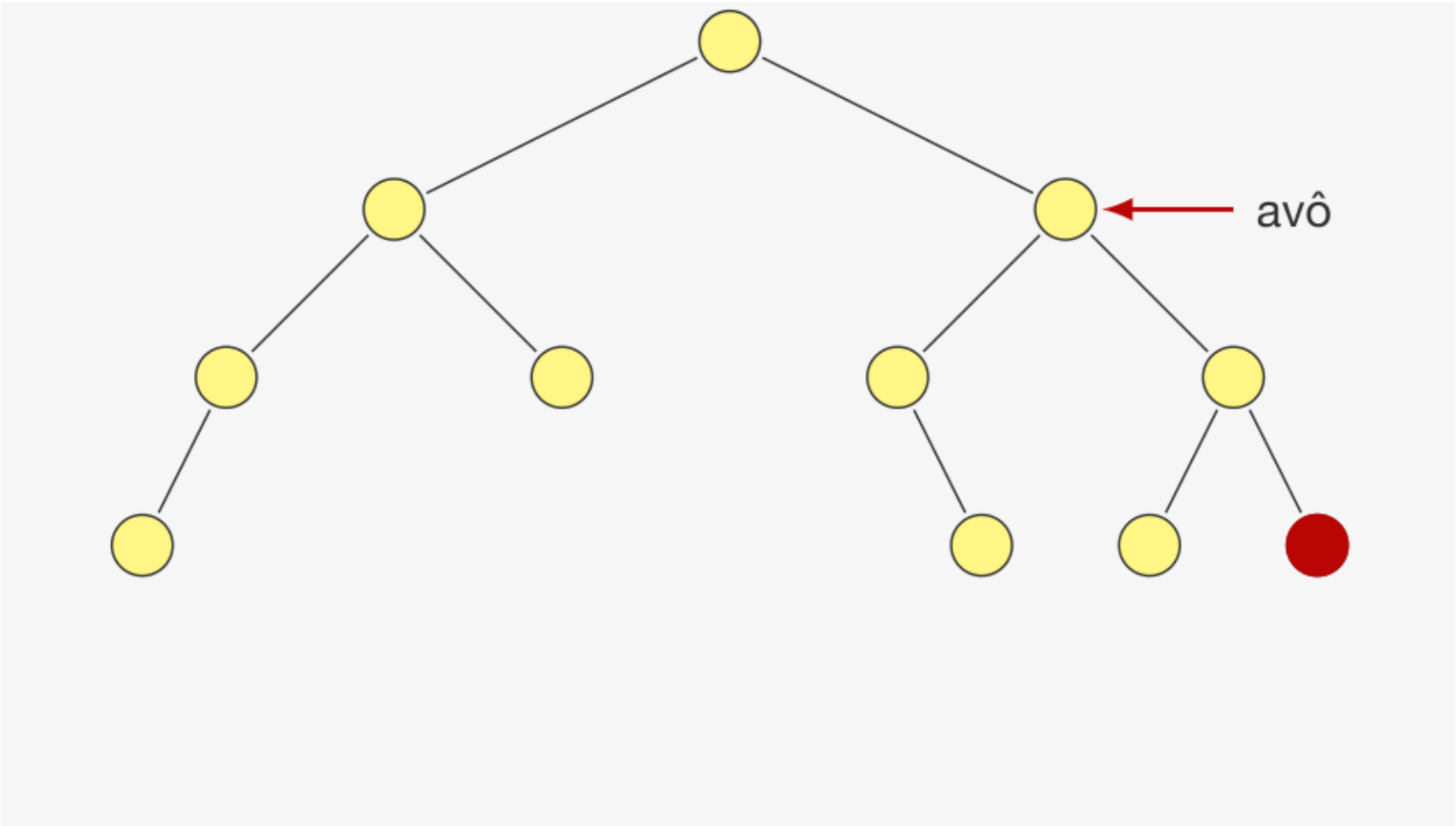
https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - Genealogia dos nós



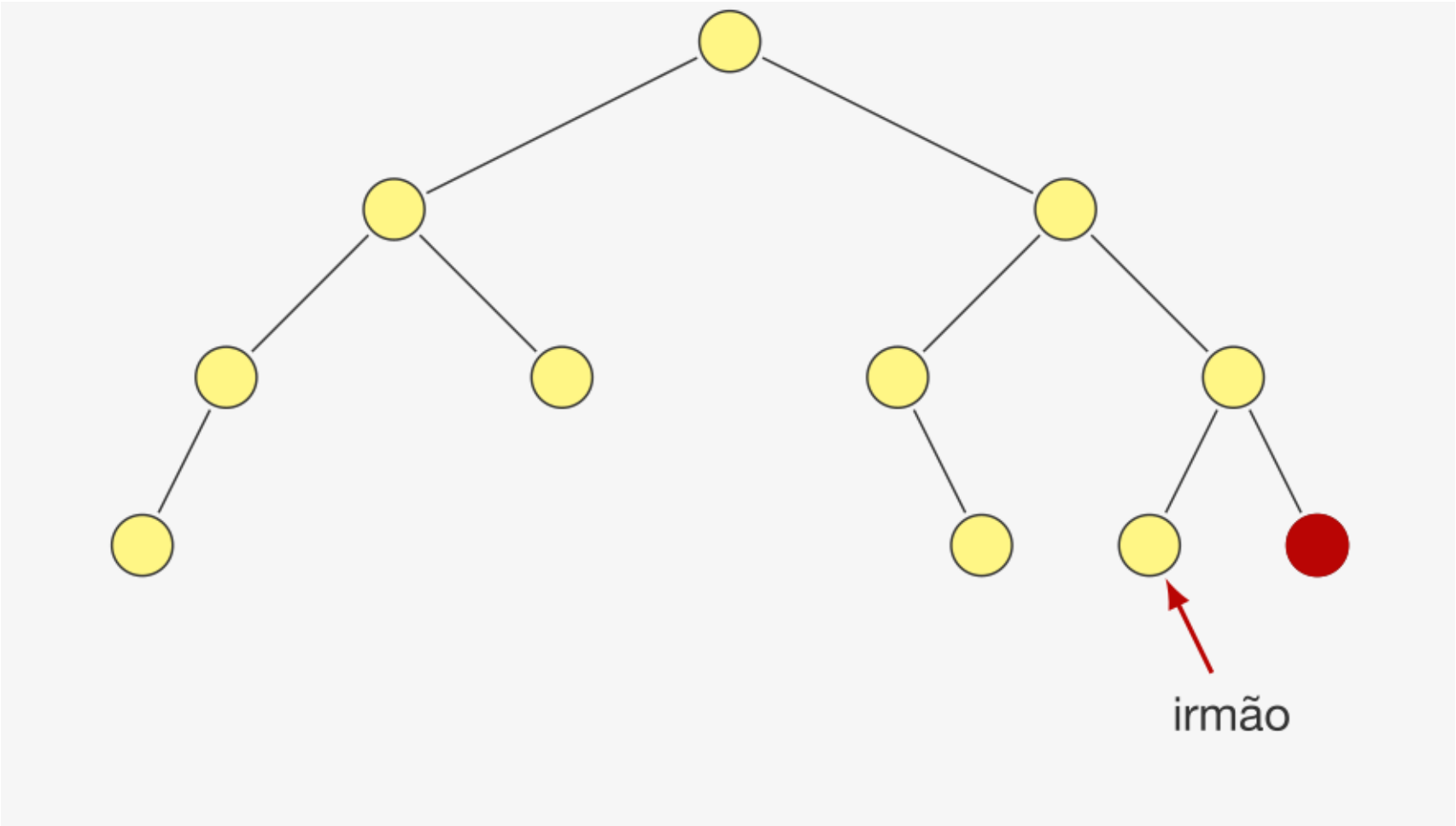
https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - Genealogia dos nós



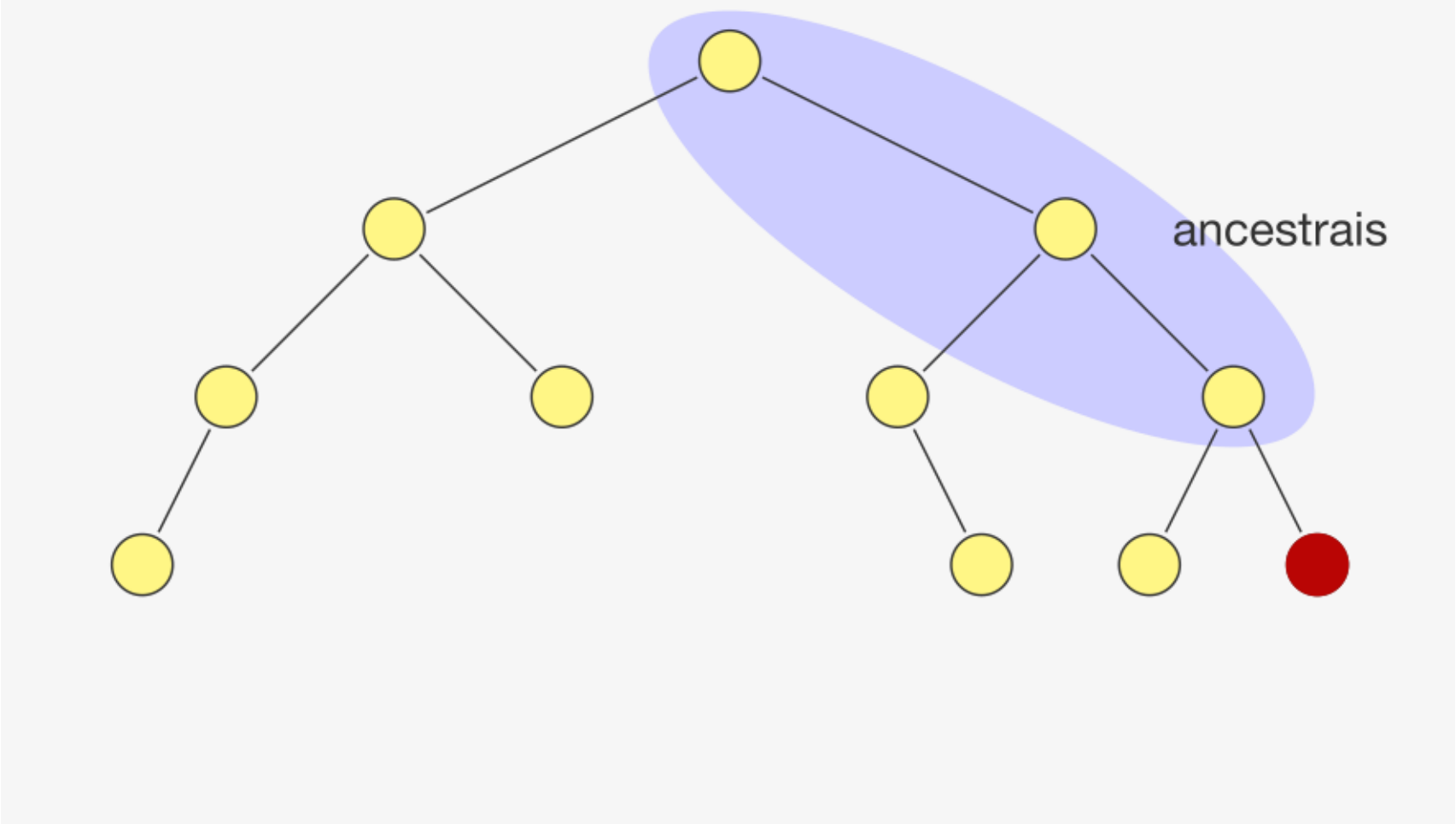
https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - Genealogia dos nós



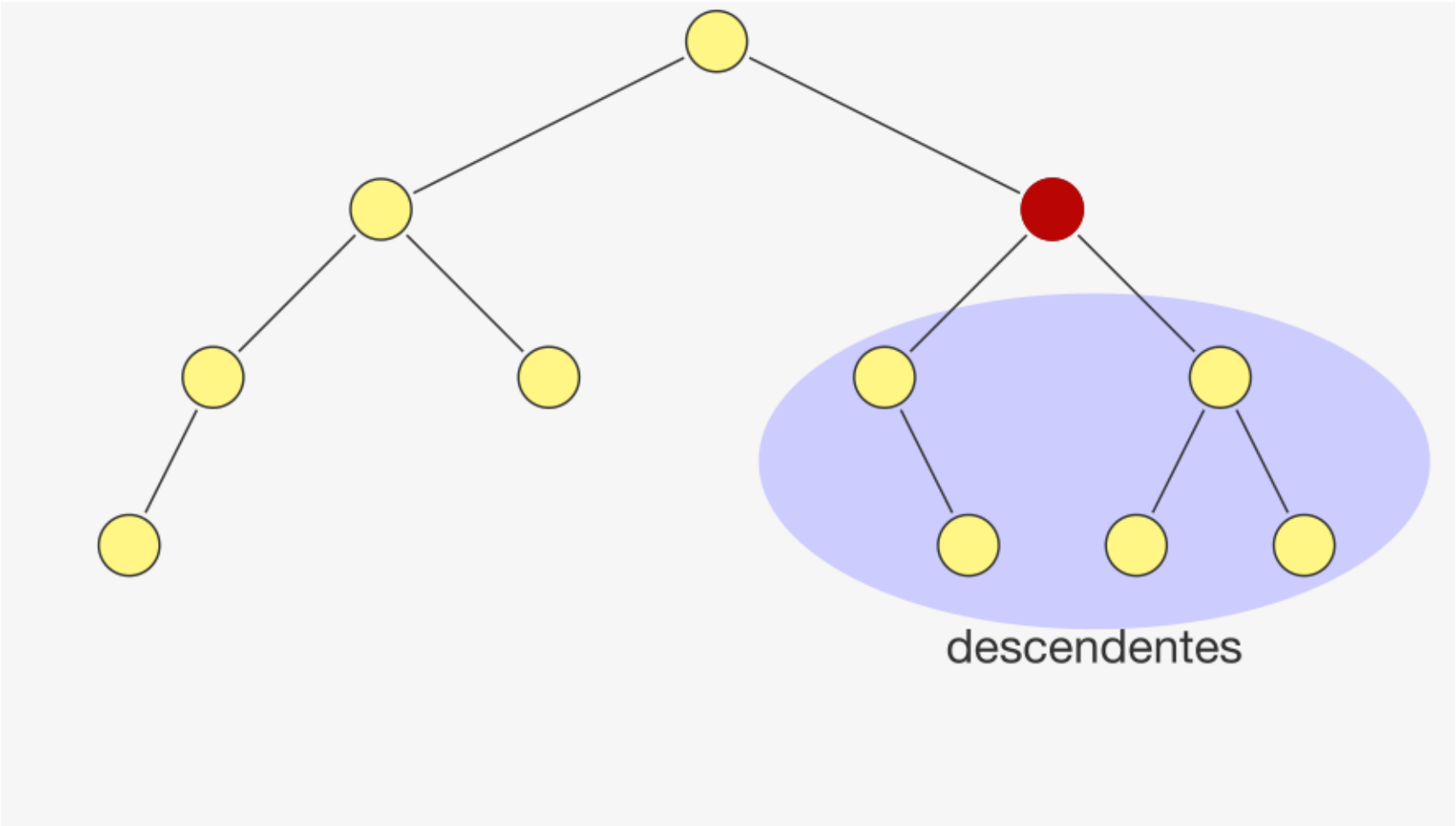
https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - Genealogia dos nós



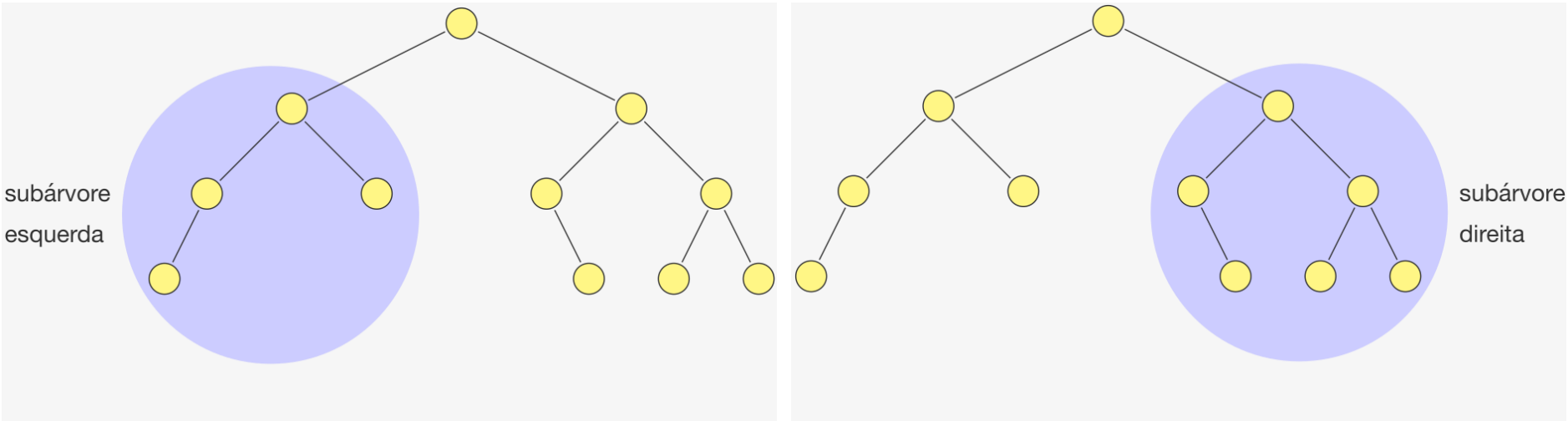
https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - Genealogia dos nós



https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

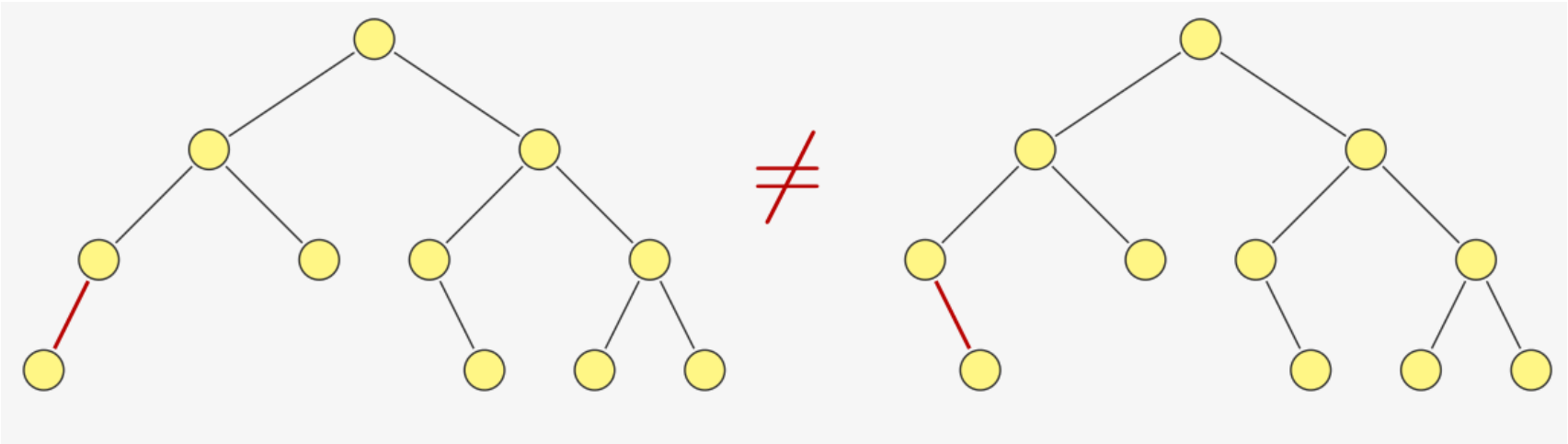
Árvores enraizadas - Sub-árvores



https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

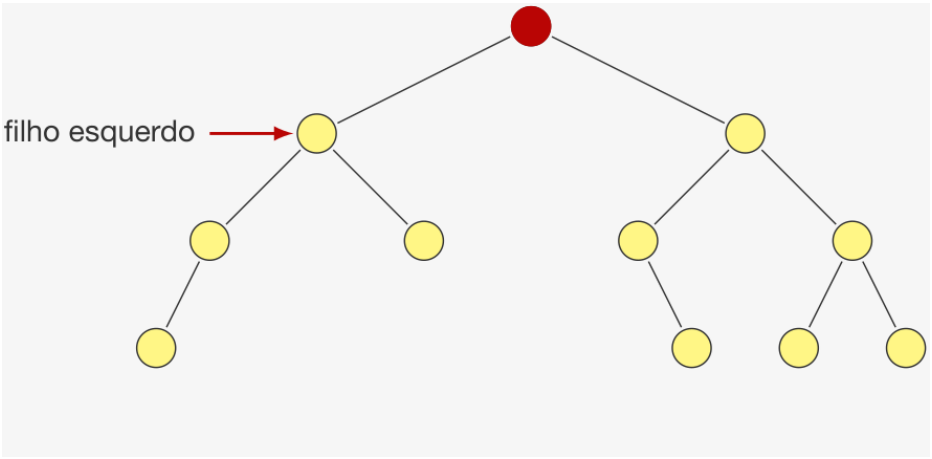
- Subárvore enraizada em x é a árvore composta pelos nós descendentes de x

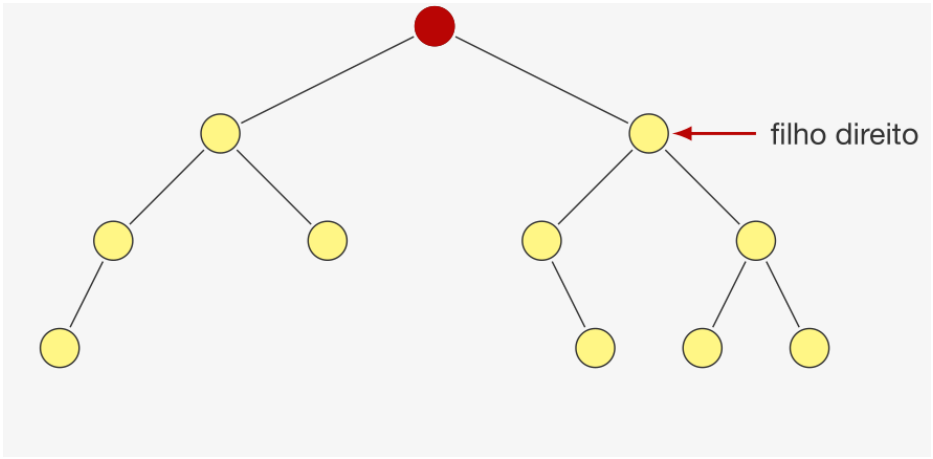
Árvores enraizadas - Ordem dos nodos



https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores enraizadas - Grau

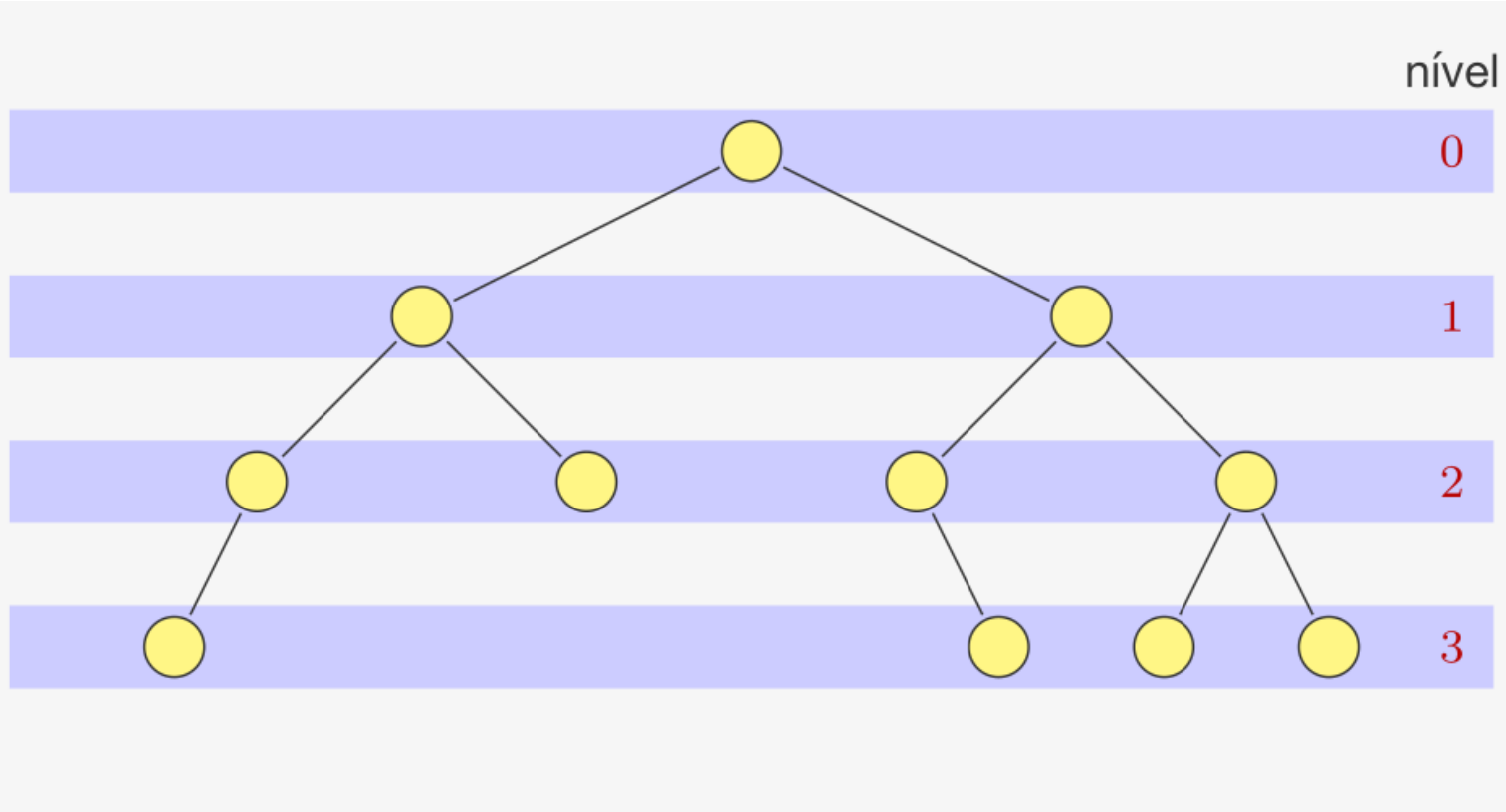




https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

- Grau: número de filhos (subárvores) de um nó
- Um nó folha possui grau 0
- Árvores n-árias: quando todos os nós possuem grau máximo "n" (binária, ternária)

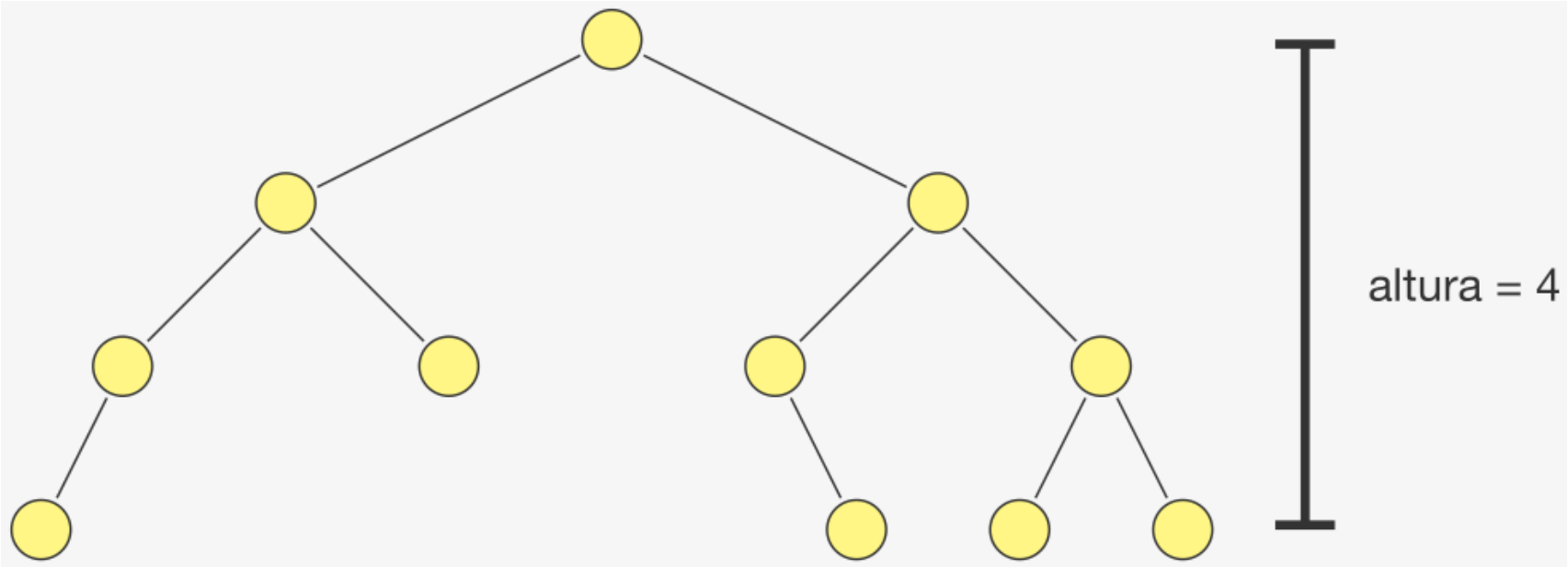
Árvores enraizadas - Profundidade e Nível



https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

- Nível indica a profundidade dos nós
- Profundidade de um nó:
  - Número de ancestrais: caminho entre desse nó até a raiz
  - A raiz tem profundidade 0
- Um conjunto de nós com a mesma profundidade estão em um mesmo Nível

Árvores enraizadas - Altura



https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

- Altura: maior profundidade de um nó externo (NULL)

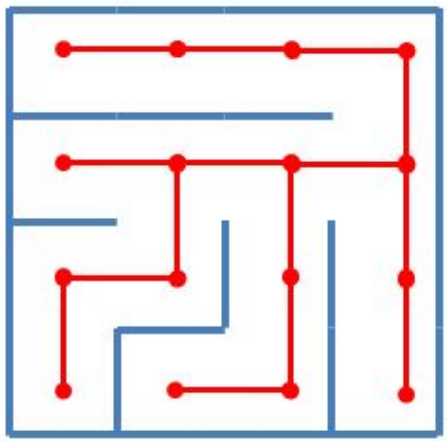
Árvores - Tipos

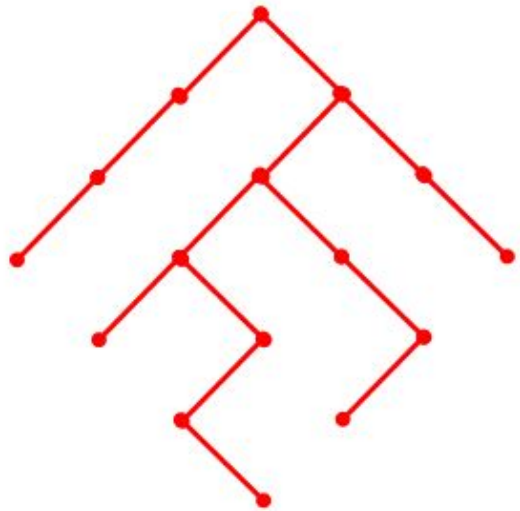
- Existem diversos tipos de **restrições utilizadas na construção e nas operações** sobre a estrutura de árvore, cada qual realizada com um determinado propósito para **melhor tratamento dos dados em um determinado domínio**
- Dentre esses diferentes tipos de árvores citam-se:
  - Árvores Binárias, Binárias de Busca
  - Heaps, fila de propriedades (priority queue)
  - Árvores AVL, Red-Black (balanceadas)
  - Árvores Trie e PATRICIA
  - Árvores B, B+, B*
  - etc.

Roteiro

Árvores binárias

- Cada nó não tem grau maior que 2
- Formado recursivamente por:
  - Raiz
  - Sub-árvores binárias: direita e esquerda, as quais também são árvores binárias
- Base para outros tipos de variações de árvores (Trie, red-black, AVL)

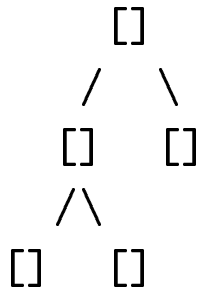




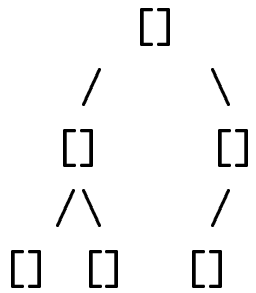
https://openhome.cc/eGossip/OpenSCAD/SimpleGeneratedMaze.html

Árvores binárias - Classificação

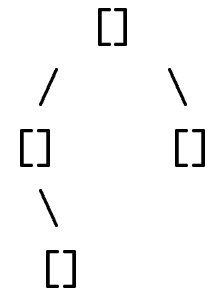
- Árvore Estritamente Binária
  - Os nós tem 0 ou 2 filhos



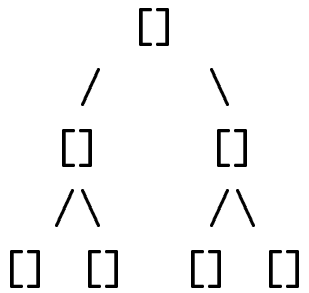
- Árvore Binária Completa
  - Todos os nós folhas estão em um mesmo nível



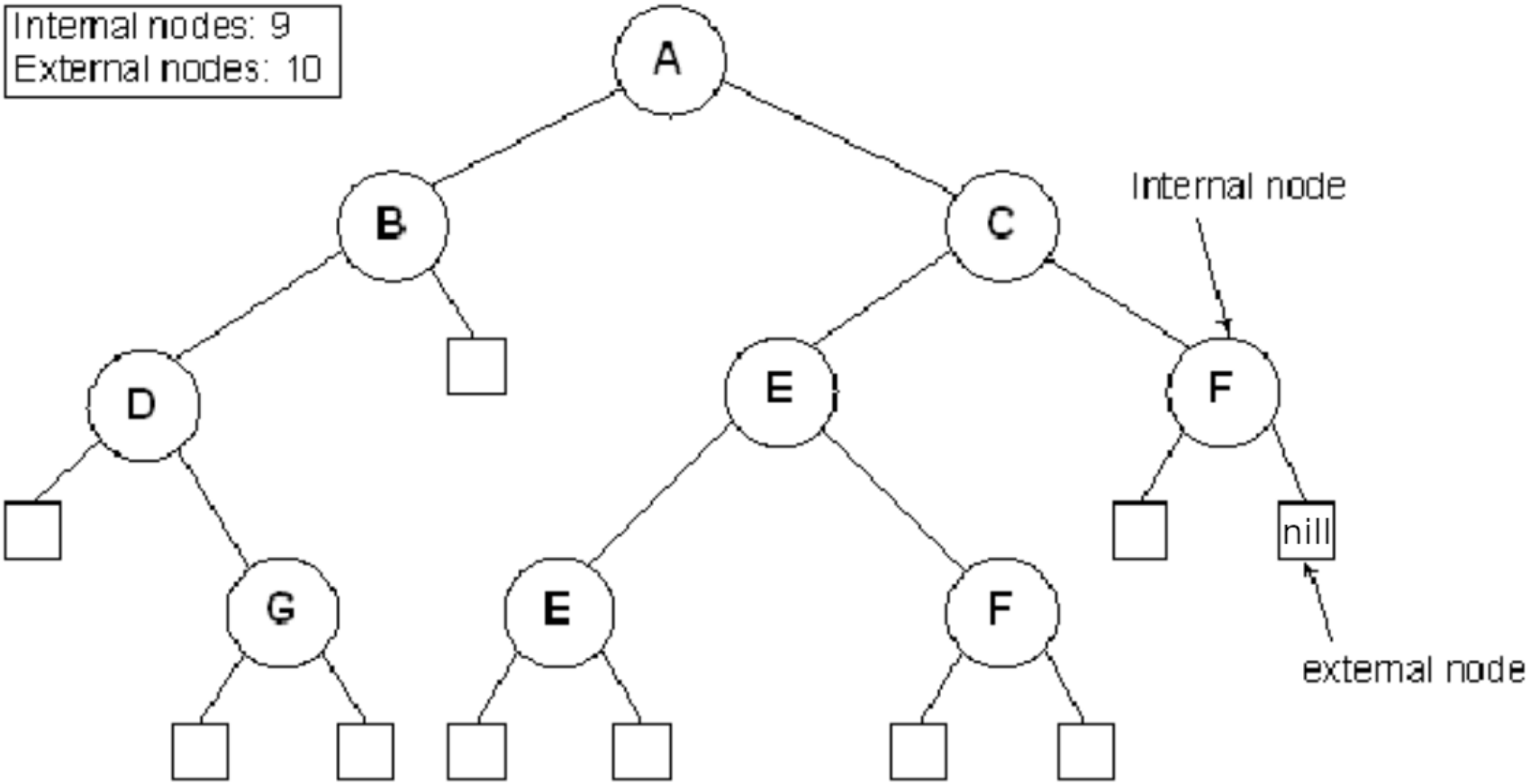
- Árvore Binária Quase Completa
  - Todos as folhas estão no nível "d" ou "d-1"



- Árvore Binária Cheia
  - Consiste em uma árvore estritamente binária e completa

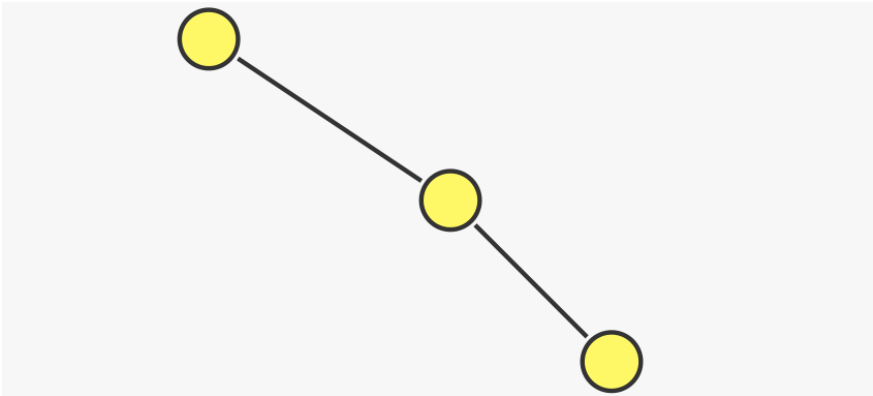


Árvores binárias - Propriedades



- Se há N nós internos, então tem $N + 1$ nós externos

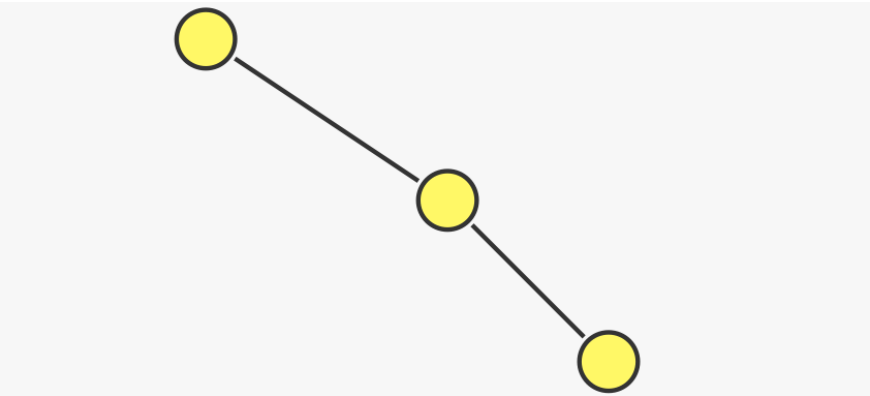
Árvores binárias - Propriedades

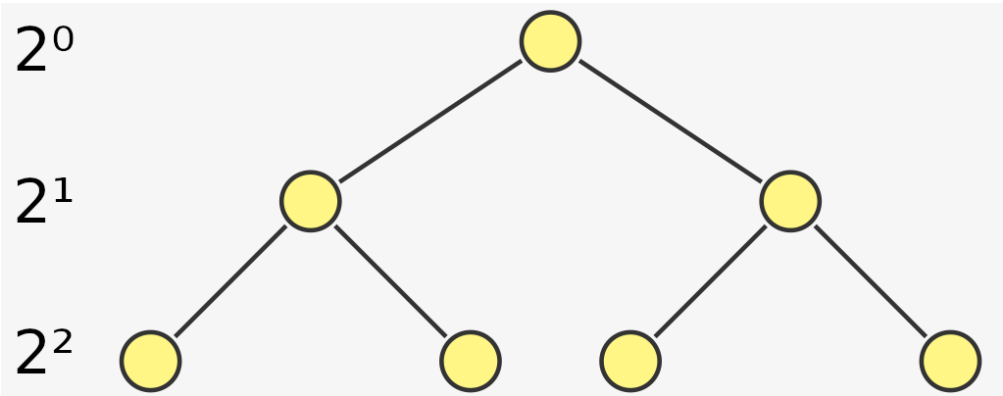


https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

- Se a altura é h, então a árvore:
  - tem no mínimo h nós internos

Árvores binárias - Propriedades

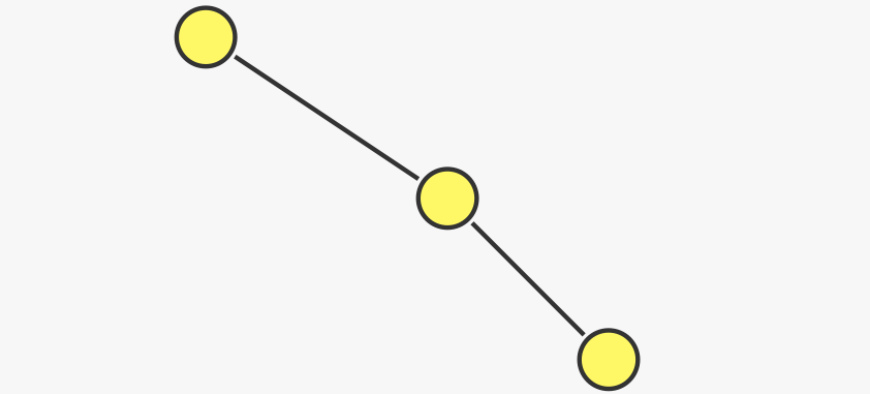


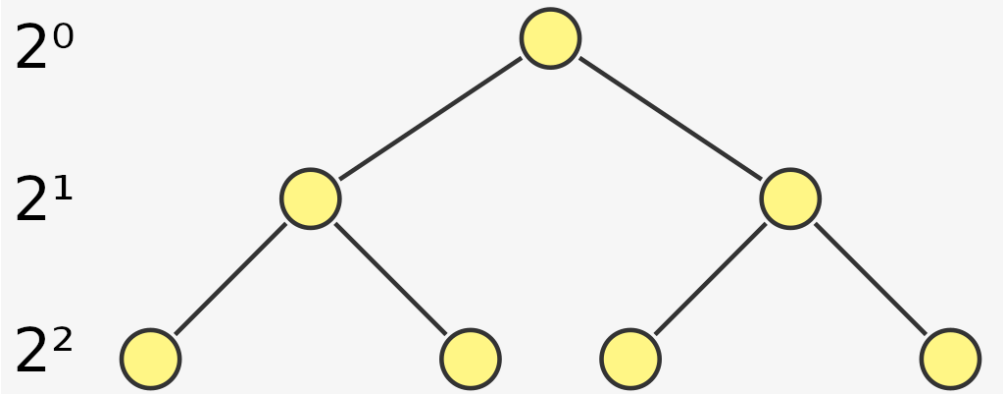


https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

- Se a altura é h, então a árvore:
  - tem no mínimo h nós internos
  - tem no máximo $2^h - 1$ nós internos (árvore binária completa)
    - ★ h vezes: $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{h-1}$
    - ★ soma de uma PG $(a_0 * (q^h - 1))/(q - 1)$
    - ★ $n = \frac{1(2^h - 1)}{(2 - 1)}$
    - ★ $n = 2^h - 1$

Árvores binárias - Propriedades

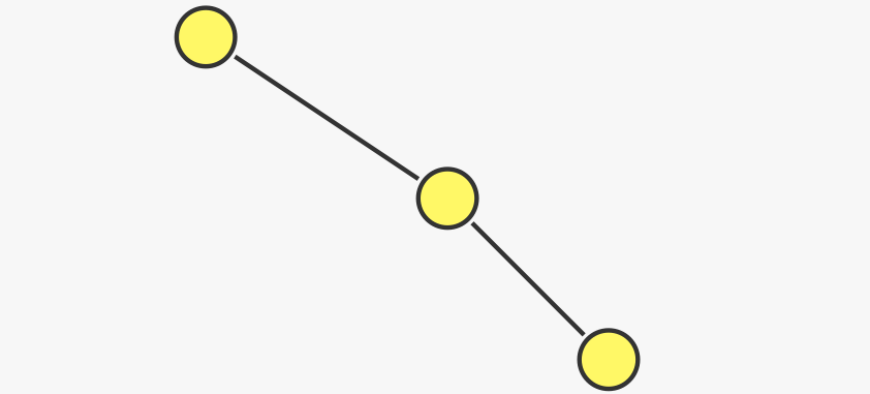


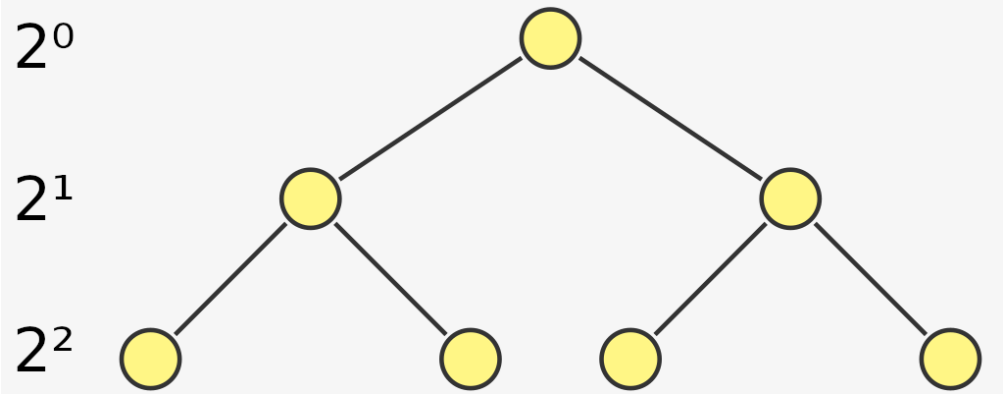


https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

- Se a árvore tem n >= 1 nós, então a altura:
  - é no mínimo $\lceil \lg(n+1) \rceil$:
    - ★ quando a árvore é completa
    - ★ $n = 2^h - 1$: máximo de nós internos
    - ★ $n + 1 = 2^h$
    - ★ $\lg(n+1) = \lg(2^h)$
    - ★ $\lg(n+1) = h.\lg(2)$
    - ★ $\lg(n+1) = h$

Árvores binárias - Propriedades



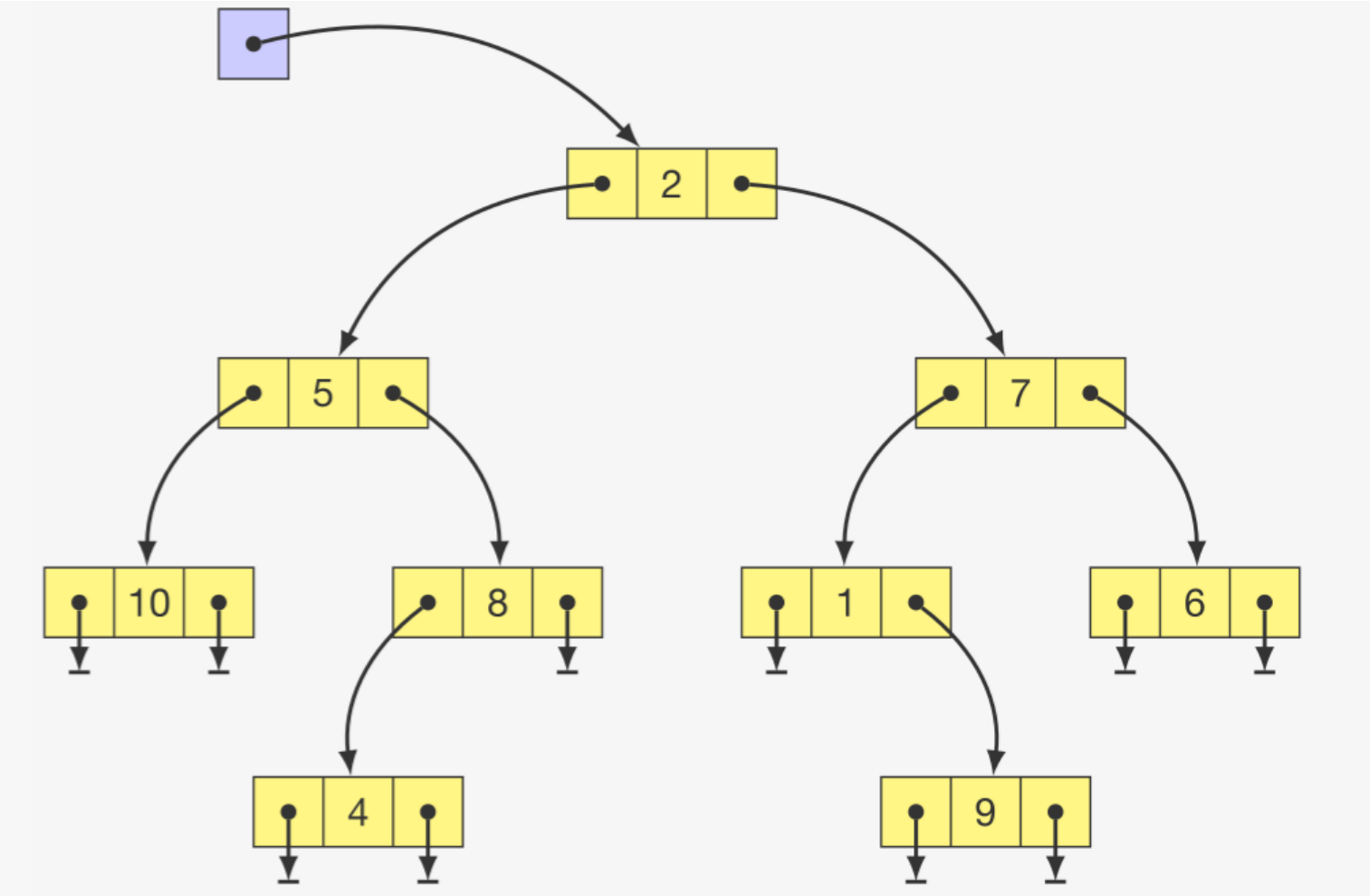


https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

- Se a árvore tem n >= 1 nós, então a altura:
  - é no mínimo $\lceil \lg(n+1) \rceil$:
    - ★ quando a árvore é completa
    - ★ $n = 2^h - 1$: máximo de nós internos
    - ★ $n + 1 = 2^h$
    - ★ $\lg(n+1) = \lg(2^h)$
    - ★ $\lg(n+1) = h.\lg(2)$
    - ★ $\lg(n+1) = h$
  - é no máximo n:
    - ★ quando cada nó não-terminal tem apenas um filho

Árvores binárias - Implementação

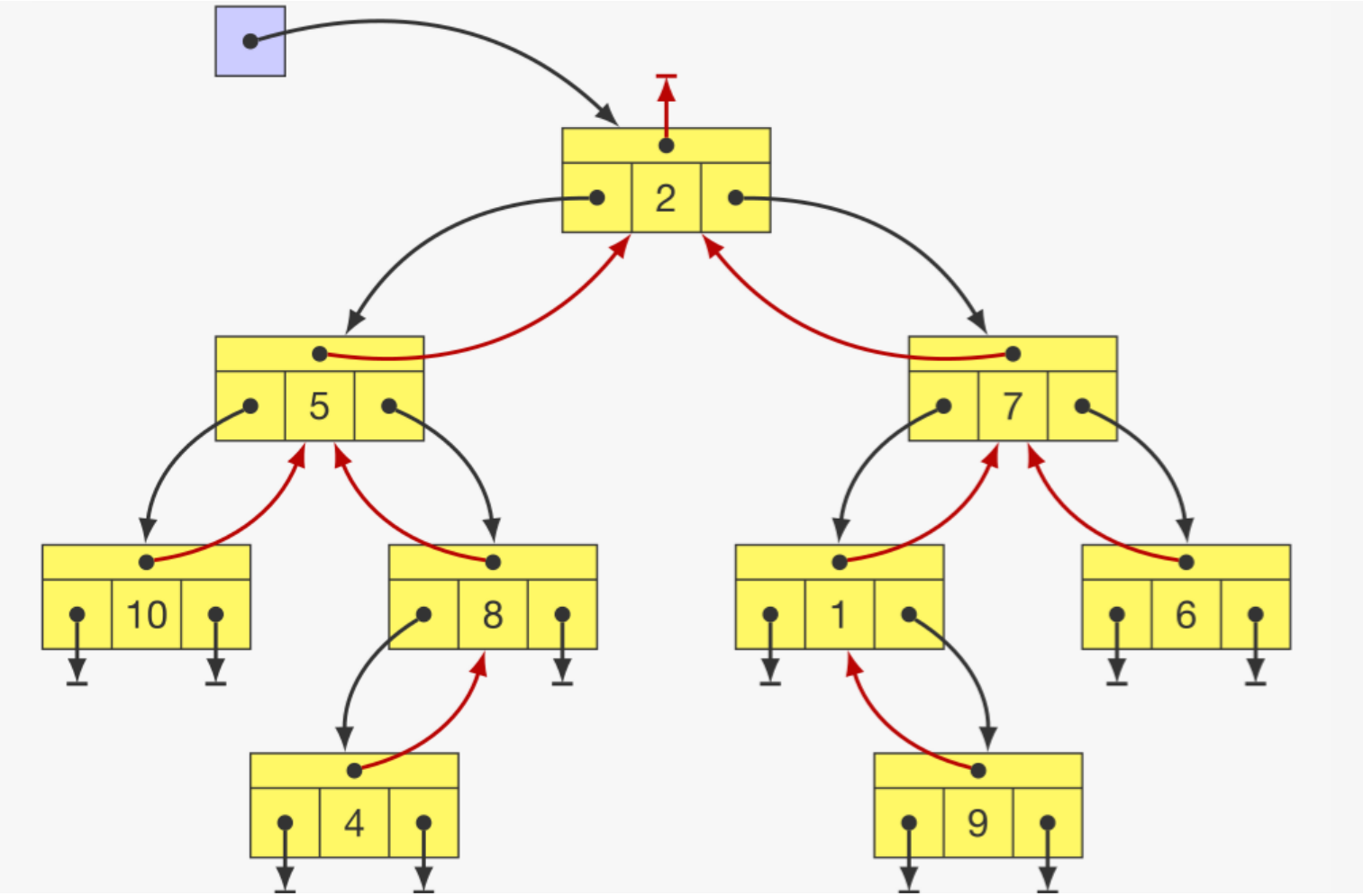
- Lista de adjacências ou matriz de adjacências (aulas anteriores)
- Lista estática ou encadeada



https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores binárias - Implementação

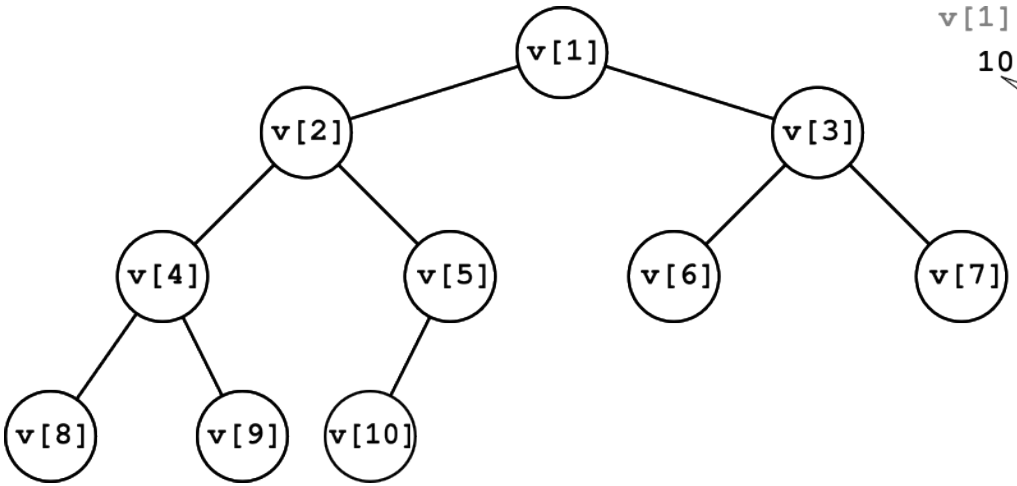
- Lista de adjacências ou matriz de adjacências (aulas anteriores)
- Lista estática ou encadeada

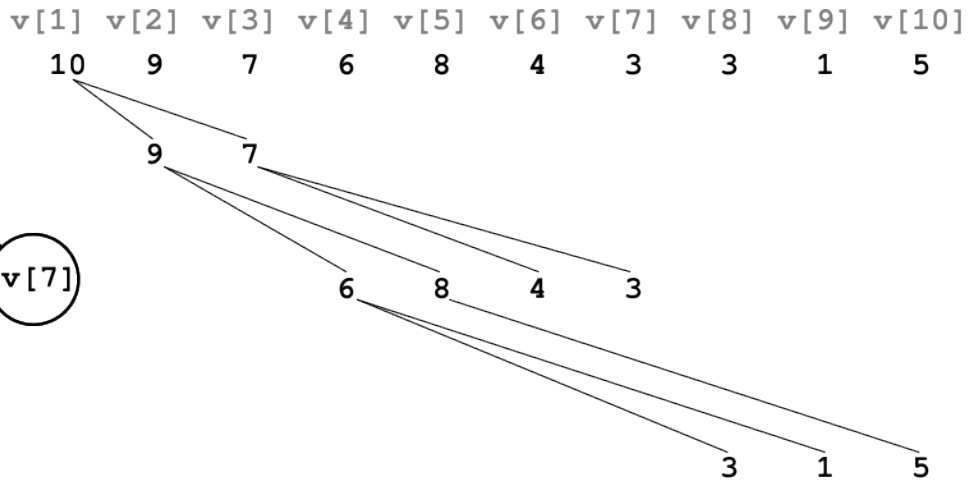


https://www.ic.unicamp.br/∼rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf

Árvores binárias - Implementação

- Lista de adjacências ou matriz de adjacências (aulas anteriores)
- Lista estática ou encadeada

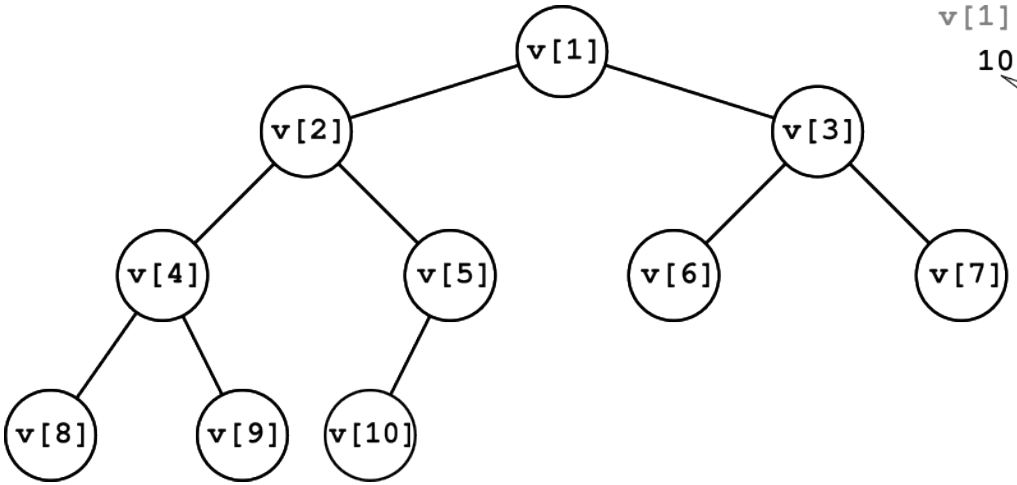


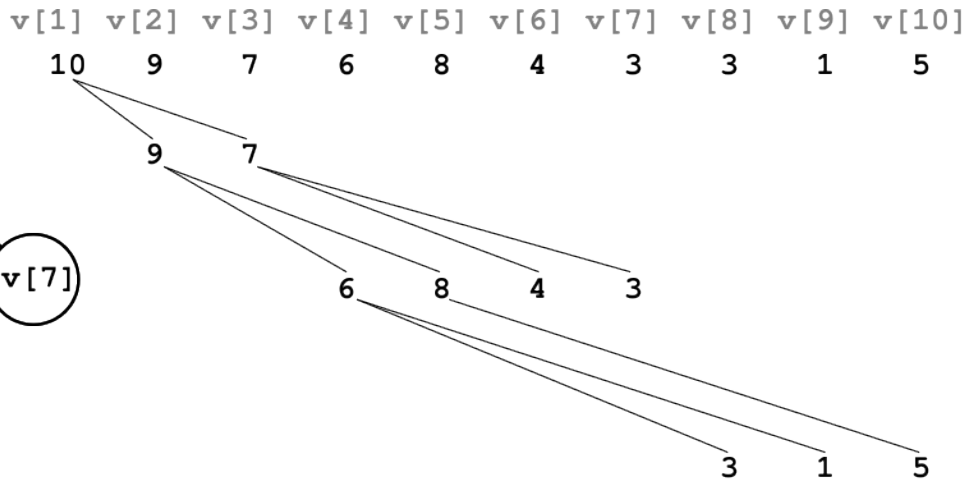


- v[k]: pai? filhos?

Árvores binárias - Implementação

- Lista de adjacências ou matriz de adjacências (aulas anteriores)
- Lista estática ou encadeada





- v[k]: pai? filhos?
- pai $\rightarrow$ v[k] : $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$
- filhos $\rightarrow$ v[k] : $2 * k$ e $2 * k + 1$

Árvores binárias - Implementação em C

```c
typedef int Item;

typedef struct node no;
struct node
{
    Item item;
    no *pai;
    no *esq, *dir;
};

no *criar_arvore(Item x, no *p, no *e, no *d)
{
    no *raiz = malloc(sizeof(no));
    raiz->pai = p;
    raiz->esq = e;
    raiz->dir = d;
    raiz->item = x;
    return raiz;
}
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1 no *avo(no *elemento) {
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1 no *avo(no *elemento) {
2     if ((elemento != NULL) && (elemento->pai != NULL))
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1 no *avo(no *elemento) {
2     if ((elemento != NULL) && (elemento->pai != NULL))
3         return elemento->pai->pai;
4
5     return NULL;
6 }
7
8 no *tio(no *elemento) {
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1  no *avo(no *elemento) {
2      if ((elemento != NULL) && (elemento->pai != NULL))
3          return elemento->pai->pai;
4
5      return NULL;
6  }
7
8  no *tio(no *elemento) {
9      no *vo = avo(elemento);
10     if (vo == NULL) return NULL;
11
12     if (elemento->pai == vo->esquerda)
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1  no *avo(no *elemento) {
2      if ((elemento != NULL) && (elemento->pai != NULL))
3          return elemento->pai->pai;
4
5      return NULL;
6  }
7
8  no *tio(no *elemento) {
9      no *vo = avo(elemento);
10     if (vo == NULL) return NULL;
11
12     if (elemento->pai == vo->esquerda)
13         return vo->direita;
14
15     return vo->esquerda;
16 }
17
18 no *irmao(no *elemento) {
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1  no *avo(no *elemento) {
2      if ((elemento != NULL) && (elemento->pai != NULL))
3          return elemento->pai->pai;
4
5      return NULL;
6  }
7
8  no *tio(no *elemento) {
9      no *vo = avo(elemento);
10     if (vo == NULL) return NULL;
11
12     if (elemento->pai == vo->esquerda)
13         return vo->direita;
14
15     return vo->esquerda;
16 }
17
18 no *irmao(no *elemento) {
19     if ((elemento != NULL) && (elemento->pai != NULL)){
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1  no *avo(no *elemento) {
2      if ((elemento != NULL) && (elemento->pai != NULL))
3          return elemento->pai->pai;
4
5      return NULL;
6  }
7
8  no *tio(no *elemento) {
9      no *vo = avo(elemento);
10     if (vo == NULL) return NULL;
11
12     if (elemento->pai == vo->esquerda)
13         return vo->direita;
14
15     return vo->esquerda;
16 }
17
18 no *irmao(no *elemento) {
19     if ((elemento != NULL) && (elemento->pai != NULL)){
20         if (elemento == elemento->pai->esquerda)
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1  no *avo(no *elemento) {
2      if ((elemento != NULL) && (elemento->pai != NULL))
3          return elemento->pai->pai;
4
5      return NULL;
6  }
7
8  no *tio(no *elemento) {
9      no *vo = avo(elemento);
10     if (vo == NULL) return NULL;
11
12     if (elemento->pai == vo->esquerda)
13         return vo->direita;
14
15     return vo->esquerda;
16 }
17
18 no *irmao(no *elemento) {
19     if ((elemento != NULL) && (elemento->pai != NULL)){
20         if (elemento == elemento->pai->esquerda)
21             return pai->direita;
22
23         return pai->esquerda;
24     }
25 }
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1 no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1 no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
2     if(elemento == NULL || elemento->item == v)
3         return elemento;
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1 no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
2     if(elemento == NULL || elemento->item == v)
3         return elemento;
4
5     no *e = busca_linear(elemento->esq, v);
6     if(e != NULL) return e;
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1  no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
2      if(elemento == NULL || elemento->item == v)
3          return elemento;
4
5      no *e = busca_linear(elemento->esq, v);
6      if(e != NULL) return e;
7
8      return busca_linear(elemento->dir, v);
9  }
10
11 int numero_nos(no *raiz) {
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1 no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
2     if(elemento == NULL || elemento->item == v)
3         return elemento;
4
5     no *e = busca_linear(elemento->esq, v);
6     if(e != NULL) return e;
7
8     return busca_linear(elemento->dir, v);
9 }
10
11 int numero_nos(no *raiz) {
12     if (raiz == NULL) return 0;
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1  no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
2      if(elemento == NULL || elemento->item == v)
3          return elemento;
4
5      no *e = busca_linear(elemento->esq, v);
6      if(e != NULL) return e;
7
8      return busca_linear(elemento->dir, v);
9  }
10
11 int numero_nos(no *raiz) {
12     if (raiz == NULL) return 0;
13     return 1 +
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1 no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
2     if(elemento == NULL || elemento->item == v)
3         return elemento;
4
5     no *e = busca_linear(elemento->esq, v);
6     if(e != NULL) return e;
7
8     return busca_linear(elemento->dir, v);
9 }
10
11 int numero_nos(no *raiz) {
12     if (raiz == NULL) return 0;
13     return 1 +  numero_nos(raiz->esq) +
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1  no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
2      if(elemento == NULL || elemento->item == v)
3          return elemento;
4
5      no *e = busca_linear(elemento->esq, v);
6      if(e != NULL) return e;
7
8      return busca_linear(elemento->dir, v);
9  }
10
11 int numero_nos(no *raiz) {
12     if (raiz == NULL) return 0;
13     return 1 +  numero_nos(raiz->esq) + numero_nos(raiz->dir);
14 }
15
16 int altura(no *raiz) {
17     if (raiz == NULL) return 0;
```

Árvores binárias - Implementação em C

```c
no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
    if(elemento == NULL || elemento->item == v)
        return elemento;

    no *e = busca_linear(elemento->esq, v);
    if(e != NULL) return e;

    return busca_linear(elemento->dir, v);
}

int numero_nos(no *raiz) {
    if (raiz == NULL) return 0;
    return 1 +  numero_nos(raiz->esq) + numero_nos(raiz->dir);
}

int altura(no *raiz) {
    if (raiz == NULL) return 0;

    int h_esq = altura(raiz->esq);
```

Árvores binárias - Implementação em C

```
1  no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
2      if(elemento == NULL || elemento->item == v)
3          return elemento;
4
5      no *e = busca_linear(elemento->esq, v);
6      if(e != NULL) return e;
7
8      return busca_linear(elemento->dir, v);
9  }
10
11 int numero_nos(no *raiz) {
12     if (raiz == NULL) return 0;
13     return 1 +  numero_nos(raiz->esq) + numero_nos(raiz->dir);
14 }
15
16 int altura(no *raiz) {
17     if (raiz == NULL) return 0;
18
19     int h_esq = altura(raiz->esq);
20     int h_dir = altura(raiz->dir);
```

Árvores binárias - Implementação em C

```c
no *busca_linear(no *elemento, Item v) {
    if(elemento == NULL || elemento->item == v)
        return elemento;

    no *e = busca_linear(elemento->esq, v);
    if(e != NULL) return e;

    return busca_linear(elemento->dir, v);
}

int numero_nos(no *raiz) {
    if (raiz == NULL) return 0;
    return 1 +  numero_nos(raiz->esq) + numero_nos(raiz->dir);
}

int altura(no *raiz) {
    if (raiz == NULL) return 0;

    int h_esq = altura(raiz->esq);
    int h_dir = altura(raiz->dir);

    return 1 + (h_esq > h_dir ? h_esq : h_dir);
}
```

- Exercício: faça versões sem recursão dos algoritmos acima. (estrutura ?)

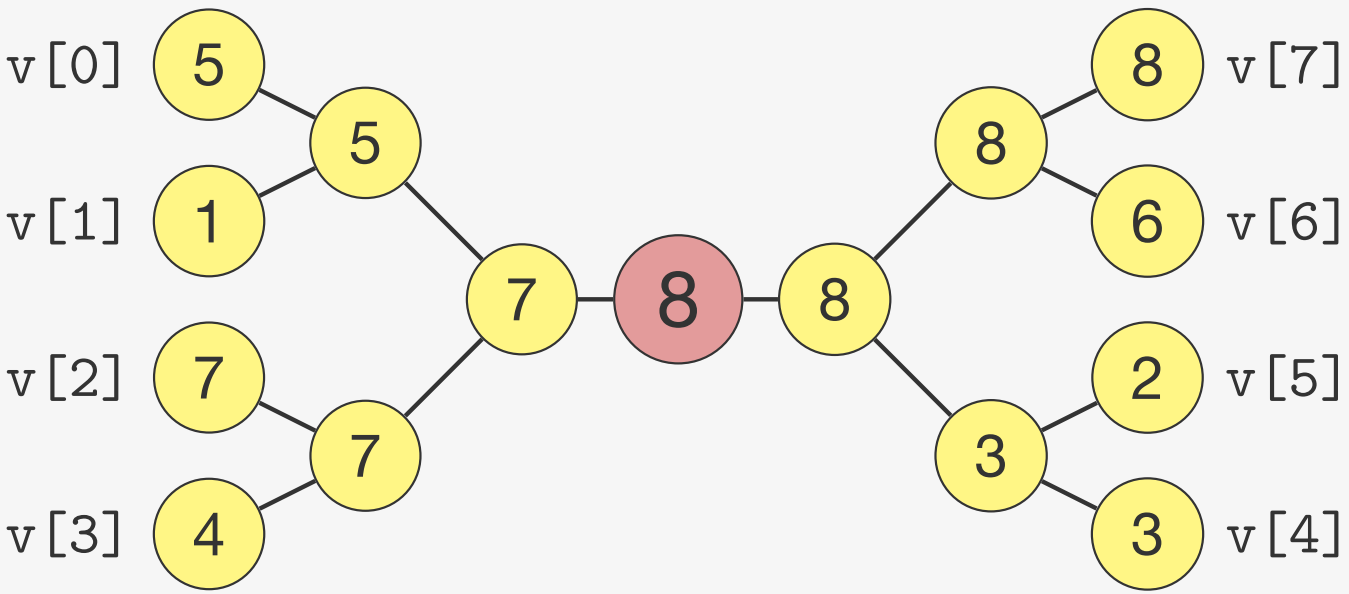
Árvores binárias - Exemplo

- Criar um torneio: representar em árvore
- Montar as chaves: quartas de final, semifinal, final e vencedor
- Slides a seguir:
  - `https://www.ic.unicamp.br/~rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf`

Exemplo: Criando um torneio

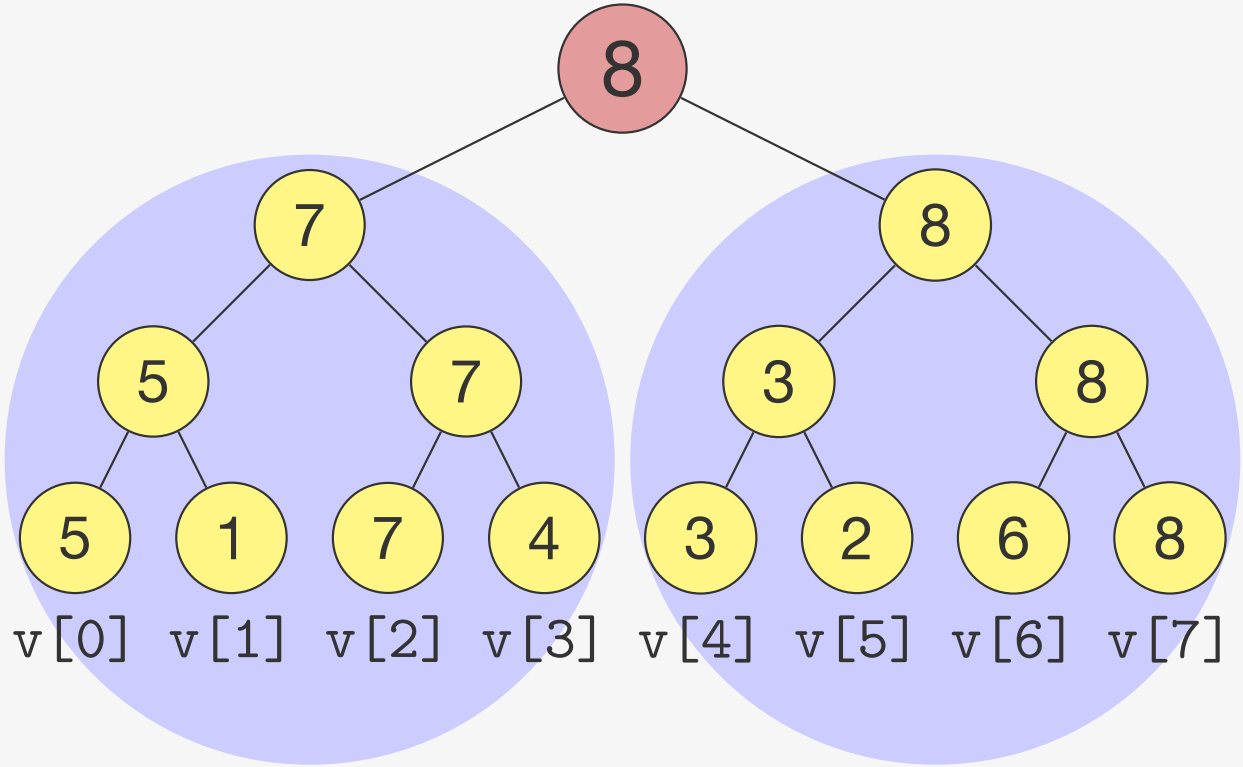
Dado um vetor `v` com `n` números, queremos criar um torneio

- Decidir qual é o maior número em um esquema de chaves
  - Ex.: para `n = 8`, temos quartas de final, semifinal e final



É uma árvore binária, onde o valor do pai é o maior valor dos seus filhos

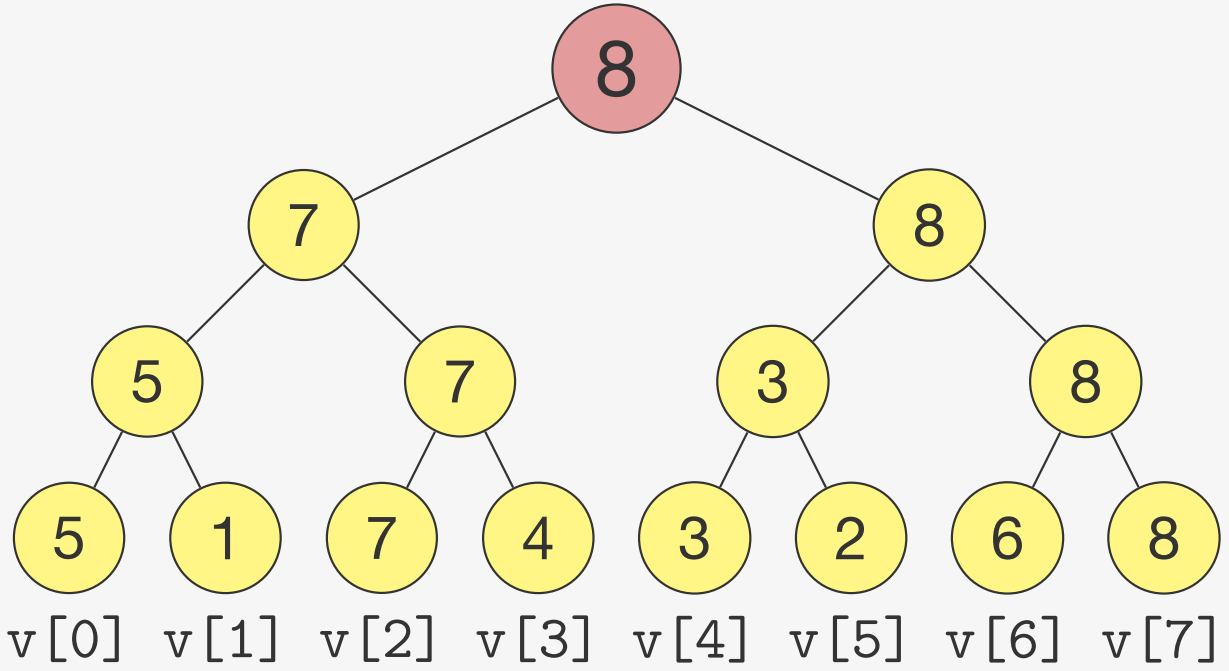
Exemplo: Criando um torneio



Para resolver o torneio:

- resolva o torneio das duas subárvores recursivamente

Exemplo: Criando um torneio



Para resolver o torneio:

- resolva o torneio das duas subárvores recursivamente
- decida o vencedor

Árvores binárias - Exemplo

```
1  no *torneio(int *v, int l, int r) {
2      if (l == r) return criar_arvore(v[l], NULL , NULL);
3
4      int m = (l + r) / 2;
5      no *esq = torneio(v, l, m);
6      no *dir = torneio(v, m+1, r);
7
8      int valor = esq->dado > dir->dado ? esq->dado : dir->dado;
9
10     return criar_arvore(valor , esq , dir);
11
12 }
```

- Com a resolução/representação do torneio, várias informações podem ser obtidas:
  - Vencedor
  - Pontuação dos times
  - Quais times se enfrentaram
  - Jogos das fases (níveis da árvore)

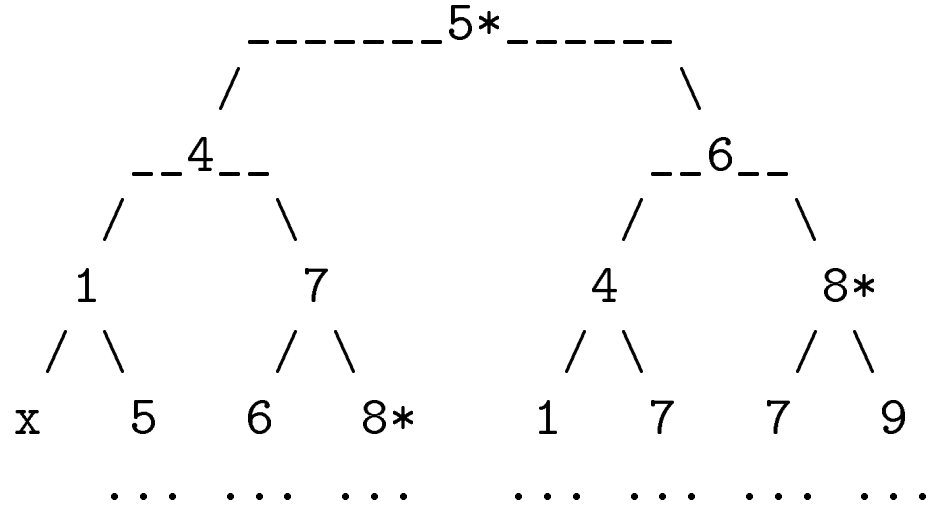
Árvores binárias - exemplo

Problema dos portais - lista de adjacências

Entrada: 10 5 8 4 2 1 3 1 2 1 1 1 2

Saída: 2

```
          1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
x[] = {?, 4, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 2}
```



```
1  head *lista = criar_lista(); //tad?
2  inserir(lista, partida);     //posição?
3  distancia[partida] = 0;
4
5  while(!vazia(lista) && distancia[destino] == infinito){
6      Item p = remover(lista); //posição?
7
8      //percorrendo a árvore para resolver o problema
9
10     //subárvore esquerda
11     int passado = p-saltos[p];
12     if(distancia[passado]==infinito) {
13         distancia[passado] = distancia[p] + 1;
14         inserir(lista, passado);
15     }
16
17     //subárvore direita
18     int futuro = p+saltos[p];
19     if(distancia[futuro]==infinito) {
20         distancia[futuro] = distancia[p] + 1;
21         inserir(lista, futuro);
22     }
23 }
24
25 if(distancia[destino] < infinito)
26     printf("%d\n", distancia[destino]);
```

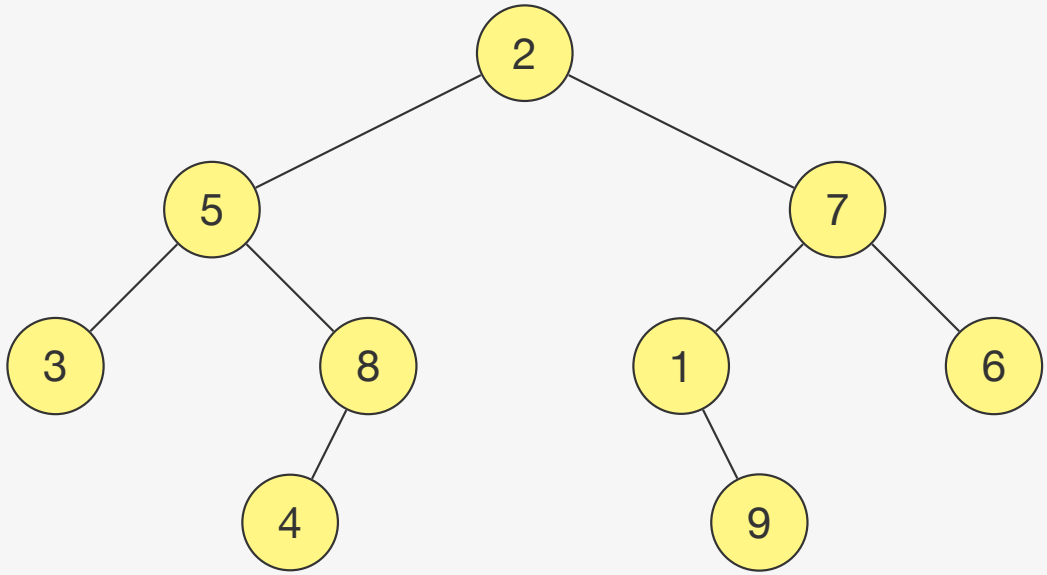
Árvores binárias - Algoritmos de Percurso

- Diferentes diferentes percursos, geram diferentes sequencias de nós (informações)
- Percurso em largura (aulas anteriores)
  - Percurso por nível: os nós são visitados na ordem dos níveis em que se encontram
  - Inicialmente são visitados todos os nós do nível 0 (raiz), depois os nós do nível 1, depois do nível 2 e assim por diante
- Percurso em profundidade
  - Em-Ordem: esquerda raiz/pai direita (ex. notação normal)
  - Pré-Ordem: raiz/pai esquerda direita (ex. notação polonesa)
  - Pós-Ordem: esquerda direita raiz/pai (ex. notação polonesa inversa)
- Slides a seguir:
  - `https://www.ic.unicamp.br/~rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade17-arvores-binarias.pdf`

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

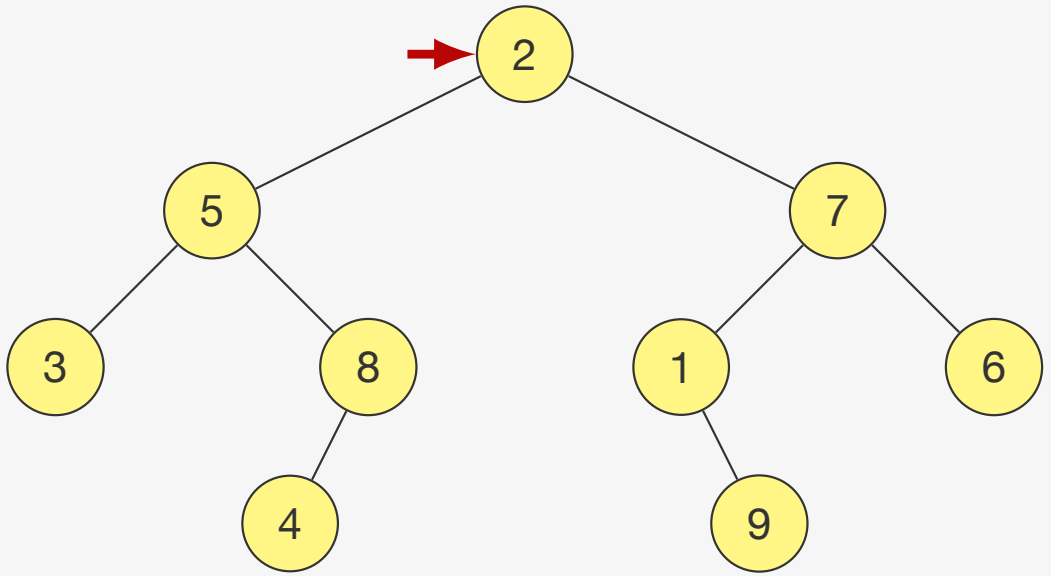


Ex:

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

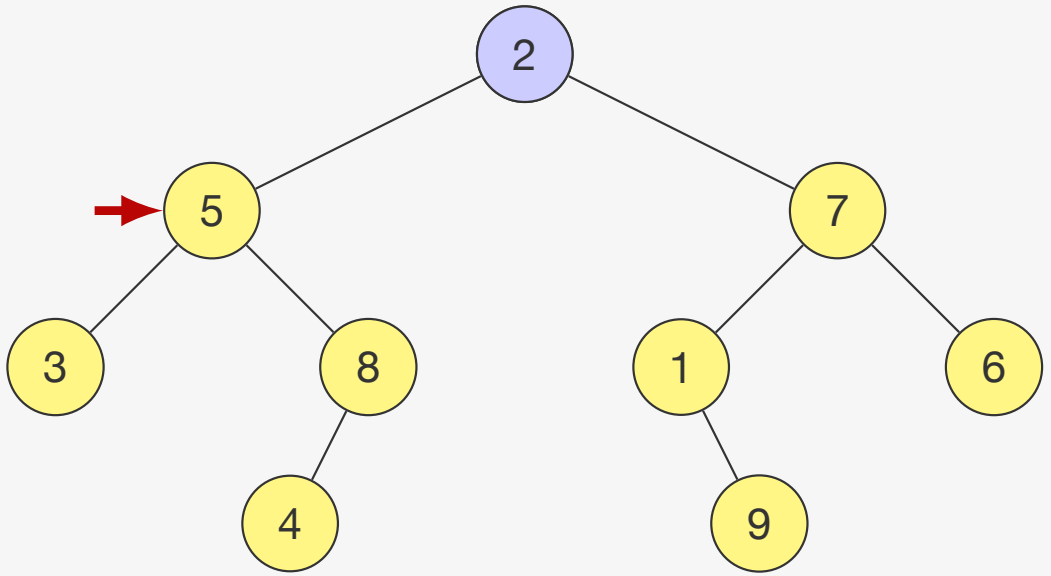


Ex:

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

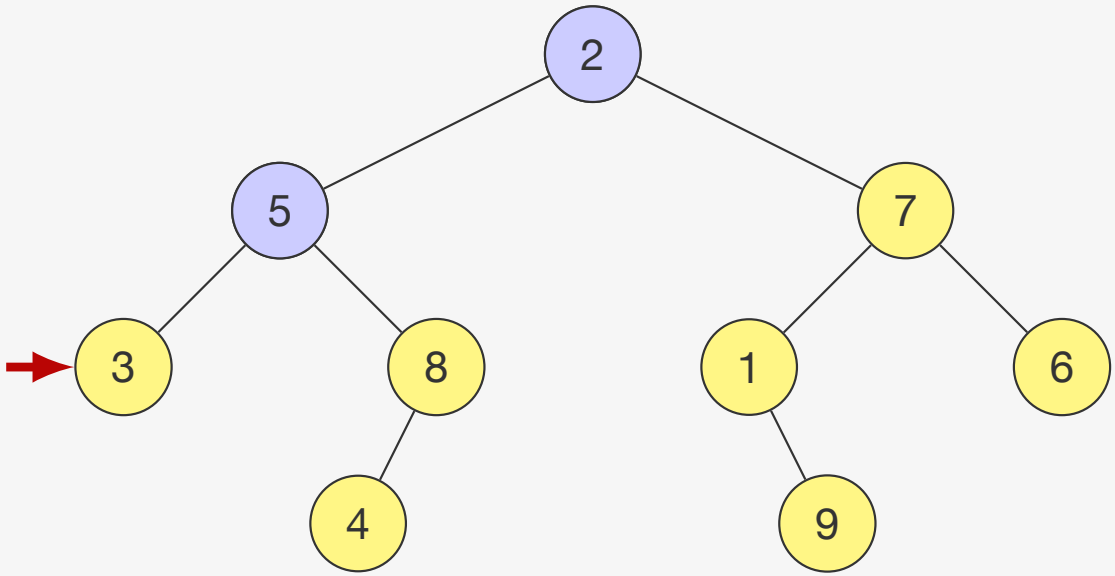


Ex: 2,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

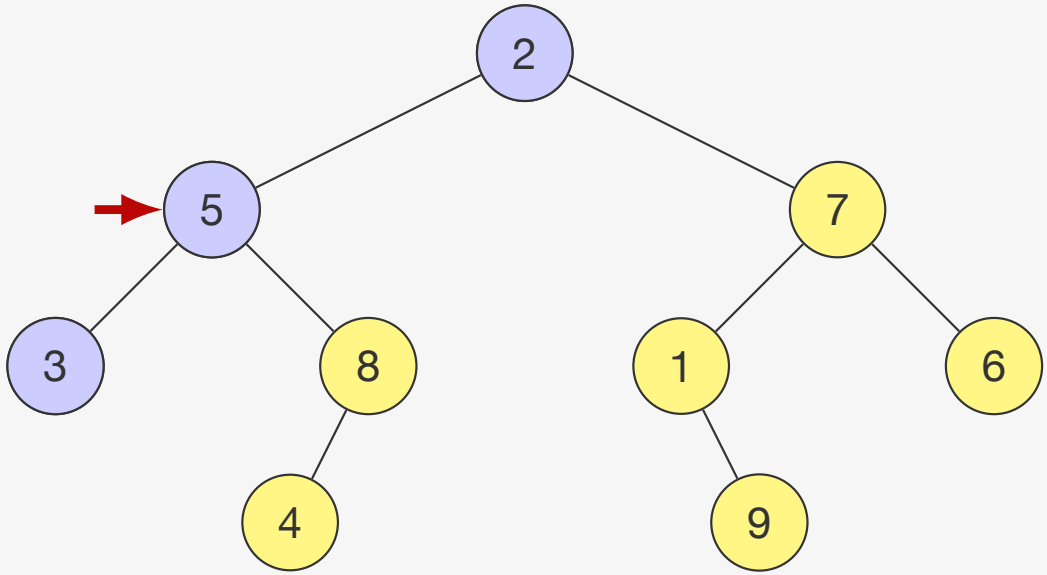


Ex: 2, 5,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

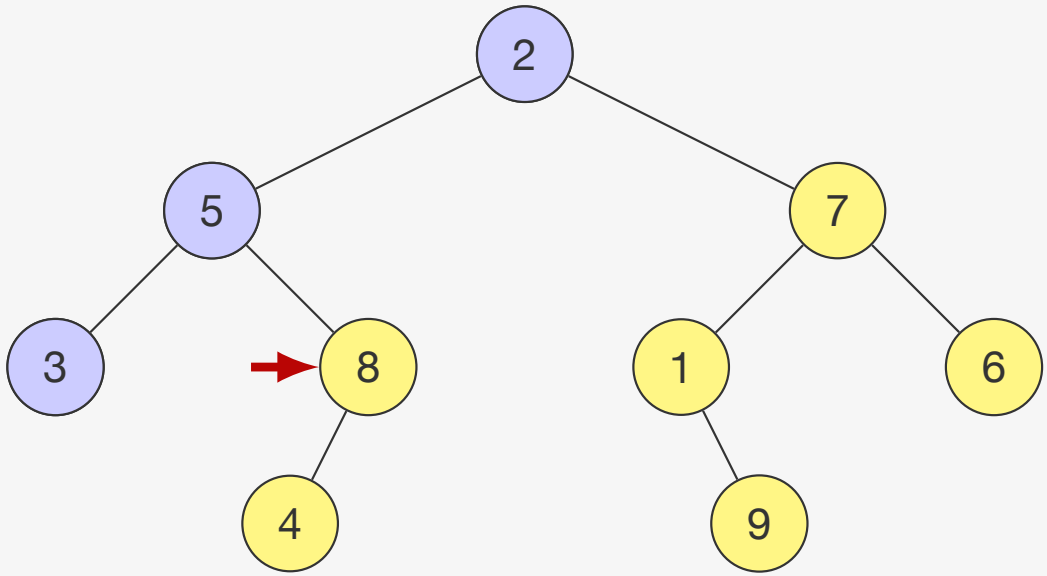


Ex: 2, 5, 3,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

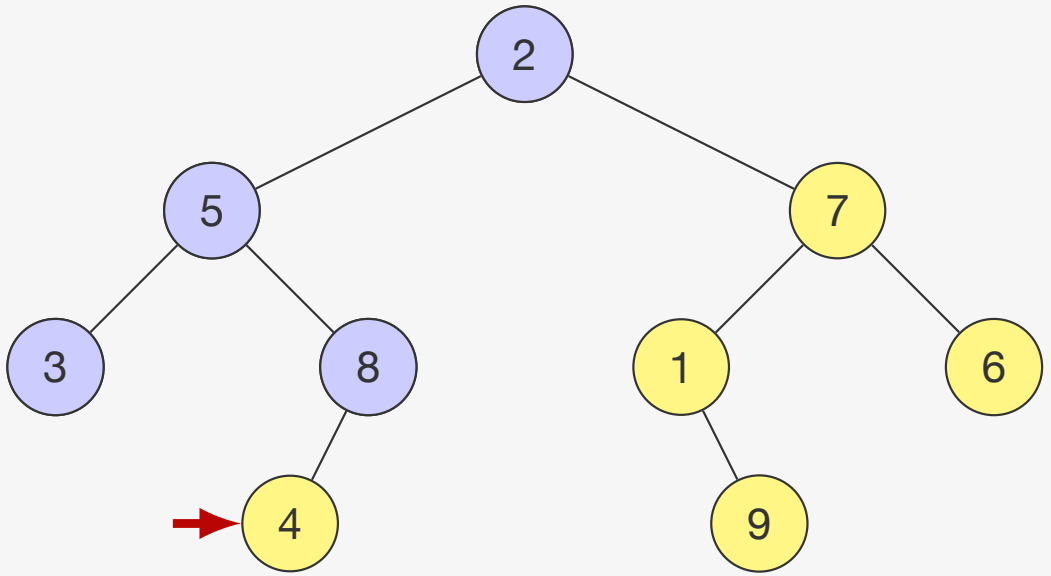


Ex: 2, 5, 3,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

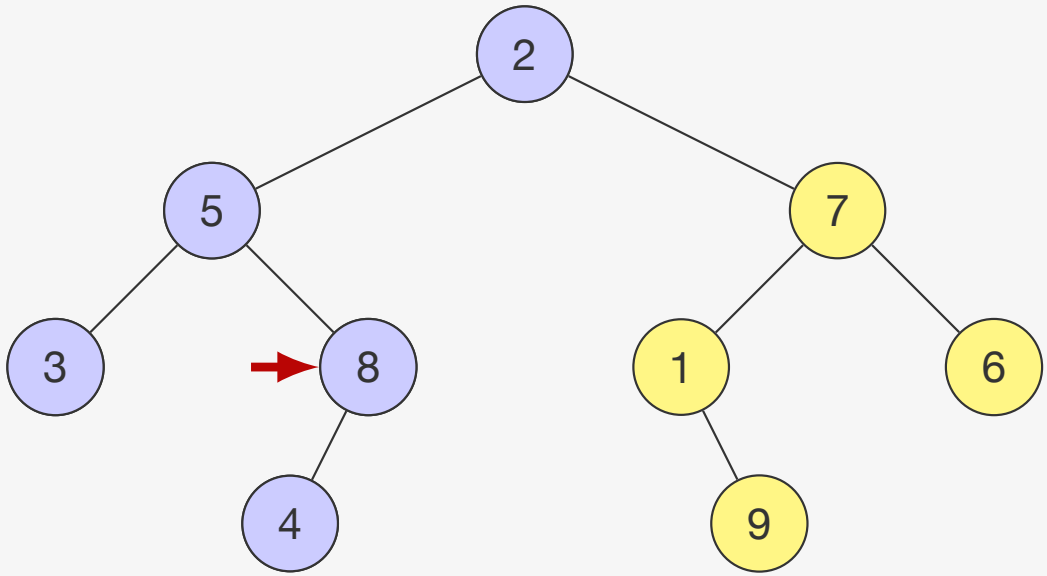


Ex: 2, 5, 3, 8,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

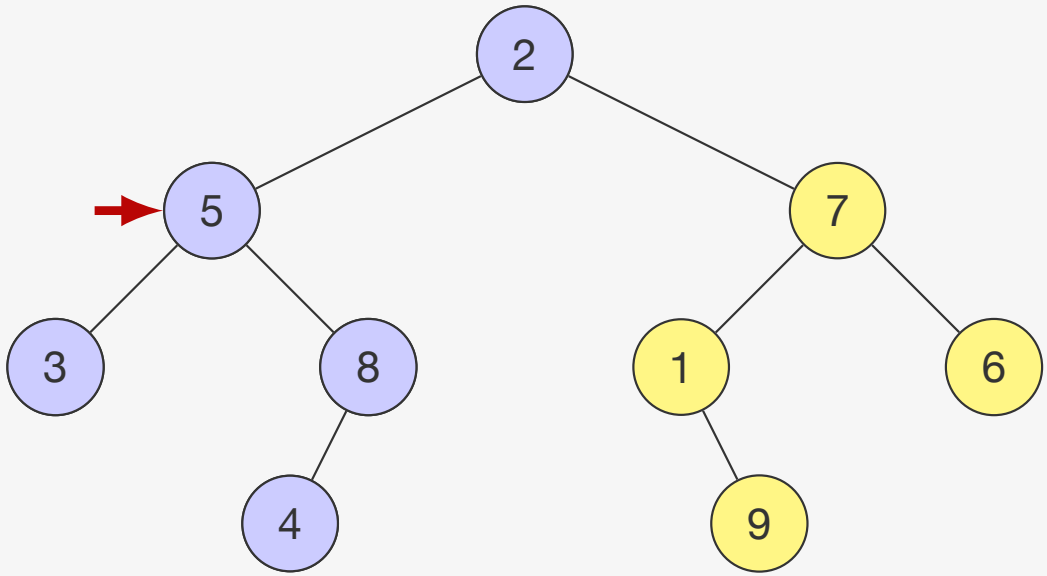


Ex: 2, 5, 3, 8, 4,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

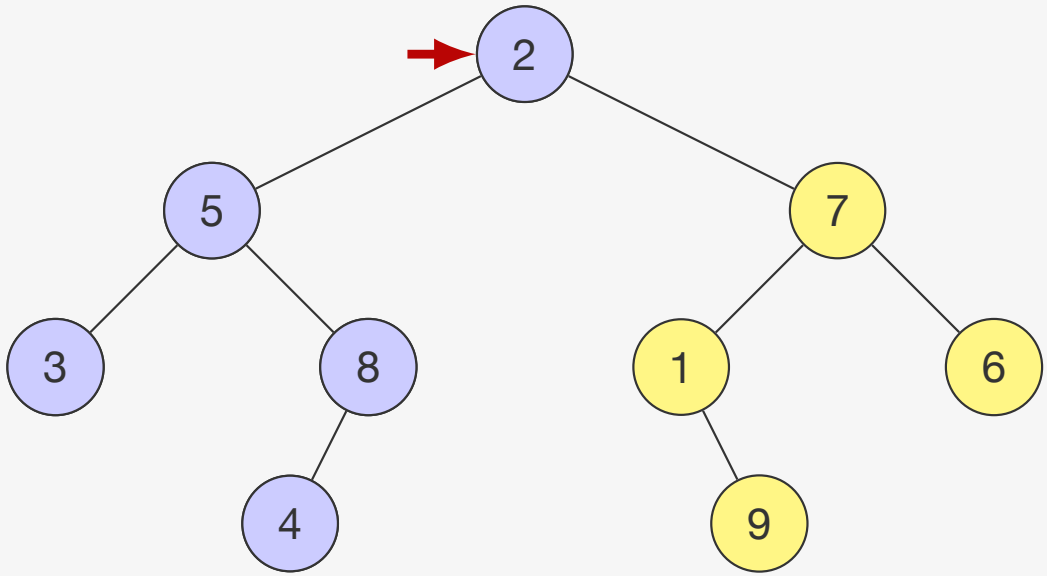


Ex: 2, 5, 3, 8, 4,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

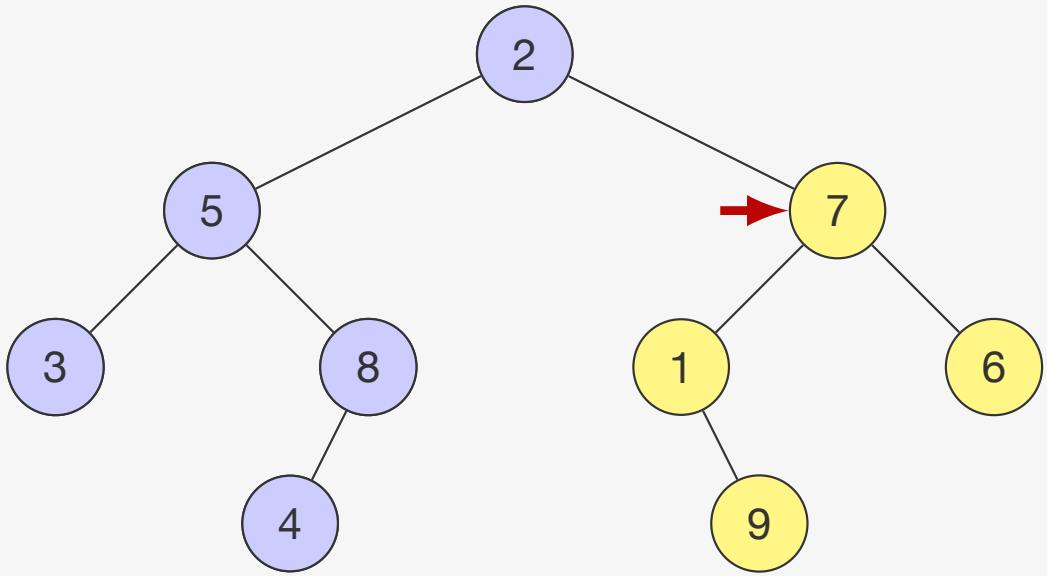


Ex: 2, 5, 3, 8, 4,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

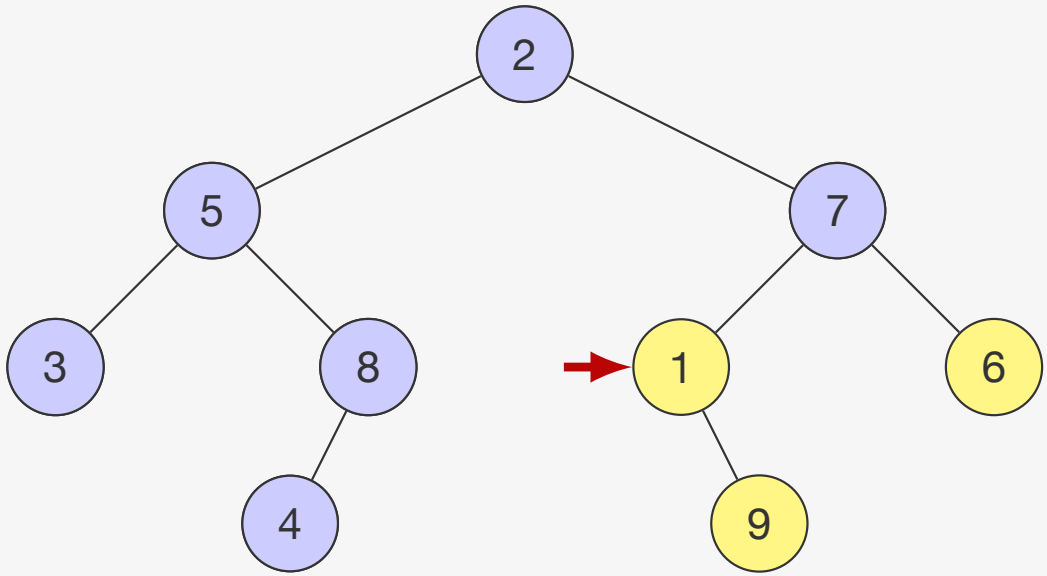


Ex: 2, 5, 3, 8, 4,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

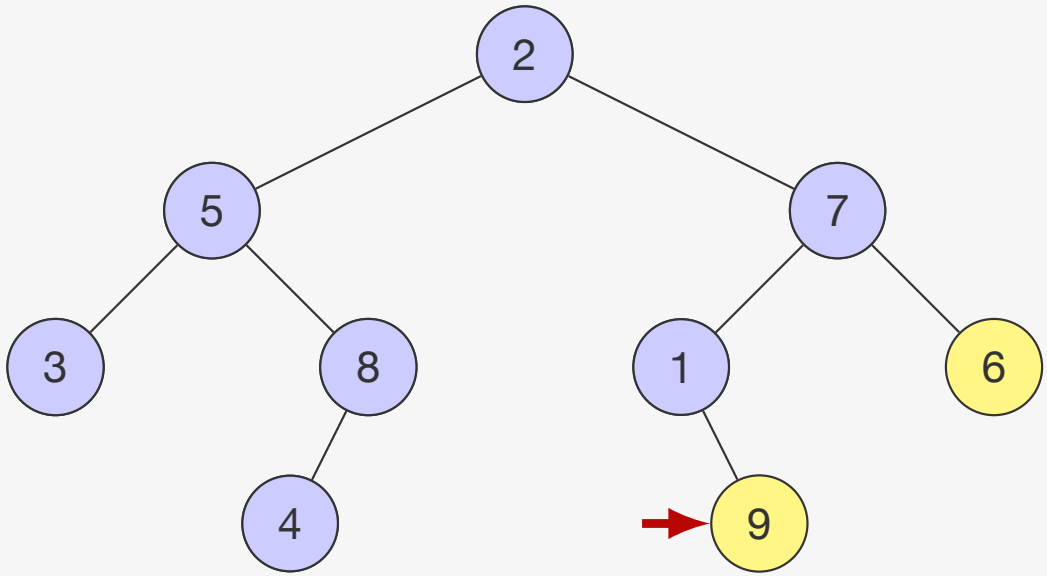


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

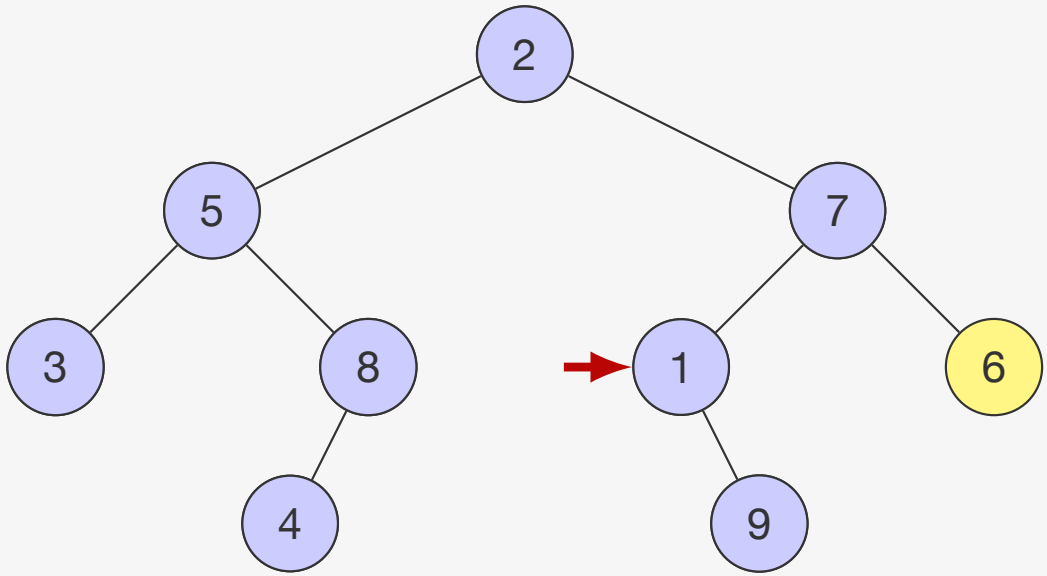


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

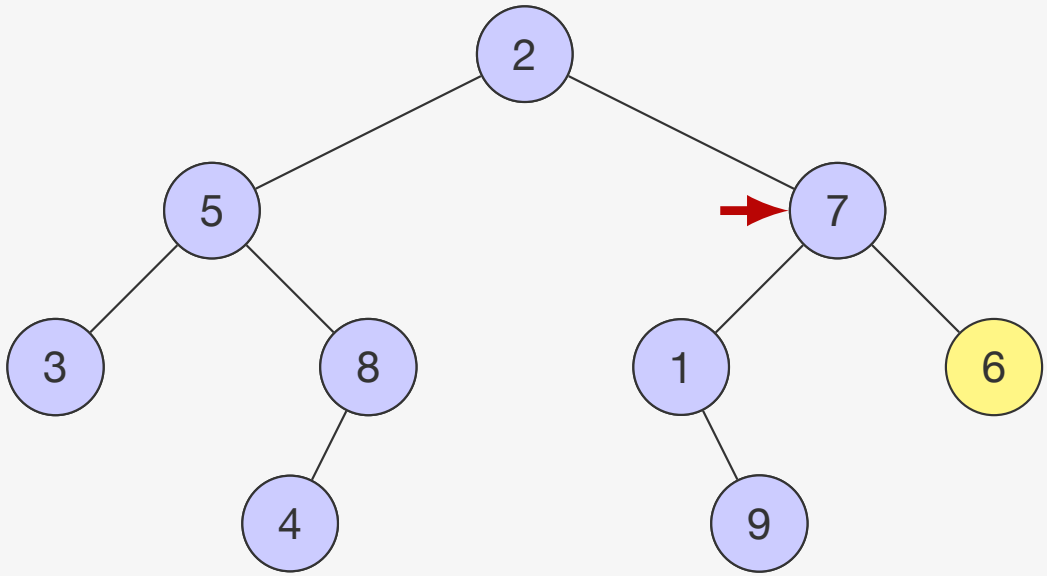


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

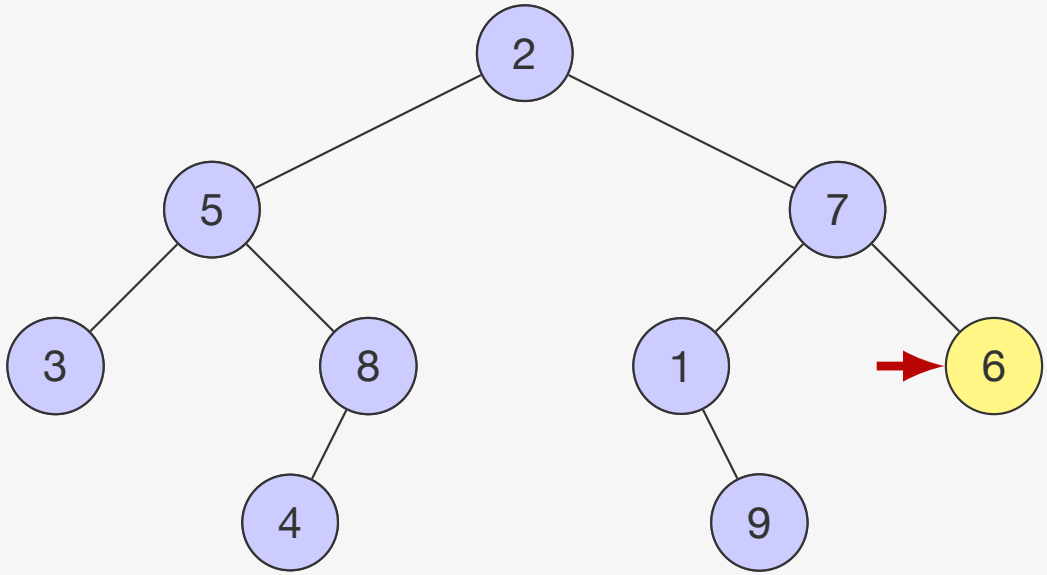


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

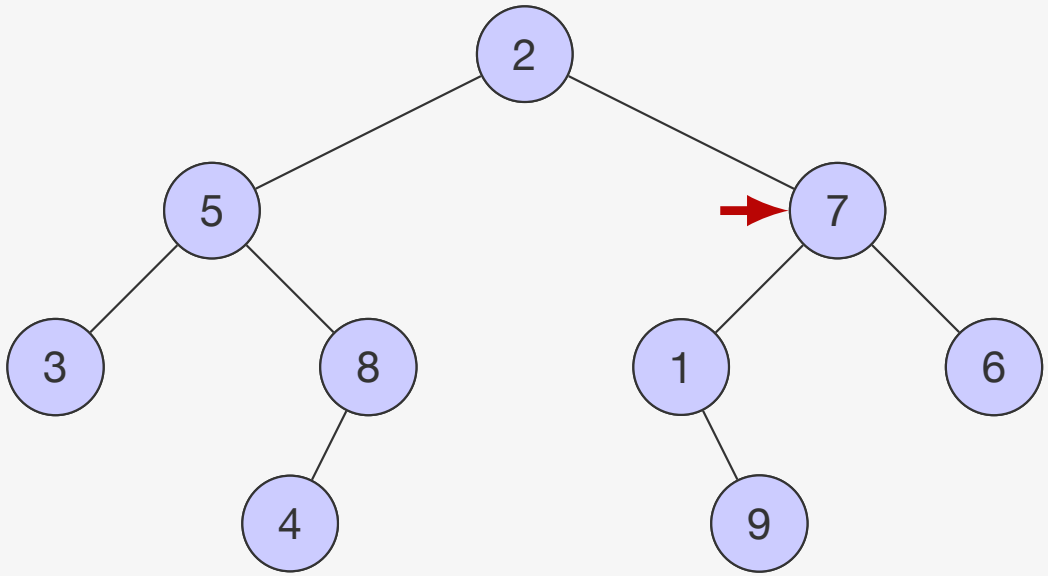


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9,

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

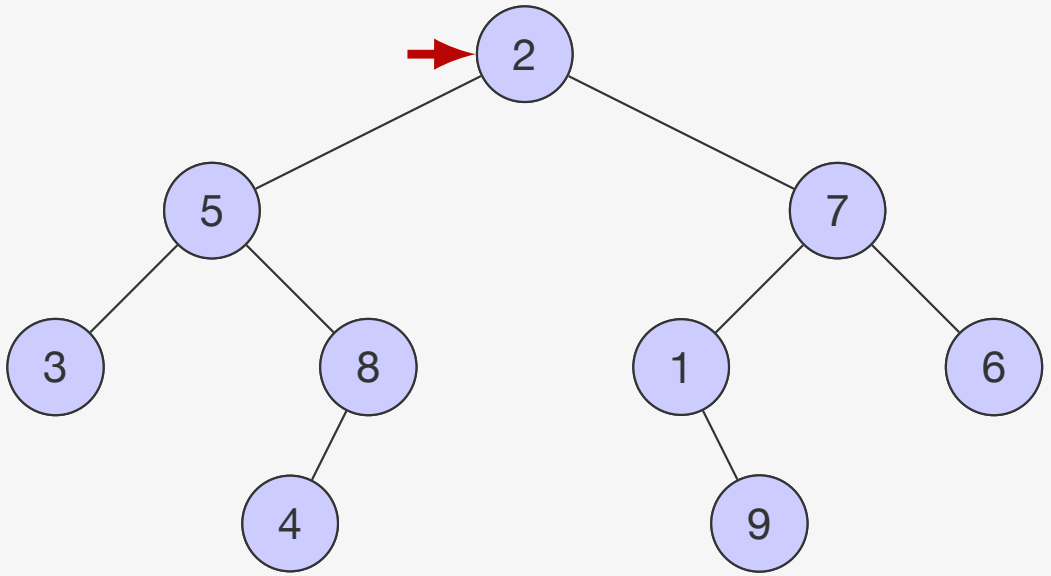


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9, 6

Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

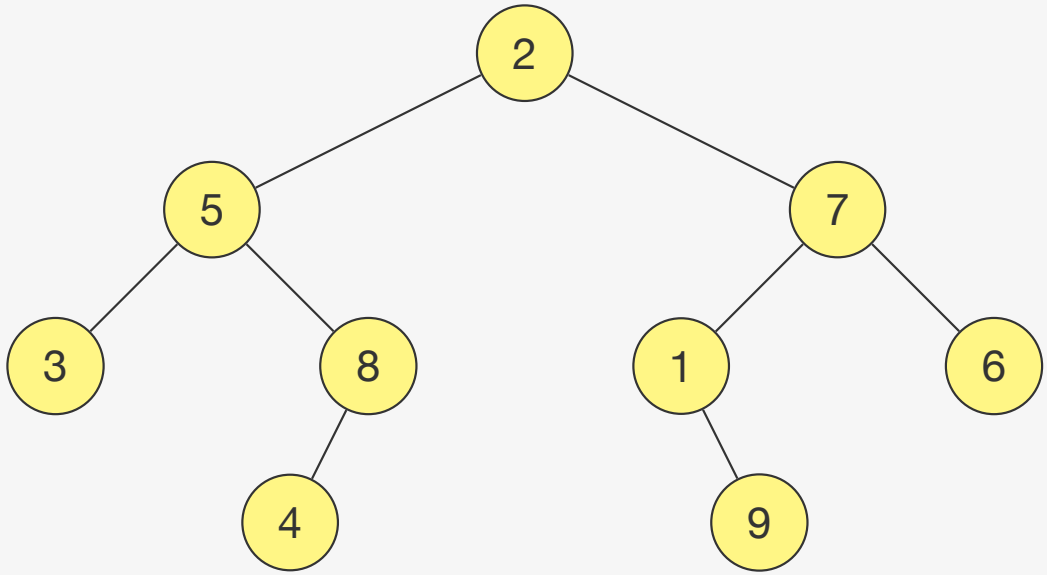


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9, 6

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

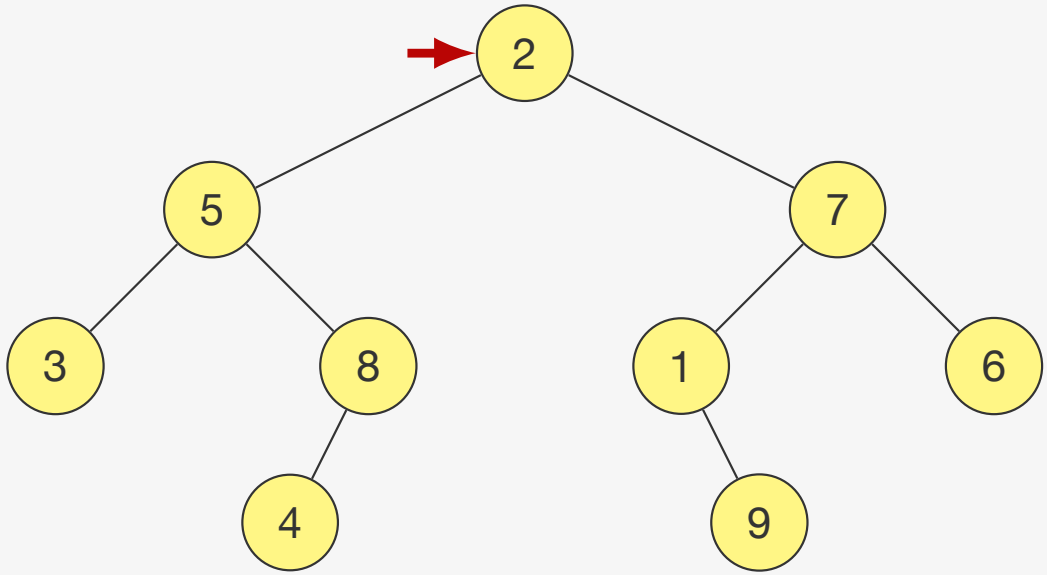


Ex:

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

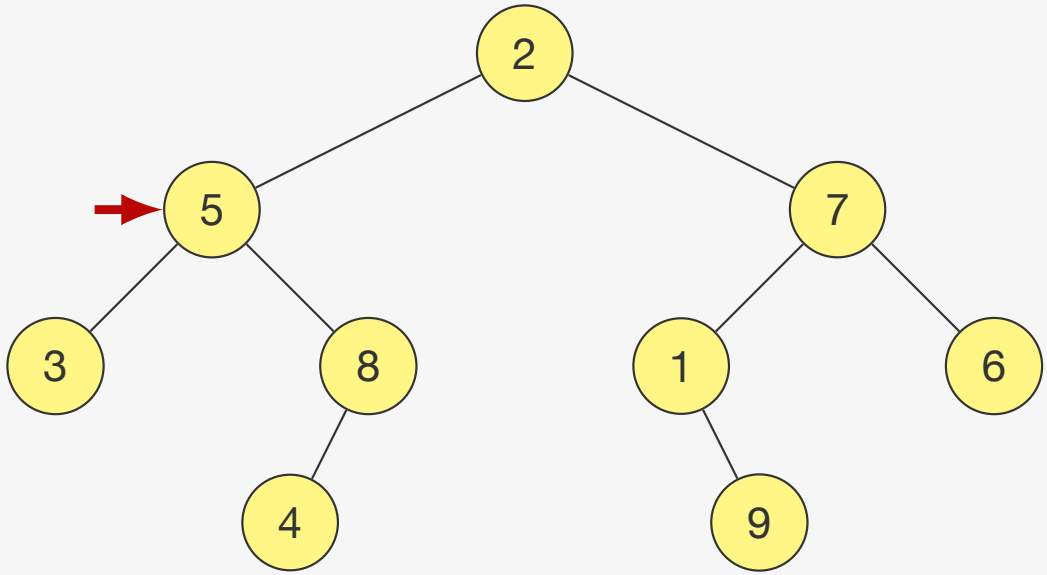


Ex:

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

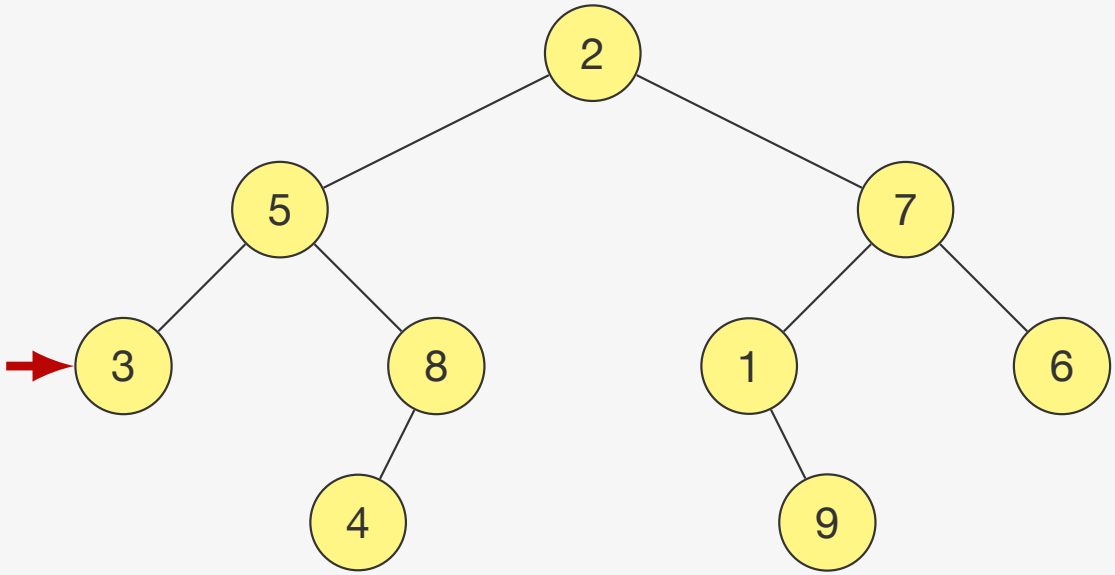


Ex:

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

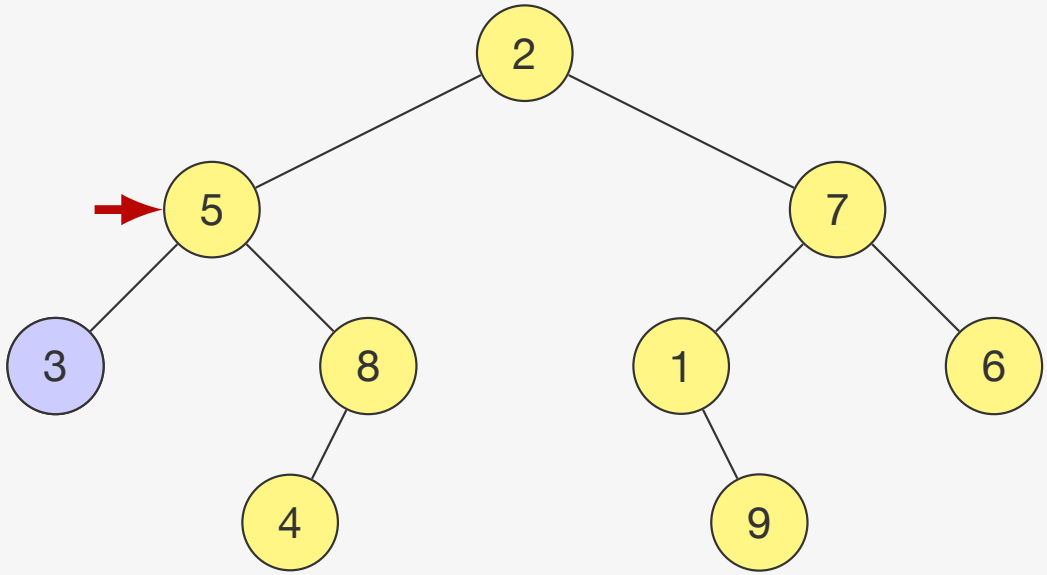


Ex:

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

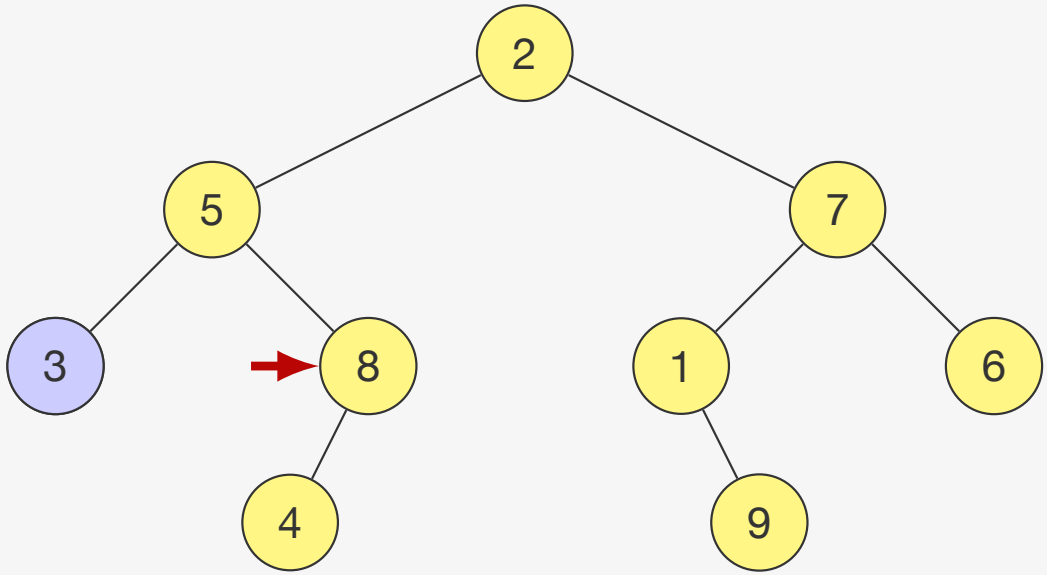


Ex: 3,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

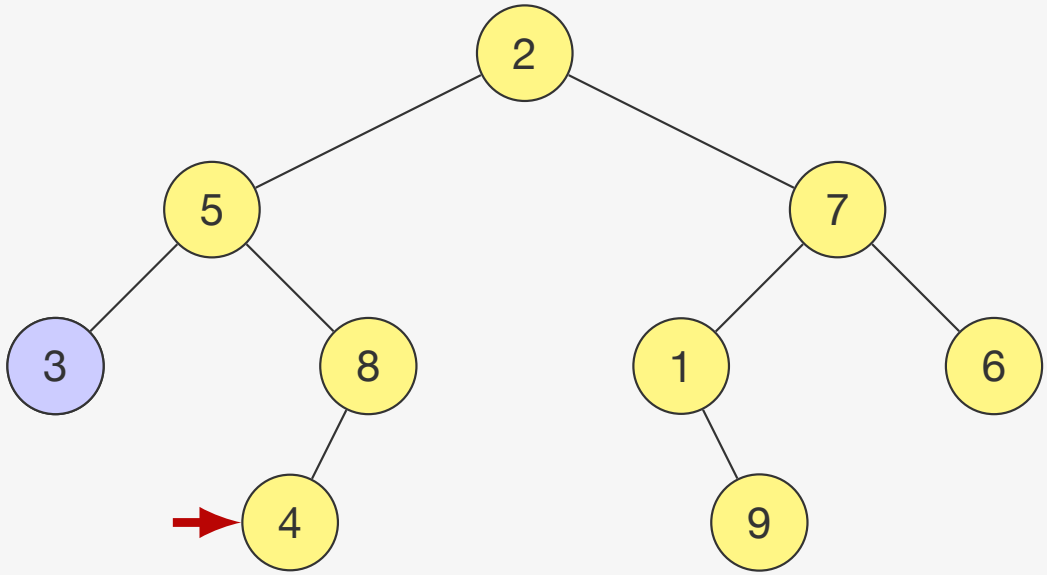


Ex: 3,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

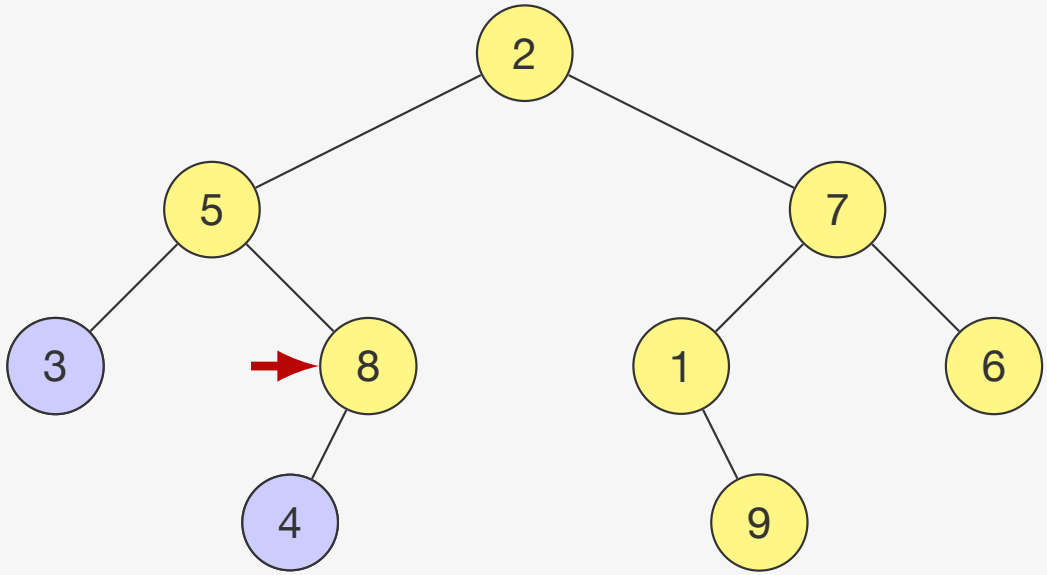


Ex: 3,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

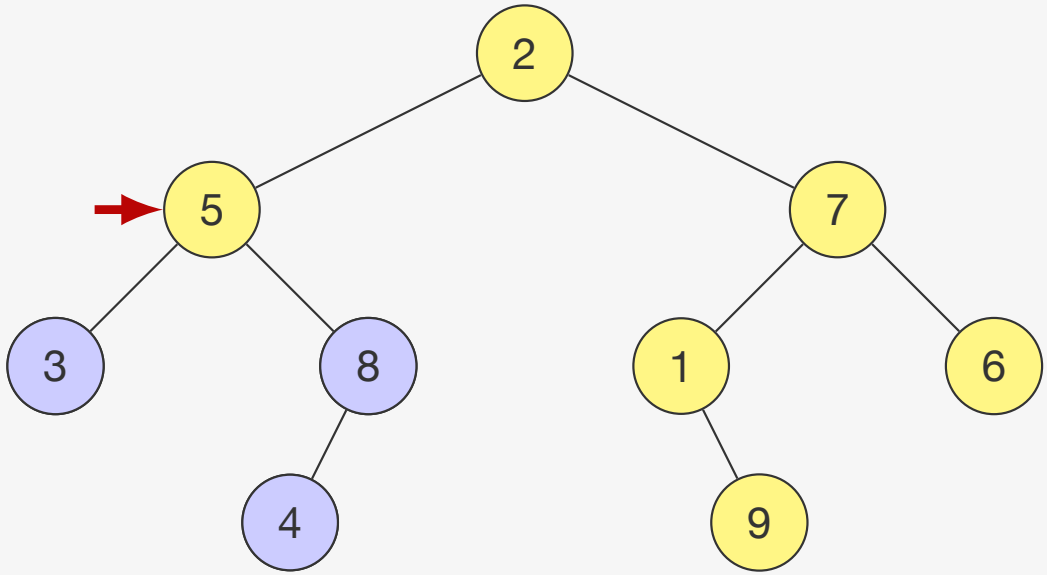


Ex: 3, 4,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

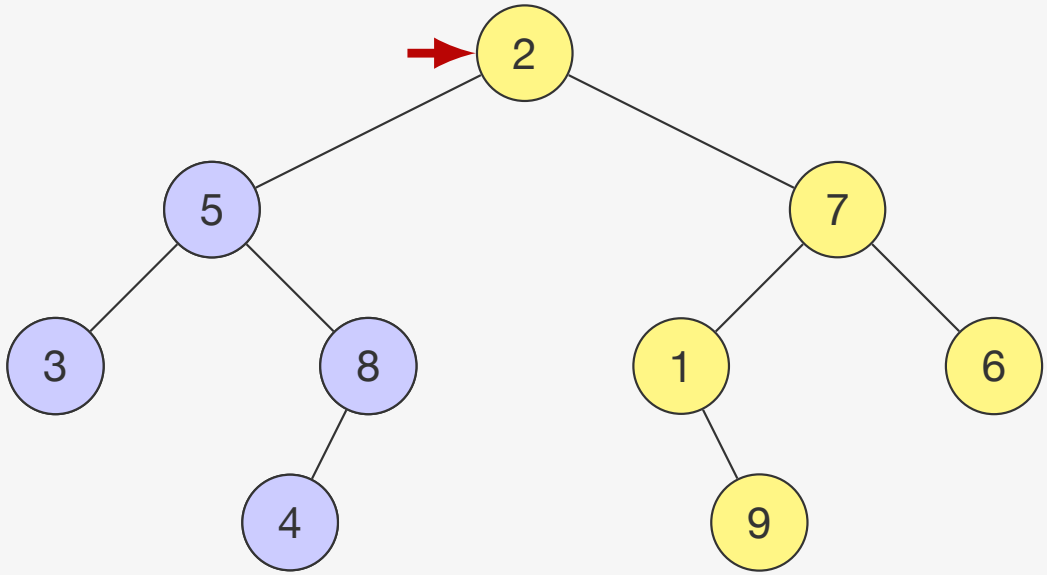


Ex: 3, 4, 8,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

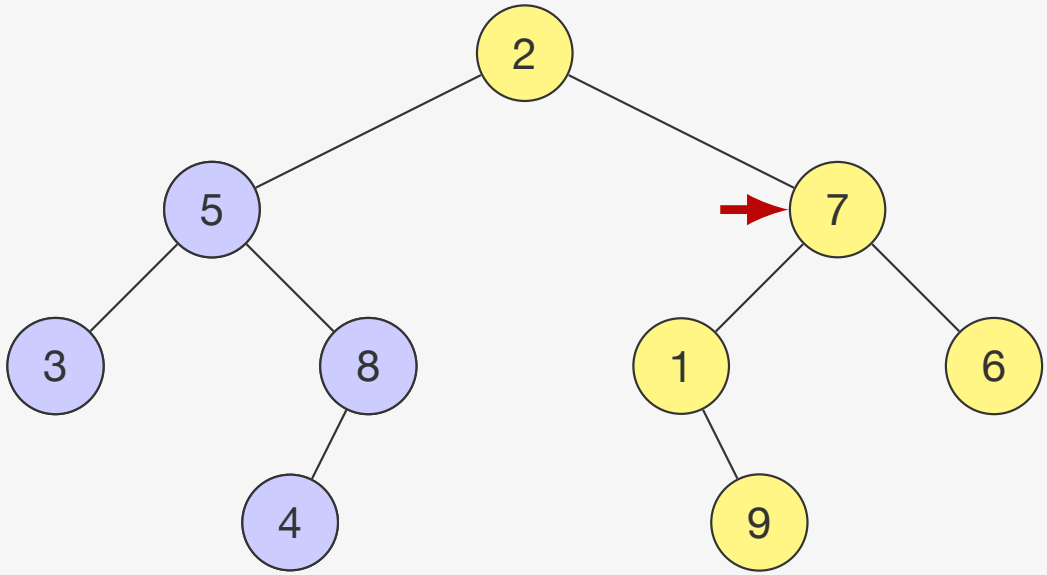


Ex: 3, 4, 8, 5,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

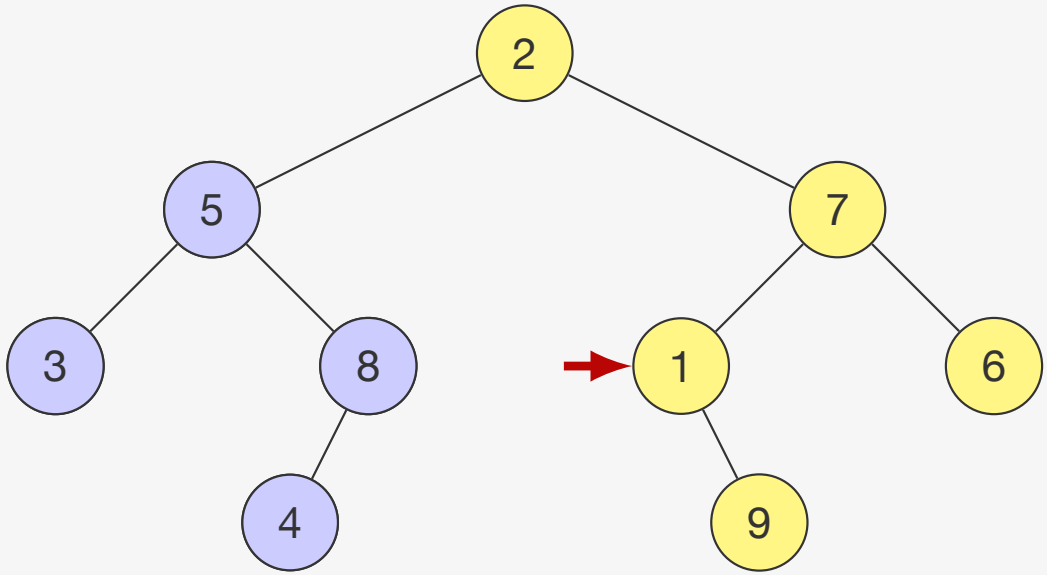


Ex: 3, 4, 8, 5,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

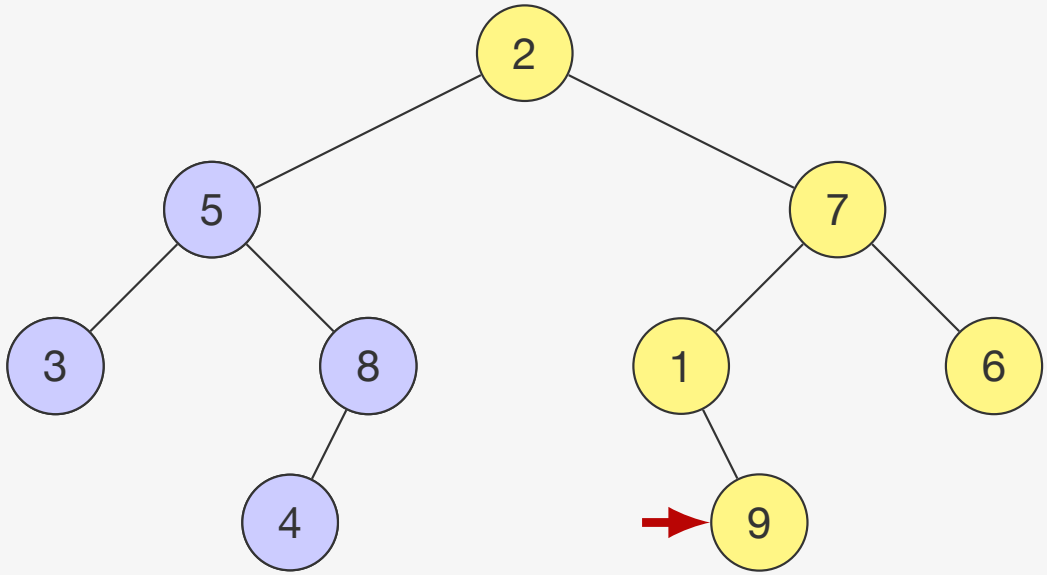


Ex: 3, 4, 8, 5,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

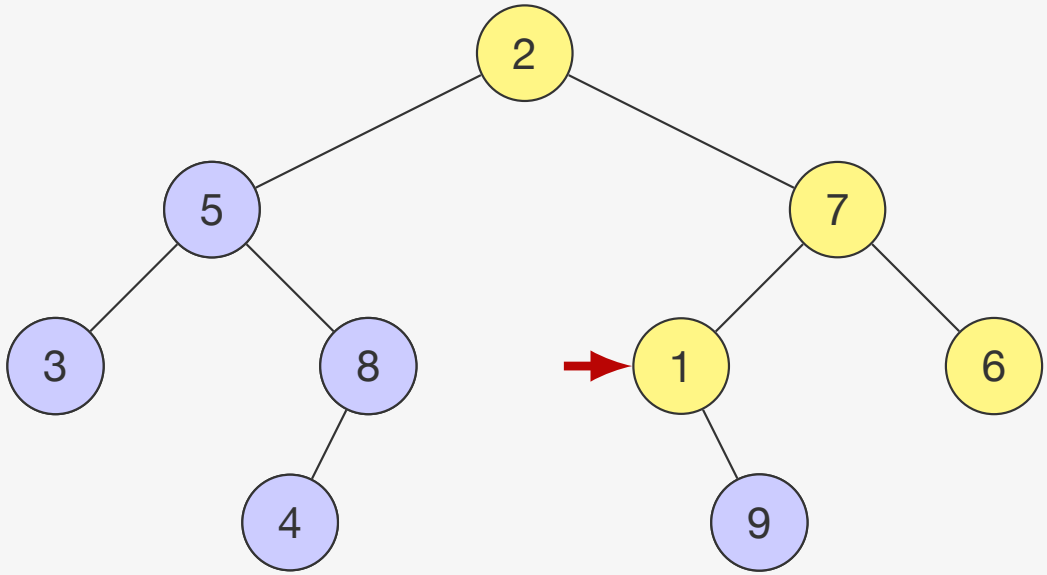


Ex: 3, 4, 8, 5,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

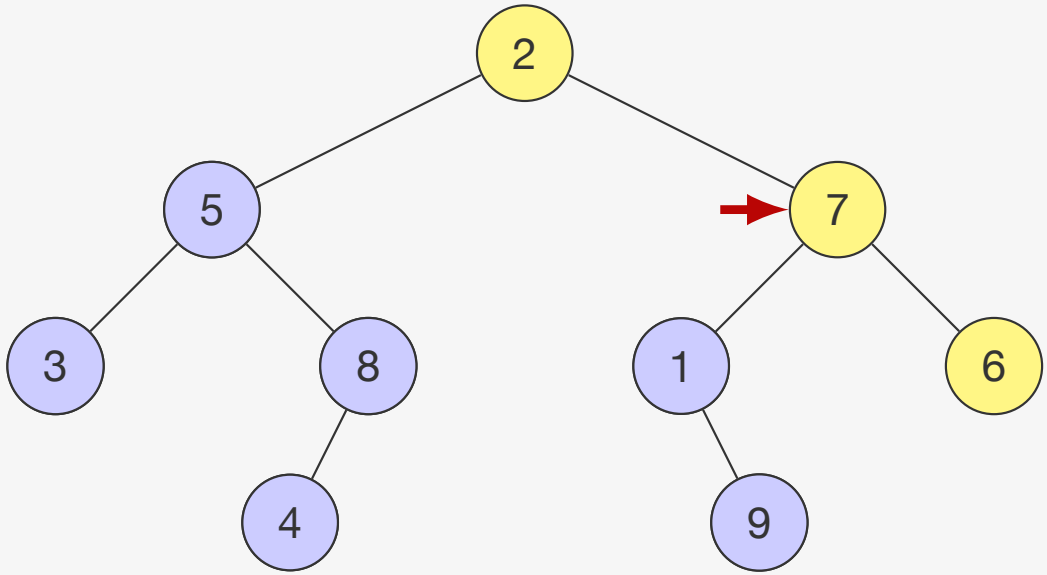


Ex: 3, 4, 8, 5, 9,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

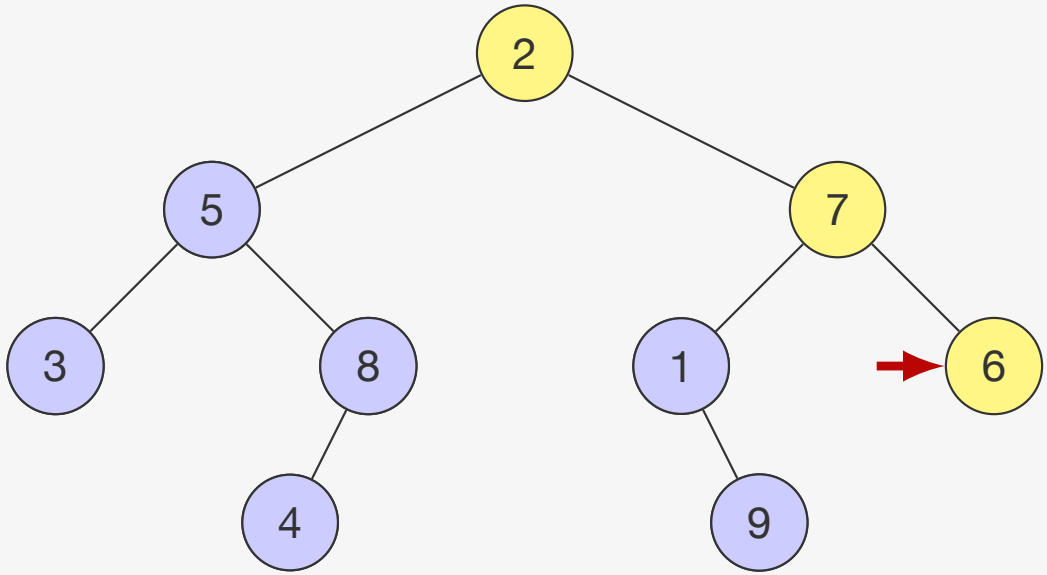


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

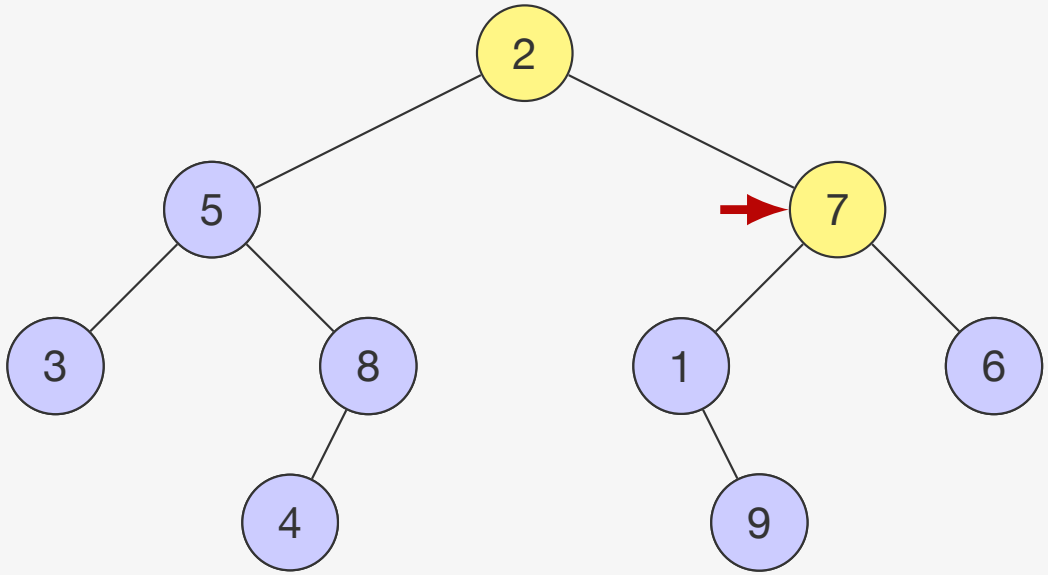


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

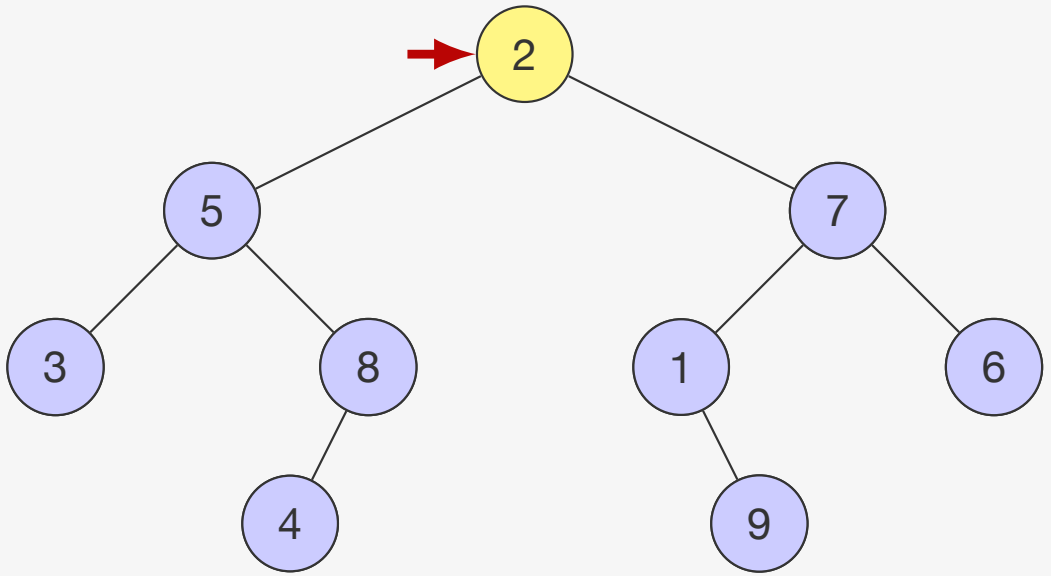


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

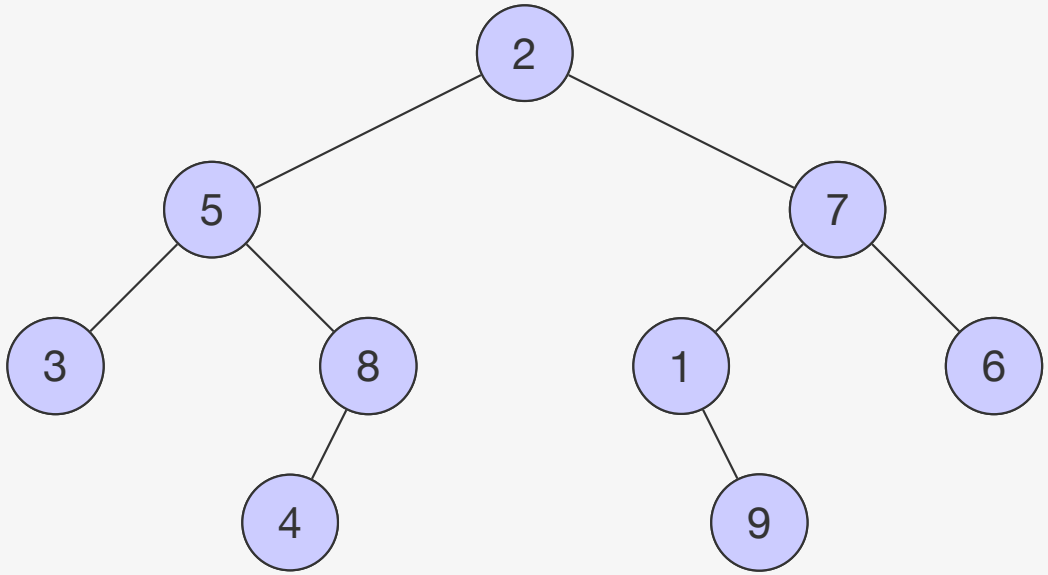


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6, 7,

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

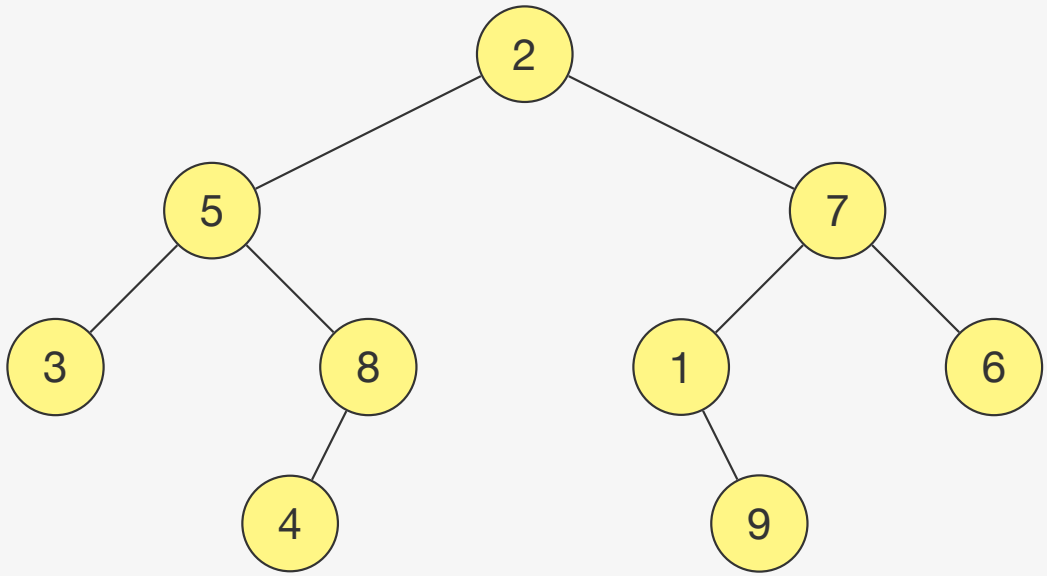


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6, 7, 2

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

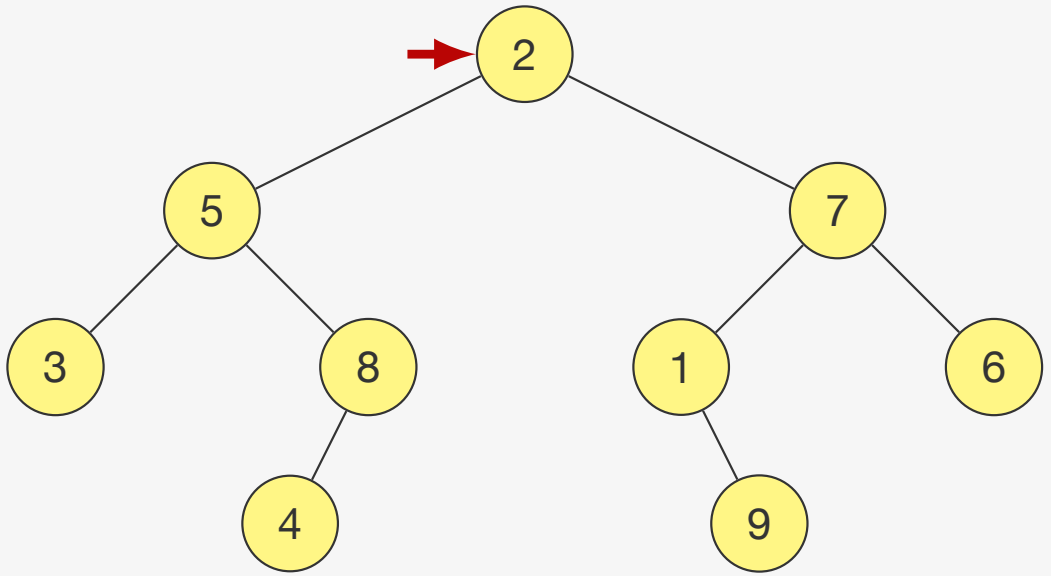


Ex:

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

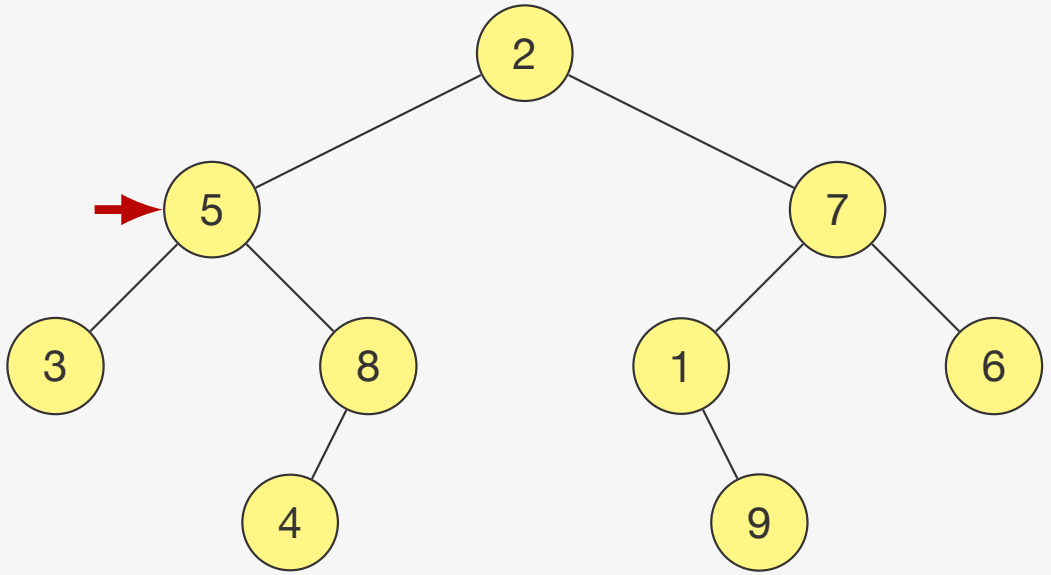


Ex:

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

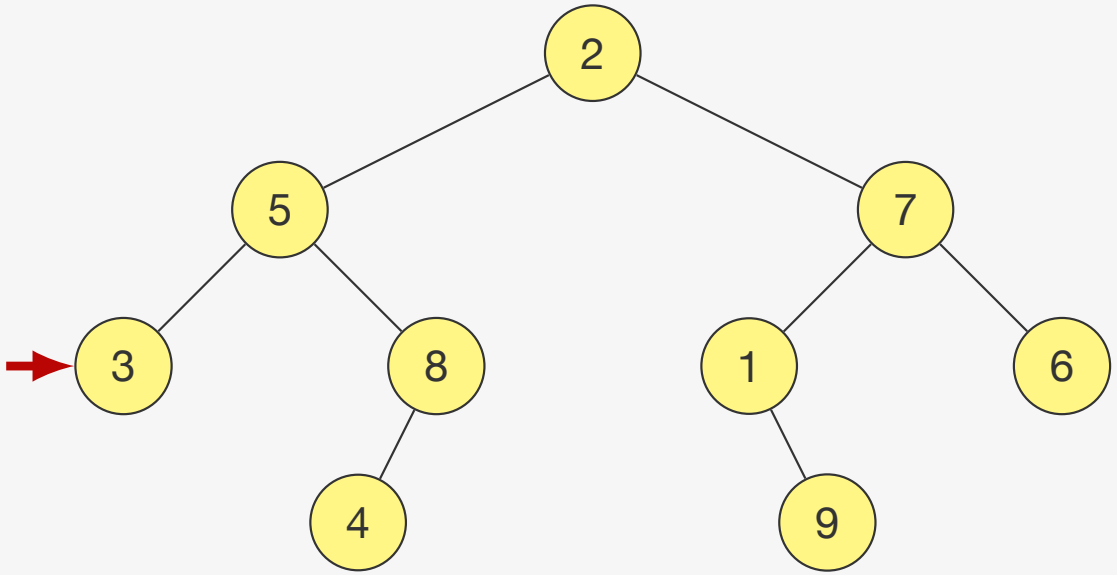


Ex:

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

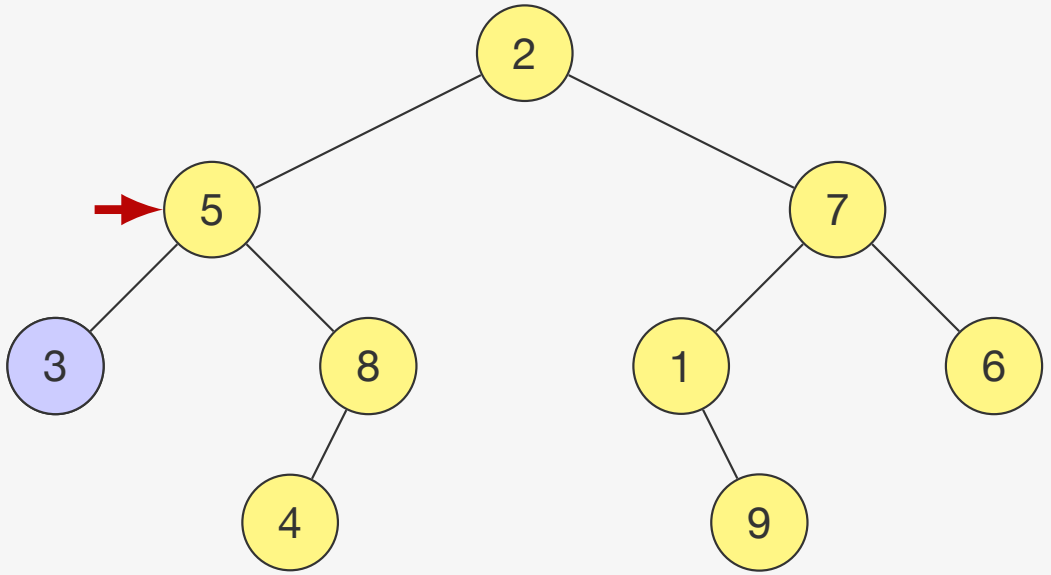


Ex:

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

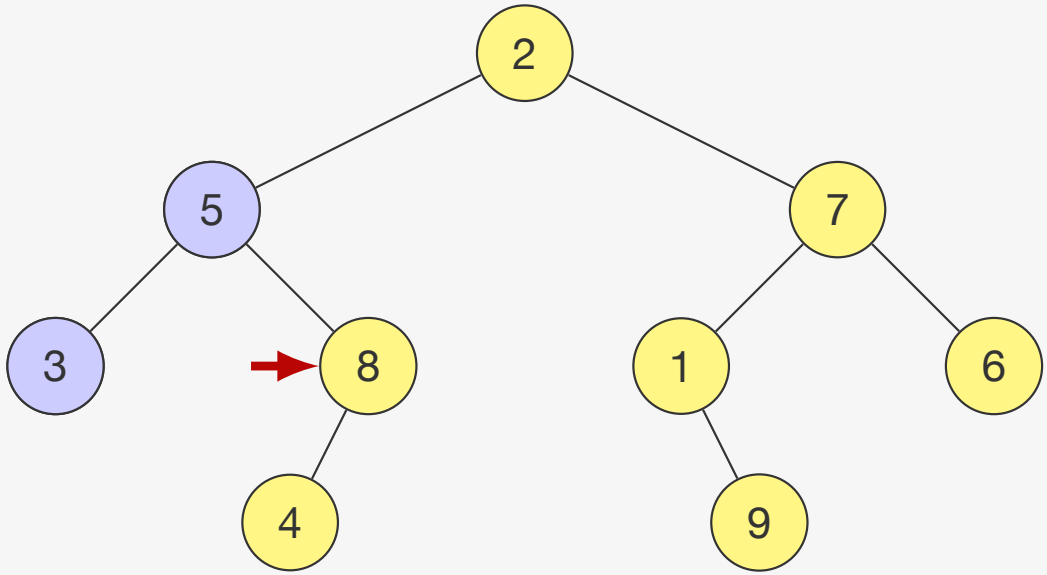


Ex: 3,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

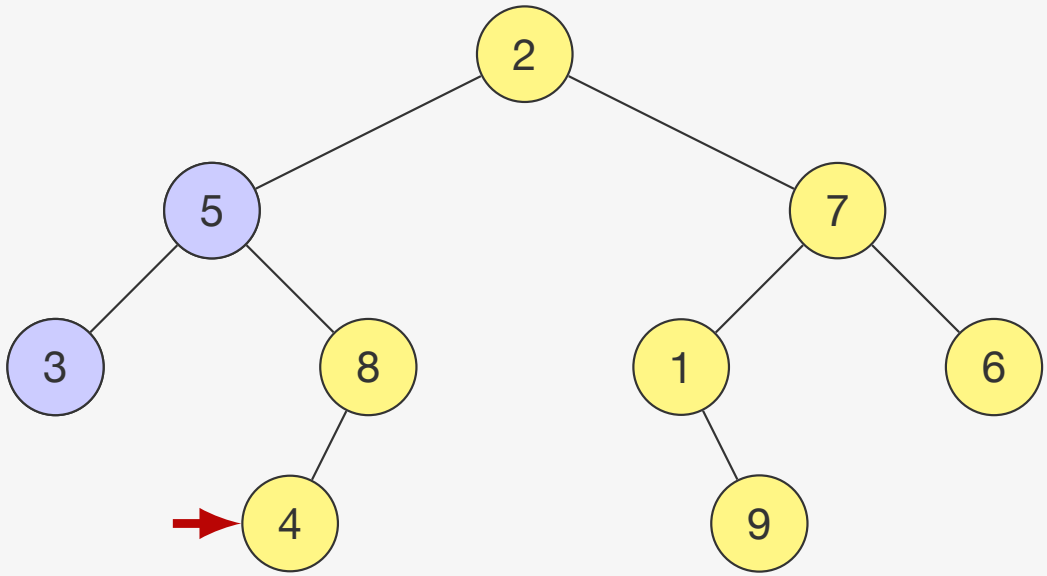


Ex: 3, 5,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

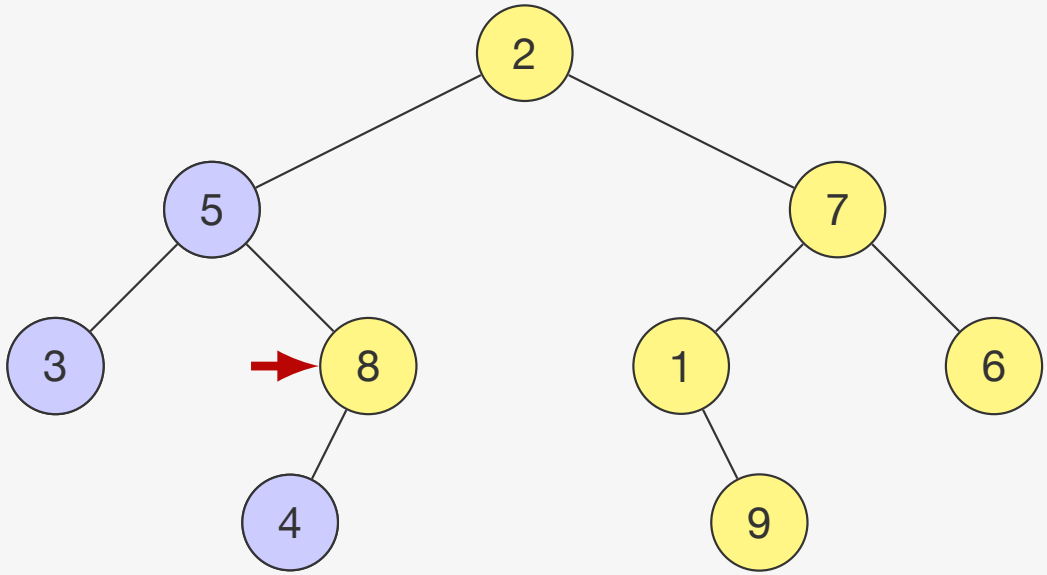


Ex: 3, 5,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

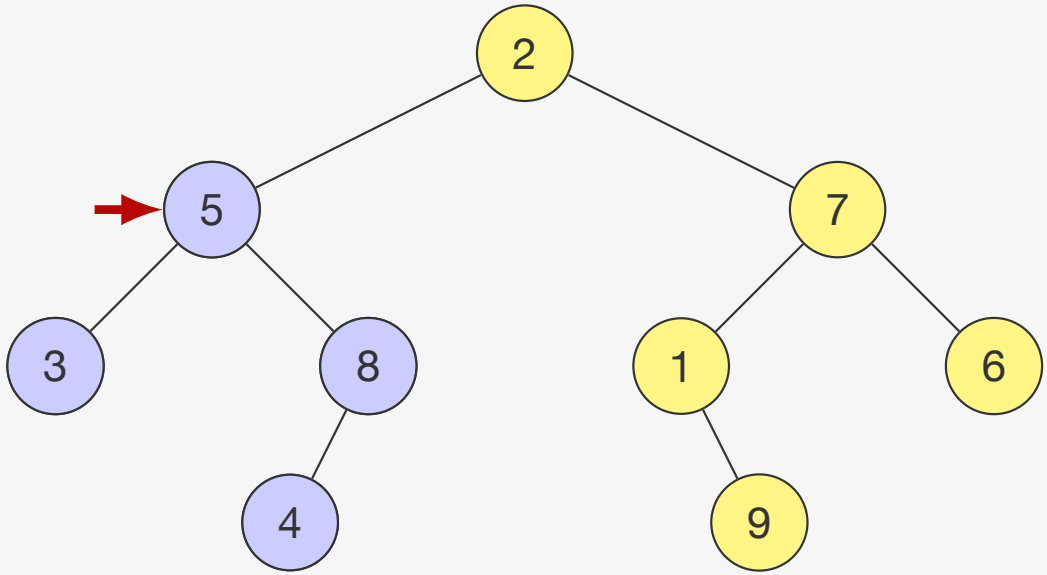


Ex: 3, 5, 4,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

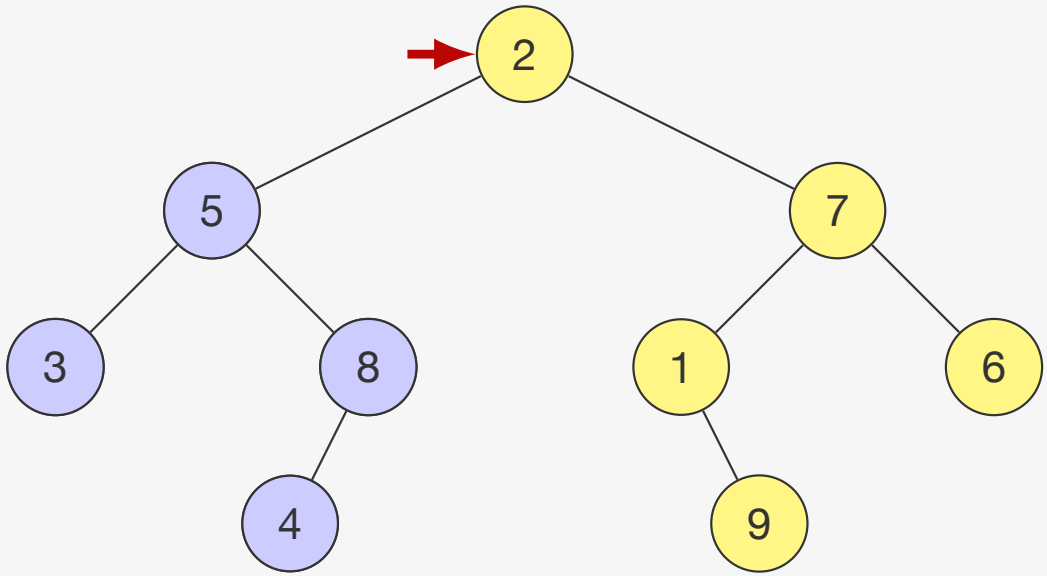


Ex: 3, 5, 4, 8,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

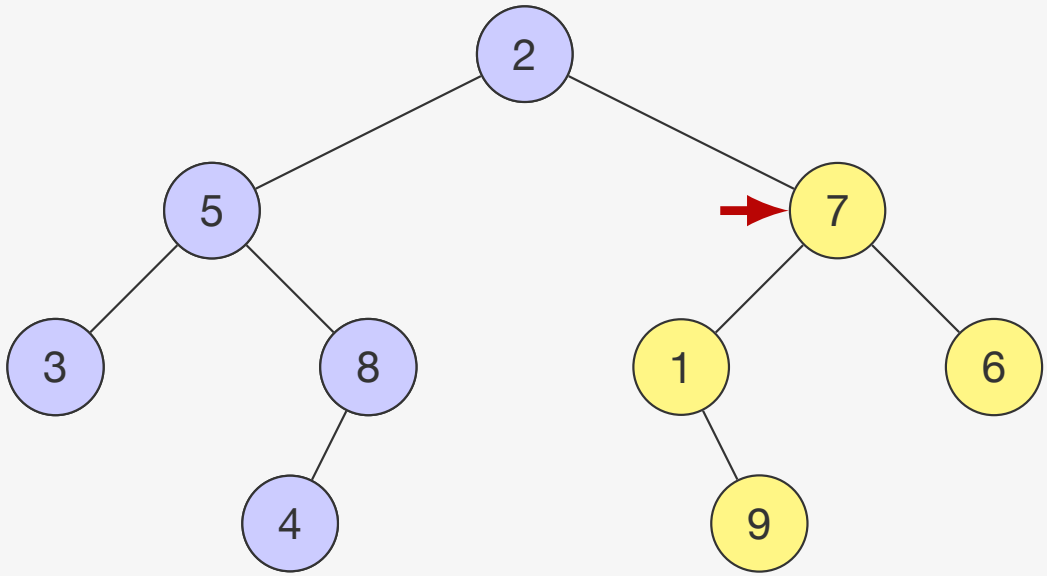


Ex: 3, 5, 4, 8,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

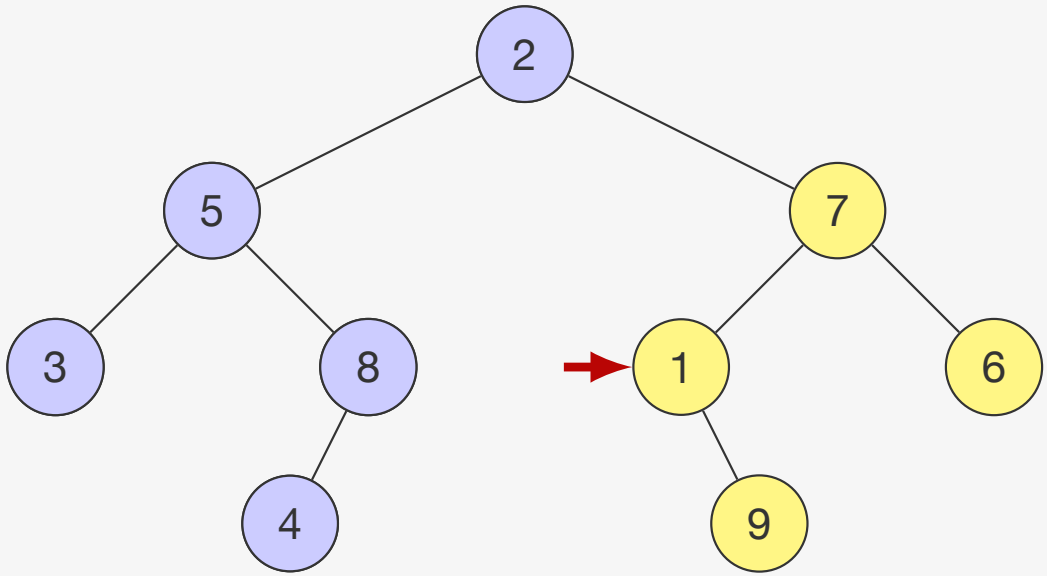


Ex: 3, 5, 4, 8, 2,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

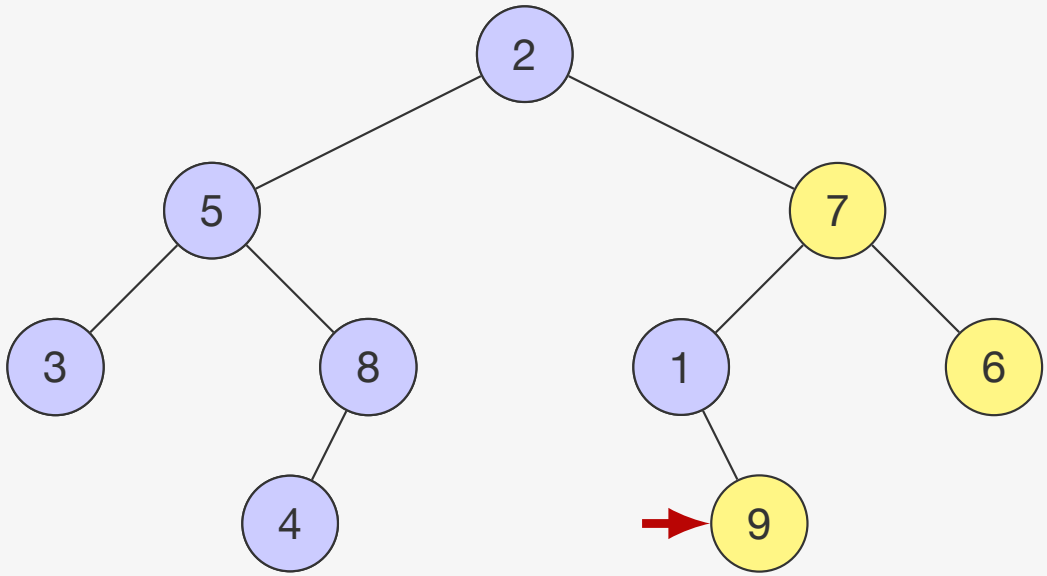


Ex: 3, 5, 4, 8, 2,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

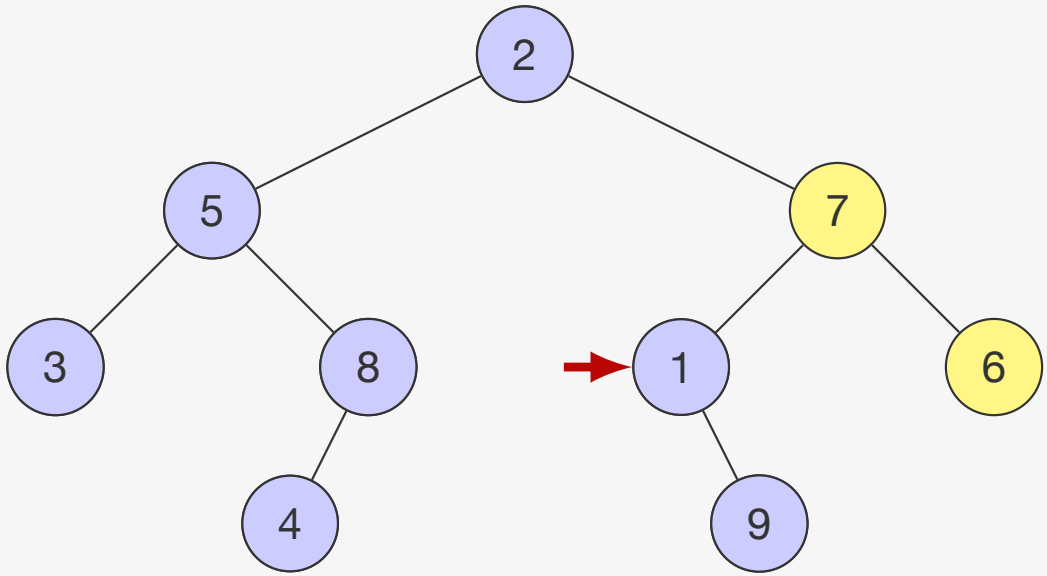


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

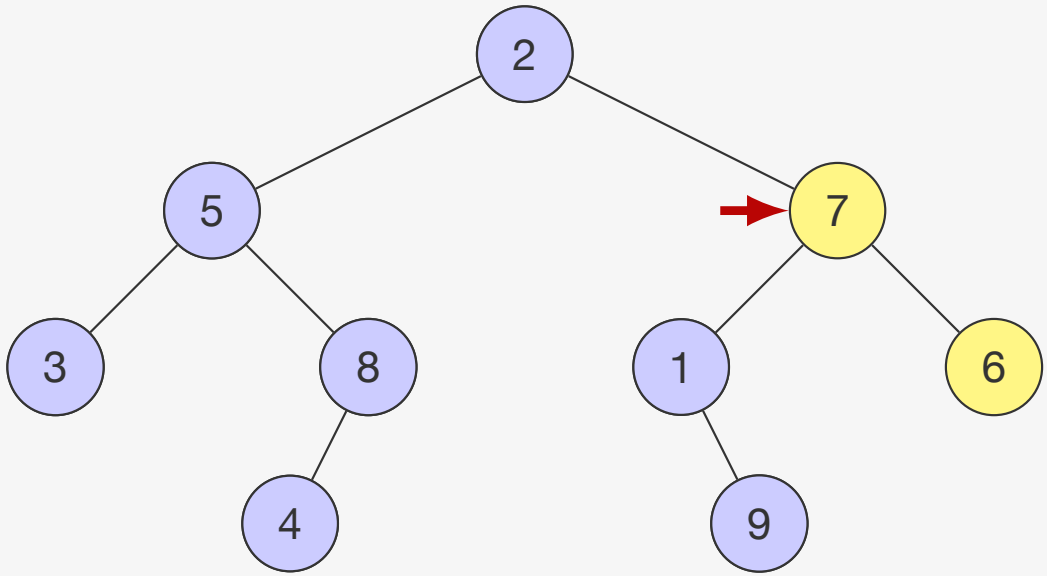


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

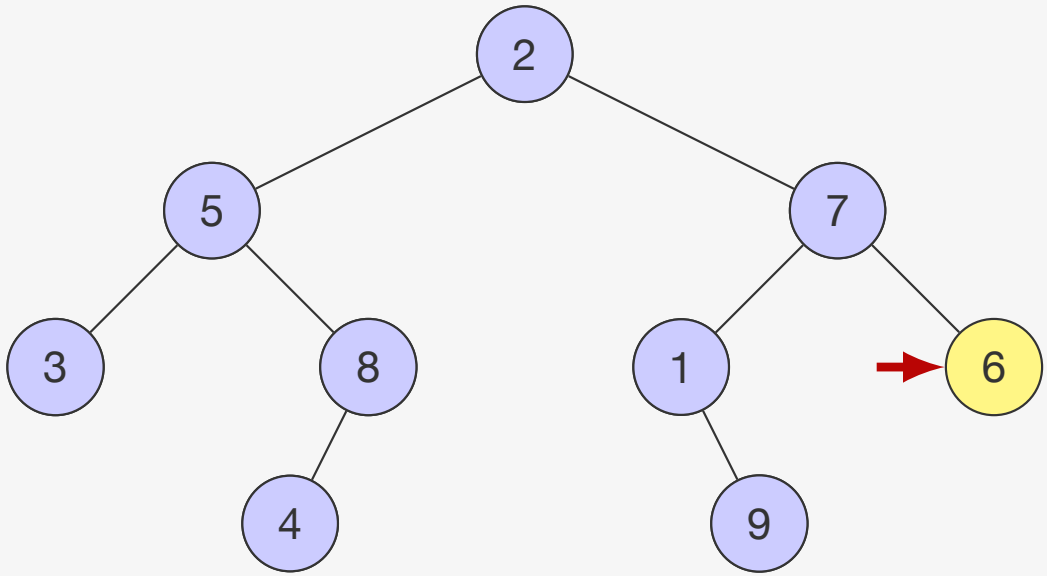


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

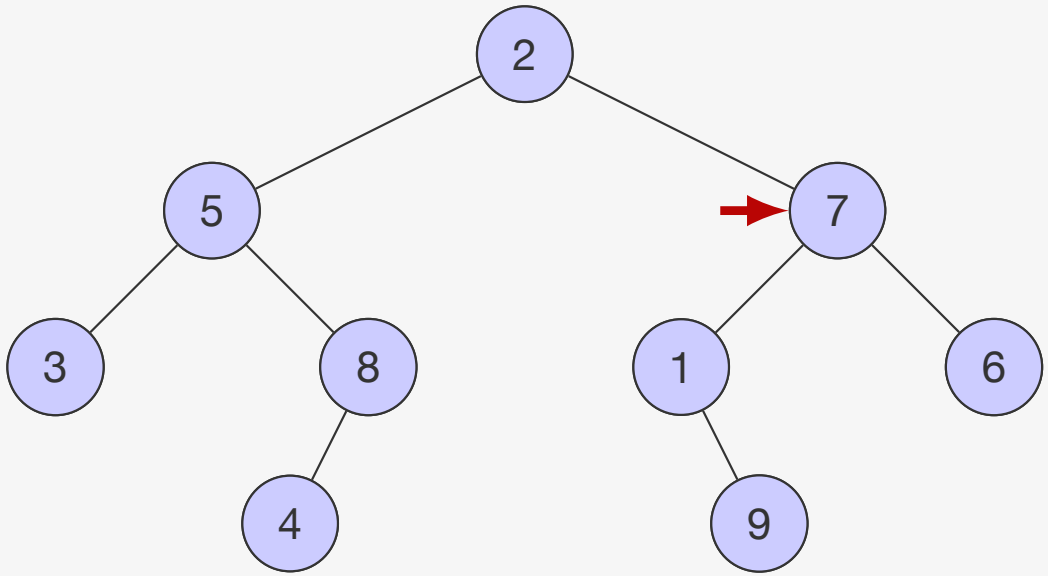


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7,

Percorrendo os nós - Inordem

A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita

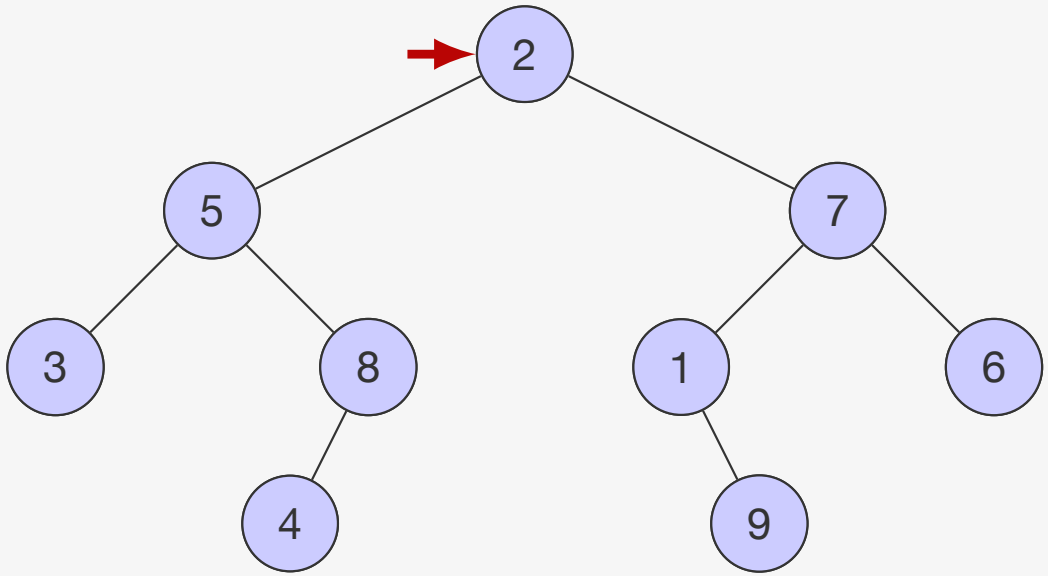


Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7, 6

Percorrendo os nós - Inordem

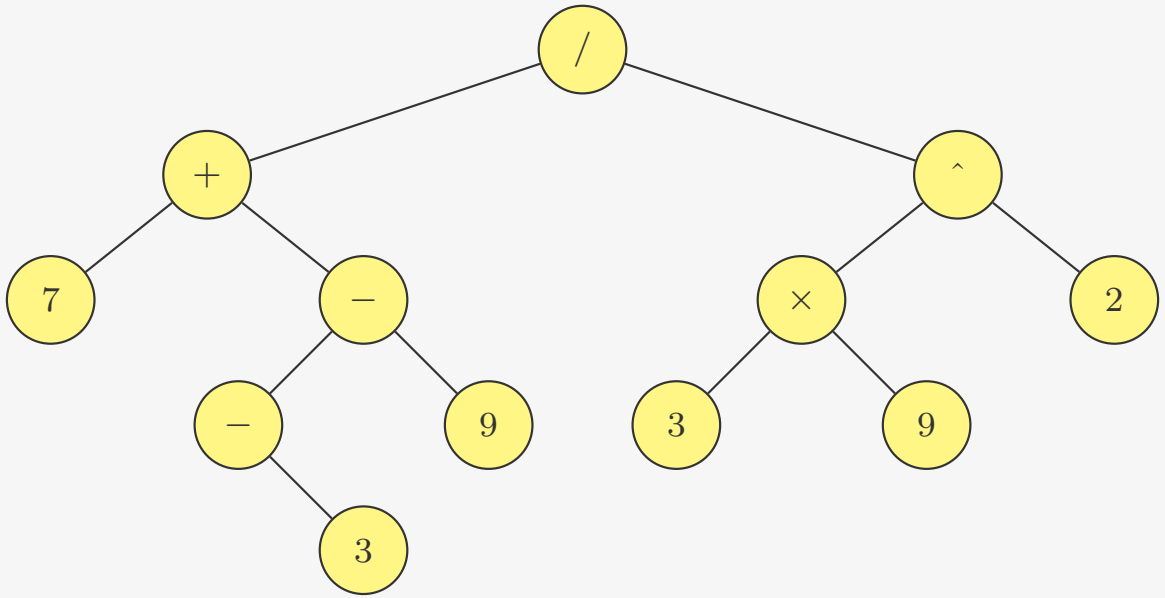
A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita



Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7, 6

Percurso em profundidade e expressões



Notação

- Pré-fixa: / + 7 - - 3 9 ^ × 3 9 2
- Pós-fixa: 7 3 - 9 - + 3 9 × 2 ^ /
- Infixa: 7 + - 3 - 9 / 3 × 9 ^ 2

Árvores binárias - Implementação em C

- Percurso em profundidade:
  - Visita os nós descendo os ramos (profundidade)
  - Recursivamente: da esquerda para a direita

```c
void preordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
```

```c
void preordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        preordem(raiz->esq);
```

```c
void preordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        preordem(raiz->esq);
        preordem(raiz->dir);
    }
}

void inordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
```

```c
void preordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        preordem(raiz->esq);
        preordem(raiz->dir);
    }
}

void inordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        inordem(raiz->esq);
```

```c
void preordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        preordem(raiz->esq);
        preordem(raiz->dir);
    }
}

void inordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        inordem(raiz->esq);
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
```

```c
void preordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        preordem(raiz->esq);
        preordem(raiz->dir);
    }
}

void inordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        inordem(raiz->esq);
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        inordem(raiz->dir);
    }
}

void posordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
```

```c
void preordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        preordem(raiz->esq);
        preordem(raiz->dir);
    }
}

void inordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        inordem(raiz->esq);
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        inordem(raiz->dir);
    }
}

void posordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        posordem(raiz->esq);
```

```c
void preordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        preordem(raiz->esq);
        preordem(raiz->dir);
    }
}

void inordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        inordem(raiz->esq);
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        inordem(raiz->dir);
    }
}

void posordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        posordem(raiz->esq);
        posordem(raiz->dir);
```

```c
void preordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        preordem(raiz->esq);
        preordem(raiz->dir);
    }
}

void inordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        inordem(raiz->esq);
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
        inordem(raiz->dir);
    }
}

void posordem(no *raiz) {
    if (raiz != NULL) {
        posordem(raiz->esq);
        posordem(raiz->dir);
        printf("%d ", raiz->dado); /* visita/processa raiz */
    }
}
```

Sem recursão - TAD?

```
1 void pre_ordem(no *raiz) {
```

Sem recursão - TAD?

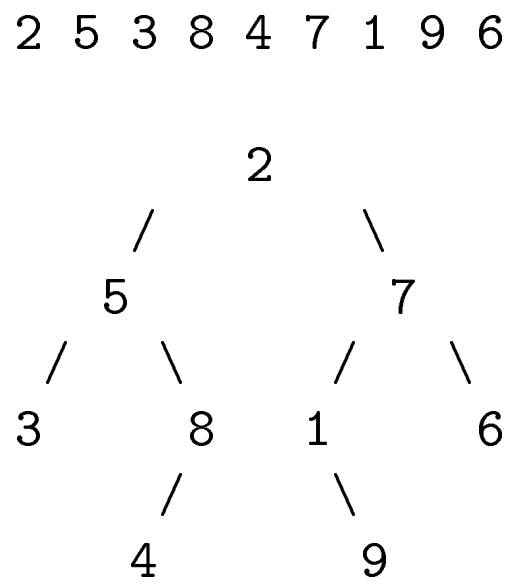
```
1  void pre_ordem(no *raiz) {
2
3    cabeca *p;
4    p = criar_lista();
5
6    empilha(p, raiz);
7
8    while (!vazia(p)) {
9      raiz = desempilha(p);
10
11     if (raiz != NULL) {
```

Sem recursão - TAD?

```
1  void pre_ordem(no *raiz) {
2
3    cabeca *p;
4    p = criar_lista();
5
6    empilha(p, raiz);
7
8    while (!vazia(p)) {
9      raiz = desempilha(p);
10
11     if (raiz != NULL) {
12       //processa a raiz
13       printf("%d ", raiz->dado);
14
15       //empilhar nó direita ou esquerda?
```

Sem recursão - TAD?

```
1  void pre_ordem(no *raiz) {
2
3    cabeca *p;
4    p = criar_lista();
5
6    empilha(p, raiz);
7
8    while (!vazia(p)) {
9      raiz = desempilha(p);
10
11     if (raiz != NULL) {
12       //processa a raiz
13       printf("%d ", raiz->dado);
14
15       //empilhar nó direita ou esquerda?
16       empilha(p, raiz->dir);
17       empilha(p, raiz->esq);
18
19     }
20   }
21   free(p);
22 }
```



Sem recursão - TAD?

```
1 void in_ordem(no *raiz) {
```

Sem recursão - TAD?

```
1  void in_ordem(no *raiz) {
2    cabeca *p = criar_lista();
3    //empilha todos os nós esquerda
4    while (raiz!=NULL) {
5      empilha(p, raiz);
6      raiz = raiz->esq;
7    }
8
9    //visita os nós empilhados
10   //qual o primeiro nó a ser visitado??
```

Sem recursão - TAD?

```
1  void in_ordem(no *raiz) {
2    cabeca *p = criar_lista();
3    //empilha todos os nós esquerda
4    while (raiz!=NULL) {
5      empilha(p, raiz);
6      raiz = raiz->esq;
7    }
8
9    //visita os nós empilhados
10   //qual o primeiro nó a ser visitado??
11   while (!vazia(p)) {
12     raiz = desempilha(p);
13     if (raiz != NULL) {
14
15       //processa o nó mais a esquerda
16       printf("%d ", raiz->dado);
```

Sem recursão - TAD?

```
1  void in_ordem(no *raiz) {
2    cabeca *p = criar_lista();
3    //empilha todos os nós esquerda
4    while (raiz!=NULL) {
5      empilha(p, raiz);
6      raiz = raiz->esq;
7    }
8
9    //visita os nós empilhados
10   //qual o primeiro nó a ser visitado??
11   while (!vazia(p)) {
12     raiz = desempilha(p);
13     if (raiz != NULL) {
14
15       //processa o nó mais a esquerda
16       printf("%d ", raiz->dado);
17
18       //nós direita do mais esquerda
```

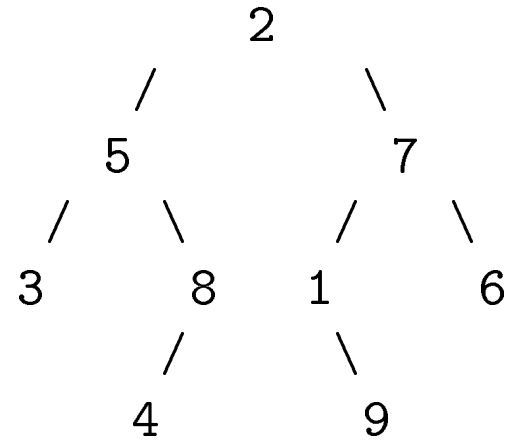
Sem recursão - TAD?

```
1  void in_ordem(no *raiz) {
2    cabeca *p = criar_lista();
3    //empilha todos os nós esquerda
4    while (raiz!=NULL) {
5      empilha(p, raiz);
6      raiz = raiz->esq;
7    }
8
9    //visita os nós empilhados
10   //qual o primeiro nó a ser visitado??
11   while (!vazia(p)) {
12     raiz = desempilha(p);
13     if (raiz != NULL) {
14
15       //processa o nó mais a esquerda
16       printf("%d ", raiz->dado);
17
18       //nós direita do mais esquerda
19       raiz = raiz->dir;
20       while (raiz!=NULL) {
21         empilha(p, raiz);
22         raiz = raiz->esq;
23       }
24
25       //qual o próxmo nó a ser visitado??
```

Sem recursão - TAD?

```
1  void in_ordem(no *raiz) {
2    cabeca *p = criar_lista();
3    //empilha todos os nós esquerda
4    while (raiz!=NULL) {
5      empilha(p, raiz);
6      raiz = raiz->esq;
7    }
8
9    //visita os nós empilhados
10   //qual o primeiro nó a ser visitado??
11   while (!vazia(p)) {
12     raiz = desempilha(p);
13     if (raiz != NULL) {
14
15       //processa o nó mais a esquerda
16       printf("%d ", raiz->dado);
17
18       //nós direita do mais esquerda
19       raiz = raiz->dir;
20       while (raiz!=NULL) {
21         empilha(p, raiz);
22         raiz = raiz->esq;
23       }
24
25       //qual o próxmo nó a ser visitado??
26     }
27   }
28   free(p);
29 }
```

3 5 4 8 2 1 9 7 6



Sem recursão - TAD?

```
1 void pos_ordem(no *raiz) {
```

Sem recursão - TAD?

```
1  void pos_ordem(no *raiz) {
2    cabeca *p, *raizes;
3    p = criar_lista();       //pilha para percurso
4    raizes = criar_lista(); //pilha para raízes
5
6    empilha(p, raiz);
7    while (!vazia(p)) {
8      raiz = desempilha(p);
9      if (raiz != NULL) {
10       //visita a raiz e processa depois
11       empilha(raizes, raiz);
12
13       //subarvore esquerda
14       if(raiz->esq) empilha(p, raiz->esq);
15       if(raiz->dir) empilha(p, raiz->dir);
16
17       //visitar da dir. p/ esq. (??)
```

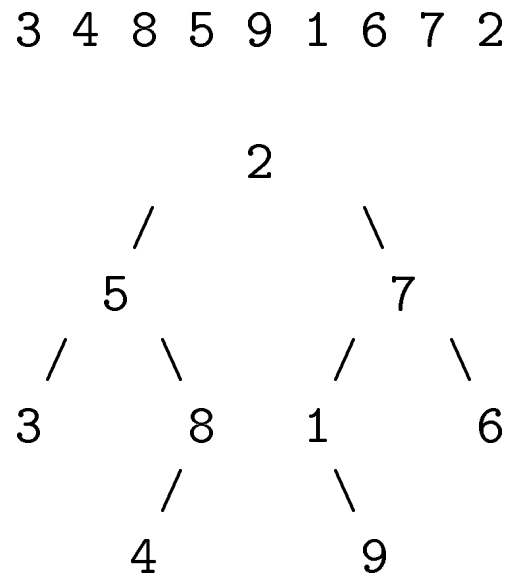
Sem recursão - TAD?

```
1  void pos_ordem(no *raiz) {
2    cabeca *p, *raizes;
3    p = criar_lista();       //pilha para percurso
4    raizes = criar_lista(); //pilha para raízes
5
6    empilha(p, raiz);
7    while (!vazia(p)) {
8      raiz = desempilha(p);
9      if (raiz != NULL) {
10       //visita a raiz e processa depois
11       empilha(raizes, raiz);
12
13       //subarvore esquerda
14       if(raiz->esq) empilha(p, raiz->esq);
15       if(raiz->dir) empilha(p, raiz->dir);
16
17       //visitar da dir. p/ esq. (??)
18       //processar na ordem inversa
19     }
20   }
21
22   //processar raizes
```

Sem recursão - TAD?

```c
void pos_ordem(no *raiz) {
  cabeca *p, *raizes;
  p = criar_lista();       //pilha para percurso
  raizes = criar_lista(); //pilha para raízes

  empilha(p, raiz);
  while (!vazia(p)) {
    raiz = desempilha(p);
    if (raiz != NULL) {
      //visita a raiz e processa depois
      empilha(raizes, raiz);

      //subarvore esquerda
      if(raiz->esq) empilha(p, raiz->esq);
      if(raiz->dir) empilha(p, raiz->dir);

      //visitar da dir. p/ esq. (??)
      //processar na ordem inversa
    }
  }

  //processar raizes
  while (!vazia(raizes)) {
    raiz = desempilha(raizes);
    printf("%d ", raiz->dado);
  }
}
```

3 4 8 5 9 1 6 7 2



Árvores binárias - Implementação em C

- Percurso em largura - TAD?
  - Visita os nós por níveis
  - Da esquerda para a direita

```
1 void percurso_em_largura (no *raiz) {
2     cabeca *f = criar_lista();
3     enfileira(f, raiz);
4     while (!vazia(f)) {
5         raiz = desenfileira(f);
6         if (raiz != NULL) {
7             //qual nó enfileiramos primeiro:
8             //  direita ou esquerda?
```

Árvores binárias - Implementação em C

- Percurso em largura - TAD?
  - Visita os nós por níveis
  - Da esquerda para a direita

```
1  void percurso_em_largura (no *raiz) {
2      cabeca *f = criar_lista();
3      enfileira(f, raiz);
4      while (!vazia(f)) {
5          raiz = desenfileira(f);
6          if (raiz != NULL) {
7              //qual nó enfileiramos primeiro:
8              //  direita ou esquerda?
9              enfileira(f, raiz->esq);
10             enfileira(f, raiz->dir);
```

Árvores binárias - Implementação em C

- Percurso em largura - TAD?
  - Visita os nós por níveis
  - Da esquerda para a direita

```
1 void percurso_em_largura (no *raiz) {
2     cabeca *f = criar_lista();
3     enfileira(f, raiz);
4     while (!vazia(f)) {
5         raiz = desenfileira(f);
6         if (raiz != NULL) {
7             //qual nó enfileiramos primeiro:
8             //  direita ou esquerda?
9             enfileira(f, raiz->esq);
10            enfileira(f, raiz->dir);
11            printf("%d ", raiz->dado);
12        }
13    }
14 }
```

Árvores binárias - Algoritmos de Percurso - exercício

- Retirado dos slides do prof. Siang Wun Song (USP)
- Considere uma árvore binária
- Cada nó tem um campo adicional chamado “alt”
- Escreva um algoritmo que coloque no campo “alt” de cada nó x da árvore binária, a altura da subárvore enraizada em x
- Dica: use pós-ordem e uma rotina apropriada de visita
- Tente fazer este exercício e veja o motivo da adoção da pós-ordem

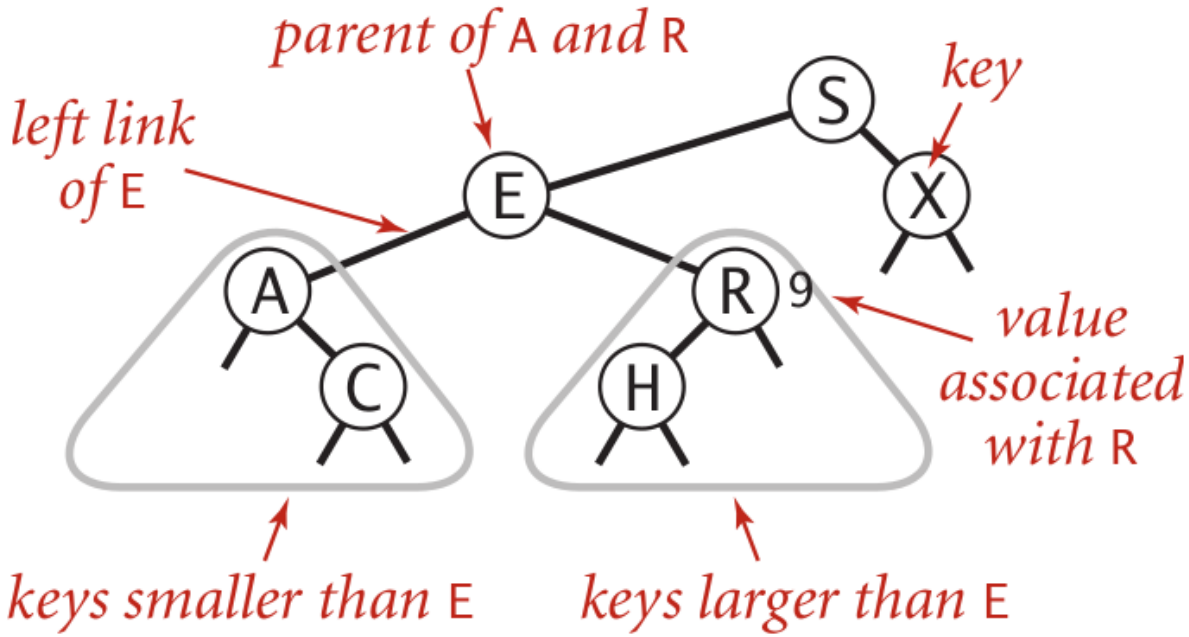
Roteiro

Árvore binária de busca - ABB

- Combina a flexibilidade da inserção nas lista encadeadas com a eficiência da busca nos vetores ordenados
- Estrutura das árvores binárias
  - Todo nó não-terminal tem no máximo 2 filhos
  - Nó folha apontam para NULL (nós externos)

Árvore binária de busca - ABB

- Chaves: conteúdo dos nós
- Organização:
  - Cada nó tem a chave maior que as chaves da sua subárvore esquerda
  - Cada nó tem a chave menor que as chaves da sua subárvore direita



Anatomy of a binary search tree

```c
#define info(A) (A.info)
#define key(A) (A.chave)
#define less(A, B) ((A) < (B))
#define eq(A, B) ((A) == (B))
#define exch(A, B) { Item t=A; A=B; B=t; }
#define compexch(A, B) if(less(B, A)) exch(A, B)
typedef int Key;
typedef struct data Item;
struct data {
    Key chave;
    char info[100];
};
typedef struct node STnode;
struct node {
    Item item;
    STnode *esq, *dir;
};

STnode *new(Item x, STnode *e, STnode *d) {
    STnode *no = malloc(sizeof(STnode));
    no->esq = e;
    no->dir = d;
    no->item = x;
    return no;
}
```

Árvore binária de busca - ABB

- Estrutura: permite a busca binária de um nó a partir da raiz
- Caso o item procurado seja menor que a raiz, procure na subárvore esquerda
- Caso contrário, procure na subárvore direita
- Slides a seguir:
  - `https://www.ic.unicamp.br/~rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade16-arvores-busca.pdf`

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

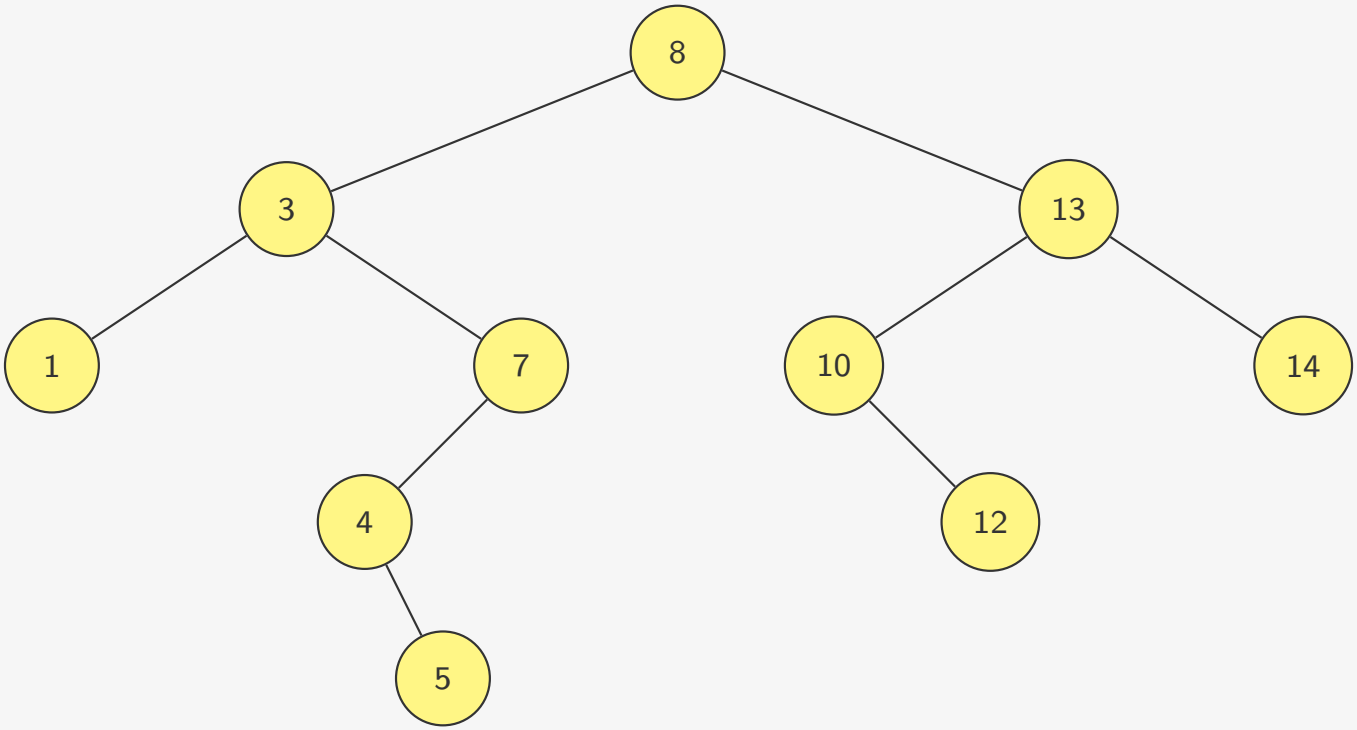
- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

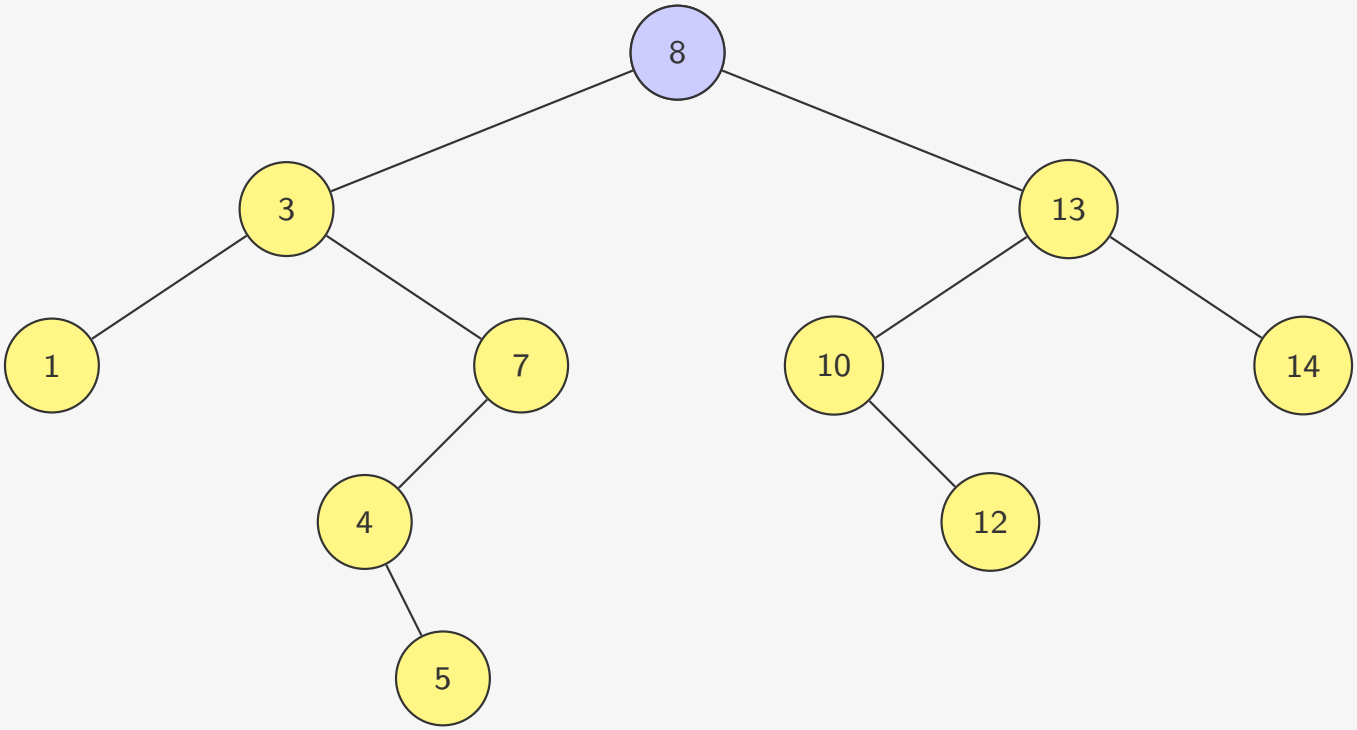


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

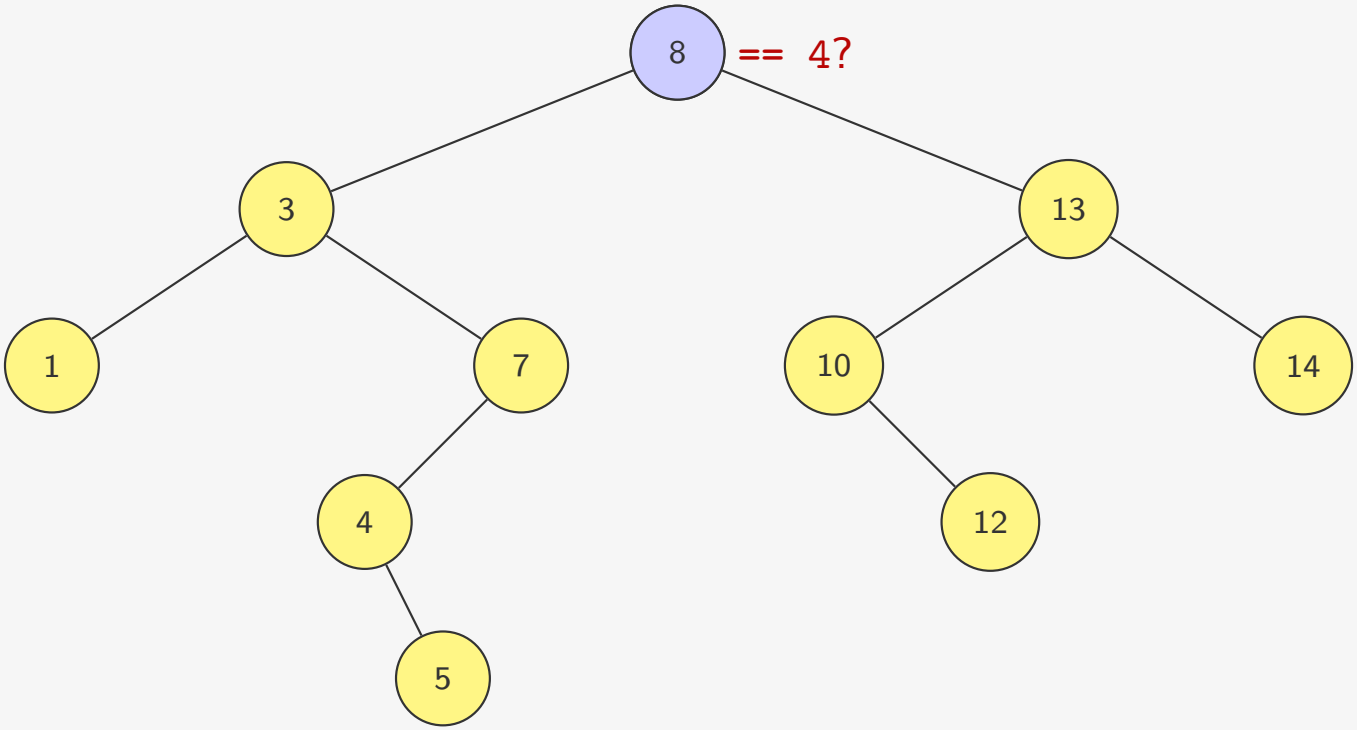


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

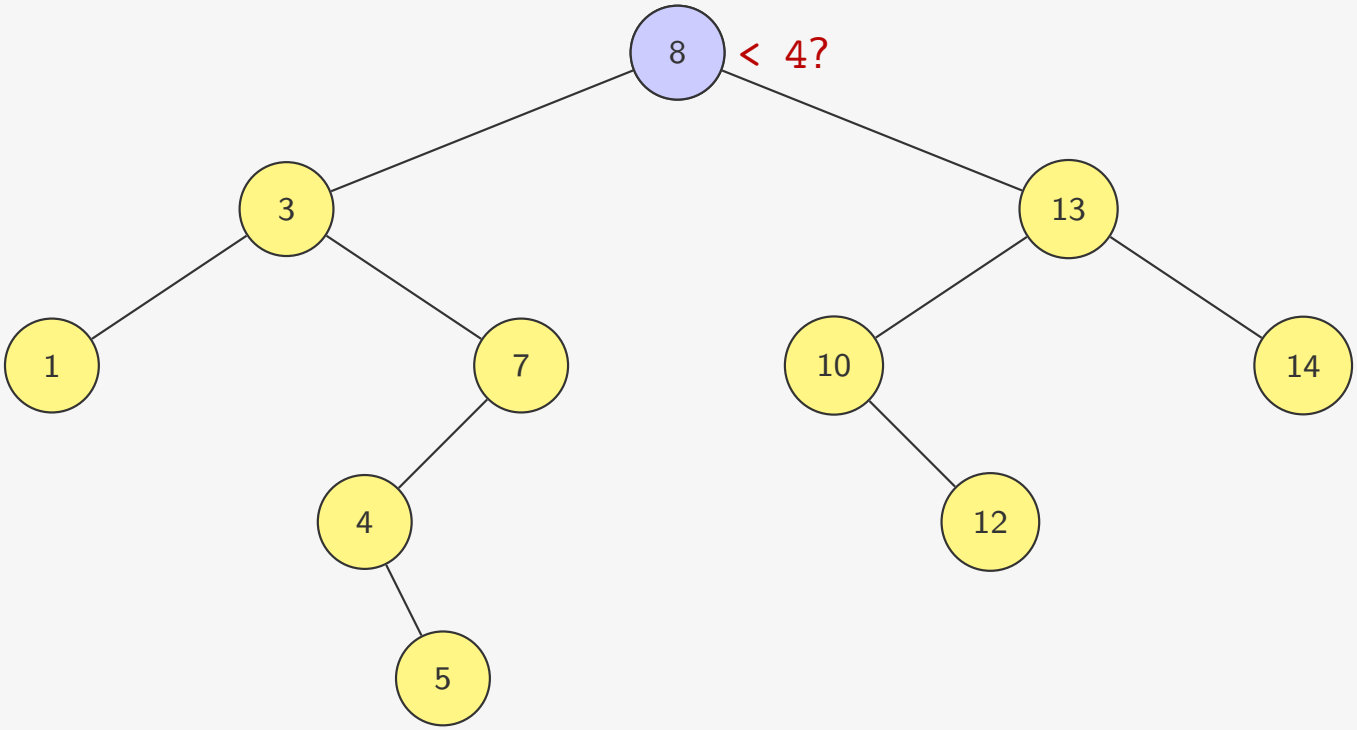


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

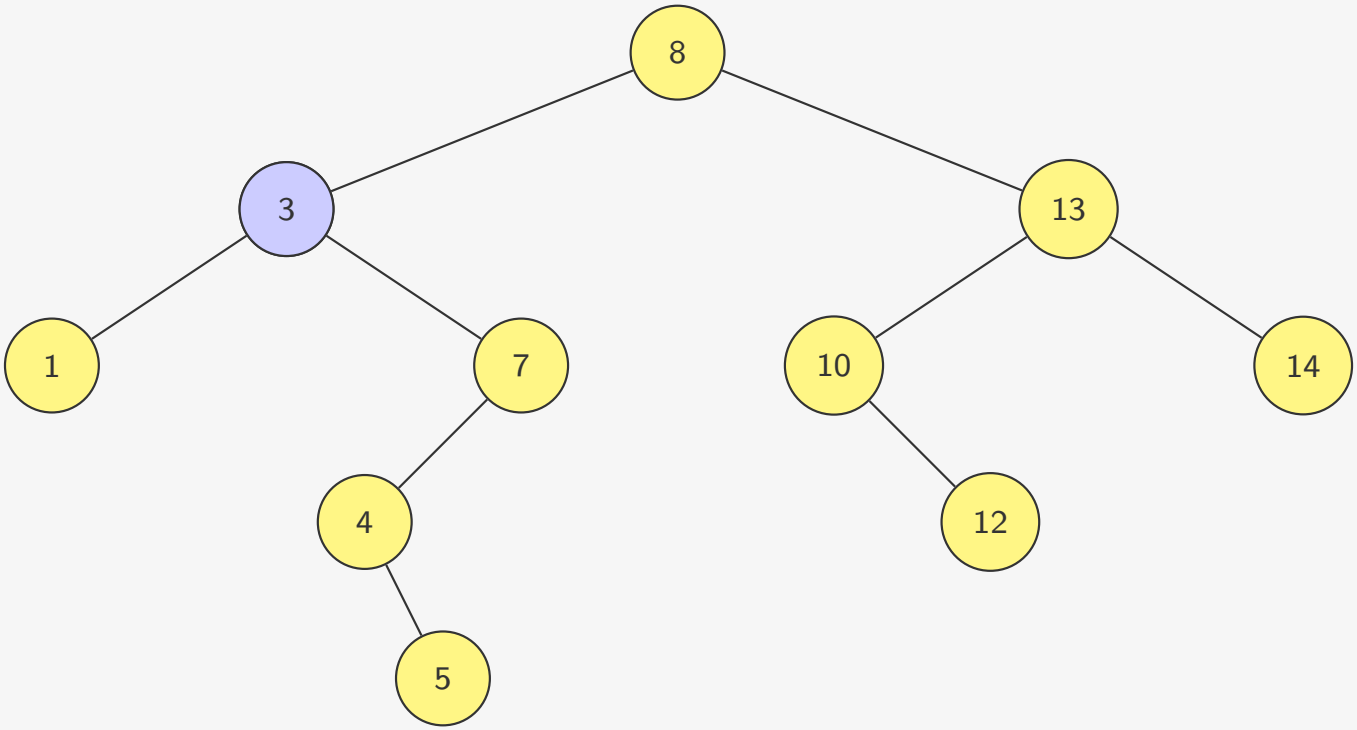


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

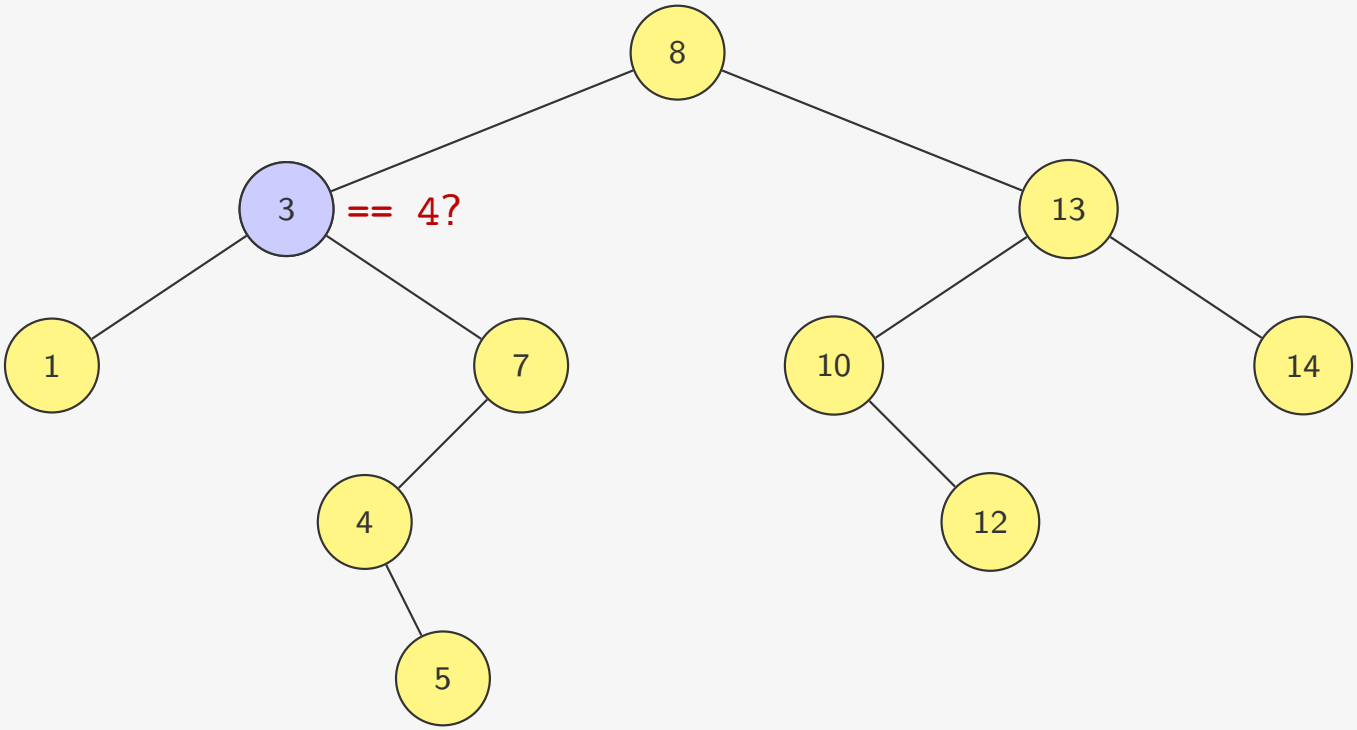


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

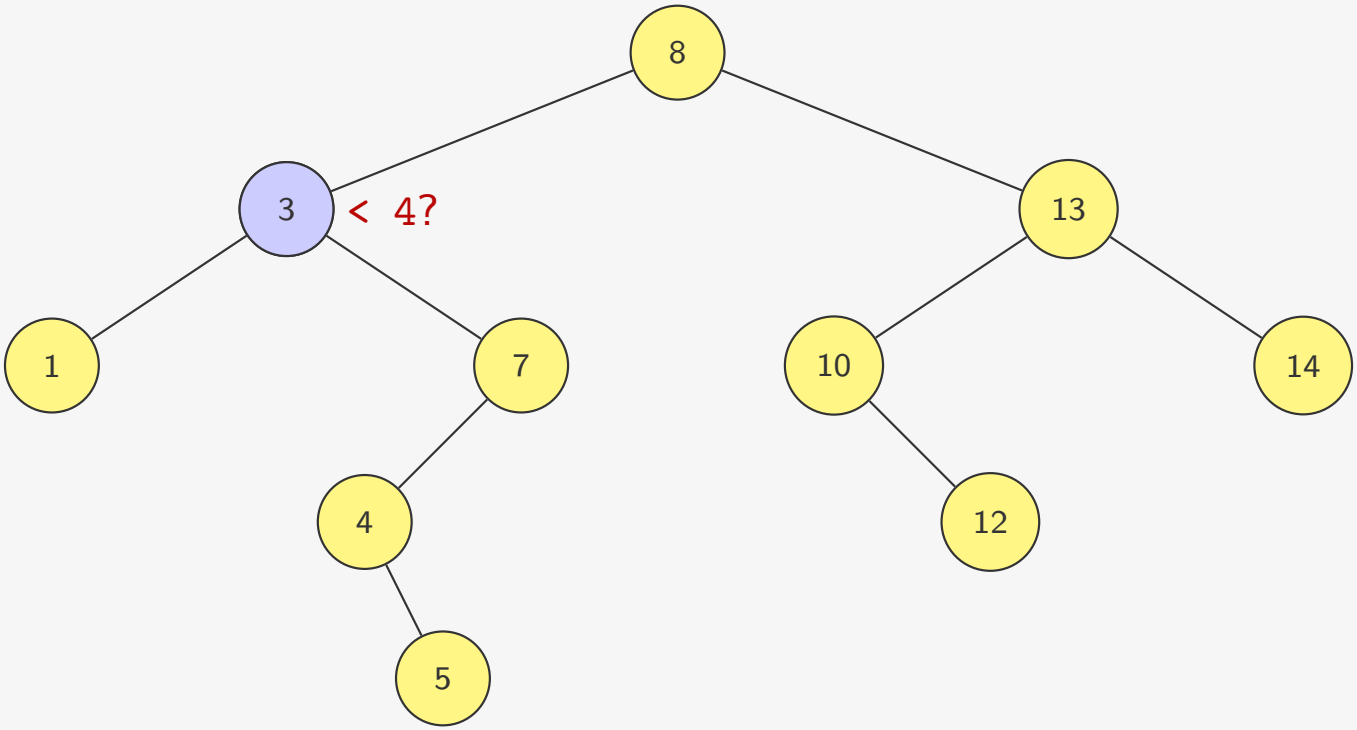


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

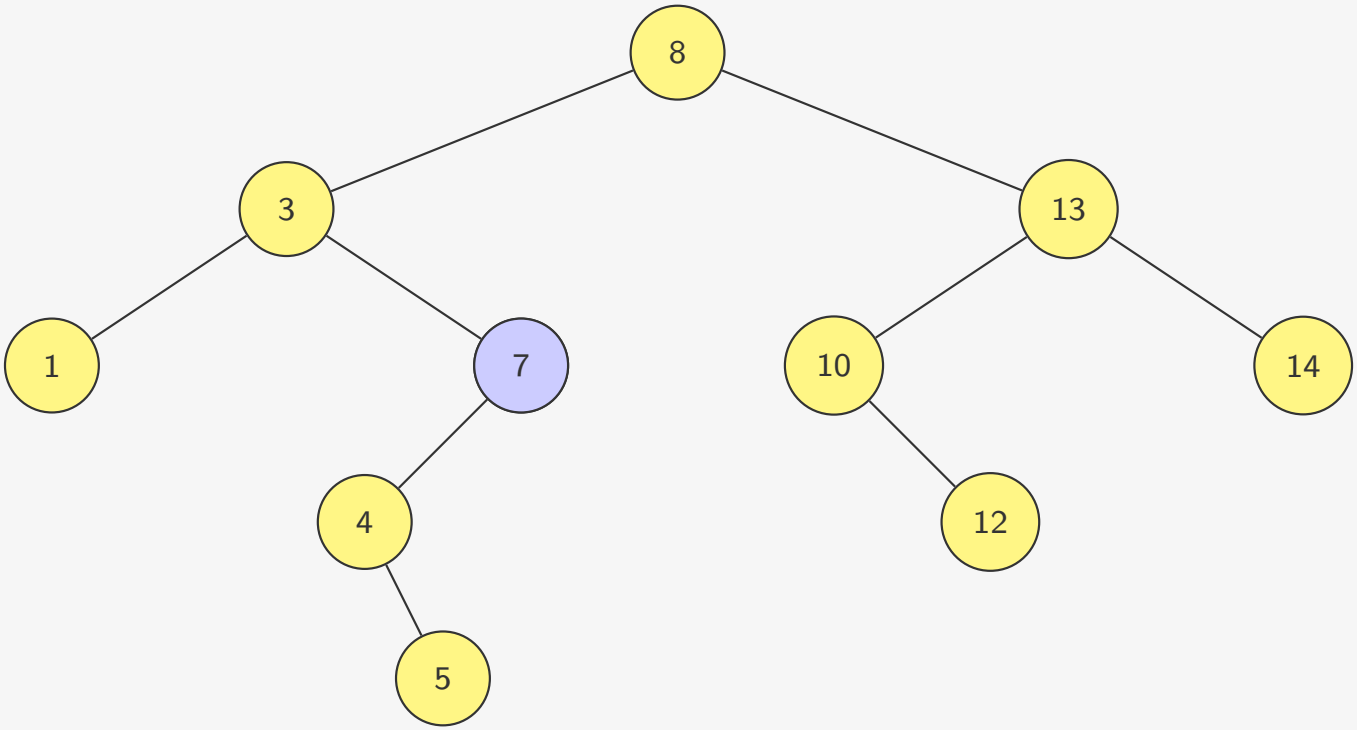


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

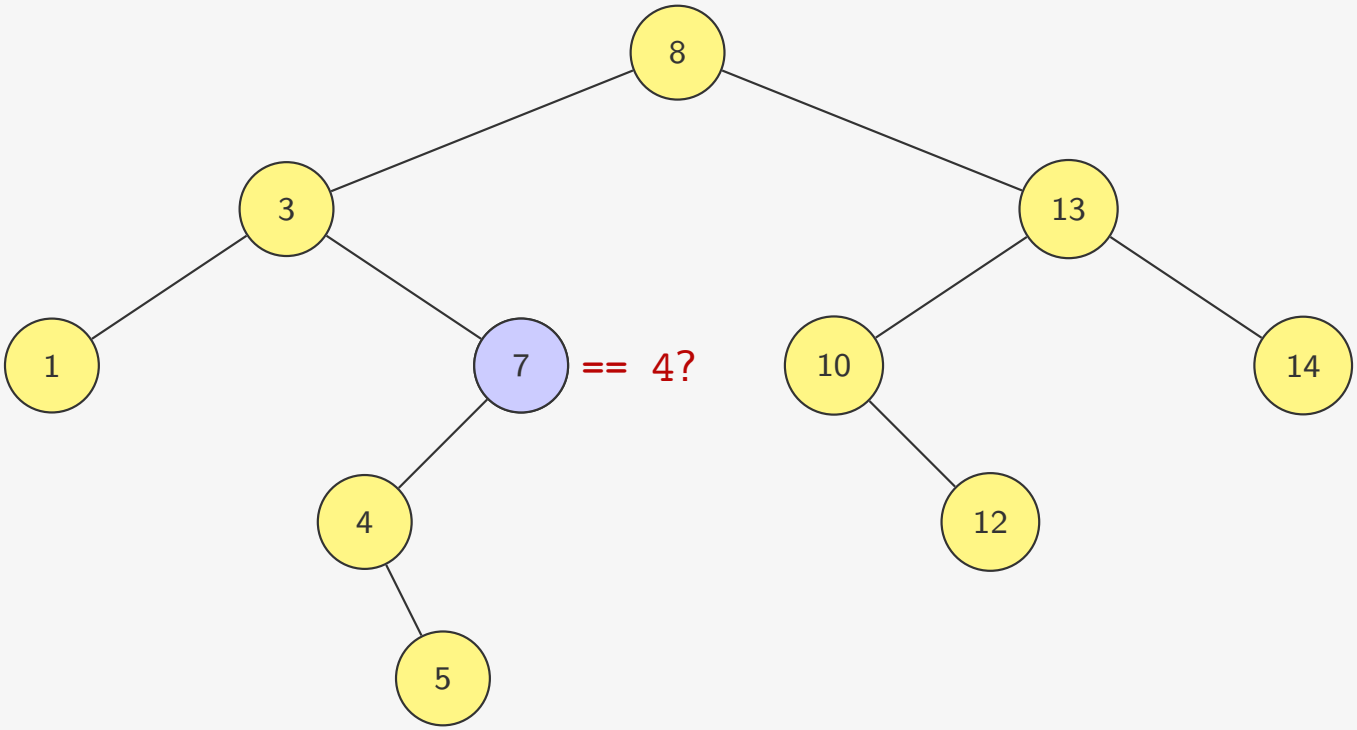


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

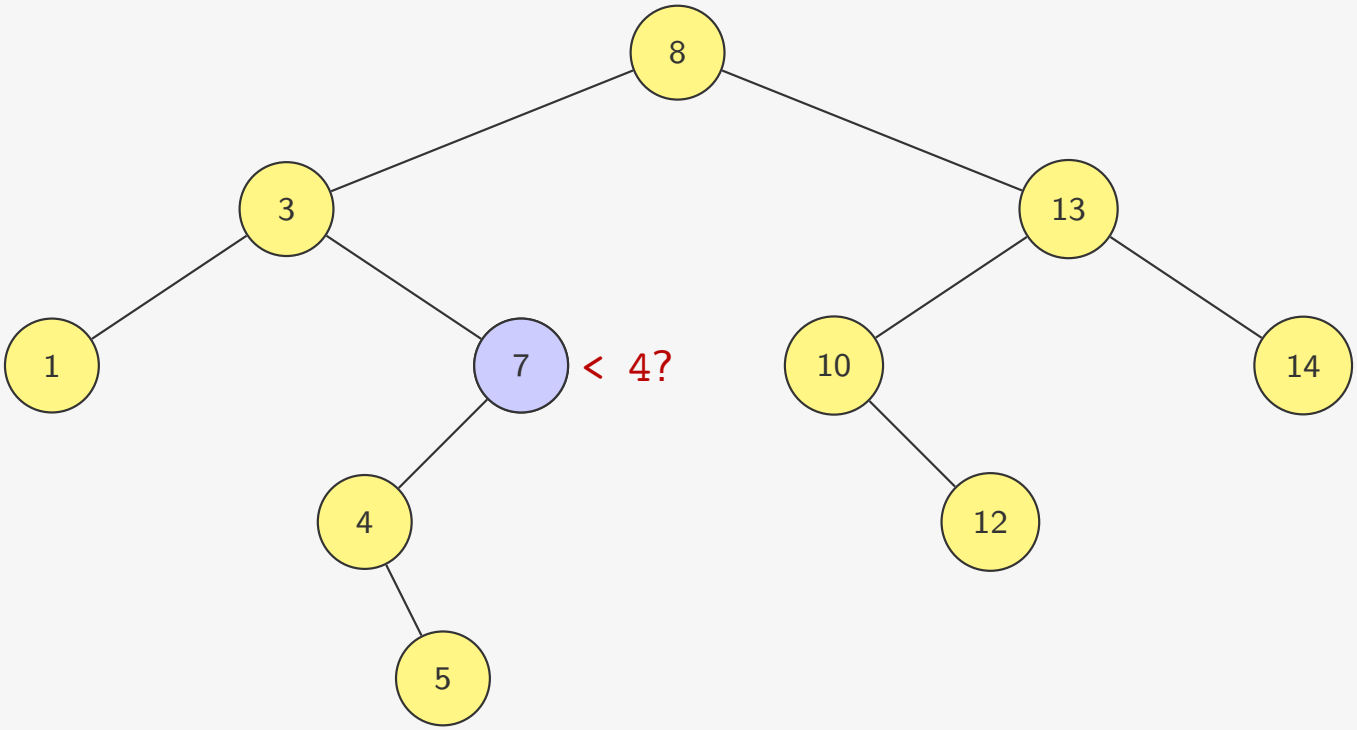


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

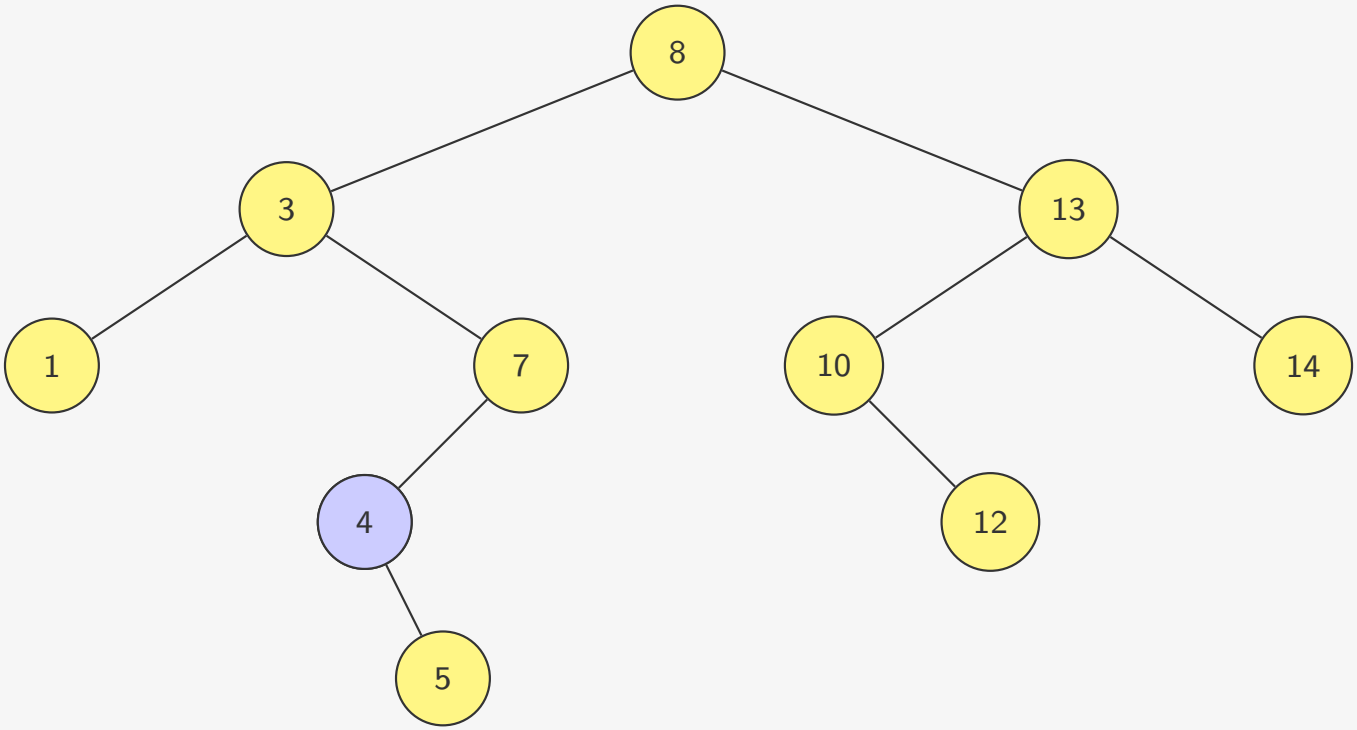


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

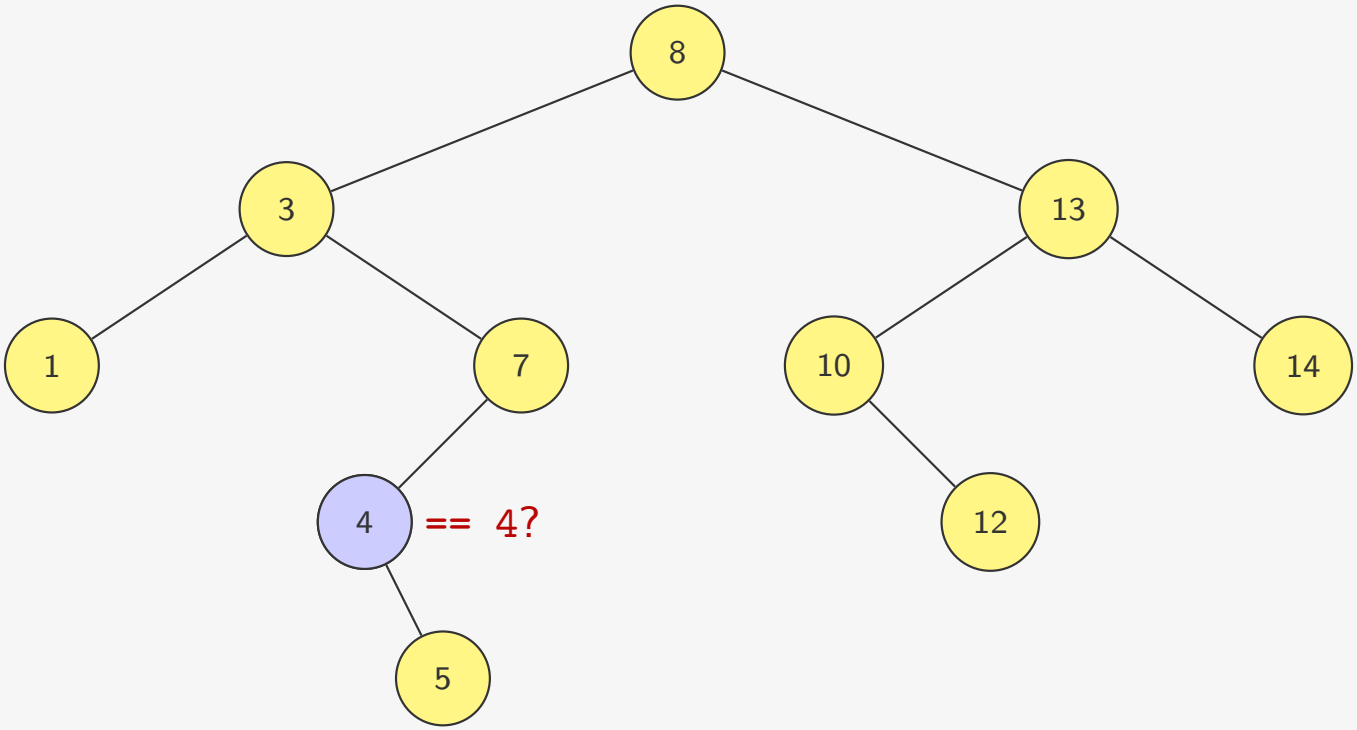


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

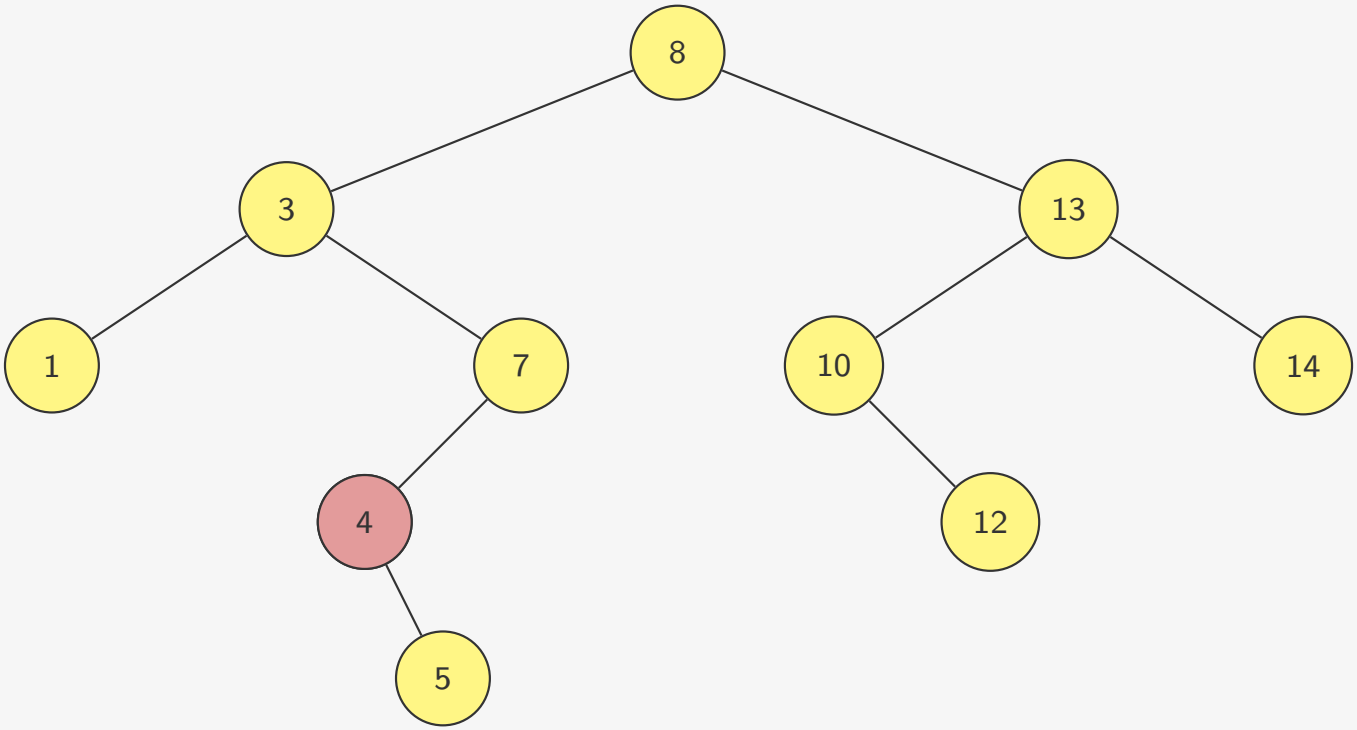


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

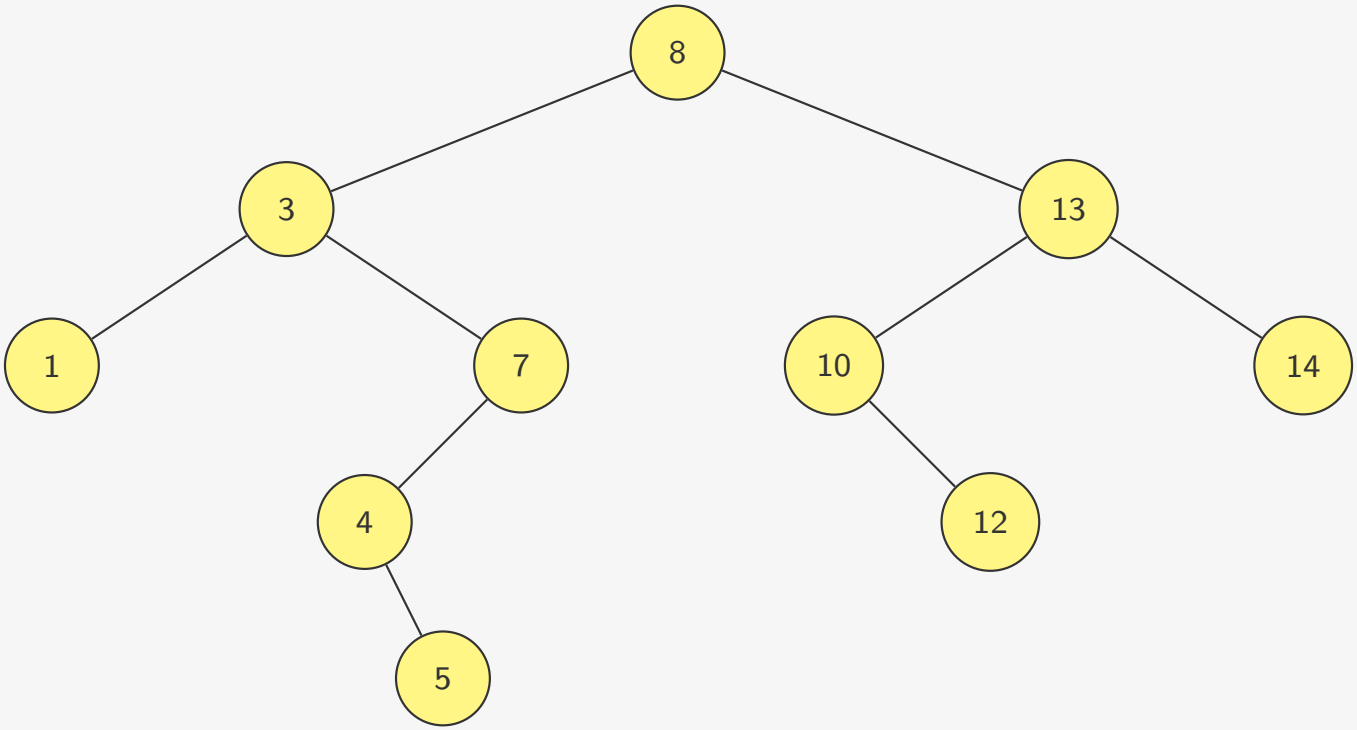


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

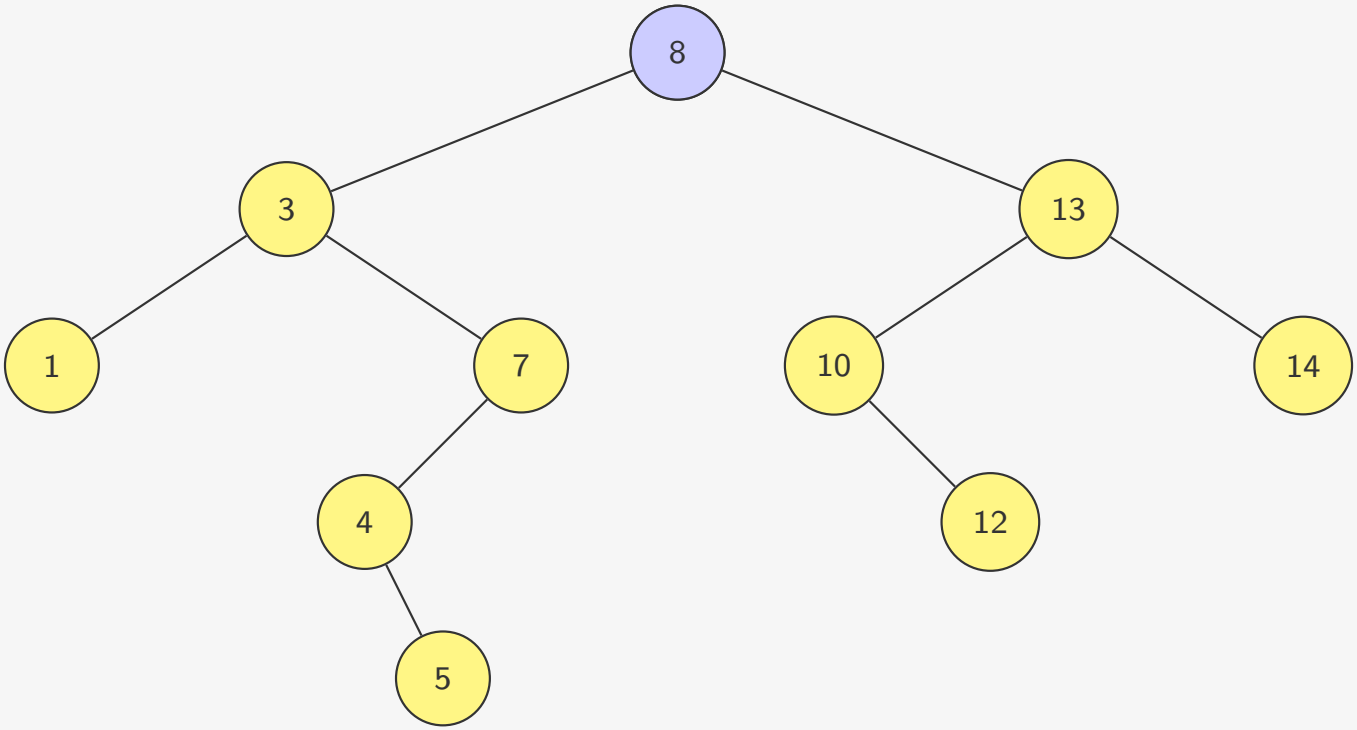


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

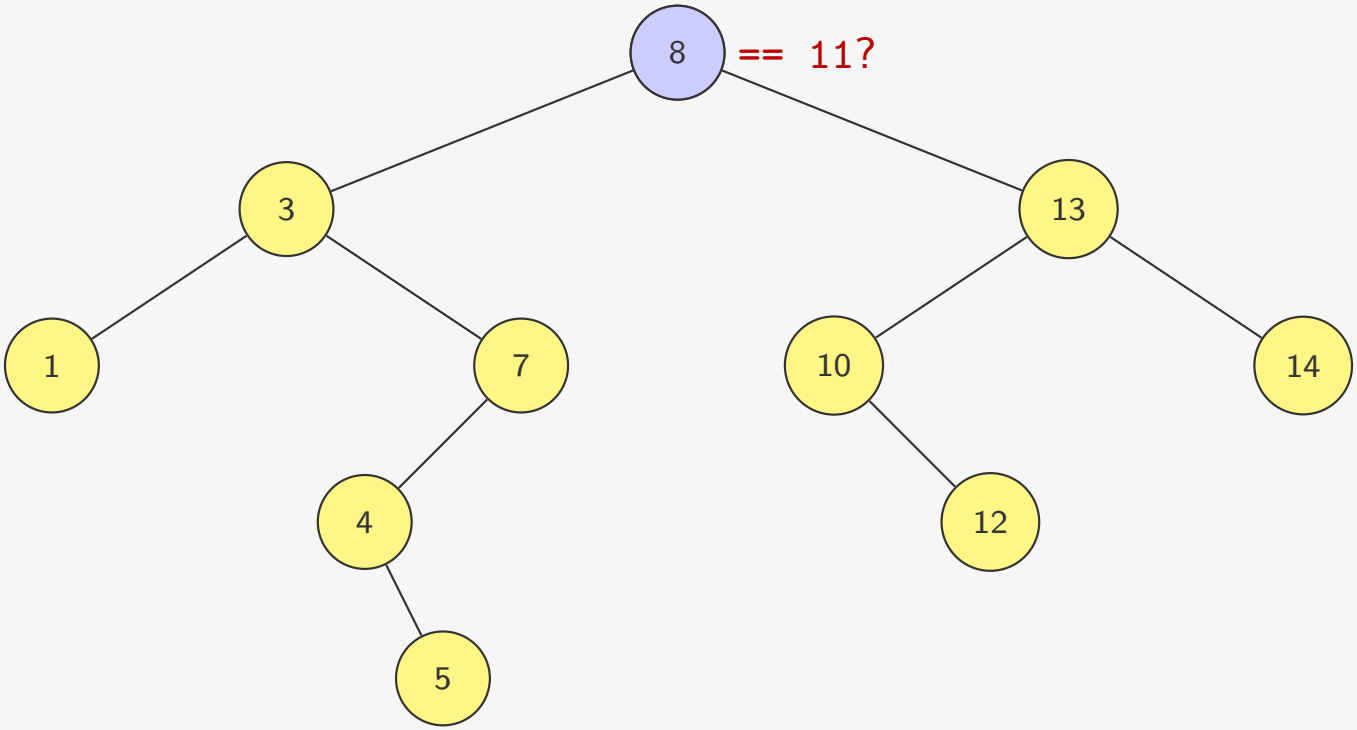


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

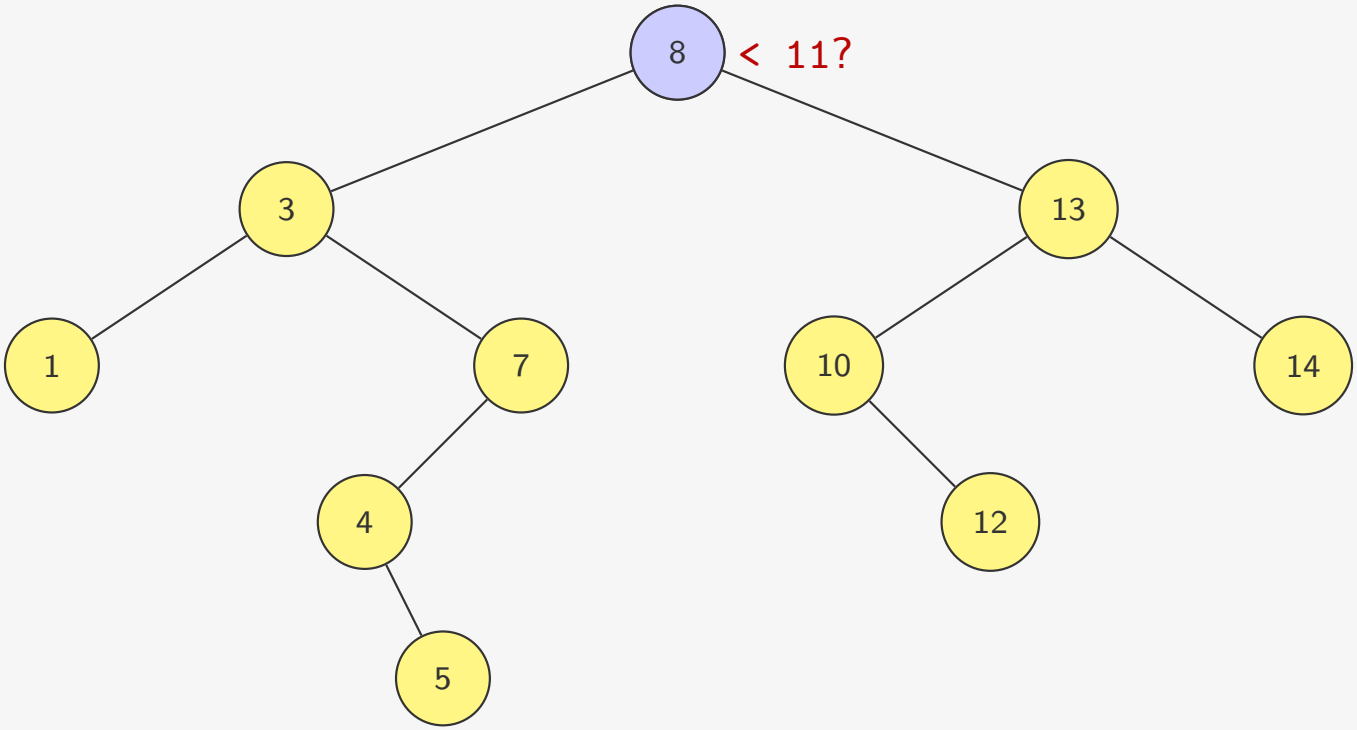


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

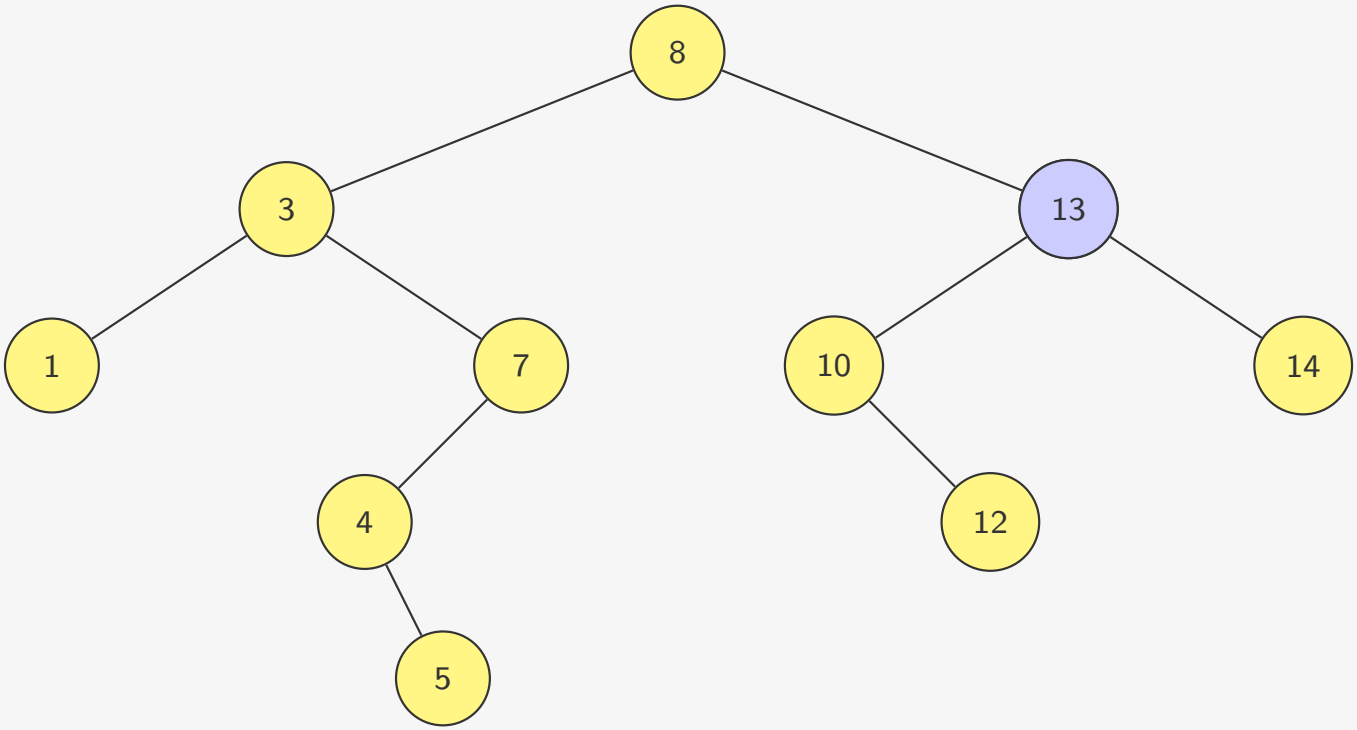


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

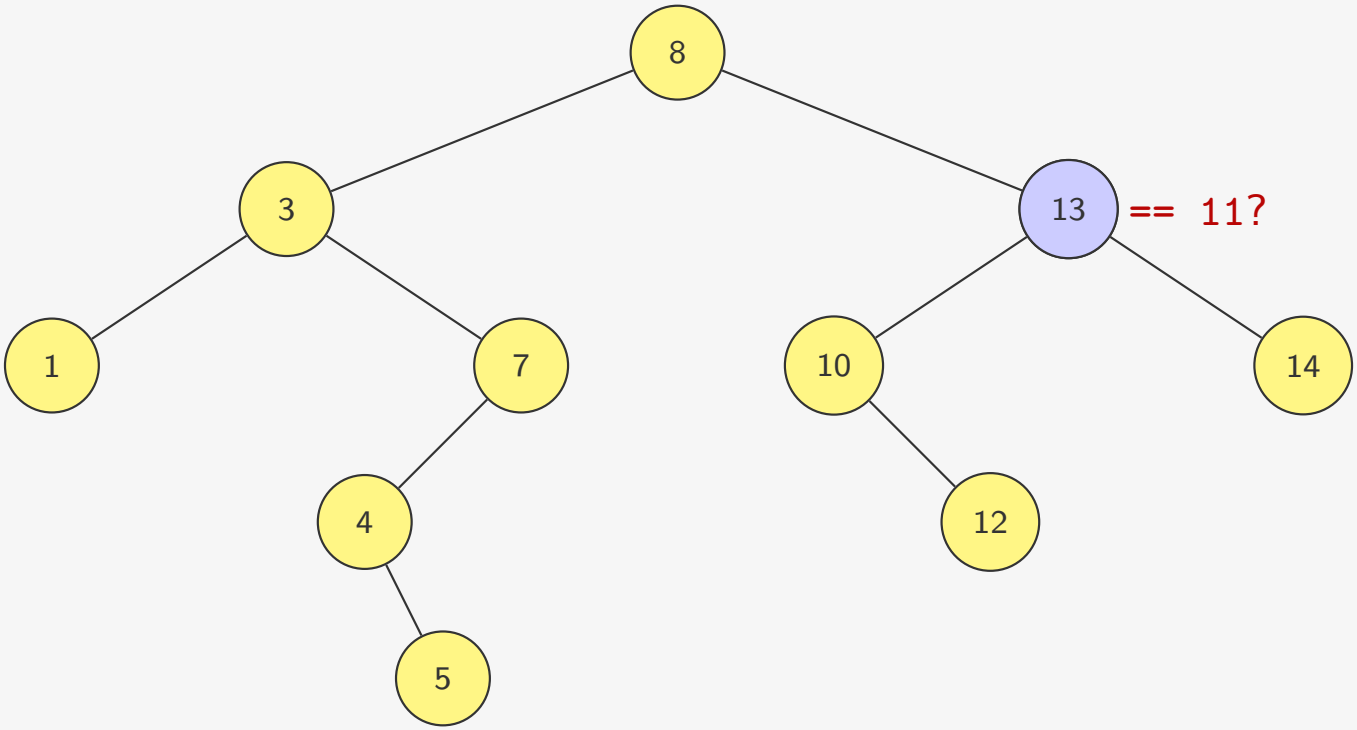


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

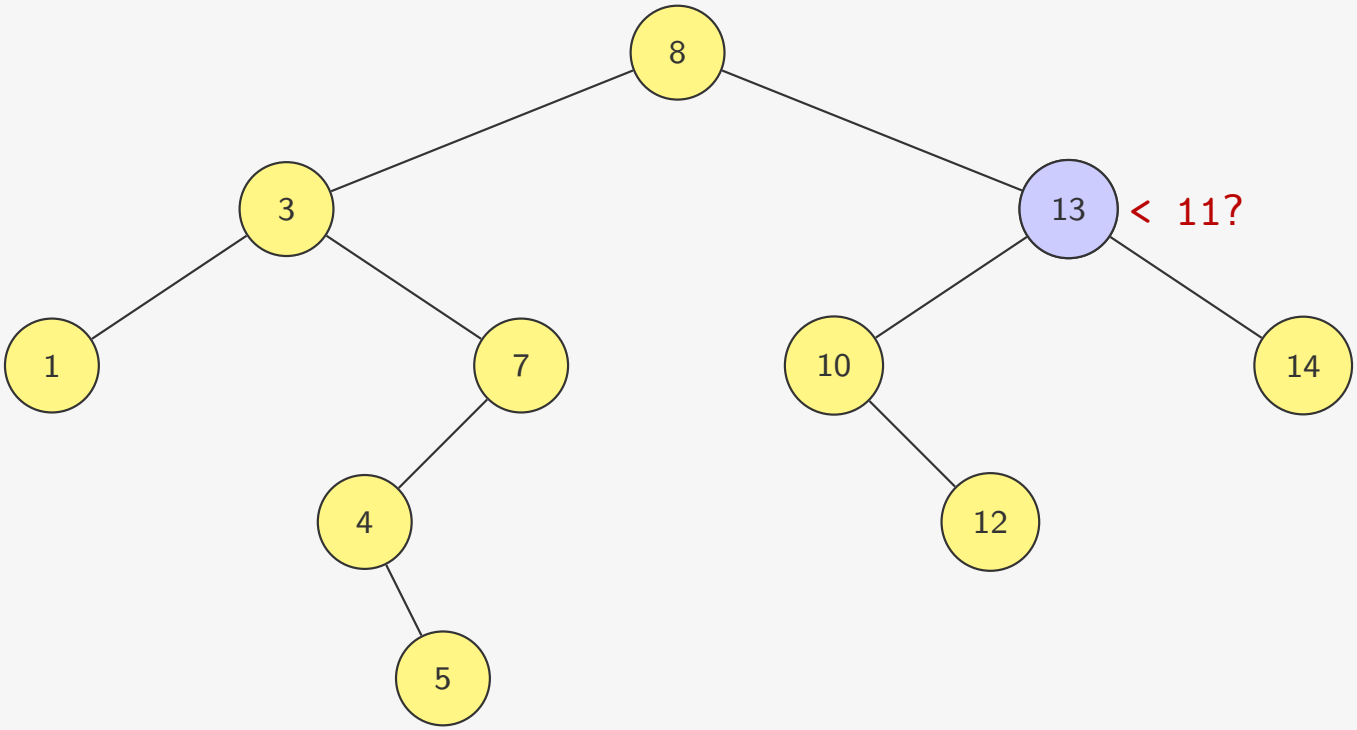


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

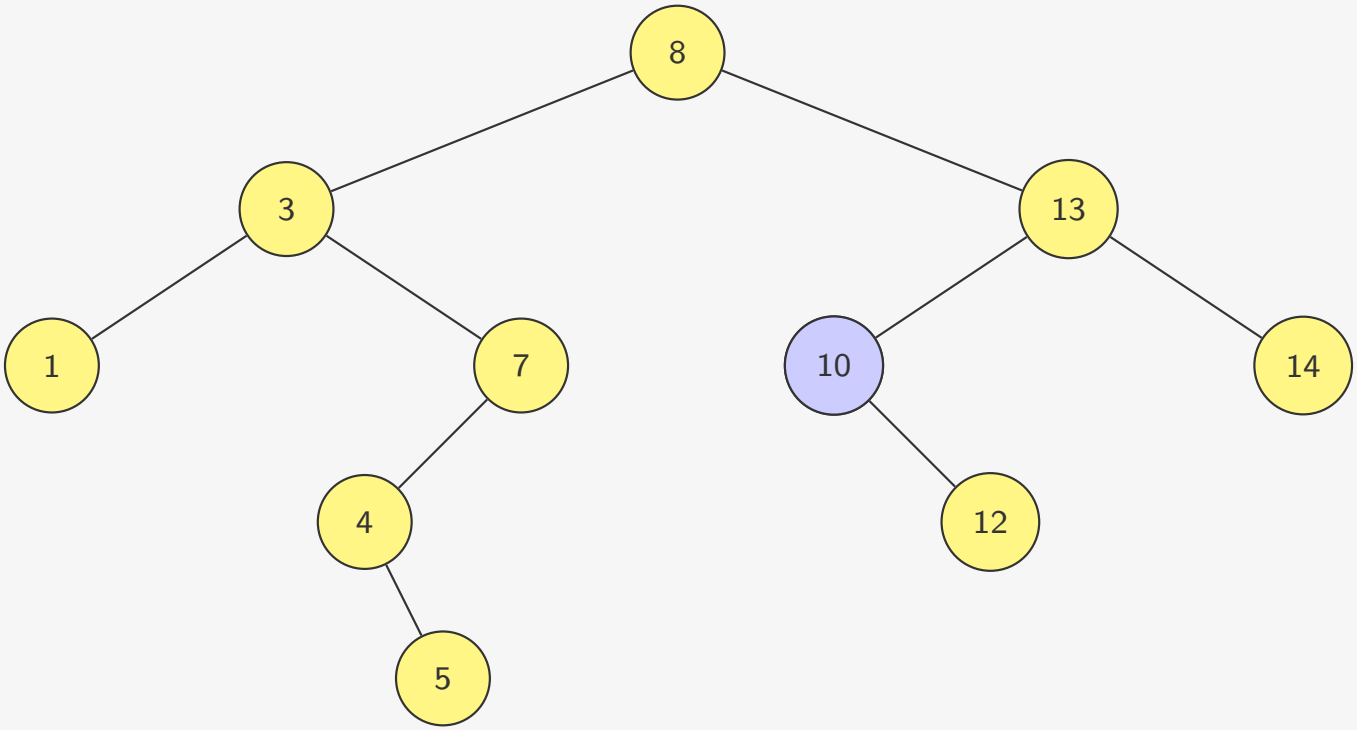


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

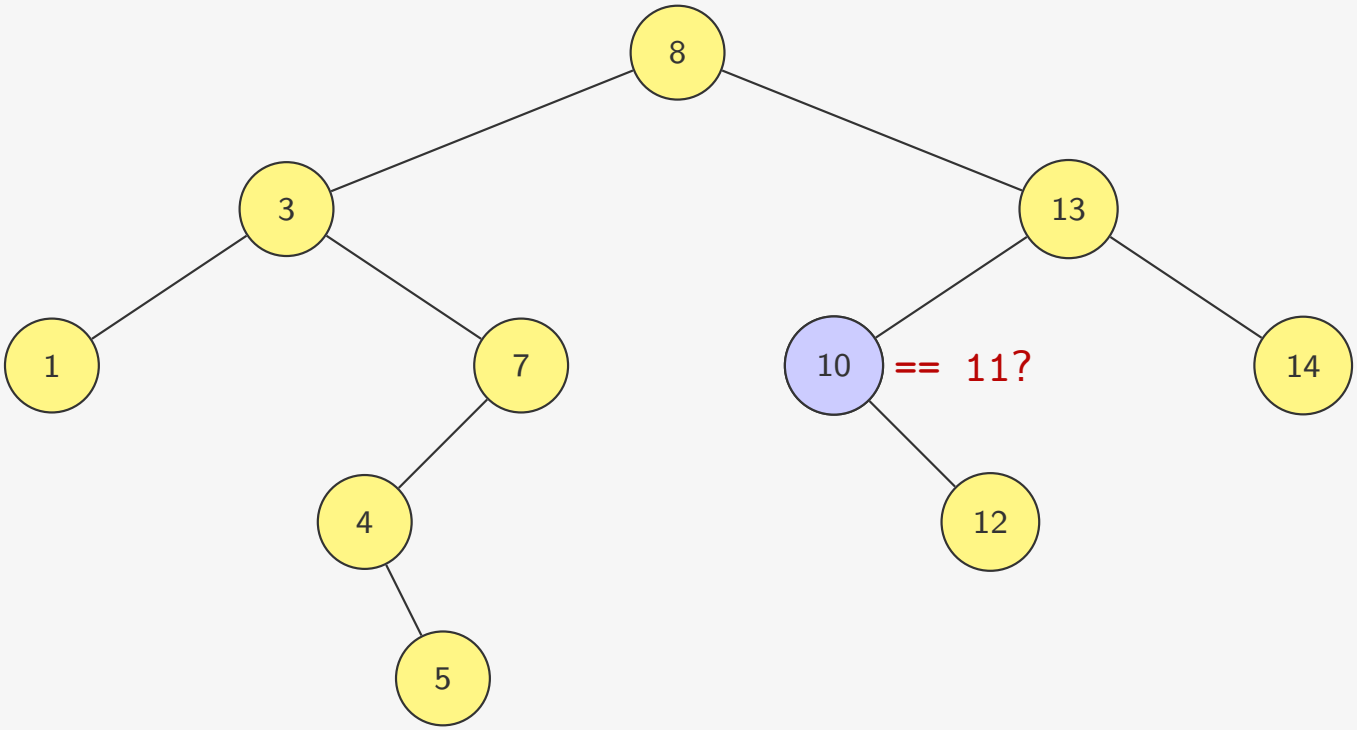


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

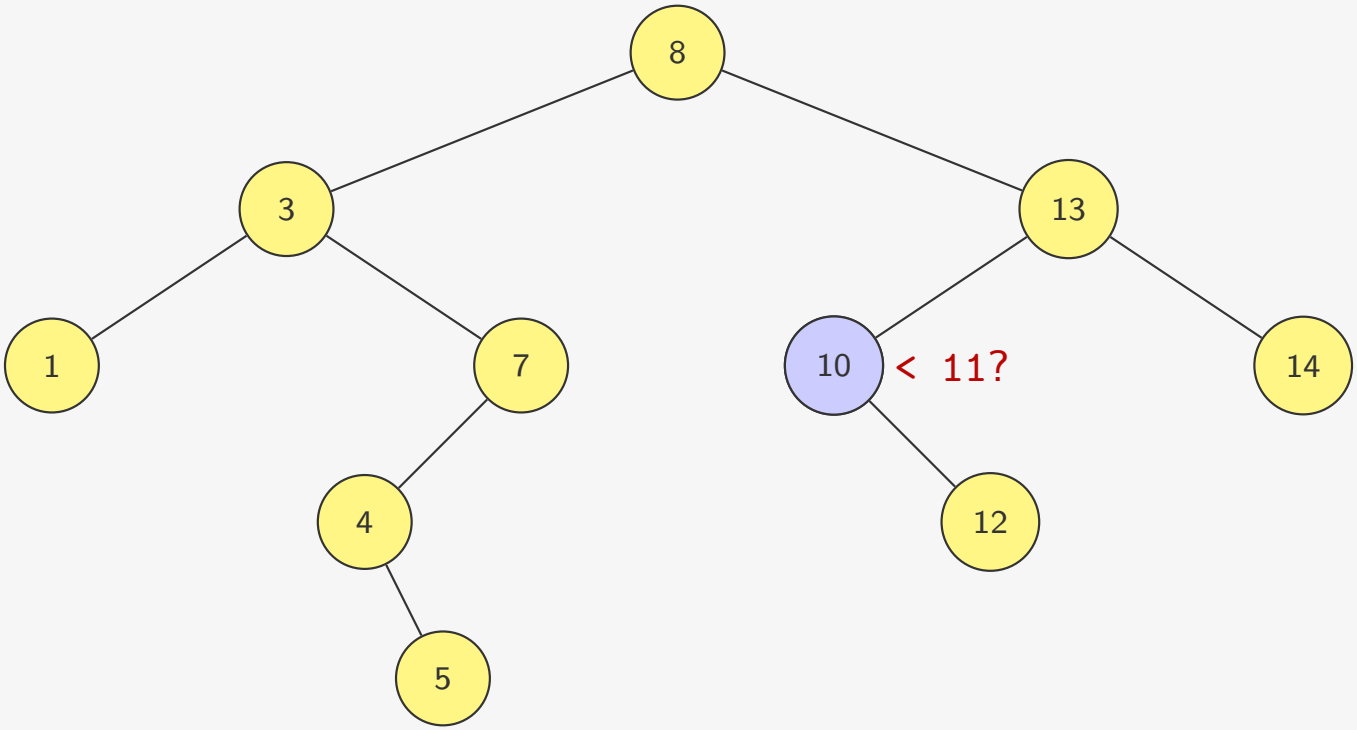


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

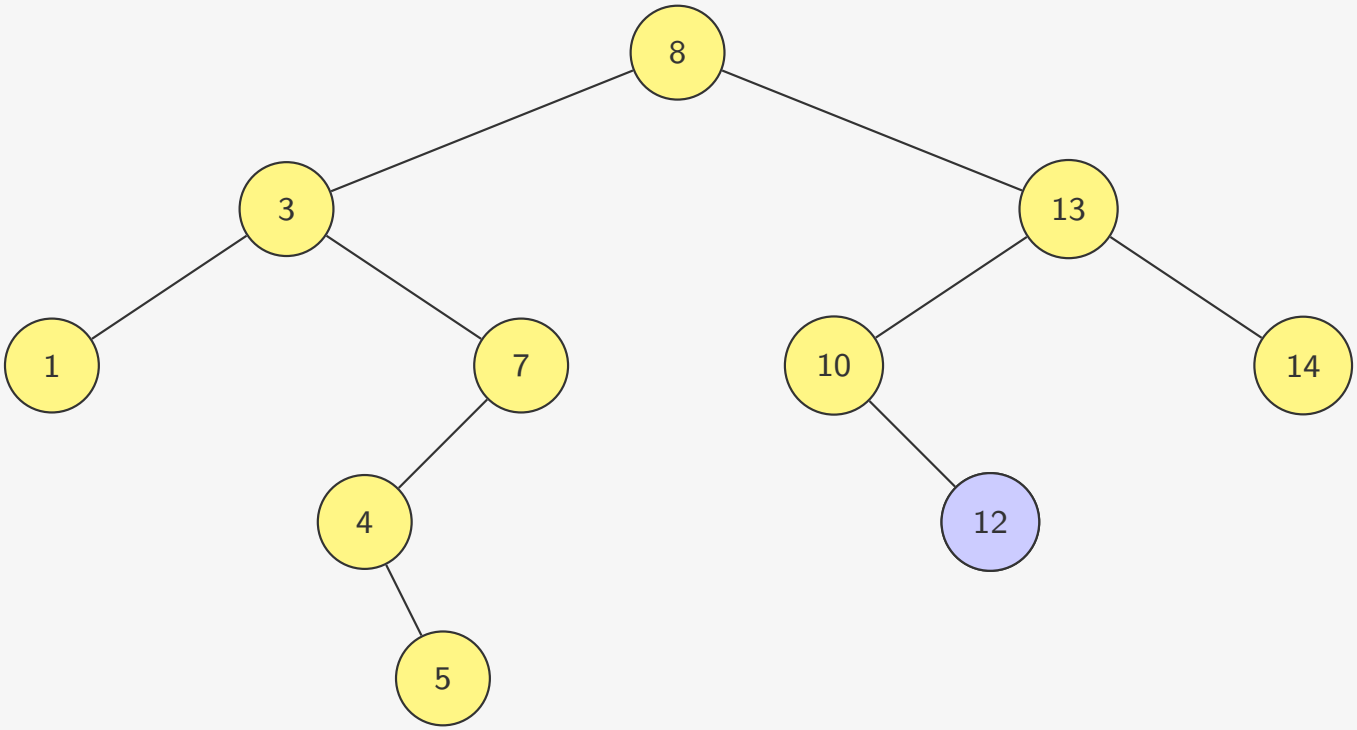


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

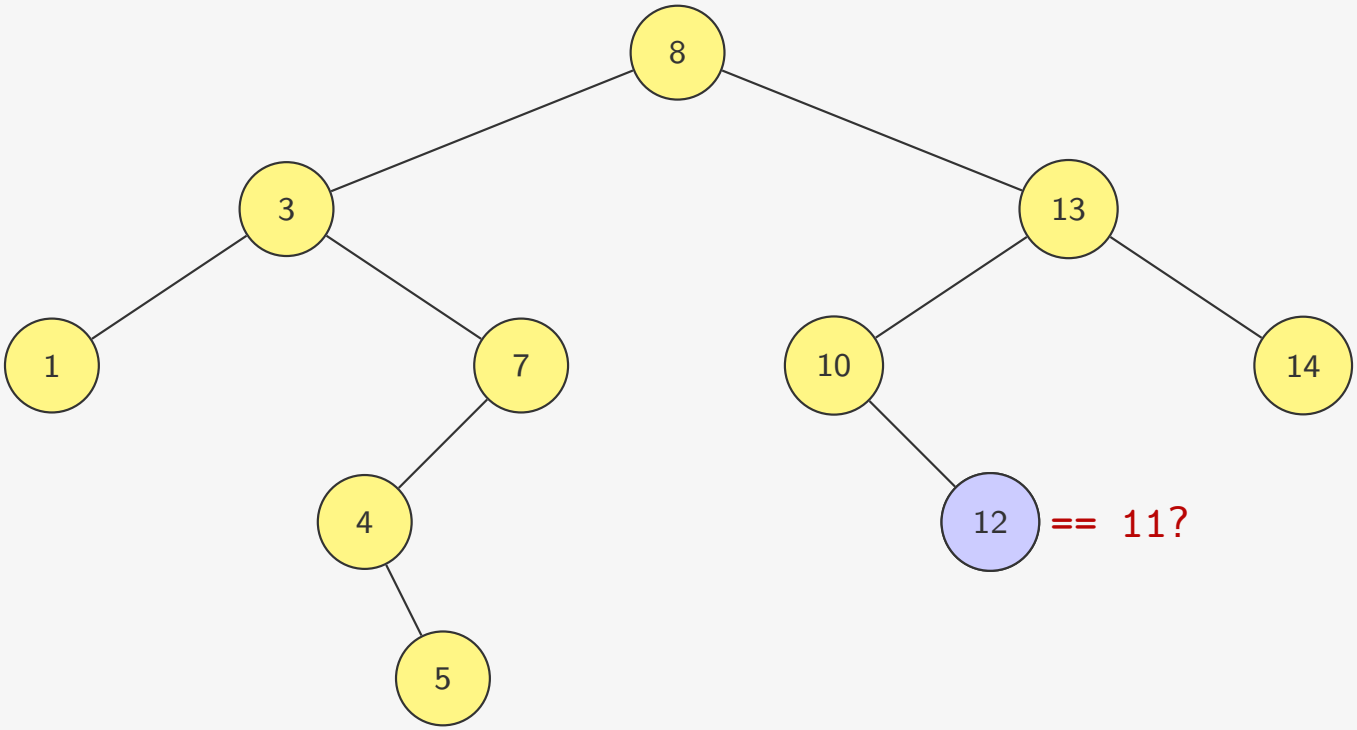


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

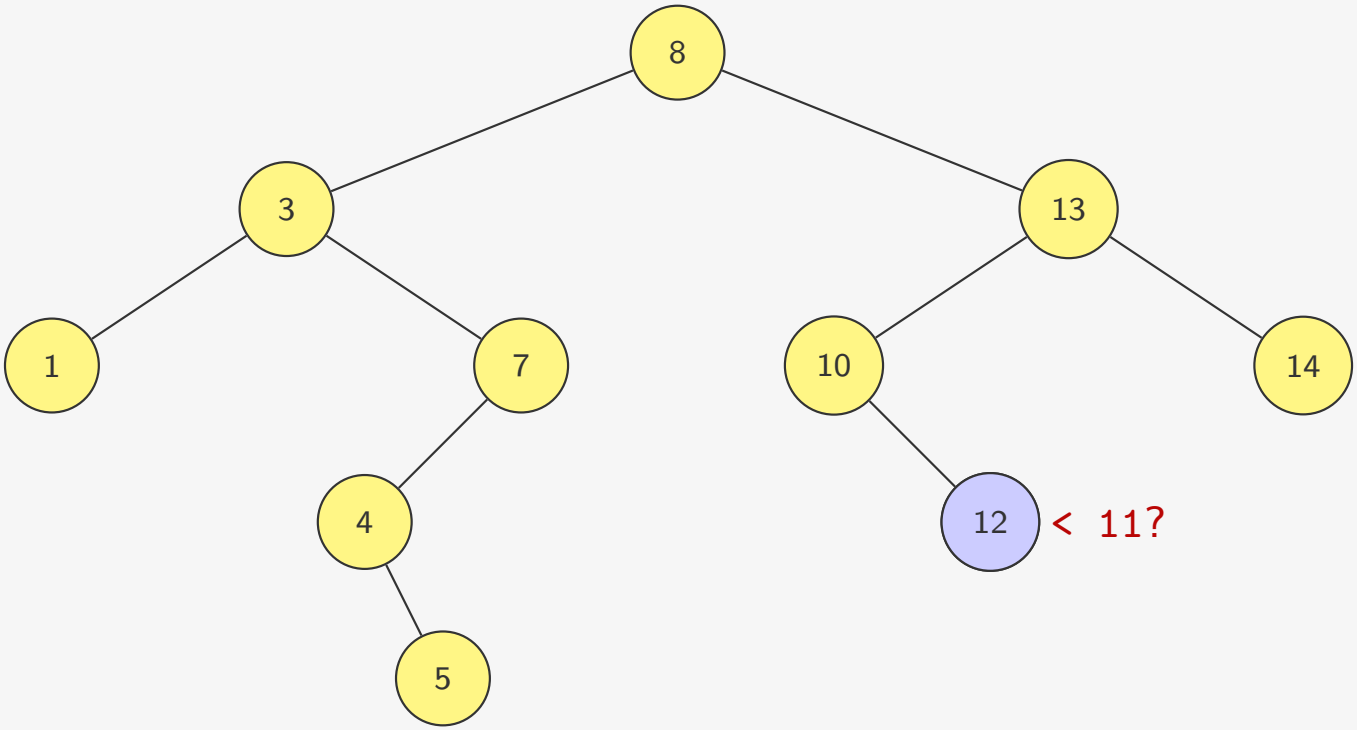


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

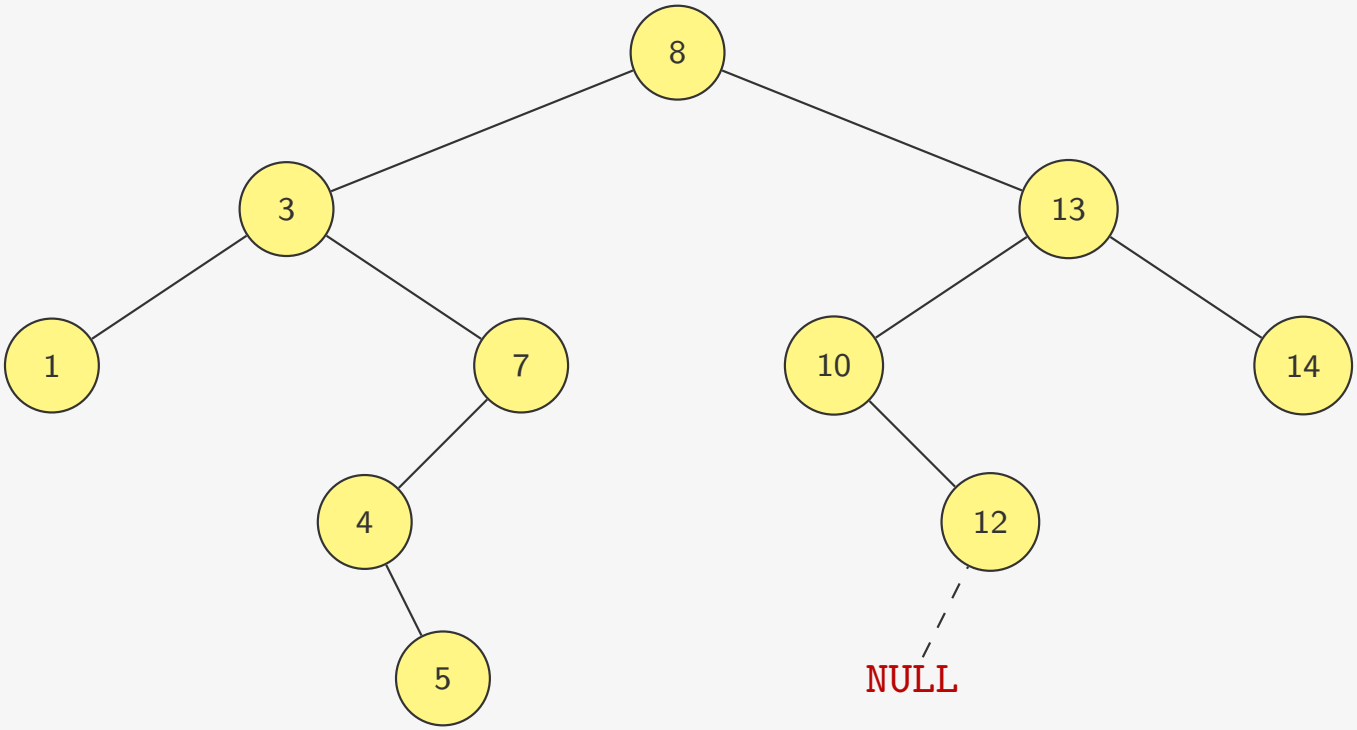


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11



Árvore binária de busca - ABB - Busca binária

```
1 STnode *STsearch(STnode *no, Key v)
2 {
3     //condição de parada
```

Árvore binária de busca - ABB - Busca binária

```
1 STnode *STsearch(STnode *no, Key v)
2 {
3     //condição de parada
4     if(no == NULL || eq(v, key(no->item)))
5         return no;
6
7     //varrer subárvore esquerda; condição?
```

Árvore binária de busca - ABB - Busca binária

```
1 STnode *STsearch(STnode *no, Key v)
2 {
3     //condição de parada
4     if(no == NULL || eq(v, key(no->item)))
5         return no;
6
7     //varrer subárvore esquerda; condição?
8     if(less(v, key(no->item))) //como?
```

Árvore binária de busca - ABB - Busca binária

```
1  STnode *STsearch(STnode *no, Key v)
2  {
3      //condição de parada
4      if(no == NULL || eq(v, key(no->item)))
5          return no;
6
7      //varrer subárvore esquerda; condição?
8      if(less(v, key(no->item))) //como?
9          return STsearch(no->esq, v);
10     else
11         return STsearch(no->dir, v);
12 }
```

- Faça a versão sem recursão

Árvore binária de busca - ABB - Inserção

- As propriedades da árvore binária de busca devem ser mantidas
  - Elementos menores para esquerda
  - Elementos maiores para direita
- Slides a seguir:
  - `https://www.ic.unicamp.br/~rafael/cursos/2s2018/mc202/slides/unidade16-arvores-busca.pdf`

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

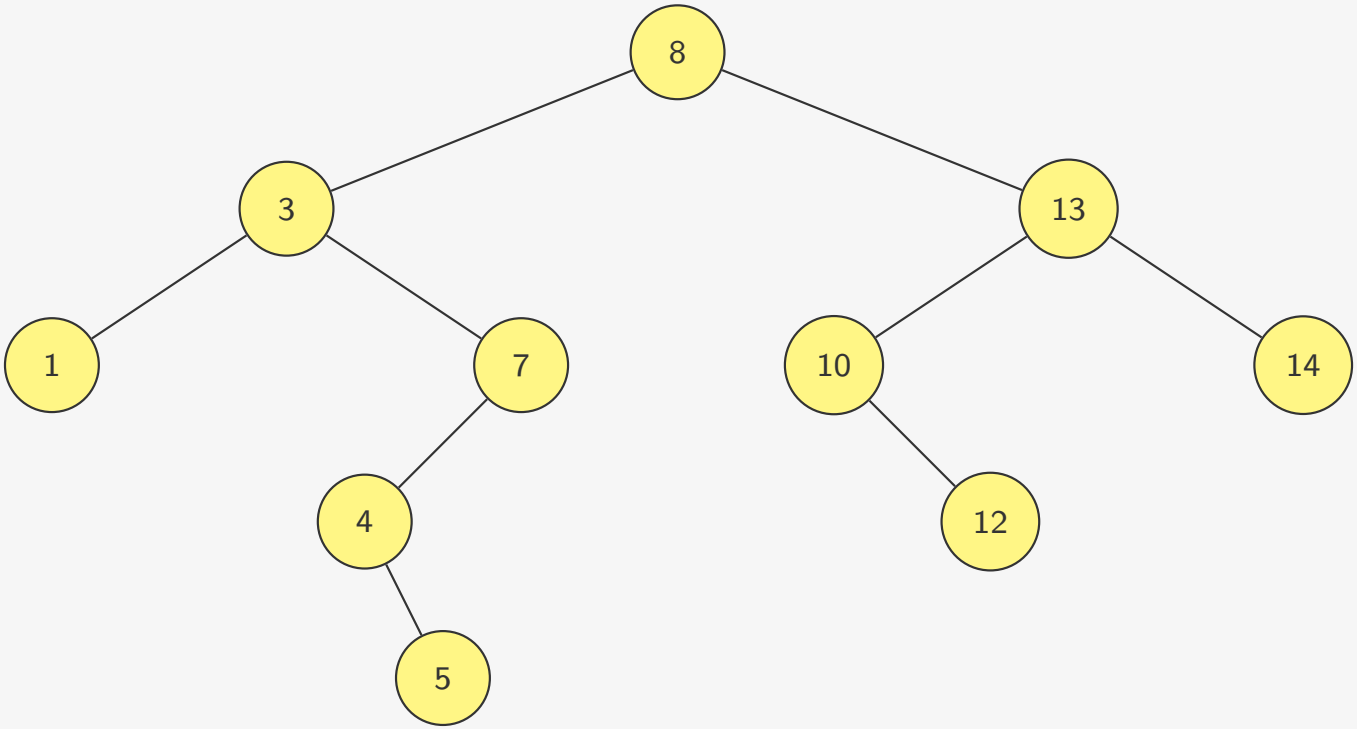
Ex: Inserindo 11

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11

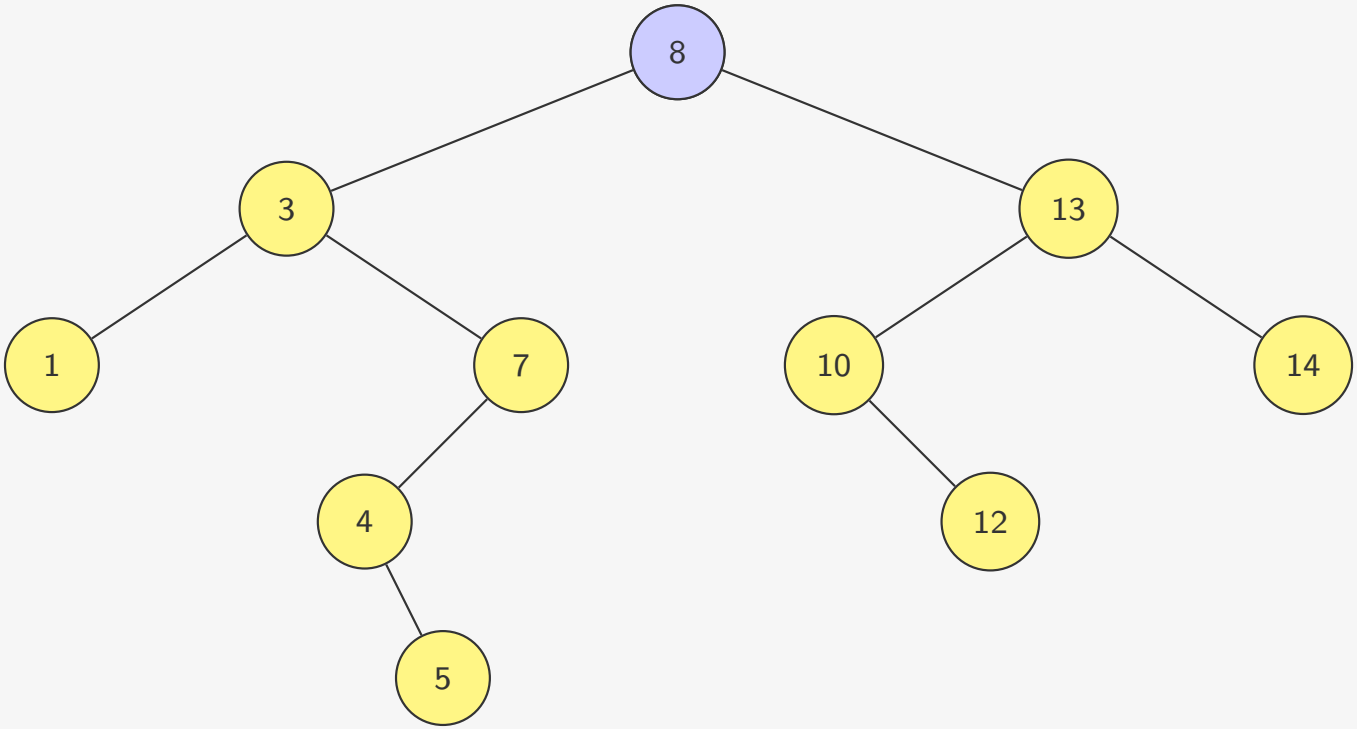


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11

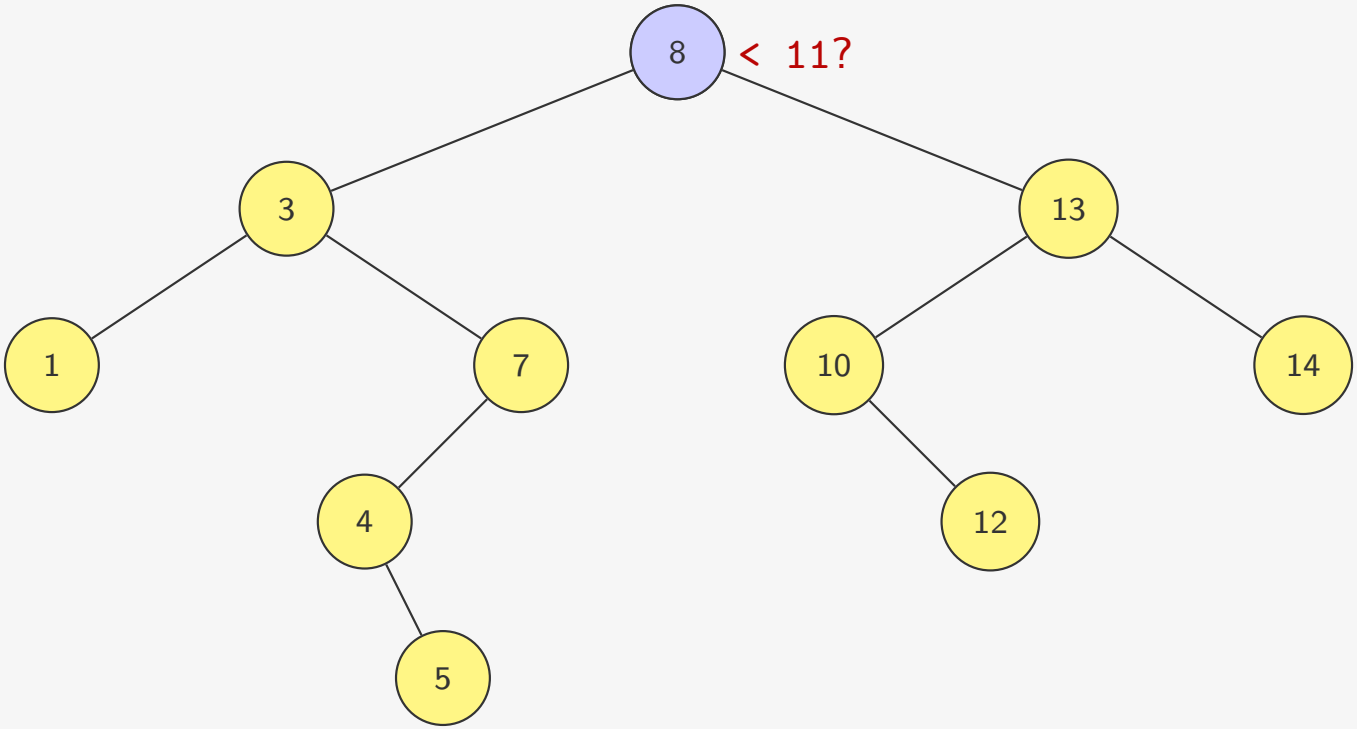


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11

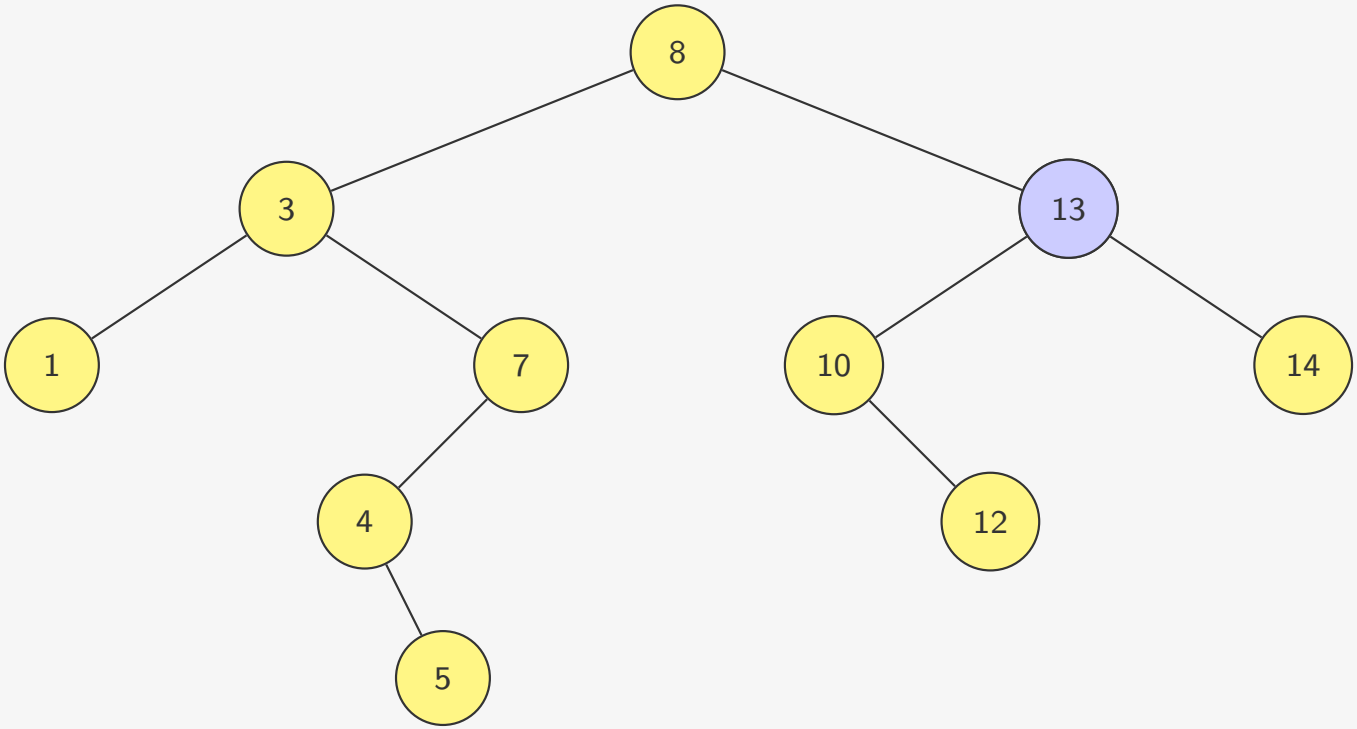


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11

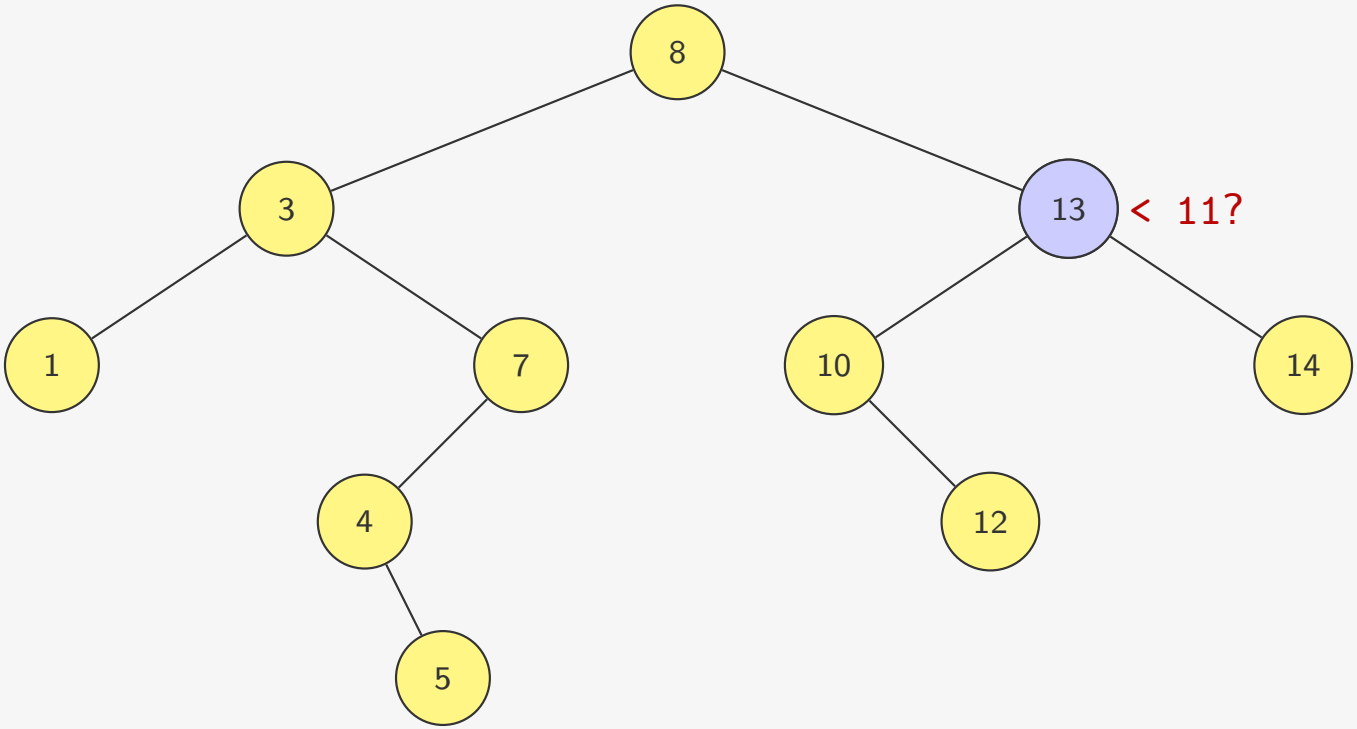


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11

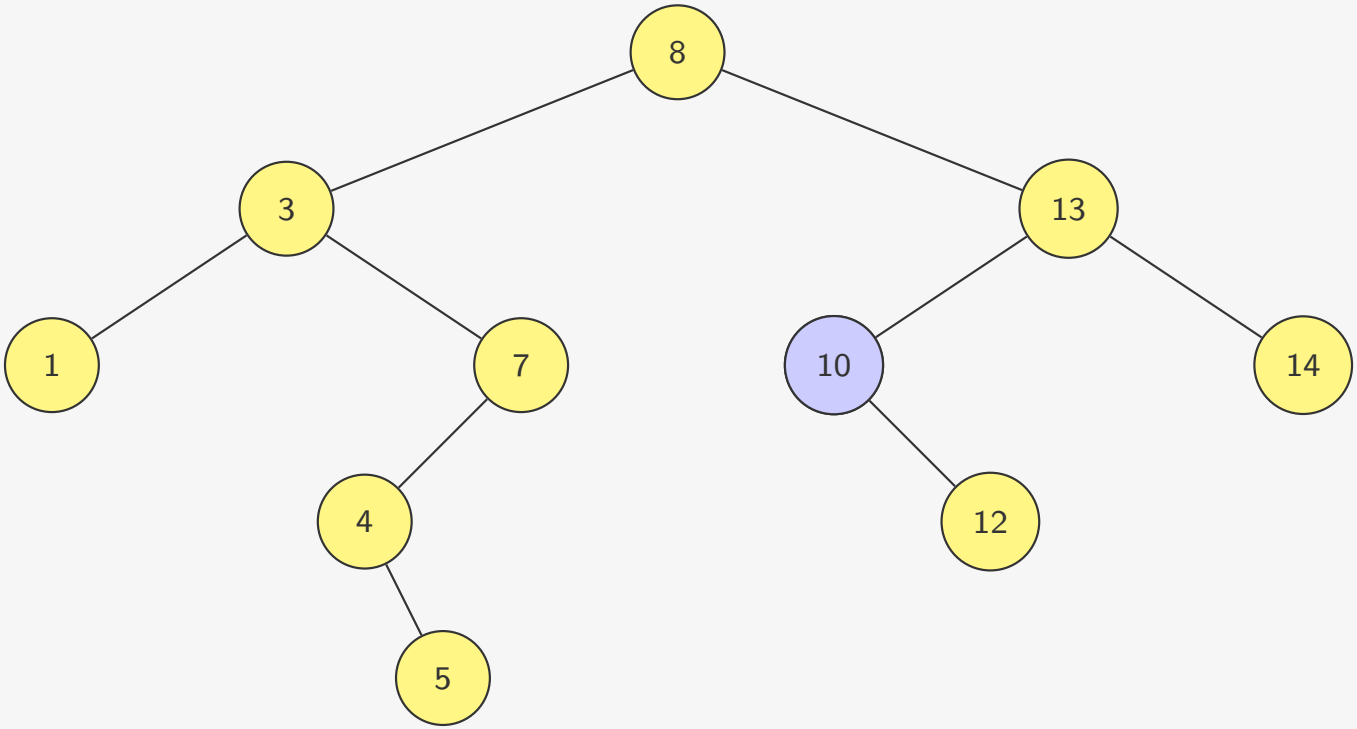


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11

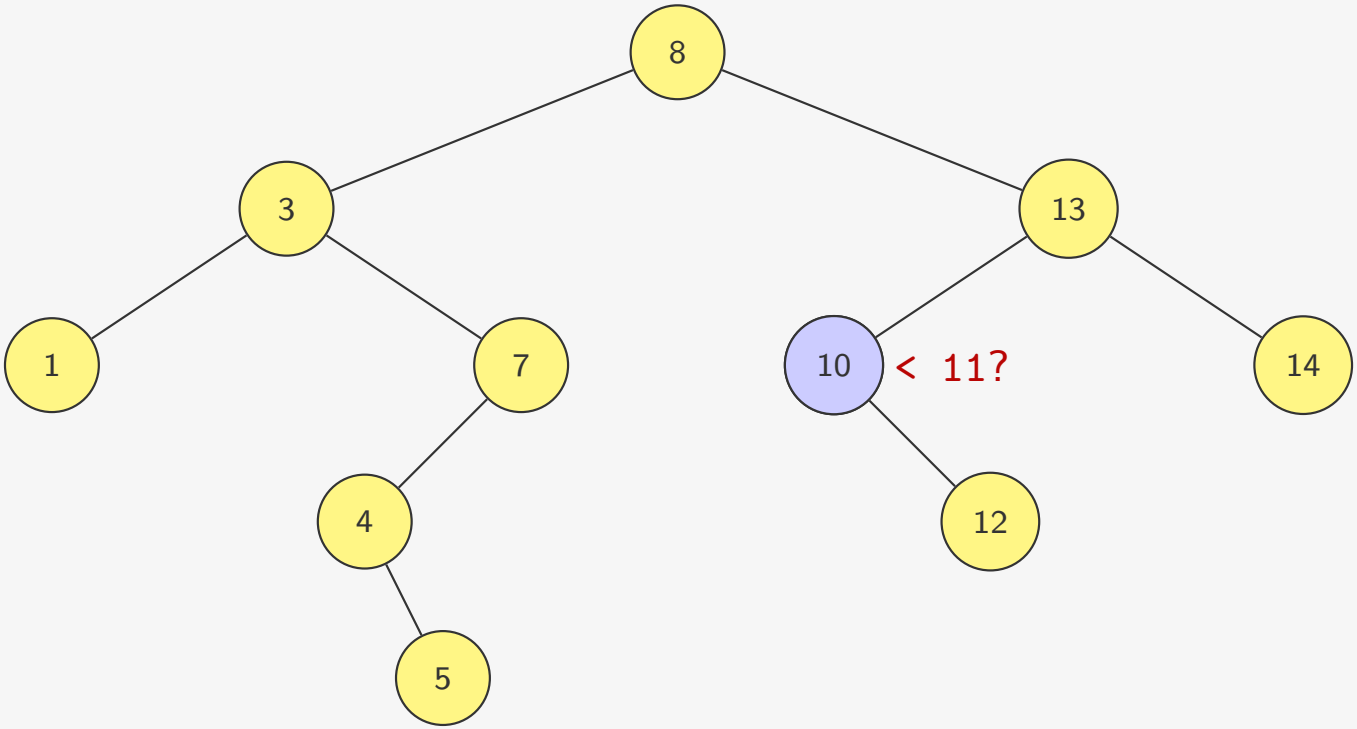


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11

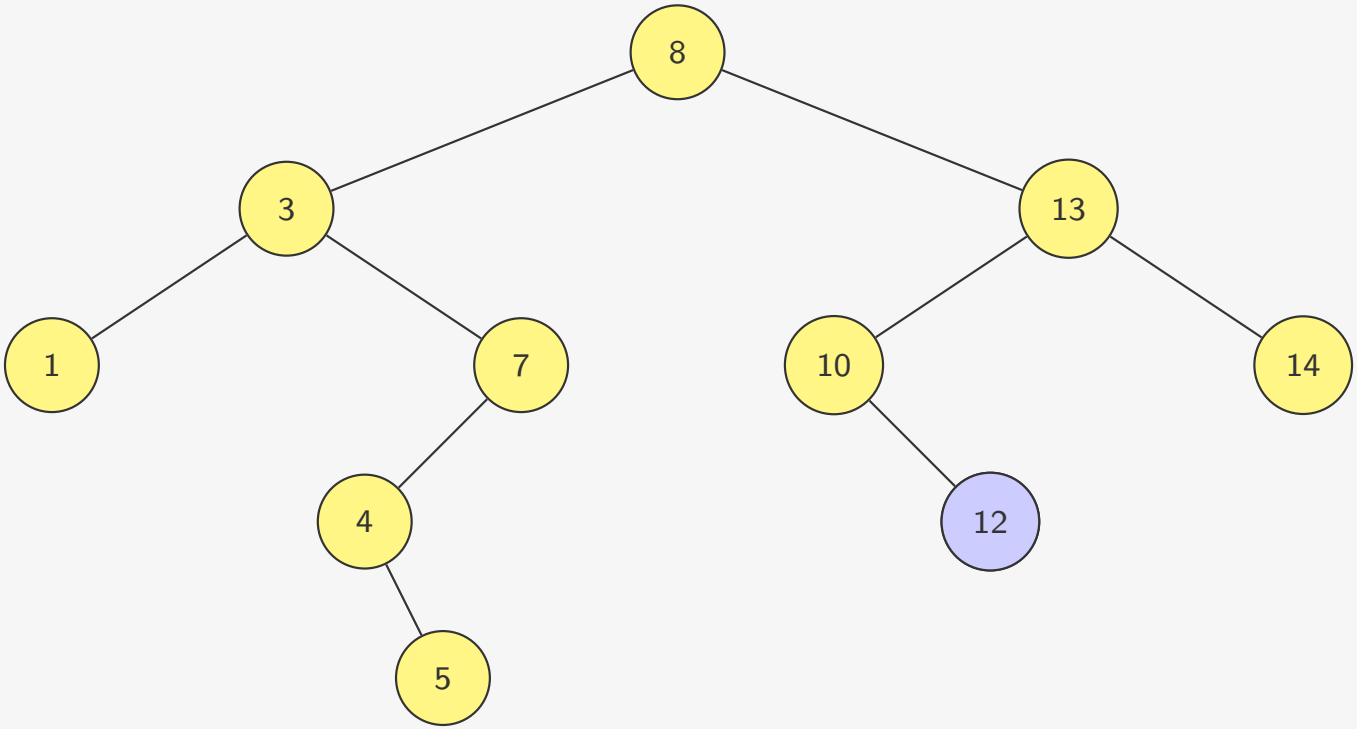


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11

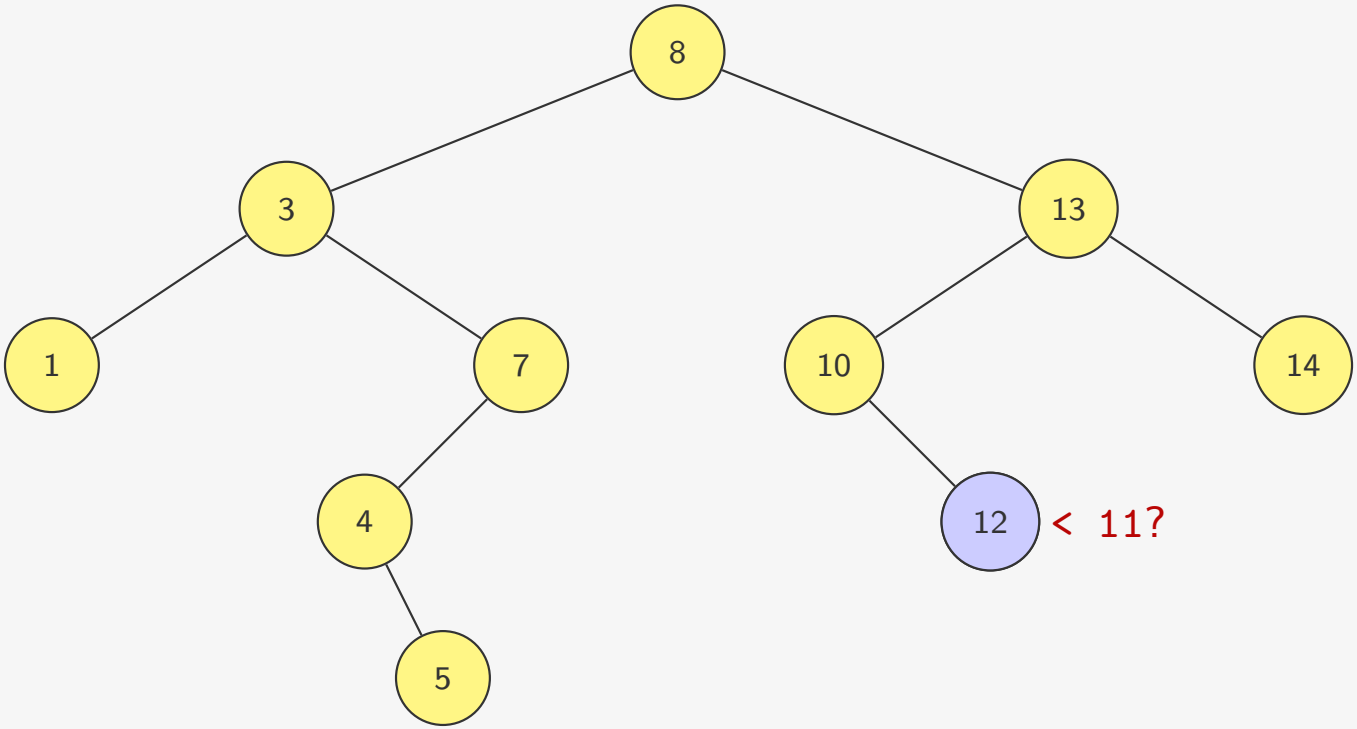


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11

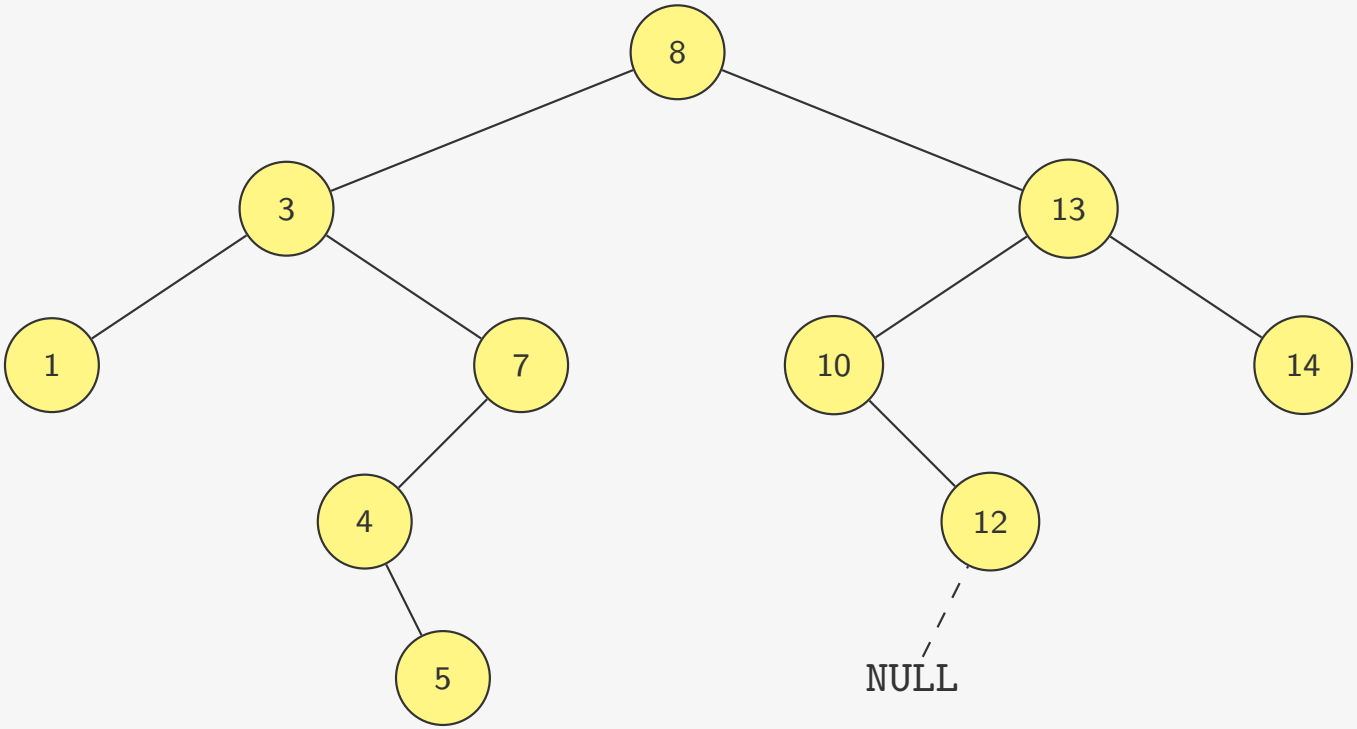


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11

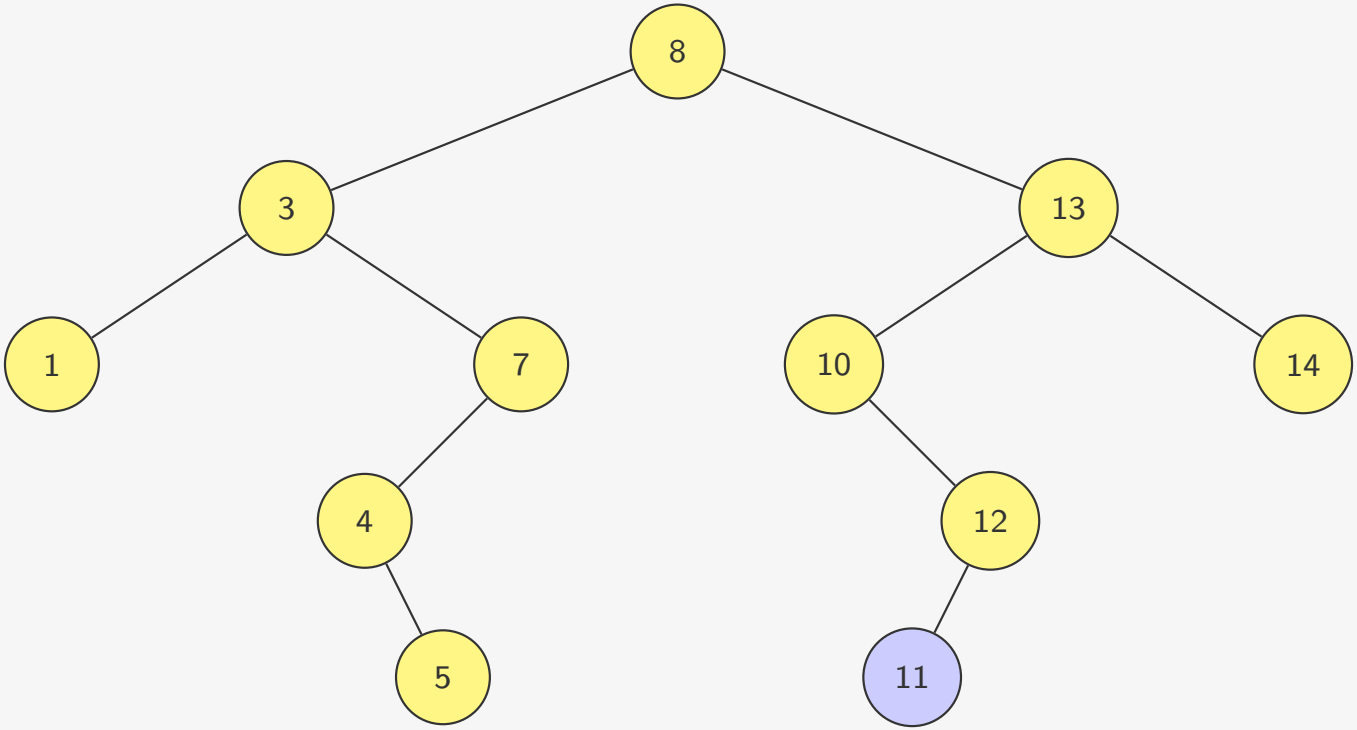


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo 11



```
1 STnode *STinsert(STnode *no, Item item){
2
3     //condição de parada
4     if(no == NULL) //alcançou um nó externo
```

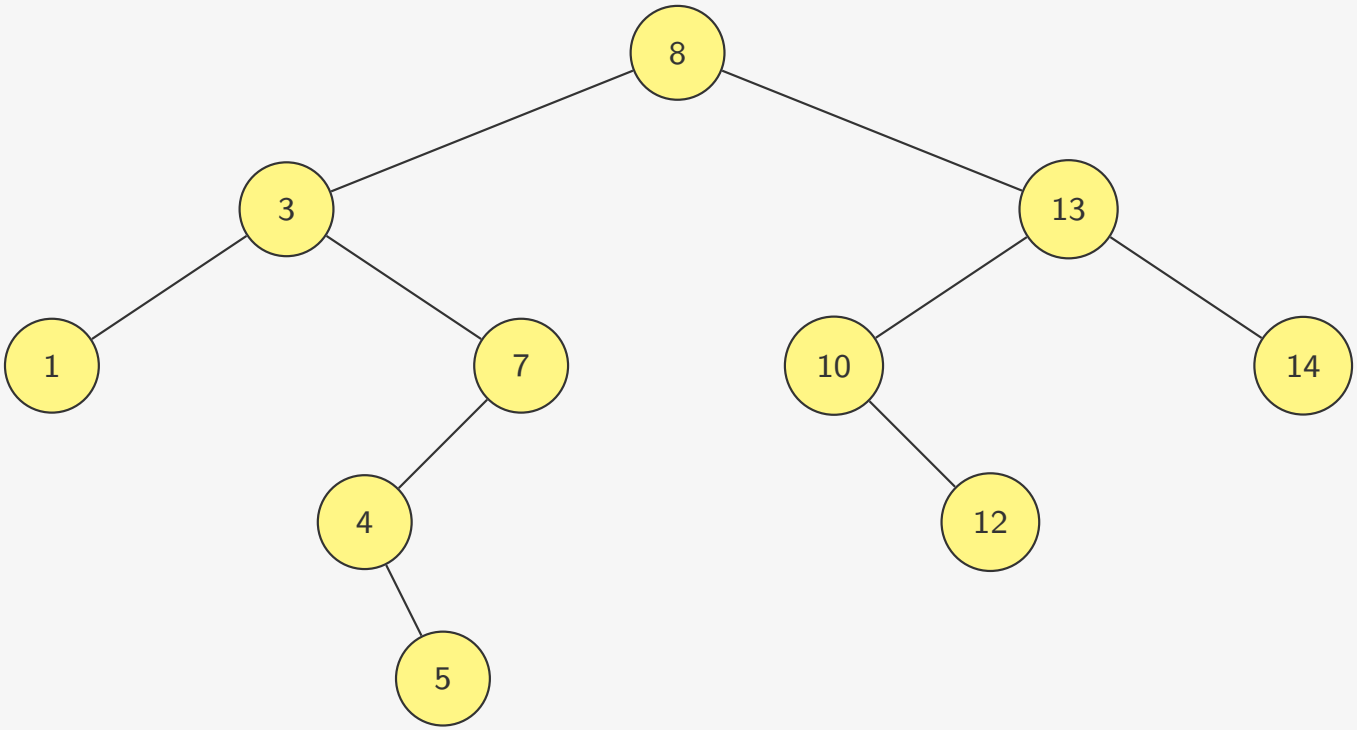
```c
STnode *STinsert(STnode *no, Item item){

    //condição de parada
    if(no == NULL) //alcançou um nó externo
        return new(item, NULL, NULL);

    Key novo = key(item);         //chave a ser inserida
    Key atual = key(no->item);    //chave nó verificado

    //decidir inserir na subárvore esquerda; condição?
```

```c
STnode *STinsert(STnode *no, Item item){

    //condição de parada
    if(no == NULL) //alcançou um nó externo
        return new(item, NULL, NULL);

    Key novo = key(item);          //chave a ser inserida
    Key atual = key(no->item);  //chave nó verificado

    //decidir inserir na subárvore esquerda; condição?
    if(less(novo, atual)) //como?
```

```c
STnode *STinsert(STnode *no, Item item){

    //condição de parada
    if(no == NULL) //alcançou um nó externo
        return new(item, NULL, NULL);

    Key novo = key(item);        //chave a ser inserida
    Key atual = key(no->item);   //chave nó verificado

    //decidir inserir na subárvore esquerda; condição?
    if(less(novo, atual)) //como?
        no->esq = STinsert(no->esq, item);
    else
        no->dir = STinsert(no->dir, item);

    return no;
}
int main(int argc, char *argv[]) {
    STnode *tree;
    for(int i=0; i<n; i++) {
        Item v;
        scanf("%d %s", &v.chave, v.info);
        tree = STinsert(tree, v);
    }
    ...
}
```

Mínimo da Árvore

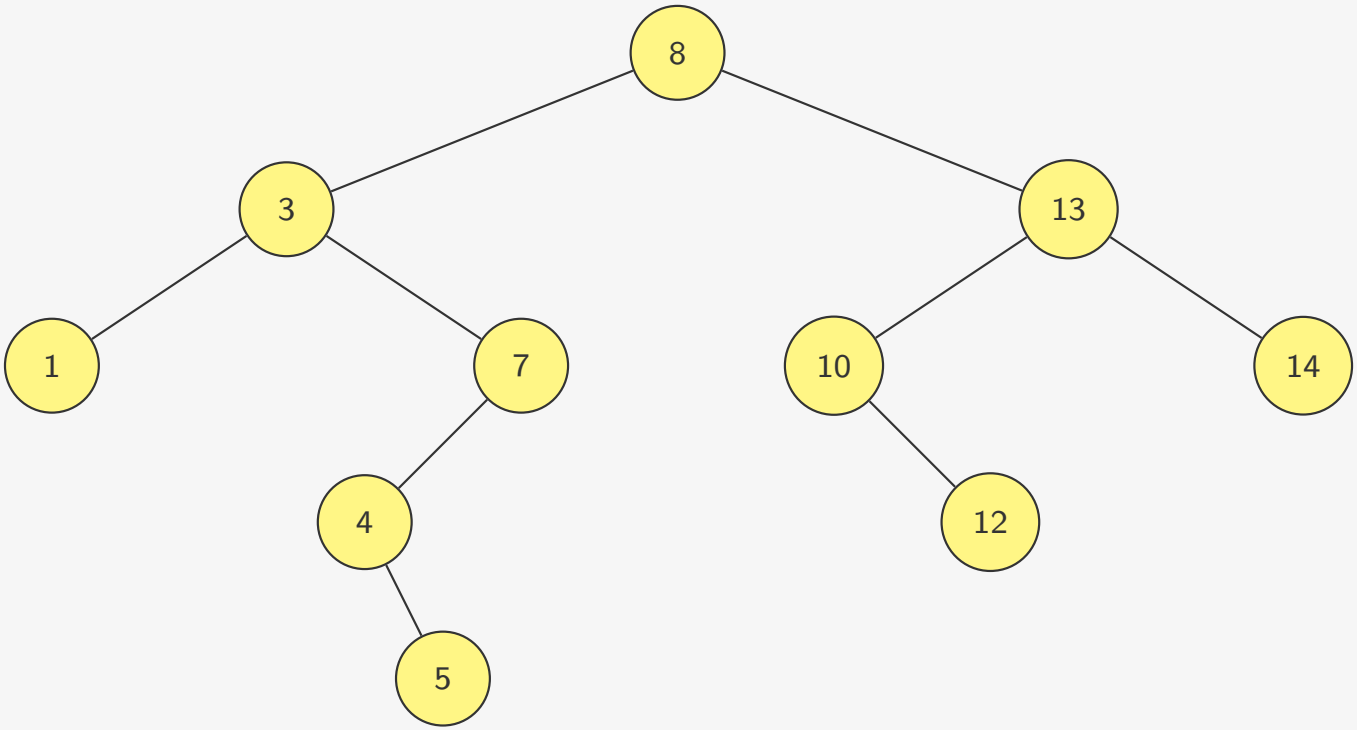
Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Quem é o mínimo para essa árvore?

Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Quem é o mínimo para essa árvore?

- É o mínimo da subárvore esquerda

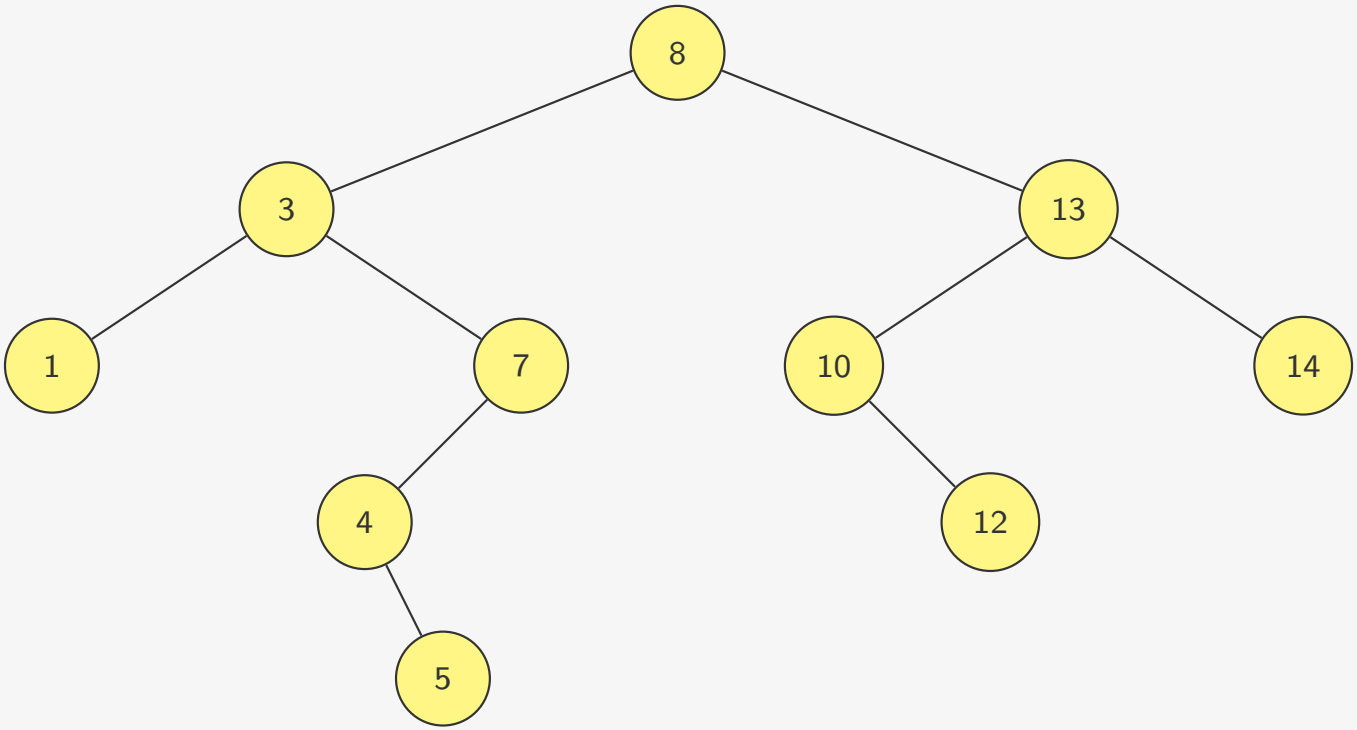
Árvore binária de busca - ABB - Menor chave

```
1 //menor = elemento mais à esquerda
2 STnode *minimo(STnode *no)
3 {
4     if (no->esq == NULL) return no;
5     return minimo(no->esq);
6 }
```

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

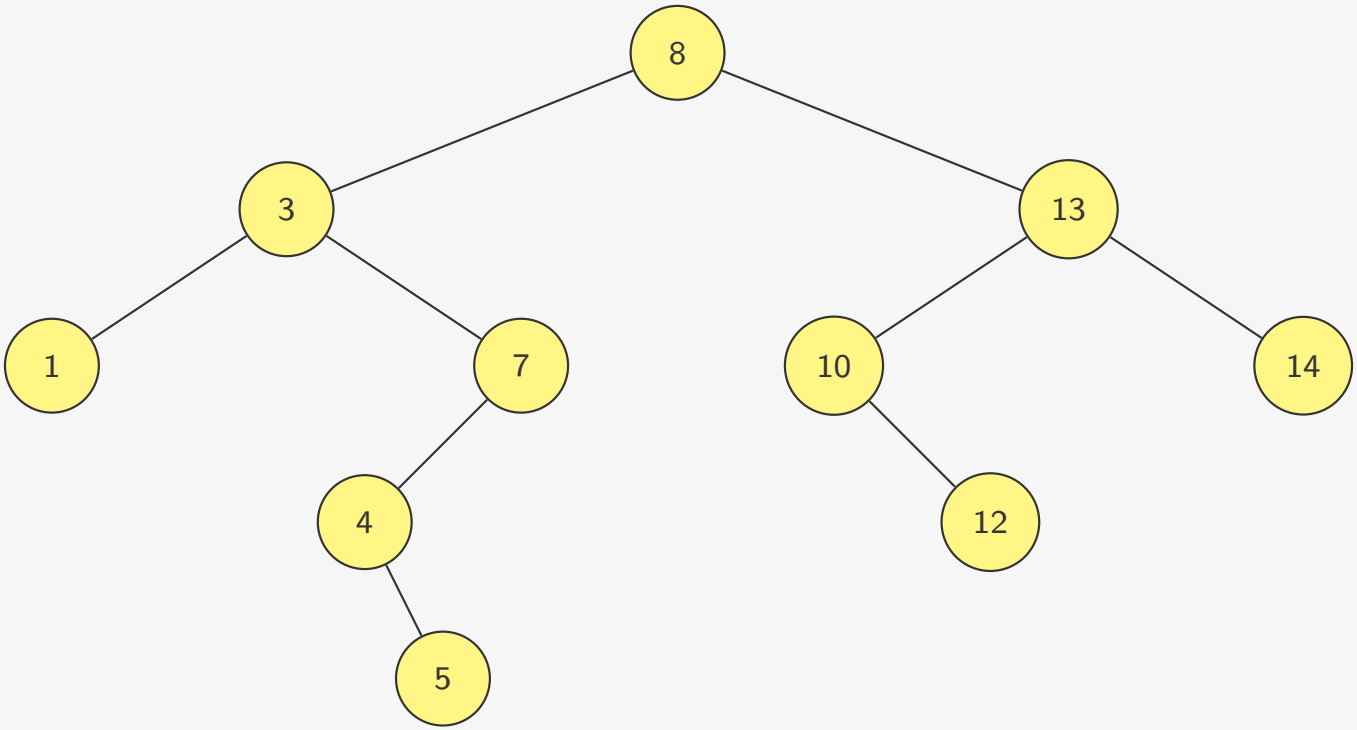


Quem é o sucessor de 3?

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação



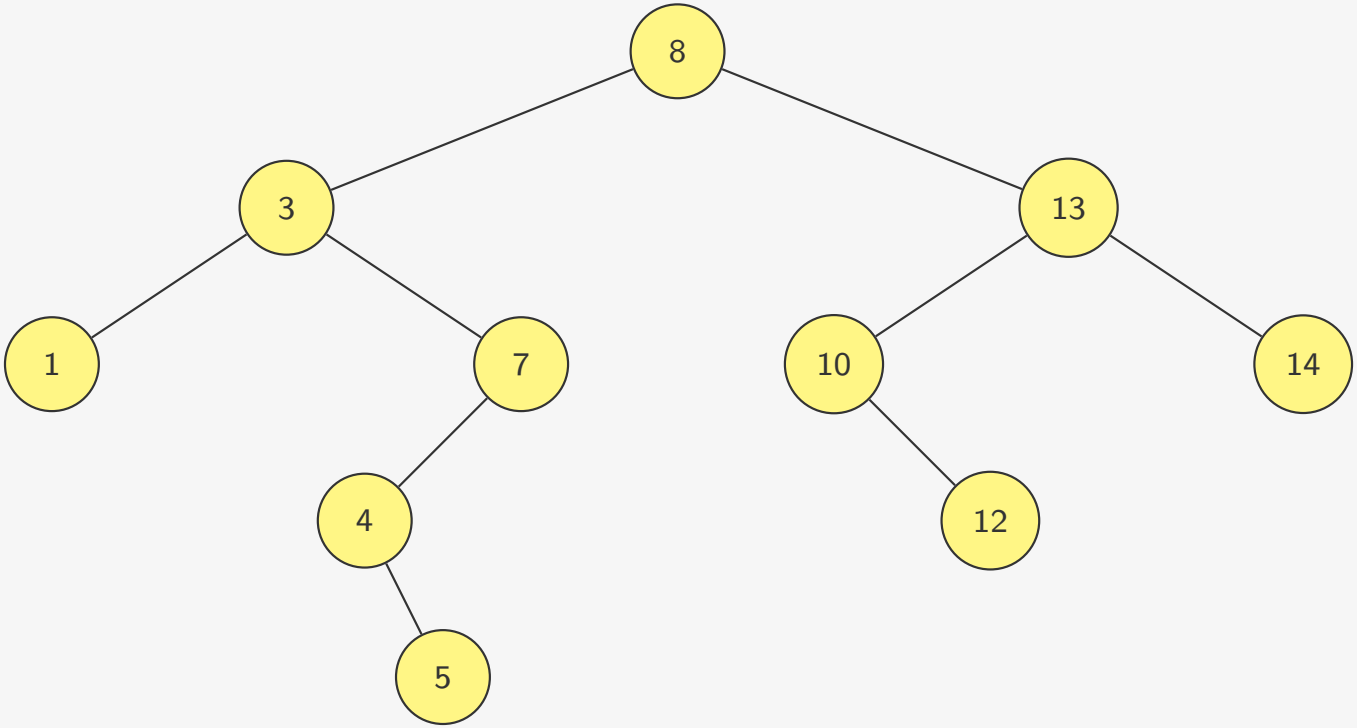
Quem é o sucessor de 3?

- É o mínimo da subárvore direita de 3

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

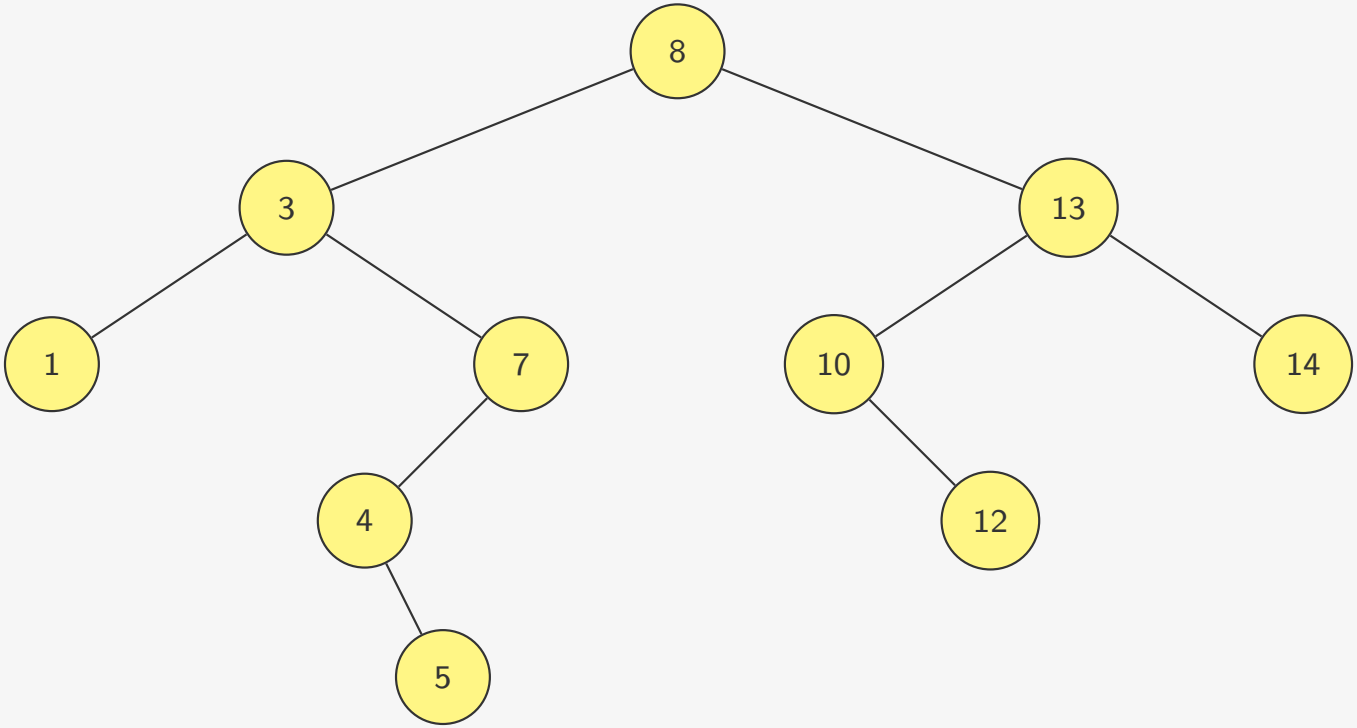
- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

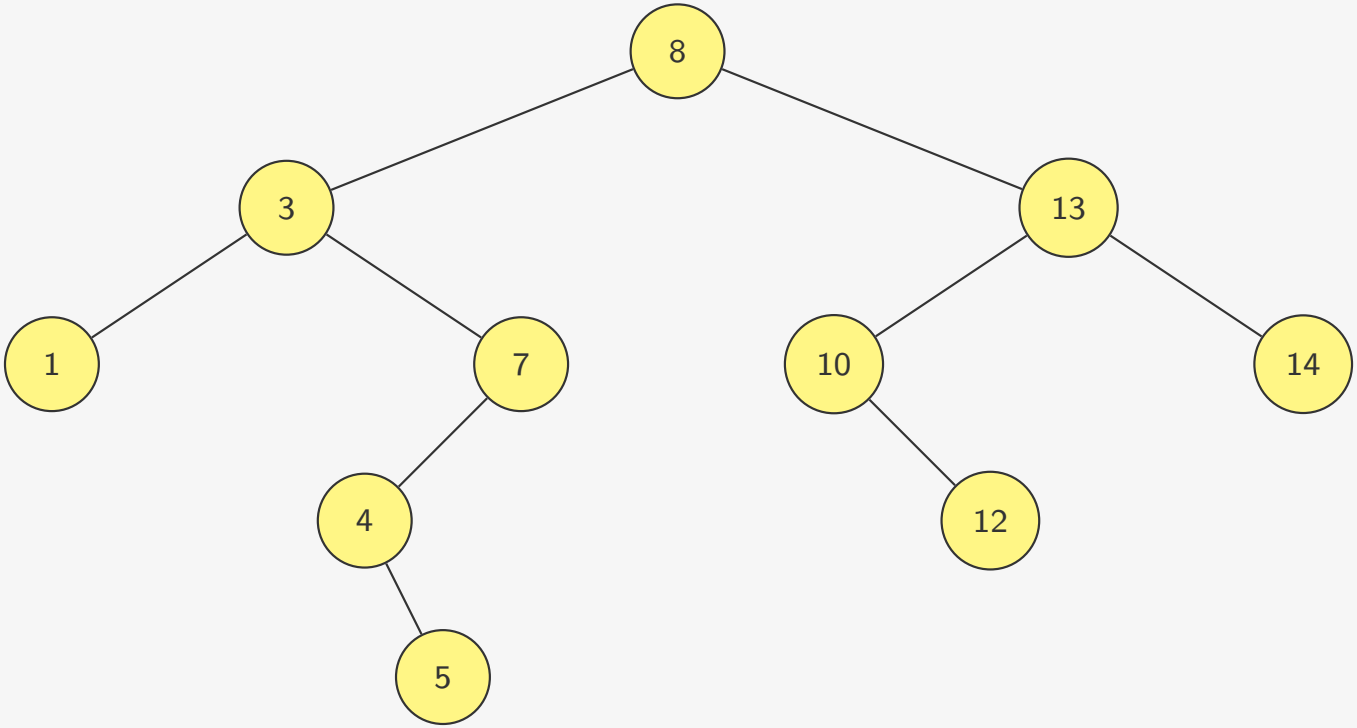


Quem é o sucessor de 7?

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação



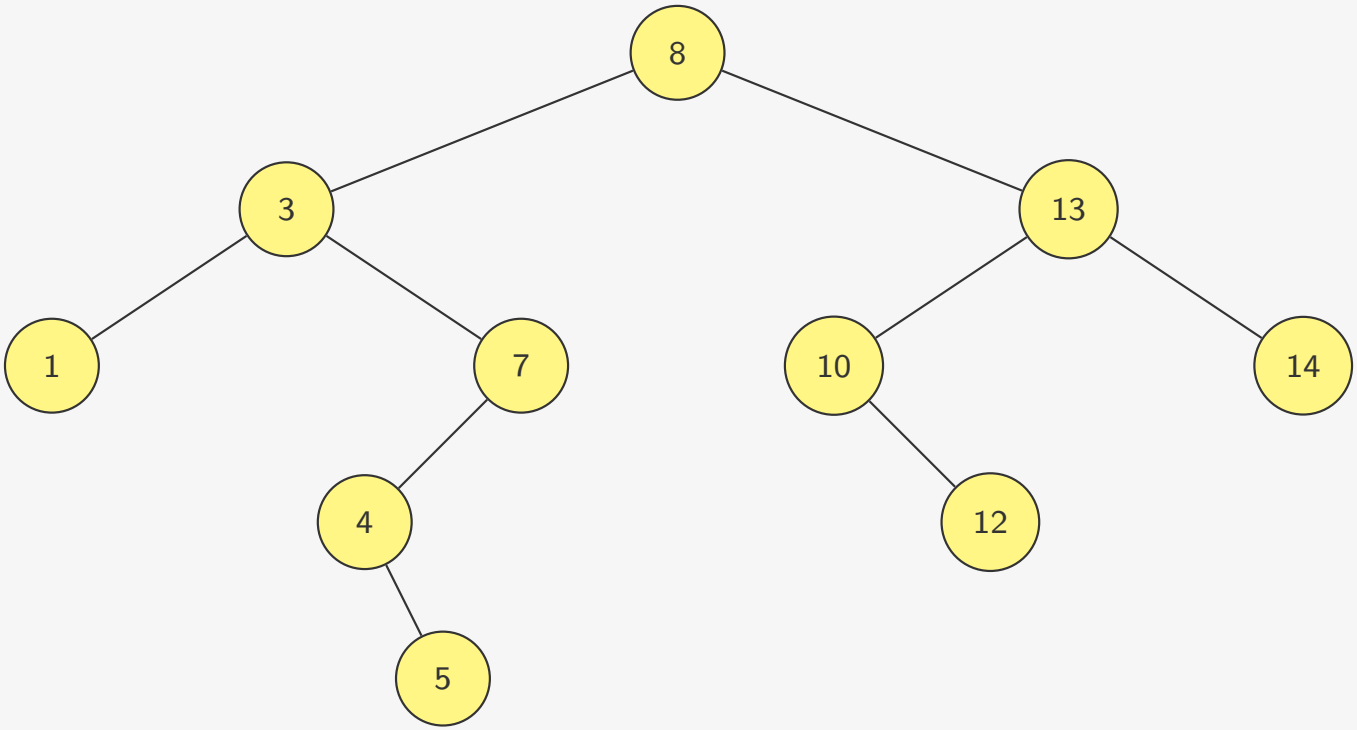
Quem é o sucessor de 7?

- É primeiro ancestral a direita

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

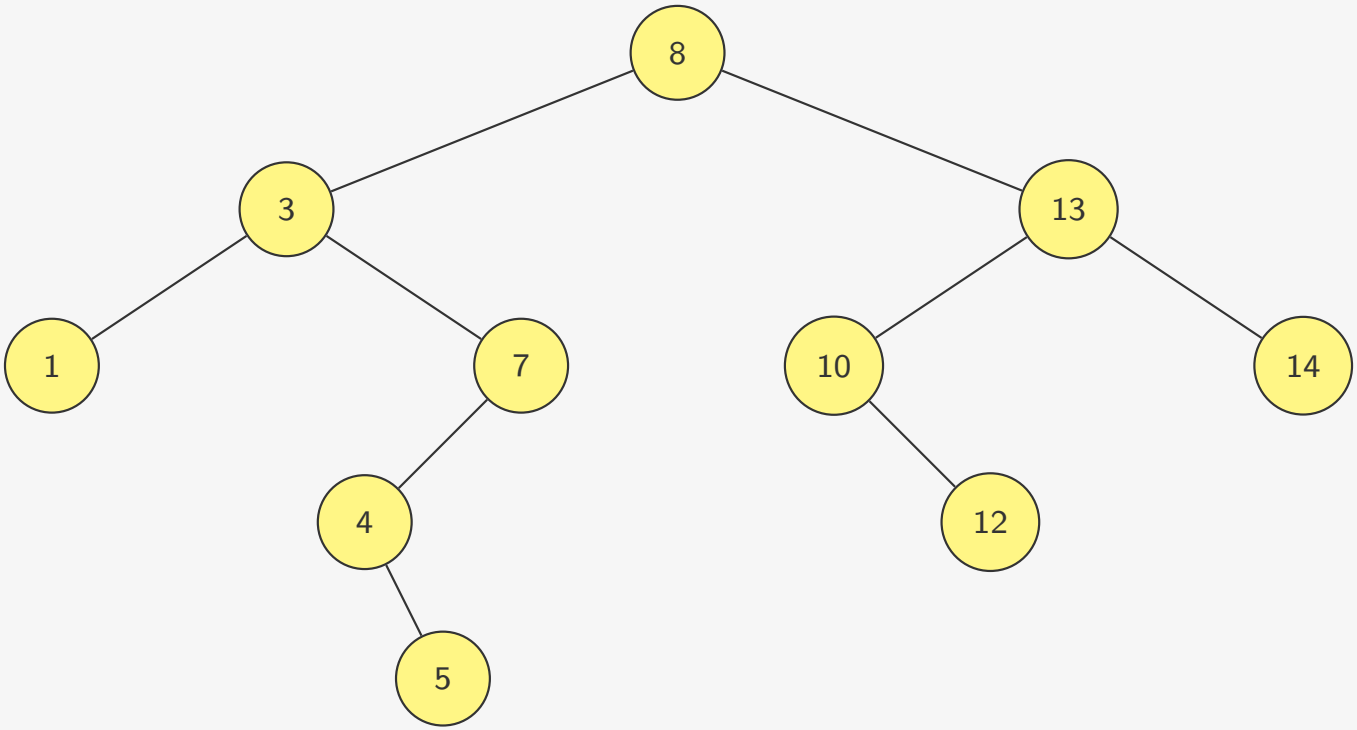
- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

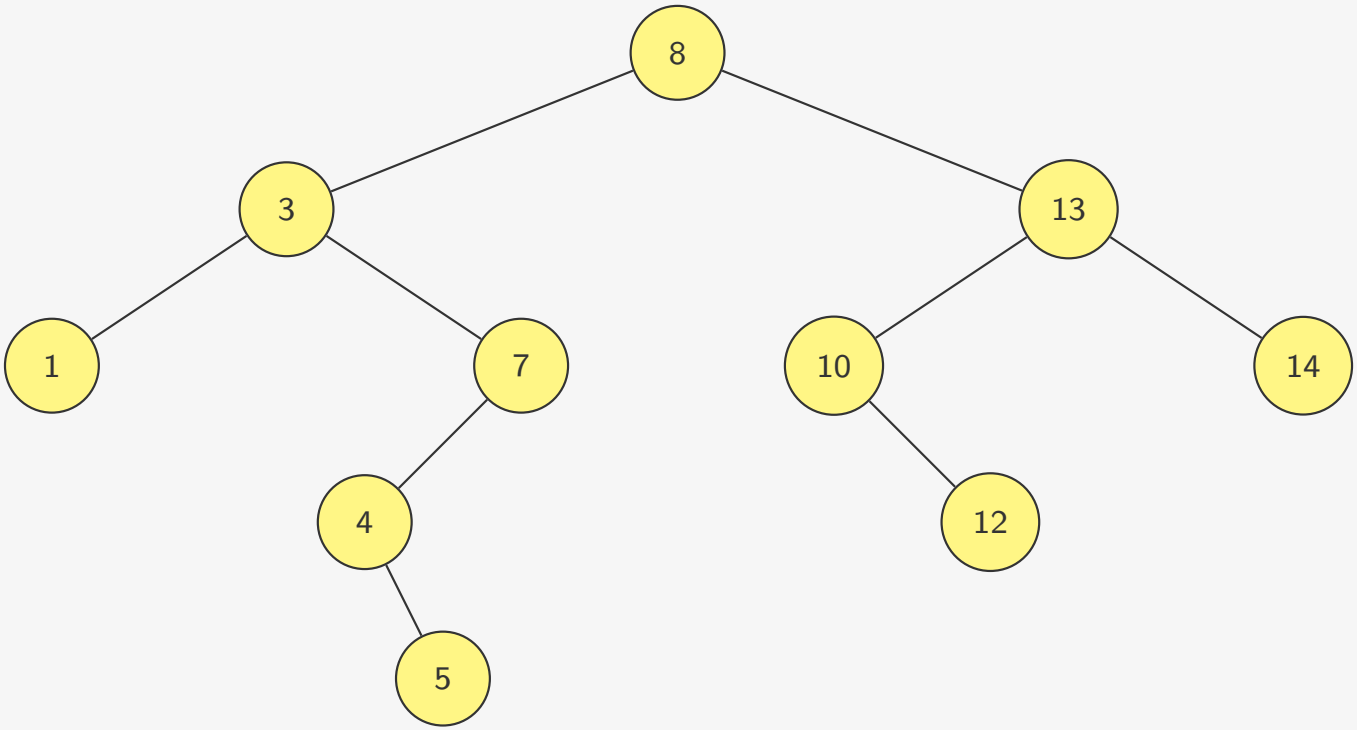


Quem é o sucessor de 14?

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Quem é o sucessor de 14?

- não tem sucessor...

Árvore binária de busca - ABB - Menor chave

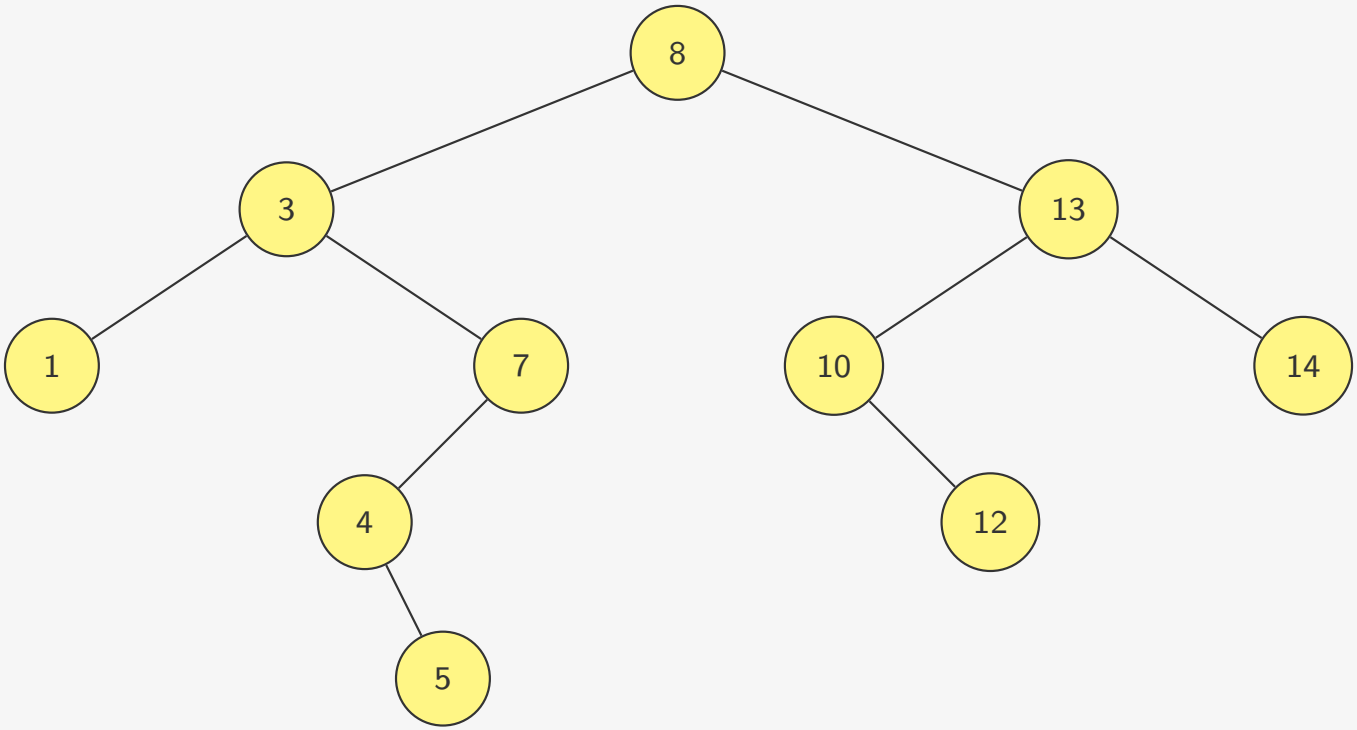
```
1 //menor = elemento mais à esquerda
2 STnode *sucessor(STnode *no)
3 {
4     if (no->dir != NULL) return minimo(no->dir);
5     return ancestral_a_direita (no);
6 }
7
8 STnode *ancestral_a_direita (STnode *no)
9 {
10    if (no == NULL) return NULL;
11
12    //não tenho pai = não ter ancestral OU
13    //ser descendente esquerdo = primeiro ancestral é meu pai
14    if (no->pai == NULL || no->pai->esq == no) //nó com campo
      pai
15        return no->pai;
16
17    //ser descendente direito > pai = procurar ancestral maior
18    return ancestral_a_direita (no->pai);
19 }
20
21 //A implementação da função antecessor é simétrica
```

Árvore binária de busca - ABB - Remoção

- Se tiver filho único, este "assume" seu lugar

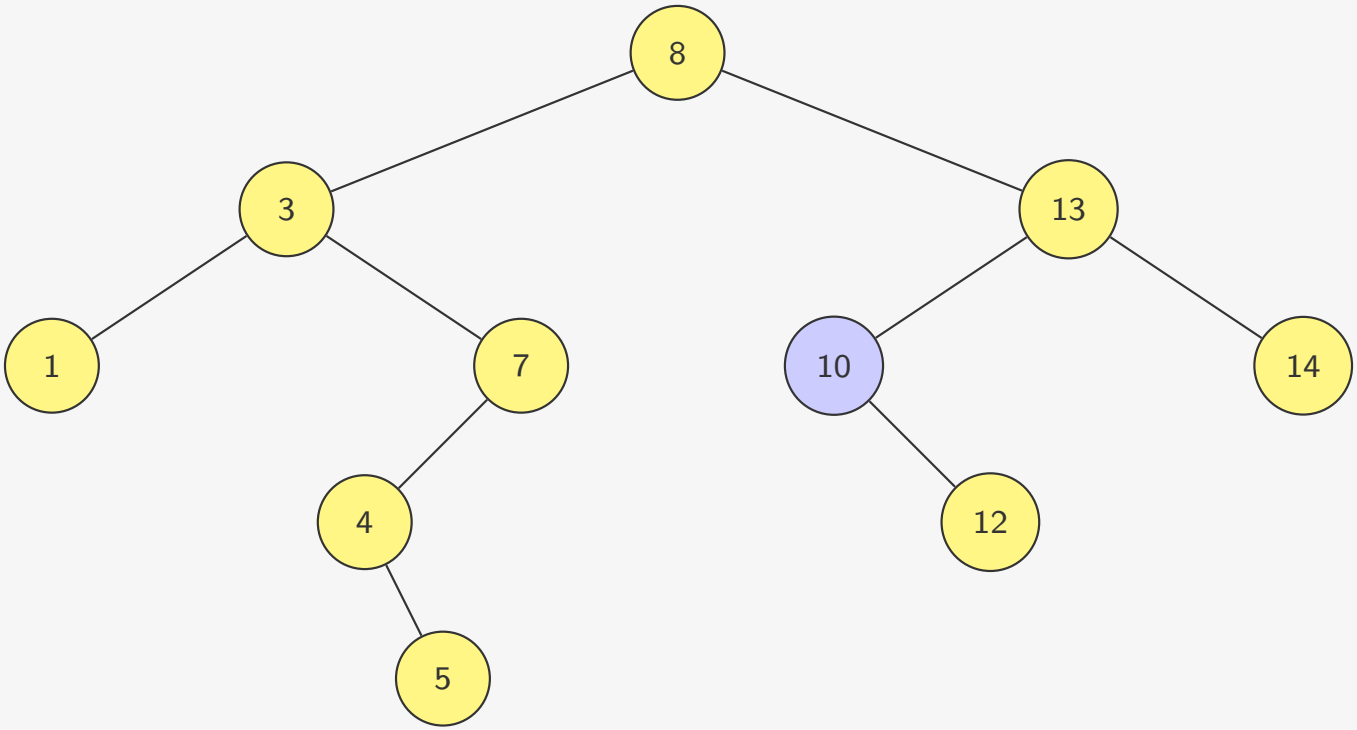
Remoção

Ex: removendo 10



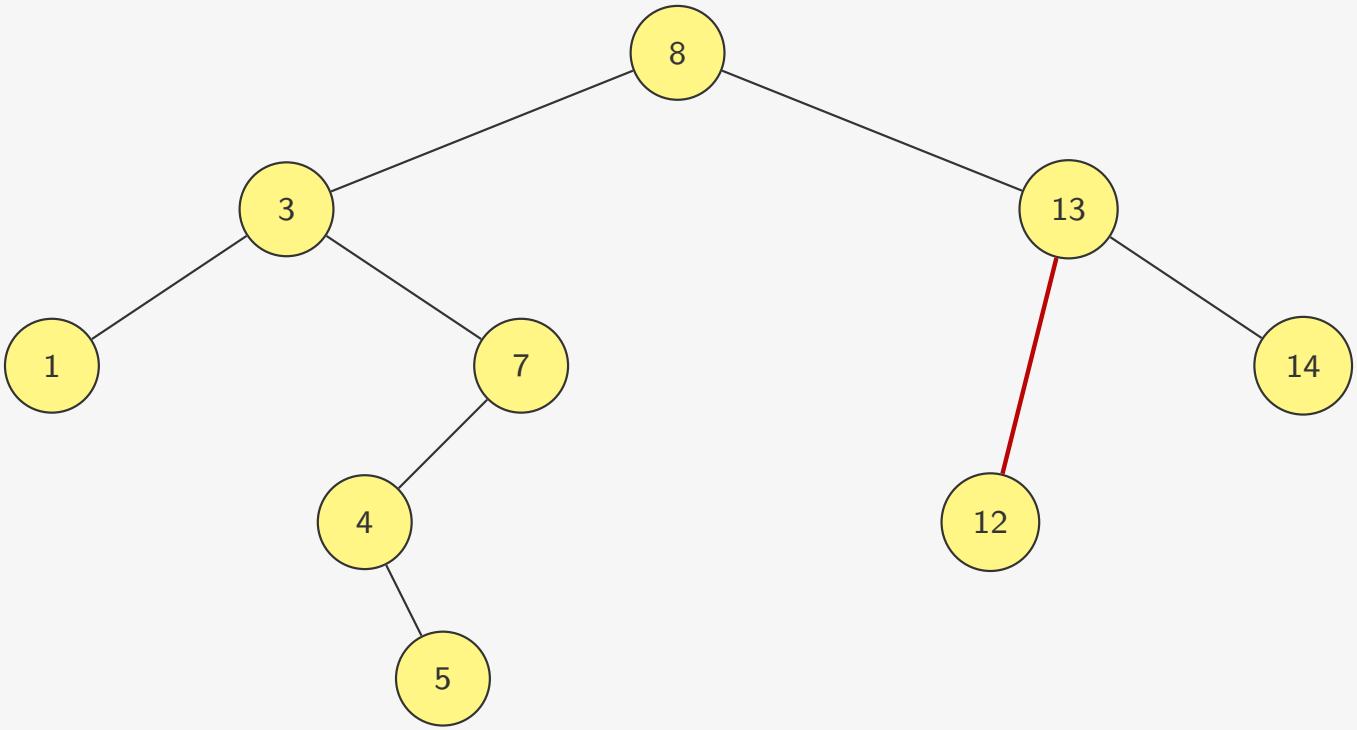
Remoção

Ex: removendo 10



Remoção

Ex: removendo 10

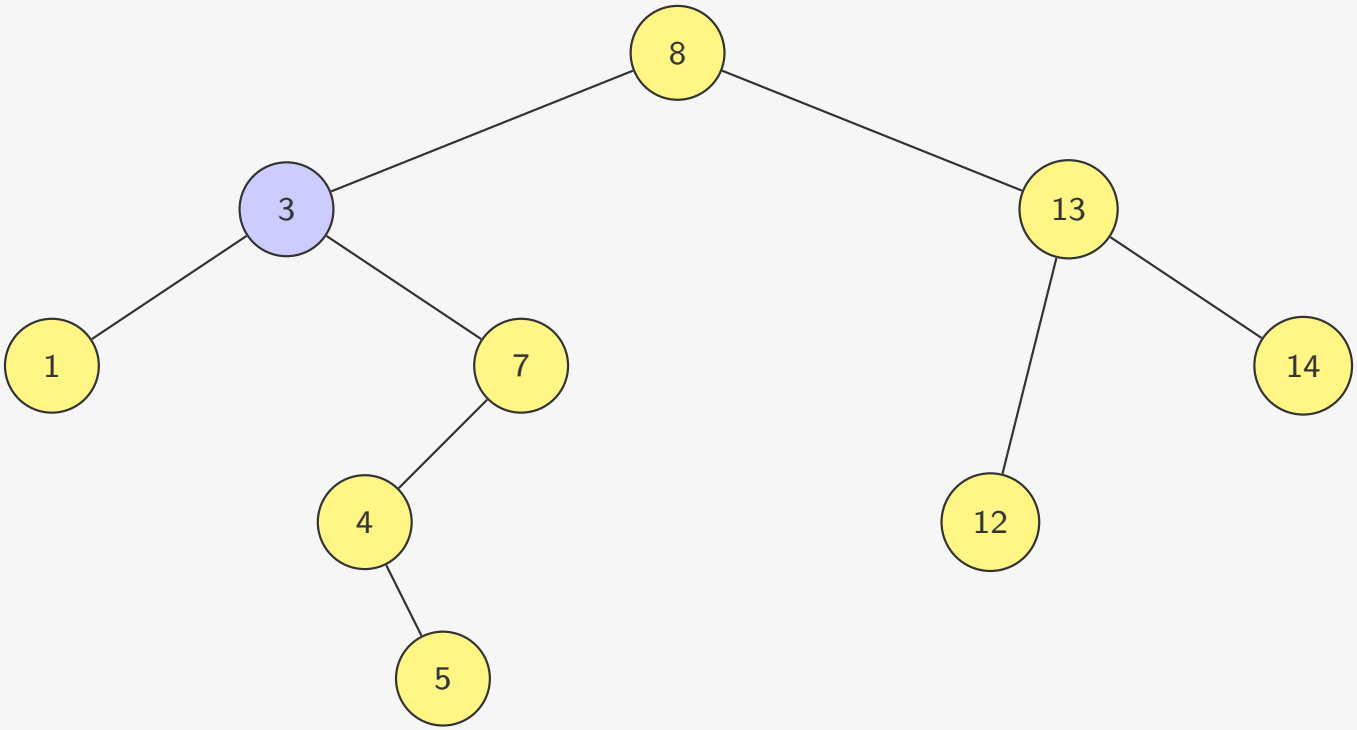


Árvore binária de busca - ABB - Remoção

- Se tiver dois filhos
  - substituto: tenha no máximo 1 filho que será adotado pelo pai do substituto
  - substituto "assume" o lugar do falecido
- O "substituto" deve ser menor que todos os elemento à direita do falecido e maior que todos à esquerda
  - Possibilidade 1:
    - esquerda $<$ menor da direita $<$ direita
    - Sucessor imediato = menor dos maiores = menor da subárvore direita
  - Possibilidade 2:
    - esquerda $<$ maior da esquerda $<$ direita
    - Antecessor imediato = maior dos menores = maior da subárvore esquerda

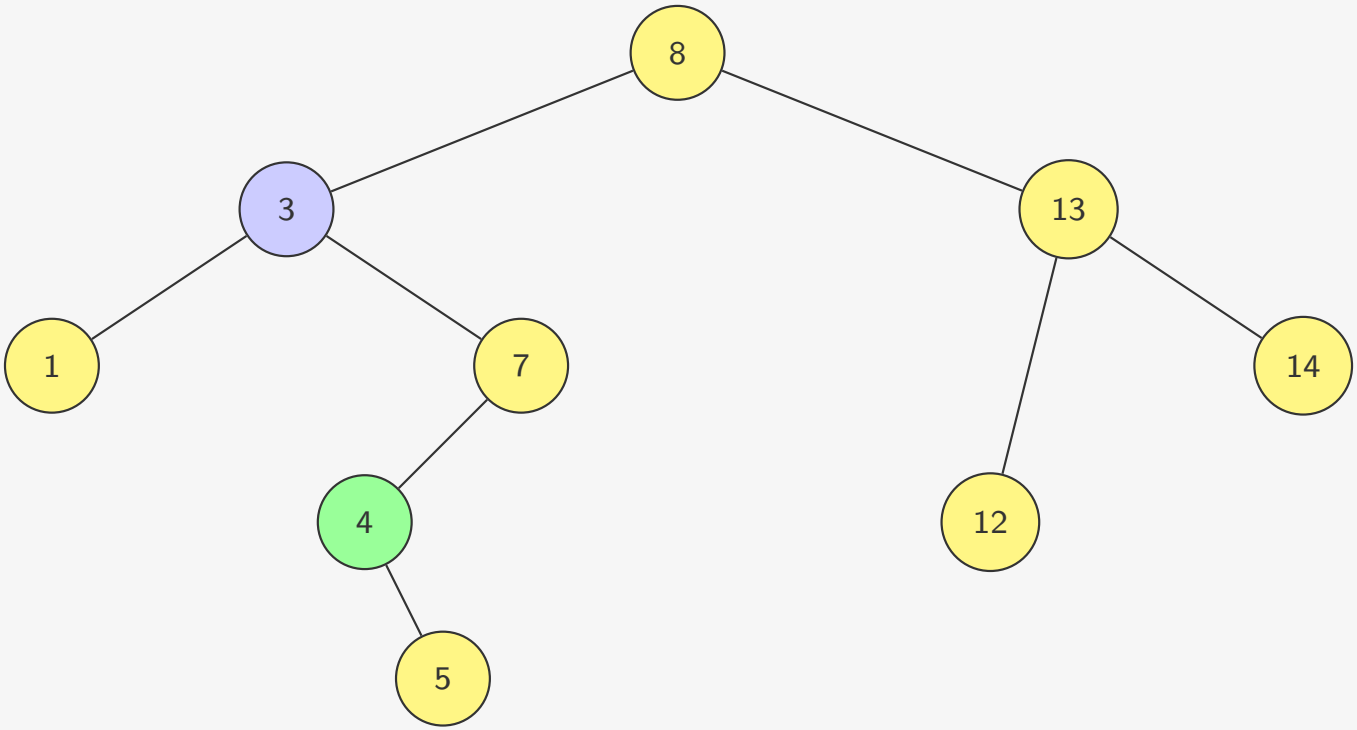
Remoção

Ex: removendo 3



Remoção

Ex: removendo 3

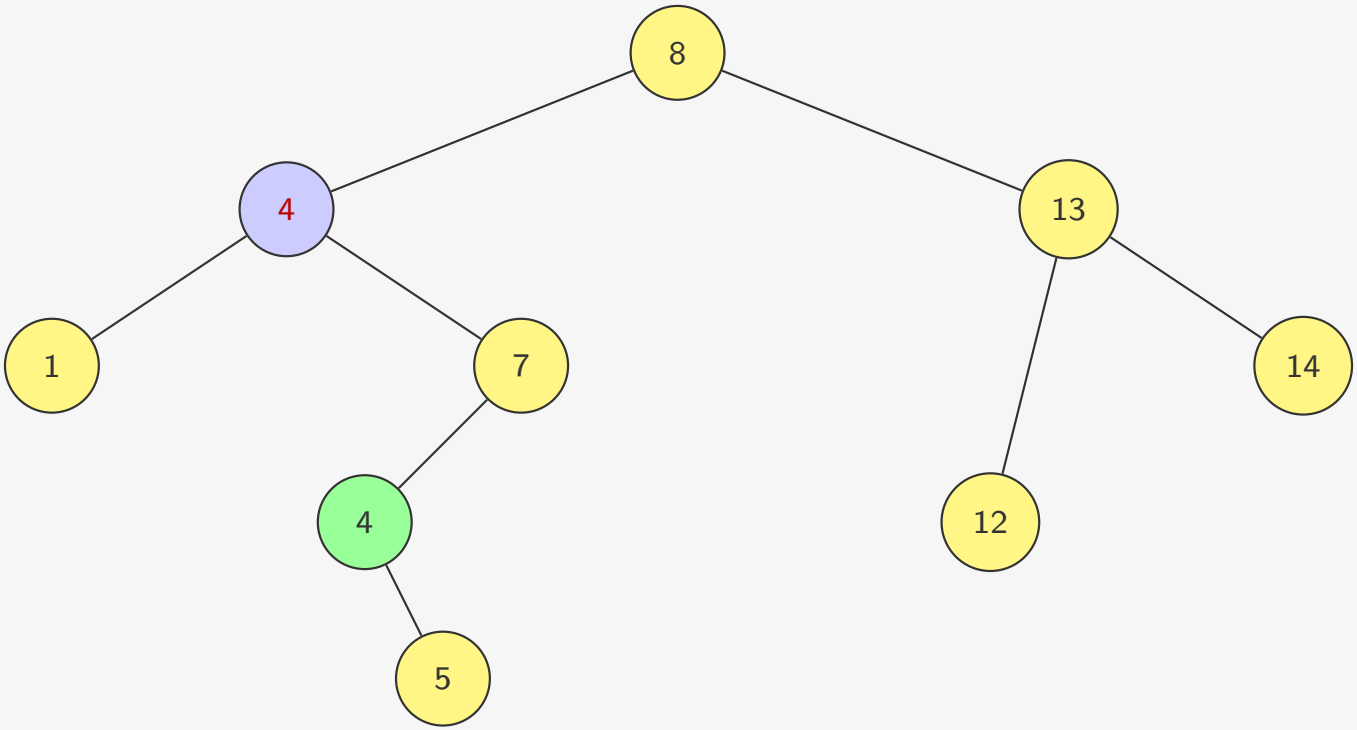


Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

Remoção

Ex: removendo 3

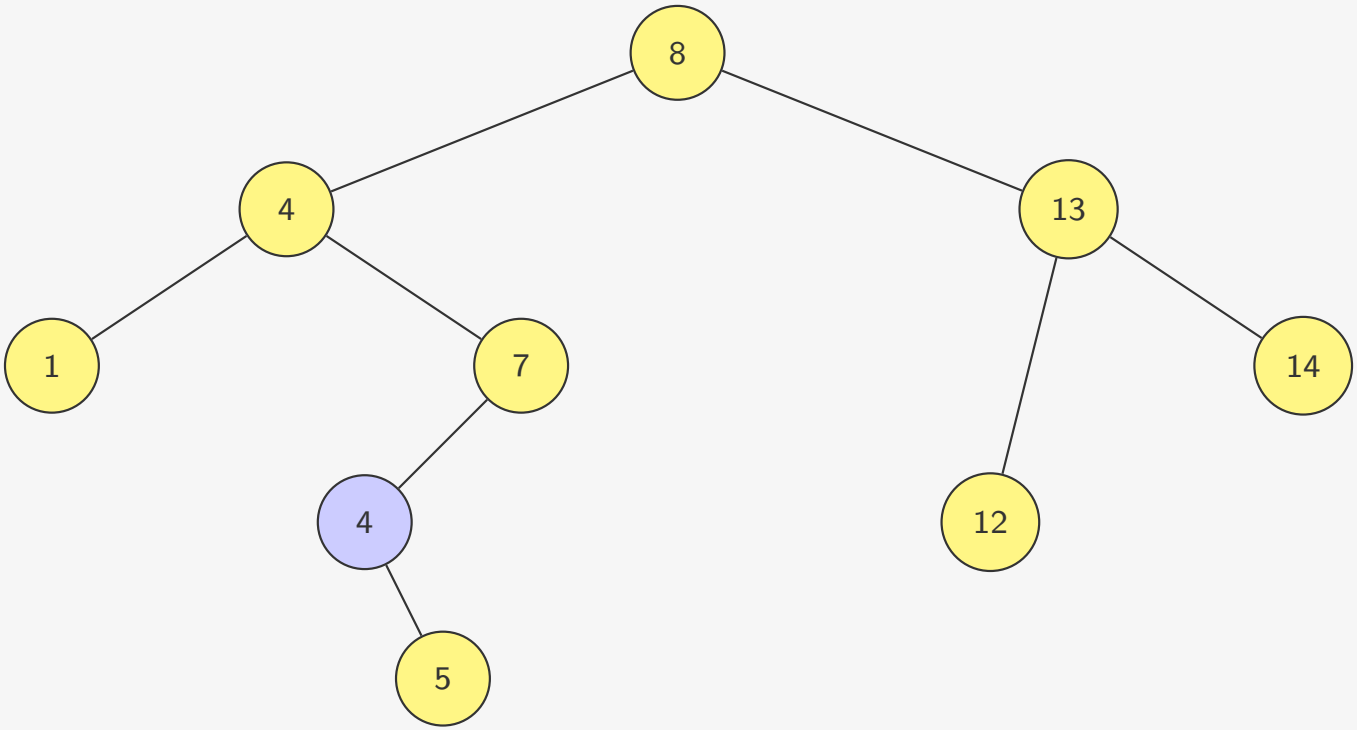


Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

Remoção

Ex: removendo 3



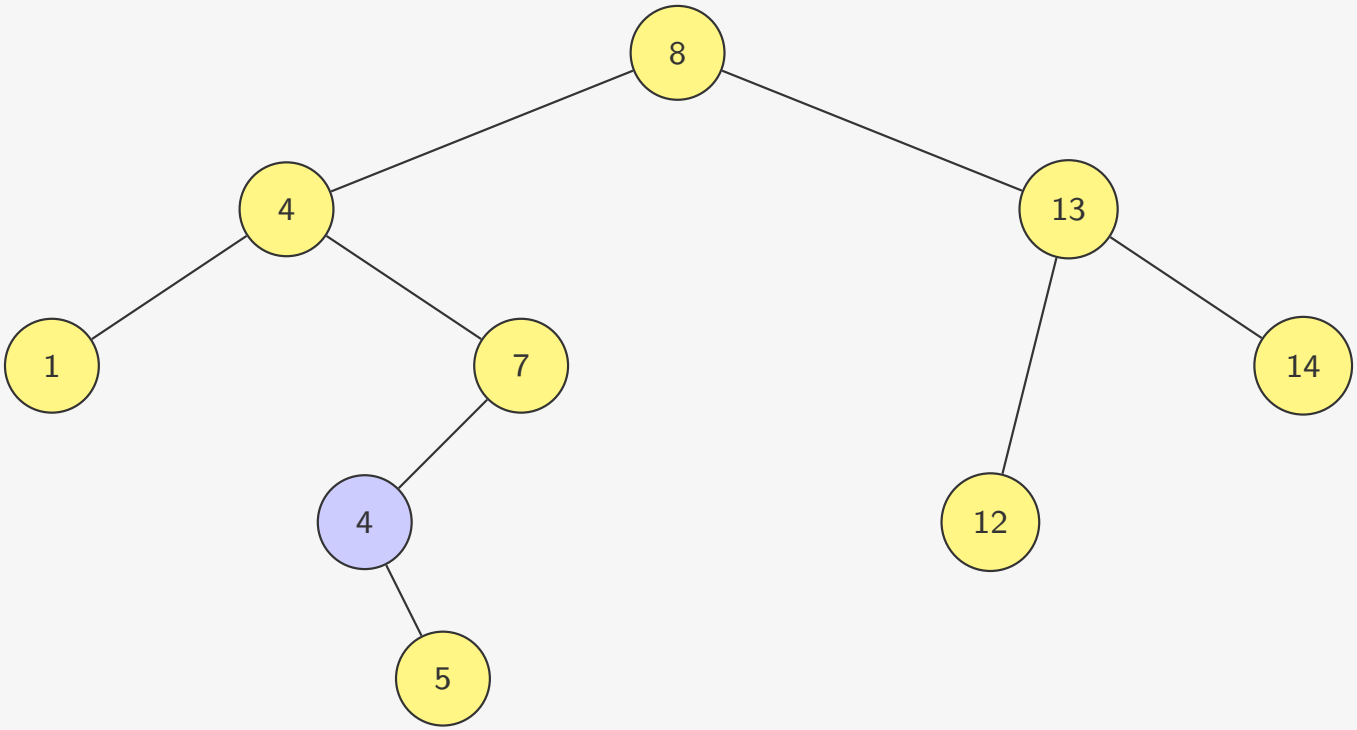
Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora removemos o sucessor

Remoção

Ex: removendo 3



Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

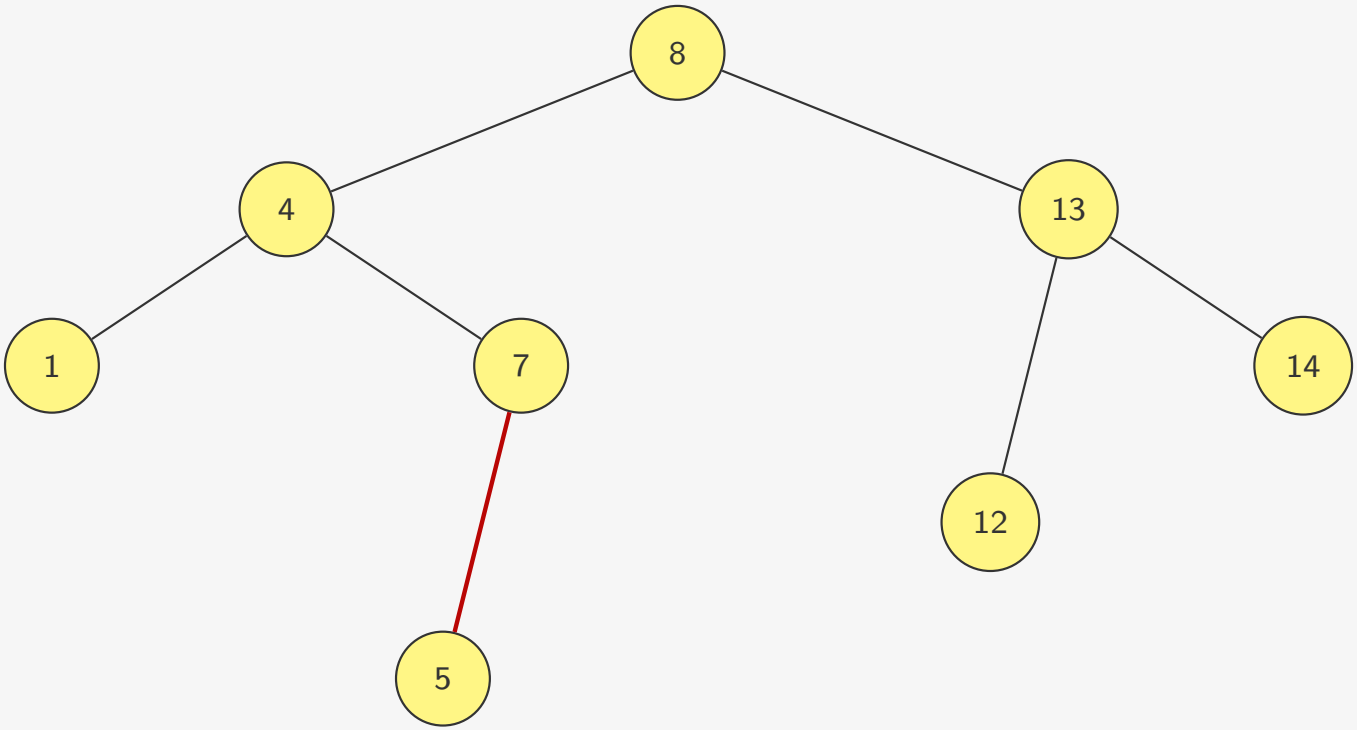
- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora removemos o sucessor

- O sucessor nunca tem filho esquerdo!

Remoção

Ex: removendo 3



Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora removemos o sucessor

- O sucessor nunca tem filho esquerdo!

```
1  STnode *STdelete(STnode *no, Key remove)
2  {
3      //não achou
4      if (no == NULL) return NULL;
5
6      Key atual = key(no->item);
7
8      //procure à esquerda
9      if(less(remove, atual))
10         no->esq = STdelete(no->esq, remove);
11
12     //procure à direita
13     else if(less(atual, remove))
14         no->dir = STdelete(no->dir, remove);
15
16
17     //eq(atual, remove) && somente 1 filho (??)
18
```

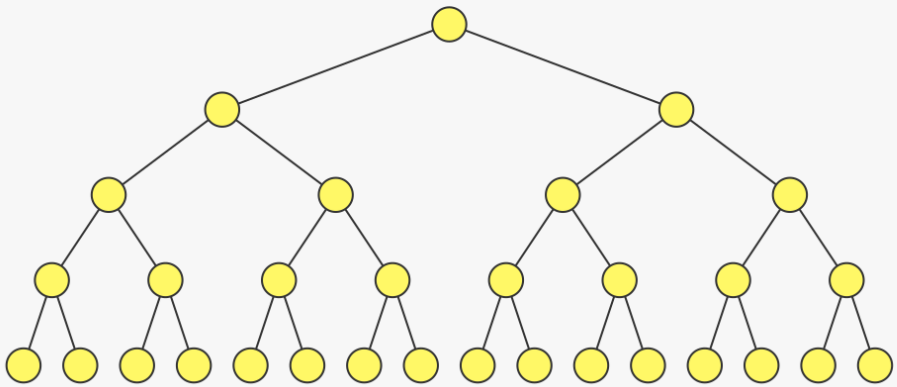
```
19
20      //ou retorne o filho da esquerda ao seu avô
21      else if (no->dir == NULL) {
22          STnode *filho = no->esq;
23          free(no);
24          return filho;
25      }
26
27      //ou retorne o filho da direita ao seu avô
28      else  if (no->esq == NULL) {
29          STnode *filho = no->dir;
30          free(no);
31          return filho;
32      }
33
34      //Se tiver os dois filhos
35      else {
36        remover_sucessor(no);
37      }
38
39      return no;
40  }
```

```
41 void remover_sucessor(STnode *raiz)  {
42     STnode *sucessor = raiz->dir;
43     STnode *pai = raiz;
44 
45     //procurando o pai do sucessor
46     //sucessor = menor dos maiores
47     while(sucessor->esq != NULL) {
48         pai = sucessor;
49         sucessor = sucessor->esq;
50     }
51 
52     //avô assume os filhos
53     if(pai->esq == sucessor)
54         pai->esq = sucessor->dir;
55     else
56         pai->dir = sucessor->dir;
57 
58     raiz->item = sucessor->item;
59     free(sucessor);
60 }
61 
62 //tree = STdelete(tree, c);
```

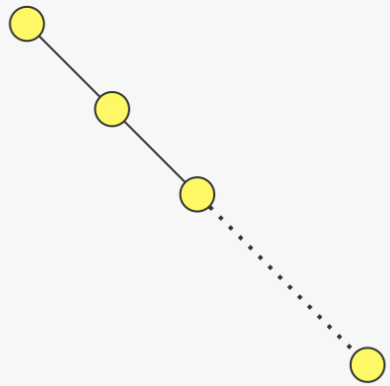
Árvore binária de busca - ABB - Performance

- A busca de um nó na árvore é determinada pela altura h da árvore
- A altura depende do balanceamento da árvore:
  - Nós bem distribuídos nas subárvores
  - subárvores esquerda e direita $\approx$ mesma altura

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $\mathrm{O}(\lg n)$



Pior árvore: $\mathrm{O}(n)$

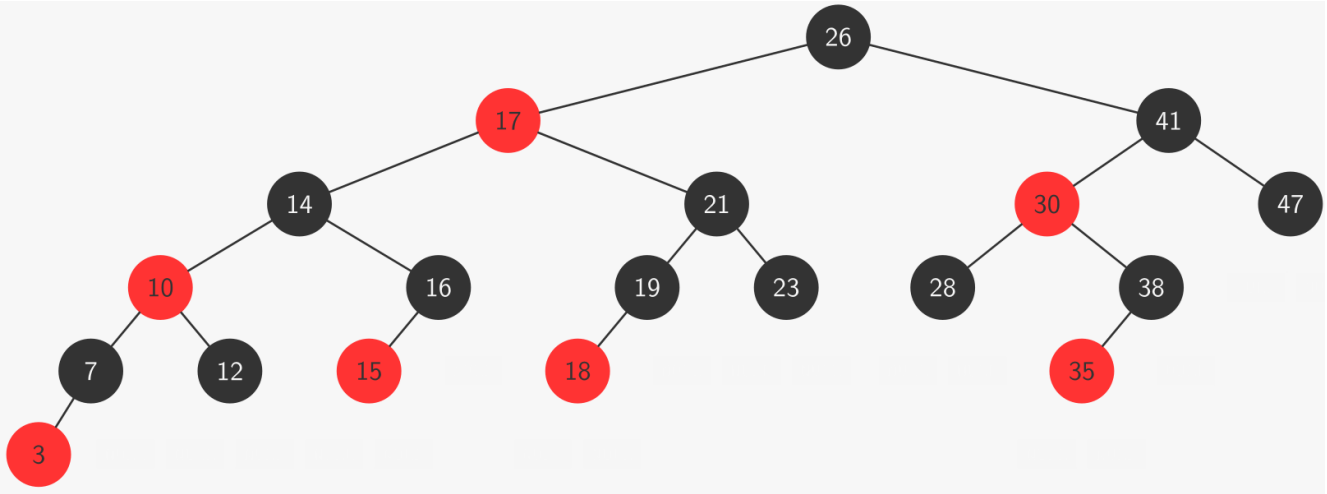
Árvore binária de busca - ABB - Performance

- Custos:
  - Melhor caso: lgN
  - Pior caso: N
  - Caso médio: espera-se $\approx 2lgN \rightarrow O(lgn)$
- Árvores não balanceadas espera-se caso médio $\approx 2lgN$
  - Com chaves aleatoriamente inseridas, árvores:
    - ★ Totalmente balanceadas são raras
    - ★ Totalmente desbalanceadas são raras
- Árvores balanceadas é O(log n) para qualquer situação.
- Técnicas para garantir um certo balanceamento nas ABBs pode tornar as operações mais eficientes
- Exemplos: AVL, Red-black

Roteiro

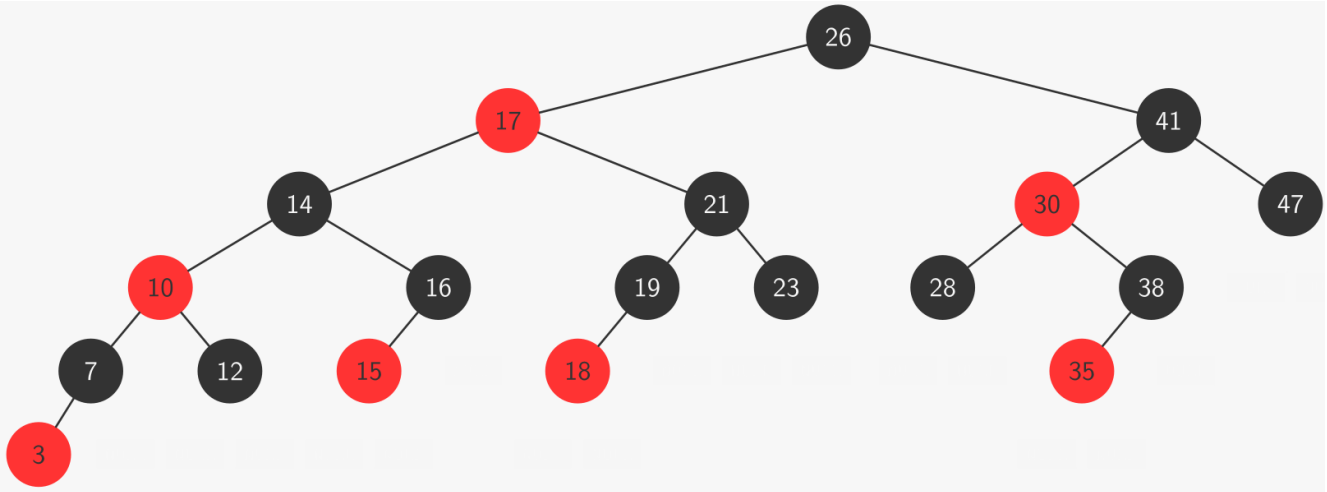
Árvore Red-Black (Vermelho-Preto, Rubro-Negra)

- É uma ABB (árvore binária de busca)
  - Bit extra por nó para cor vermelha ou preta



Árvore Red-Black (Vermelho-Preto, Rubro-Negra)

- Propriedades:
  1. Todo nó é ou vermelho ou preto
  2. A raiz e os nós externos são pretos
  3. Se um nó é vermelho
     - ★ então seus filhos são pretos
     - ★ então é o filho à esquerda (descendente esquerdista)
  4. Todo caminho de um nó até um nó externo contém o mesmo número de nós pretos
- Consequência: não pode existir dois nós vermelhos consecutivos

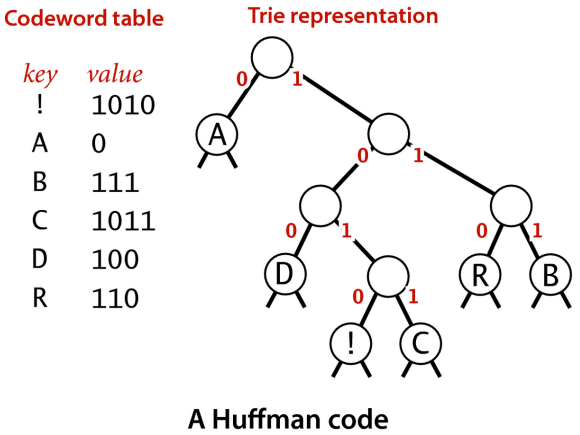


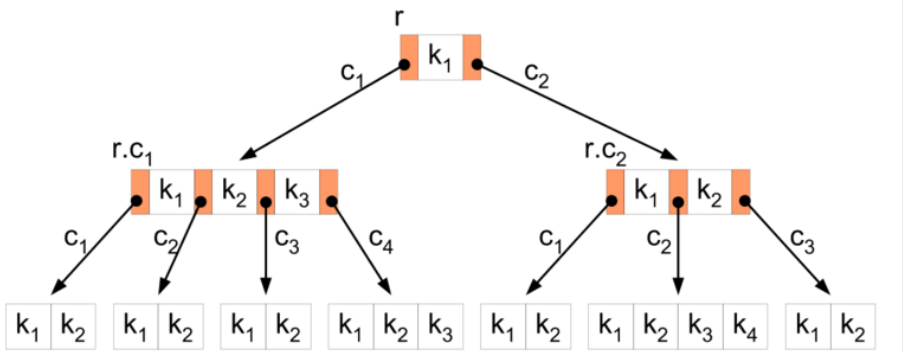
Árvore Red-Black (Vermelho-Preto, Rubro-Negra)

- A busca e alocação na posição segue a regra da ABB
  - Após a localização da posição
  - Verifica-se a violação das regras recursivamente até a raiz
  - Caso alguma não seja satisfeita, são realizadas rotações e/ou ajustes de cores
- Complexidade na busca, inserção e remoção: $O(lgn)$
- Suas propriedades garantem:
  - raiz $\rightarrow$ folha : caminho mais longo $<=$ 2 x caminho mais curto
  - Altura máxima $2lg(n+1)$
  - O resultado é uma árvore aproximadamente balanceada
- Árvores red-black são usadas como a árvore padrão no C++, no JAVA e no kernel do Linux
- `https://www.ic.unicamp.br/~rafael/slides/mc202/unidade17-arvores-balanceadas.pdf`
- EDA2

Outras árvores

- Árvore Balanceada AVL - Adelson, Velskii e Landis:
  - ABB balanceada pela altura, diferindo de no máximo em 1 unidade entre as alturas de suas sub-árvores
- Árvore Trie:
  - Sequência de nós formam a chave
  - Conteúdo dos nós é uma parte da estrutura da chave
  - Exemplo: árvore decodificadora
- Árvore B (e variações):
  - Árvores balanceadas cujo nó(página) é composto por várias chaves
  - Utilizado em pesquisa em memória secundária
  - Os dados são carregados em "pedaços" de dados que caibam na memória principal
  - Aplicações: banco de dados, sistema de arquivos





Comparativo de custos de buscas x estrutura

Underlying data structure	Lookup or Removal		Insertion		Ordered
	average	worst case	average	worst case	
Hash table	O(1)	O(*n*)	O(1)	O(*n*)	No
Self-balancing binary search tree	O(log *n*)	O(log *n*)	O(log *n*)	O(log *n*)	Yes
unbalanced binary search tree	O(log *n*)	O(*n*)	O(log *n*)	O(*n*)	Yes
Sequential container of key–value pairs (e.g. association list)	O(*n*)	O(*n*)	O(1)	O(1)	No

https://en.wikipedia.org/wiki/Associative_array