Aproximação de Padè (T3)

1 Definição do Problema

Em sistemas de controle industriais é comum a existência de um fenômeno denominado de atraso de transporte, ou tempo morto. Tal fenômeno ocorre, quando a variável de saída de um dado processo percebe variações no sinal de entrada Δt segundos depois desta variação ter efetivamente ocorrido. Para ilustrar fisicamente o efeito do atraso de transporte, considera-se o exemplo do sistema de controle de nível apresentado na Figura 1.

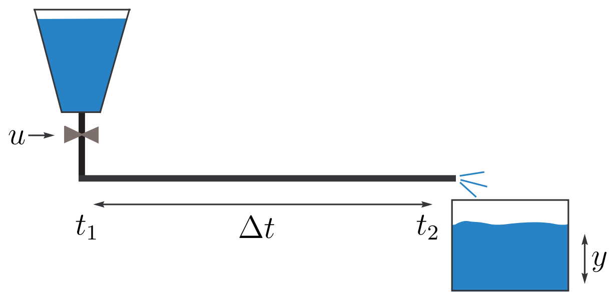

Figura 1: Sistema com atraso de transporte.

Neste exemplo, deseja-se controlar o nível de um dado recipiente localizado no final de uma tubulação. Neste recipiente será colocado um determinado líquido existente em um reservatório. O tempo existente entre o instante em que o líquido, oriundo do reservatório, entra na tubulação até o momento em que este é despejado no recipiente final é caracterizado como o atraso de transporte deste processo.

Processos lineares com atraso de transporte são matematicamente representados no plano s pela sua função de transferência nominal $G(s)$ multiplicada por $e^{-\tau s}$, conforme:

$$G_d(s) = e^{-\tau s} G(s) \,.$$

O termo exponencial representa matematicamente a trasformada de Laplace associada ao atraso de transporte do sistema, onde neste caso $\Delta t = \tau$ significa a duração deste tempo morto. A influência do atraso de transporte em um sistema de controle pode levar a uma perda de desempenho dinâmico do sistema ou mesmo a instabilidade em malha fechada. Este efeito pode ser facilmente verificado através da análise da resposta em frequência de $e^{-\tau s}$:

$$|e^{-\tau j\omega}| = 1 \quad \text{e} \quad \angle\, e^{-\tau j\omega} = -\tau\omega \ .$$

Em outras palavras, o atraso de transporte não modifica a curva de magnitude, mas insere um atraso na curva de fase do sistema proporcional à frequência ω (rad/seg). Portanto, existe uma diminuição na margem de fase do sistema.

2 Aproximação de Padè

Como a transformada de Laplace do atraso de transporte não é uma função racional, sua utilização torna-se difícil em ferramentas de análise como o LGR e Routh-Hurwitz. Uma forma de contornar este problema é aproximar o termo exponencial por uma função racional, utilizando uma técnica descoberta na década de 1890 pelo matemático Henri Padé (17/12/1863 – 09/07/1953). Por meio desta abordagem, pode-se utilizar métodos tradicionais no projeto de sistemas de controle sujeitos ao atraso de transporte pela substituição do bloco de atraso $e^{-\tau s}$ por uma aproximação de Padè $H_n(s)$, a qual é definida conforme:

$$e^{-\tau s} \approx H_n(s) = \frac{b_0 + b_1(\tau s) + \ldots + b_n(\tau s)^n}{a_0 + a_1(\tau s) + \ldots + a_n(\tau s)^n} \ , \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

onde n representa a ordem da aproximação (quanto maior o valor de n, menor é o erro introduzido pela mesma). Os valores dos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $b_0, b_1, \ldots, b_n$ são obtidos pelas relações seguintes:

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{(2n-i)!}{(n-i)!\, i!} \\ \\ b_i = (-1)^i\, a_i \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

A Tabela 1 na sequência apresenta as aproximações de Padè $H_n(s)$ resultantes para $n = 1, 2, 3$.

Tabela 1: Aproximações de Padè de primeira, segunda e terceira ordem.

n	$H_n(s)$
1	$\dfrac{2-(\tau s)}{2+(\tau s)}$
2	$\dfrac{12-6(\tau s)+(\tau s)^2}{12+6(\tau s)+(\tau s)^2}$
3	$\dfrac{120-60(\tau s)+12(\tau s)^2-(\tau s)^3}{120+60(\tau s)+12(\tau s)^2+(\tau s)^3}$

3 Tarefas

O objetivo desta tarefa é sintonizar um regulador dinâmico de nível para um sistema de enchimento de tanques com atraso de transporte, que apresenta o seguinte modelo dinâmico:

$$Y(s) = e^{-5s}\left(\frac{2.475}{s^3+9.472s^2+3.465s+1.256}\right)U(s)\,.$$

Antes de iniciar as tarefas, abra os arquivos fornecidos no `MATLAB` e execute o script `main.m`. Uma animação gráfica da resposta ao degrau do sistema em malha-aberta será mostrada. Observe o comportamento natural deste processo.

Após testar os arquivos `MATLAB`, faça as seguintes tarefas:

1. Utilizando o modelo $G(s)$ nominal da planta (sem o atraso), projete um sistema de controle em malha-fechada utilizando a ferramenta `rltool`. Os seguintes requisitos de projeto devem ser atendidos:

   - Erro de regime nulo para referências/disturbios do tipo degrau;
   - Tempo de acomodação menor que 30 s;
   - Sobre-sinal máximo de 4%;
   - Frequência natural máxima de 10 rad/s na malha-fechada;
   - Controlador e filtro de referência de ordem máxima 2;
   - Amplitude máxima de uma unidade para o sinal de controle.

2. Programe o controlador projetado na função `control.m` fornecida. Rode o script `main.m` para simular o sistema e visualizar a animação da resposta.

3. Analise a resposta temporal obtida e compare com a resposta esperada no `rltool`. O que acontece? Justifique.

4. Construa aproximações de Padè de primeira, segunda e terceira ordem, ou seja $H_n(s)$ para $n = 1, 2, 3$, de forma a representar o atraso de transporte deste processo. Em seguida agregue estas aproximações de atraso no modelo nominal $G(s)$ da planta conforme

$$G_{dn}(s) = H_n(s)G(s)$$

   para $n = 1, 2, 3$. Na sequência, utilize a função `step` do MATLAB para comparar a resposta ao degrau de $G_{d1}(s)$, $G_{d2}(s)$ e $G_{d3}(s)$.

5. Utilizando a $G_{dn}(s)$, refaça seu projeto de controle no `rltool`. Procure atender os mesmos requisitos de projeto originais.

6. Atualize sua função `control.m` com o novo sistema de controle projetado. Rode novamente a simulação do sistema e compare com o resultado obtido anteriormente. O que você pode concluir a respeito?

Referências

[1] Dorf, R.C. e Bishop, R.J. Sistemas de Controle Modernos. LTC Editora, 2008.

[2] Smith, C.A. e Corripio, A. Princípios e Prática do Controle Automático de Processo. LTC Editora, 2008.