Estabilização do Sistema Carro-Pêndulo Invertido (T5)

1 Representação de Sistemas Não-Lineares

A maioria dos sistemas físicos apresenta alguma característica não linear como atrito estático, saturação dos atuadores, relações trigonométricas, etc. Uma vez que a transformada de Laplace só é válida para sistemas lineares, devemos recorrer à métodos mais avançados para descrever, analisar e controlar estes sistemas.

No caso linear tradicional, qualquer sistema pode ser representado no espaço de estados conforme

$$\begin{cases} \dot{x} &= A\,x + B\,u \\ y &= C\,x + D\,u \end{cases} \tag{1}$$

onde x, u, y são os vetores de estado, entrada e saída do sistema e os termos A, B, C e D são matrizes. Para descrever sistemas não-lineares no entanto, precisamos de uma representação mais genérica:

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= g(x,u) \end{cases} \tag{2}$$

onde $f(x,u)$ e $g(x,u)$ são funções arbitrárias dos estados e das entradas. Tomemos como exemplo um sistema composto por um pêndulo de giro livre, governado pela seguinte relação diferencial:

$$m\ell^2\,\ddot{\theta} + b\,\dot{\theta} + mg\ell\,\sin(\theta) = \tau\ , \tag{3}$$

onde o sinal θ representa a inclinação do pêndulo, τ representa o torque de entrada e as constantes m, ℓ, b e g representam sua massa, comprimento, coeficiente de atrito dinâmico e gravidade, respectivamente. Podemos facilmente colocar este sistema na forma de espaço de estados não-linear definindo $x_1 \triangleq \theta$, $x_2 \triangleq \dot{\theta}$, $y \triangleq \theta$ e $u \triangleq \tau$. Assim, segue que:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\dfrac{g}{\ell}\,\sin(x_1) - \dfrac{b}{m\ell^2}\,x_2 + \dfrac{1}{m\ell^2}\,u \\ y &= x_1 \end{cases} . \tag{4}$$

Apesar da reapresentação no espaço de estados não-linear ser mais genérica, note que ela carece de matrizes e autovalores que nos permitam determinar a estabilidade do sistema, conforme é tradicionalmente realizado para sistemas lineares.

2 Ponto de Equilíbrio

Um ponto de equilíbrio de um sistema qualquer (linear ou não) é definido pelos valores das entradas $\bar{u}$ e estados $\bar{x}$ tal que uma vez que $x(t_e) = \bar{x}$, então $x(t) = \bar{x}, \;\; \forall\, t \; \geq t_e$. Em outras palavras, é o ponto no espaço de estados onde o sistema pode permanecer sem variar seus estados, ou seja, onde $\dot{x} = 0$.

Portanto, para calcular o ponto de equilíbrio de um sistema qualquer descrito na forma (2), basta encontrar os valores $\bar{u}$ e $\bar{x}$ tal que:

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u}) \; . \tag{5}$$

O valor da saída do sistema no ponto de equilíbrio é por sua vez dada por:

$$\overline{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \; . \tag{6}$$

3 Linearização

Suponha que se deseja projetar um controle para uma planta não-linear na forma (2) para operar no entorno de um determinado ponto de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{u})$. Uma maneira de resolver este problema (utilizando as ferramentas clássicas) é "linearizar" as equações diferenciais do sistema. Para compreender este método, considere as seguintes novas definições, que representam o desvio do estado, da entrada e da saída do sistema em relação ao ponto de equilíbrio de interesse:

$$\delta x \triangleq x - \bar{x} \; , \qquad \delta u \triangleq u - \bar{u} \; , \qquad \delta y \triangleq y - \bar{y} \; . \tag{7}$$

Utilizando a primeira componente da expansão em Série de Taylor de $f(x, y)$ e $g(x, y)$, podemos então aproximar o sistema original não-linear (2) conforme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta \dot{x} & = & A\, \delta x + B\, \delta u \\ \delta y & = & C\, \delta x + D\, \delta u \end{array} \right. \tag{8}$$

onde as matrizes A, B, C e D são

$$\begin{array}{ll} A = \left.\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},\, u=\bar{u}} & B = \left.\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x=\bar{x},\, u=\bar{u}} \\ C = \left.\dfrac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},\, u=\bar{u}} & D = \left.\dfrac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{x=\bar{x},\, u=\bar{u}} \end{array} . \tag{9}$$

Note que este modelo só é fiel ao sistema original em regiões muito próximas ao ponto de equilíbrio considerado na linearização. Portanto, o controle projetado terá um comportamento adequado desde que as variáveis do sistema se mantenham perto do ponto de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{u})$.

4 Projeto de Controle no Espaço de Estados

Uma vez que conhecemos as matrizes A, B, C e D podemos facilmente projetar um controle de realimentação de estados, ou até de realimentação de saída pelo uso de um observador de estados.

Supondo que todos os estados do sistema são medidos diretamente, podemos implementar a seguinte lei de controle para estabilizar localmente o sistema no ponto de equilíbrio da linearização:

$$\delta u = -K\, \delta x \ , \tag{10}$$

lembrando que devemos fazer $u = \delta u + \bar{u}$ e $\delta x = x - \bar{x}$ para corrigir o deslocamento das variáveis em relação ao ponto de linearização. Para projetar vetor de ganhos K basta alocar os autovalores do sistema em malha-fechada, isto é, os autovalores da matriz $A - BK$. Para solucionar este problema de síntese no `MATLAB`, pode-se utilizar a função `K=place(A,B,p)`, onde o vetor "`p`" denota os autovalores desejados.

5 Sistema Carro-Pêndulo

O sistema que vamos tratar neste trabalho é o clássico carro-pêndulo conforme demonstrado pelo esquemático da Figura 1. Este sistema apresenta um comportamento dinâmico muito próximo ao encontrado em veículos do tipo *Segway*, além de robôs bípedes. No esquemático da Figura 1, θ representa o ângulo da haste, z é a posição do carro e u é a força de controle aplicada no sistema. Os parâmetros m_1 e m_2 representam respectivamente as massas do carro e do pêndulo, enquanto que ℓ denota o comprimento da haste.

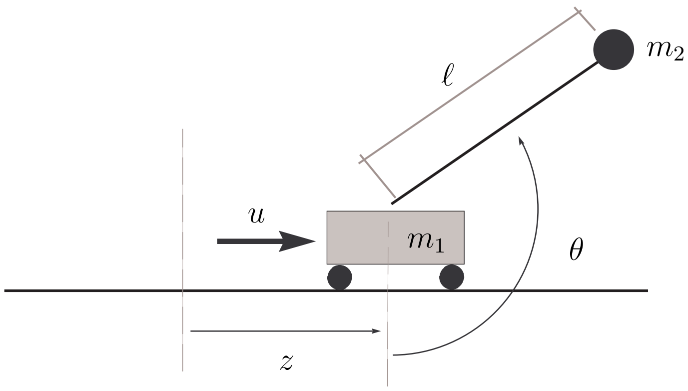

Figura 1: Esquemático do sistema carro-pêndulo.

O objetivo aqui é projetar um controle estabilizante para atuar na força u do carrinho, de forma a manter o ângulo da haste θ equilibrado na sua posição invertida (para cima, ou seja, em π radianos). Além disto, o controle deve simultaneamente regular a posição do carro z para seguir qualquer ponto de referência r desejado.

O sistema carro-pêndulo é governado pela seguinte equação diferencial:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = F(u)\,, \tag{11}$$

onde q representa o vetor de graus de liberdade

$$q = \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}, \tag{12}$$

e as demais matrizes apresentadas tem o seguinte significado:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2\ell\cos(\theta) \\ m_2\ell\cos(\theta) & m_2\ell^2 \end{bmatrix}, \quad C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} b_1 & -m_2\ell\sin(\theta)\dot{\theta} \\ 0 & b_2 \end{bmatrix},$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g\ell\sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad F(u) = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

onde b_1 e b_2 são coeficientes de atrito. Observe que a dinâmica desse sistema é altamente não-linear, o que torna o projeto de controle bastante desafiador.

6 Tarefas

Dada teoria apresentada e o modelo dinâmico do sistema carro-pêndulo, pede-as seguintes tarefas.

1. Abra os arquivos `MATLAB` fornecidos e rode o script `main.m`. Visualize a animação do comportamento natural do sistema sem a aplicação de controle ($u = 0$).

2. Escreva o modelo do sistema carro-pêndulo na forma de espaço de estados não-linear conforme

$$\dot{x} = f(x, u)\,. \tag{14}$$

   Para isto, considere o vetor de estados do sistema como

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

3. Demonstre que a condição colocada a seguir (a qual é referente ao pêndulo na sua postura invertida) é um ponto de equilíbrio do sistema carro-pêndulo:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{u} = 0\,. \tag{15}$$

4. Determine as matrizes A e B do modelo linearizado do sistema carro-pêndulo no entorno do ponto de equilíbrio indicado no item anterior.

   Dica: É permitido utilizar a biblioteca de operações simbólicas do ***`MATLAB`*** *para suporte nas operações matemáticas necessárias. Pode-se utilizar o comando* ***`syms`*** *para criar variáveis simbólicas, a função* ***`diff`*** *para calcular derivadas parciais e a função* ***`subs`*** *para realizar substituições algébricas.*

5. Para estabilizar o sistema no ponto de equilíbrio de interesse indicado no item 3, projete uma lei de controle de realimentação de estados na forma (10) utilizando o modelo linearizado. Faça com que o sistema em malha-fechada tenha um tempo de acomodação menor que 5 segundos.

6. Implemente a sua lei de controle dentro da função `control.m` fornecida. Após rode o arquivo `main.m` para efetuar a simulação e mostrar a animação do sistema. O controle projetado deve ser capaz de acomodar o carro na posição zero e manter a haste equilibrada na posição invertida.

7. Faça com que o carro mova-se de acordo com o sinal de referência r gerado pela função `setpoint.m`. Para isso, você deve simplesmente deslocar o ponto de equilíbrio $\overline{x}$ em função da referência desejada fazendo:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

   Dica: Para suavizar a resposta do sistema nos saltos de referência, aconselha-se filtrar o sinal r antes de aplicá-lo no deslocamento do ponto de equilíbrio.

8. Dentro do script `main.m`, altere a condição inicial relativa ao ângulo do pêndulo (variável `ang0`) para zero e rode novamente a simulação. O que você pode concluir a respeito do resultado observado?

Referências

[1] Slotine, J.J.E. e W. Li. Applied Nonlinear Control. Prentice Hall. 1991.

[2] Khalil, H. K., Nonlinear Systems, 3rd ed. Upper Saddle river, NJ: Prentice Hall, 2002.