Introdução à Teoria de Lyapunov: Swing-up do Pêndulo Invertido (T6)

Certamente a teoria mais importante já desenvolvida para a análise e controle de sistemas não-lineares é a chamada Teoria de Lyapunov. Ela se baseia em uma generalização do conceito de energia e permite que conclusões sobre a estabilidade do sistema sejam tiradas a partir de uma função escalar. Ou seja, através deste método não é necessário solucionar as equações diferenciais que descrevem o sistema para tirar conclusões sobre o mesmo. Além disto, o método direto de Lyapunov não utiliza nenhuma aproximação do sistema, portanto é uma ferramenta muito mais poderosa do que a simples linearização do mesmo.

Energia vs. Estabilidade

Existe uma relação direta entre a energia de um sistema e a estabilidade do mesmo. De forma geral, pode-se dizer que:

1. Todo o ponto em que a energia é zero é um ponto de equilíbrio do sistema;
2. Estabilidade assintótica implica a convergência do sistema para o ponto de energia zero;
3. Instabilidade é relacionada ao crescimento de energia.

Para entender melhor esta analogia entre energia e estabilidade, tomemos como exemplo o sistema massa-mola-amortecedor descrito por

$$m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + cx_1 = 0\,, \tag{1}$$

onde x_1 é o grau de liberdade de posição do sistema, m é a massa, b é o coeficiente de atrito e c é a constante elástica.

A energia mecânica deste sistema é dada pela soma da energia *potencial* e da energia *cinética*, as quais são respectivamente definidas em função da posição x_1 e da velocidade $\dot{x}_1 = x_2$ do mecanismo conforme:

$$E(x) = \frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2\,. \tag{2}$$

Observe que esta função de energia $E(x)$ resulta em valores positivos apenas, com exceção do ponto de equilíbrio $(x_1, x_2) = (0, 0)$ do sistema, onde a energia é igual a zero.

Para analisar a estabilidade deste sistema massa-mola-amortecedor, podemos avaliar a variação temporal da sua energia derivando a função $E(x)$ em relação ao tempo:

$$\dot{E}(x) = cx_1\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2 = cx_1x_2 + x_2(-bx_2 - cx_1) = -bx_2^2\,. \tag{3}$$

Contanto que o coeficiente de atrito b seja maior que zero, note que $\dot{E}(x)$ irá assumir valores negativos para qualquer velocidade $x_2 \neq 0$. Isto indica que a energia do sistema não corre o perigo de crescer, mas sim, tem a tendência de diminuir com o passar do tempo, o que comprova a sua estabilidade. Note porém que, quando velocidade x_2 é igual a zero, a variação da energia torna-se nula, o que poderia indicar a estagnação do sistema em posições x_1 quaisquer. No entanto, isto não ocorre porque de acordo com a equação diferencial do sistema em (1), o mecanismo possui uma componente elástica que faz com que o sistema entre em movimento para todo x_1 diferente de zero. Esta análise nos leva a concluir que todas as possíveis trajetórias $x(t)$ do sistema massa-mola-amortecedor convergem assintoticamente para o ponto de equilíbrio na origem.

O Método Direto de Lyapunov

O matemático russo Aleksandr Lyapunov (1857-1918) explorou o fato de que não é sempre necessário utilizar conhecimentos físicos, como energia cinética e potencial, para analisar a energia e a estabilidade de um sistema. Desta forma sua teoria pode ser vista como uma generalização do conceito de energia proveniente da física, para que seja aplicável em sistemas não-lineares de natureza qualquer. Aqui veremos uma breve introdução ao importante trabalho desenvolvido por Lyapunov. Para buscar informações mais detalhadas, é recomentado consultar os materiais bibliográficos [1] e [2].

Vamos aqui considerar que o sistema em estudo é dado pela seguinte representação diferencial não-linear:

$$\dot{x} = f(x, u)\,, \tag{4}$$

onde x é o vetor de estados, u é a entrada de controle e $f(x, u)$ é a função dinâmica do sistema. Também vamos considerar que o sistema (4) será realimentado por uma lei de controle, possivelmente não-linear, a ser projetada na forma:

$$u = h(x)\,. \tag{5}$$

Assume-se na sequência que $\overline{x} = 0$, representa o ponto de equilíbrio de interesse do sistema para realizar a estabilização do mesmo.

A grande ideia por trás do método direto de Lyapunov é o uso de funções especiais (ditas *Funções de Lyapunov*) para análise da estabilidade de um determinado ponto de equilíbrio. Estas funções de Lyapunov apresentam certas semelhanças com as funções de energia que encontramos na física. Mais precisamente, uma função de Lyapunov $V(x)$ deve ser uma função escalar sempre positiva, com exceção do ponto de equilíbrio de interesse, onde seu valor deve ser zero. Portanto, assim podemos escrever o primeiro critério para construção de uma função de Lyapunov[1]:

$$V(x) > 0\;\forall\, x \neq 0\,, \quad V(0) = 0\,. \tag{6}$$

Note que a função de energia cinética e potencial mostrada em (2) seria uma possível candidata à função de Lyapunov para analisar o sistema massa-mola amortecedor em relação ao ponto de equilíbrio na origem, pois atende ao critério de positividade em (6). No entanto, observe que esta não seria a única escolha possível, poderíamos optar por trabalhar com uma outra função de Lyapunov na forma $V(x) = x_1^4 + x_2^4$, a qual não teria um sentido físico específico mas ainda assim atenderia o requisito de positividade.

Conforme proposto por Lyapunov, para comprovar que a origem é um o *ponto de equilíbrio estável* do sistema, é necessário encontrar uma função de Lyapunov $V(x)$, que atenda o critério (6), e que adicionalmente tenha derivada temporal sempre menor ou igual a zero:

$$\dot{V}(x) \leq 0\,. \tag{7}$$

Esta condição garante que $V(x)$ não corre o risco de crescer com o passar do tempo, indicando estabilidade. Esta consideração por si só, no entanto, não garante a *estabilidade assintótica* da origem, ou seja, não garante que este seja um ponto ao qual as trajetórias são atraídas. Para conseguir comprovar a estabilidade assintótica, é necessário garantir que a derivada função de Lyapunov $V(x)$ seja estritamente negativa para qualquer ponto além da origem, ou seja:

$$\dot{V}(x) < 0\;\forall\, x \neq 0\,. \tag{8}$$

[1]As funções que atendem este critério são chamadas de *positivas-definidas*.

Neste último caso, estaria rigidamente comprovado que a origem trata-se de um ponto assintoticamente estável. Caso as condições (6) e (8) sejam adicionalmente válidas para todo o espaço de estados x e caso a função escolhida $V(x)$ seja ilimitada, segue que a origem é um ponto de equilíbrio *globalmente assintoticamente estável*, ou seja, para qualquer condição inicial $x(0)$, a solução $x(t)$ irá convergir para zero com o passar do tempo. Esta última constatação mostra o poder da abordagem direta de Lyapunov, que permite obter conclusões globais sobre um sistema não-linear, algo que seria inviável pelo método da linearização.

Vamos agora estudar um simples exemplo numérico de projeto de controle não-linear pela abordagem direta de Lyapunov. Considere um sistema escalar (de apenas um estado) o qual é supostamente descrito pela seguinte equação diferencial não-linear:

$$\dot{x} = x^5 + x^2 u \,. \tag{9}$$

O objetivo aqui é desenvolver uma lei de controle $u = h(x)$ de forma que o ponto de origem $x = 0$ deste sistema seja globalmente assintoticamente estável. Observe que este problema de controle seria intratável pelo método da linearização, visto que a linearização resultaria nas matrizes $A = 0$ e $B = 0$, que é claramente é um par não-controlável.

Para projetar um controle que estabiliza globalmente a orgiem do sistema (9), vamos utilizar a seguinte função de Lyapunov candidata:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \,,$$

que é claramente uma função positiva para todo x diferente de zero. Ao derivar esta $V(x)$ em relação ao tempo, obtemos:

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} \,.$$

Aplicando a dinâmica do sistema na relação anterior, vemos que:

$$\dot{V}(x) = x^6 + x^3 u \,.$$

Para forçar o critério de estabilidade assintótica global, devemos garantir que $\dot{V}(x)$ seja negativa para todo x diferente de zero. Para garantir esta condição, vamos agora considerar a seguinte lei de controle não-linear candidata:

$$u = -k_1 x - k_2 x^3 \,,$$

onde k_1 e k_2 são ganhos de ajuste deste controlador. Inserindo esta lei de controle na $\dot{V}(x)$, segue que:

$$\dot{V}(x) = -k_1 x^4 - (k_2 - 1)x^6 \,.$$

Para garantir $\dot{V} < 0 \; \forall x \neq 0$, basta considerar uma sintonia que atenda os seguintes requisitos:

$$k_1 \geq 0 \,, \qquad k_2 > 1 \,.$$

Conclui-se portanto que, neste caso, a lei de controle indicada vai estabilizar globalmente a origem do sistema (9).

Observe que o processo de projetar um controlador não-linear envolve a escolha de uma função de Lyapunov adequada que permita satisfazer os critérios (6) and (8), o que em geral não é uma tarefa trivial, visto que não existe uma procedimento sistemático padrão que sempre irá funcionar. Em geral, procuramos trabalhar com funções de Lyapunov com termos quadráticos, assim com foi considerado neste exemplo. No entanto, podem existir problemas que exijam funções de Lyapunov mais complexas para satisfazer os critérios de estabilidade. Por esta razão, o ramo de análise e controle de sistemas não-lineares pelo método de Lyapunov é um tópico ativo de pesquisa até a atualidade.

Swing-Up do Pêndulo Simples

Vamos agora estudar um *framework* para controle de sistemas mecânicos de pêndulos conforme proposto no artigo [3] indicado nas referências. Este trabalho baseia-se na energia do sistema para construção da função Lyapunov, o que permite resolver de maneira razoavelmente sistemática o clássico problema de swing-up.

Tomemos com exemplo um sistema composto por um pêndulo simples sem atrito, o qual é regido pela seguinte equação diferencial:

$$m\ell^2 \, \ddot{\theta} + mg\ell \, \sin(\theta) = \tau \ , \tag{10}$$

onde o sinal θ representa a inclinação do pêndulo, τ representa o torque de entrada e as constantes m, ℓ e g representam sua massa, comprimento e gravidade, respectivamente. Considere que o ângulo θ seja medido de forma anti-horária a partir de sua posição de repouso natural para baixo. Vamos agora escrever a energia mecânica deste sistema, que é formada por uma parcela cinética e outra potencial:

$$E(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos(\theta))\,. \tag{11}$$

Deseja-se aqui projetar uma lei de controle para o torque τ de forma que a postura do pêndulo convirja assintoticamente para a configuração invertida $(\theta,\dot{\theta}) = (\pi, 0)$ a partir de qualquer condição inicial. Note que nesta configuração final desejada, a energia do pêndulo é

$$E_d = 2mg\ell\,, \tag{12}$$

visto que $\cos(\pi) = -1$. Seguindo a proposta apresentada em [3], vamos considerar a seguinte função de Lyapunov candidata, a qual é definida por uma função quadrática da diferença entre a energia atual do sistema e a energia final desejada:

$$V(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\Delta E(\theta,\dot{\theta})^2\,, \quad \Delta E(\theta,\dot{\theta}) \triangleq E(\theta,\dot{\theta}) - E_d\,. \tag{13}$$

Se conseguirmos projetar uma lei de controle que assegure que $\dot{V}(\theta,\dot{\theta})$ seja menor que zero sempre que $\Delta E(\theta,\dot{\theta})$ for diferente de zero, isso irá garantir que $\Delta E(\theta,\dot{\theta})$ irá convergir para zero, o que indiretamente garantirá a convergência do pêndulo para a configuração invertida desejada.

Para resolver o problema postulado acima, devemos começar pela avaliação da derivada temporal de $\Delta E(\theta,\dot{\theta})$ conforme abaixo:

$$\Delta\dot{E}(\theta,\dot{\theta}) = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\sin(\theta)\dot{\theta} = \dot{\theta}\tau\,. \tag{14}$$

Assim, observe que a derivada temporal da função de Lyapunov pode ser desenvolvida da seguinte maneira:

$$\dot{V}(\theta,\dot{\theta}) = \Delta E(\theta,\dot{\theta})\Delta\dot{E}(\theta,\dot{\theta}) = \dot{\theta}\Delta E(\theta,\dot{\theta})\tau\,. \tag{15}$$

Para forçar que $\dot{V}(\theta,\dot{\theta})$ seja negativa, podemos utilizar a seguinte lei de controle não-linear:

$$\tau = -\tau_{max}\,\mathrm{sign}(\dot{\theta}\Delta E(\theta,\dot{\theta}))\,, \tag{16}$$

onde a constante $\tau_{max} > 0$ representa o torque máximo de saturação do atuador e $\mathrm{sign}(\cdot)$ representa a função “sinal”:

$$\mathrm{sign}(x) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}\,. \tag{17}$$

Por meio da lei de controle (16), podemos observar que

$$\dot{V}(\theta,\dot{\theta}) = -\tau_{max}|\dot{\theta}\Delta E(\theta,\dot{\theta})|\,, \tag{18}$$

visto que $\text{sign}(x)x = |x|$. Assim, fica evidente que $\dot{V}(\theta,\dot{\theta})$ será negativa sempre que $\Delta E(\theta,\dot{\theta})$ for diferente de zero, o que comprova que a lei de controle (16) realizará com o sucesso o swing-up do pêndulo.

Note que a lei de controle (16) encontrada é extremamente agressiva, visto que o torque de controle τ será chaveado entre o valor máximo τ_{max} e o valor mínimo $-\tau_{max}$. Para suavizar esta lei de controle e permitir que τ assuma valores intermediários, podemos redefinir a lei de controle utilizando uma função de saturação:

$$\tau = -\tau_{max}\,\text{sat}(k\dot{\theta}\Delta E(\theta,\dot{\theta}))\,, \tag{19}$$

onde neste caso, $k > 0$ é um parâmetro livre de ajuste[2] e a função $\text{sat}(\cdot)$ tem o seguinte significado:

$$\text{sat}(x) \triangleq \begin{cases} \text{sign}(x) & \text{if } |x| \geq 1 \\ x & \text{if } |x| < 1 \end{cases}. \tag{20}$$

Observe que a lei de controle (19) suaviza a entrada de controle quando o termo $\dot{\theta}\Delta E(\theta,\dot{\theta})$ está se aproximando de zero, evitando o efeito de *chattering* (chaveamento de alta frequência) no controle. Note também que nos casos em que $|k\dot{\theta}\Delta E(\theta,\dot{\theta})| \geq 1$, a conclusão permanece a mesma do caso anterior. Por outro lado, quando $|k\dot{\theta}\Delta E(\theta,\dot{\theta})| < 1$, podemos notar que

$$\dot{V}(\theta,\dot{\theta}) = -\tau_{max}k\dot{\theta}^2\Delta E(\theta,\dot{\theta})^2\,. \tag{21}$$

Logo, a lei (19) ainda assegura que $\dot{V}(\theta,\dot{\theta})$ seja negativa sempre que $\Delta E(\theta,\dot{\theta})$ for diferente de zero.

Observação: Note que a função $\dot{V}(\theta,\dot{\theta})$ é zerada de forma indesejada quando $\dot{\theta}$ é igual a zero com $\Delta E(\theta,\dot{\theta})$ diferente de zero, o que indica a possível estagnação indesejada do sistema na configuração de repouso para baixo. Este empecilho poderia ser solucionado pela incrementação condicional da lei de controle, forçando que τ assuma o valor máximo τ_{max} sempre que acontecer de $\dot{\theta}$ ser igual zero mas $\Delta E(\theta,\dot{\theta})$ ser diferente de zero.

[2] Na medida que $k \to \infty$, o comportamento da lei de controle (19) se aproxima da lei (16) original.

Tarefas: Swing-Up do Sistema Carro-Pêndulo

Neste trabalho, vocês devem usar os conceitos descritos anteriormente para projetar um controle capaz de realizar a manobra de swing-up em um pêndulo atuado por um carro linear, o mesmo sistema estudado no trabalho passado. As equações diferenciais que governam o sistema carro-pêndulo já foram postadas no enunciado do trabalho anterior.

Para facilitar o procedimento de projeto do controle de swing-up pelo método de Lyapunov, é recomendado fazer algumas simplificações no modelo do sistema a ser empregado no projeto. A primeira consideração é a eliminação do efeito do atrito no modelo. Já a segunda consideração é que a aceleração do carro $\ddot{z}$ é sempre dada na mesma direção imposta pela força de controle u, ou seja $u = \rho\ddot{z}$ para um fator de proporcionalidade ρ positivo ($\rho > 0$) possivelmente variável. Dadas estas considerações, segue que a dinâmica do pêndulo atuado pelo carro é conforme:

$$m\ell^2\,\ddot{\theta} + mg\ell\,\sin(\theta) = -\rho m\ell\cos(\theta)u\ . \tag{22}$$

Com base nestas informações, pede-se realização das seguintes tarefas:

1. Utilizando o modelo (22), projete uma lei de controle para realizar a manobra de swing-up do pêndulo. Utilize para isso a mesma função de Lyapunov candidata mostrada em (13), bem como a mesma função de energia indicada em (11).

2. Programe a sua lei de controle de swing-up no script `control.m` do ambiente de simulação MATLAB fornecido no trabalho anterior.

3. Dentro do script `main.m`, altere a posição inicial do carro e do pêndulo conforme abaixo:

   ```
   pos0 = -5;
   ang0 = 1*(pi/180);
   ```

   Rode a simulação para avaliar o desempenho do seu controlador. Caso necessário, realize ajustes na sua lei de controle para melhorar o desempenho e a suavidade.

   Dica: para que o carrinho permaneça próximo da sua posição central e também para fazer com que o sistema entre em movimento quando `ang0=0`, *recomenda-se de forma empírica adicionar um termo* $-k_p\, z$ *na sua lei de swing-up, onde* z *aqui representa a posição do carrinho e* k_p *é um ganho positivo de livre escolha.*

4. Observe que o controle de swing-up não será capaz de manter o sistema perfeitamente equilibrado de forma invertida na posição de referência. Para que isto seja possível, você deverá programar o chaveamento da lei de controle para uma realimentação linear de estados (conforme desenvolvida no trabalho anterior) quando o sistema estiver próximo do ponto de equilíbrio desejado. O ponto de chaveamento bem como a lógica de chaveamento poderão ser determinados de forma empírica.

5. Seu projeto de controle será considerado 100% adequado caso o sistema, a partir da condição inicial colocada no item 3, estabilize assintóticamente na posição zero de forma invertida em até 7 segundos. Além disso, o sistema ainda deve ser capaz de acompanhar as mudanças do sinal de referência, assim como no trabalho anterior. Pedese também que o sinal de controle fornecido à planta não apresente *chattering*.

6. No seu relatório, lembre de colocar os desenvolvimentos matemáticos realizados durante o projeto, a lógica completa do controlador desenvolvido, bem como os resultados obtidos. Caso não obtenha 100% de êxito no projeto, procure indicar as possíveis causas dos problemas observados.

Referências

[1] Slotine, J.J.E. e W. Li. Applied Nonlinear Control. Prentice Hall. 1991.

[2] Khalil, H. K., Nonlinear Systems, 3rd ed. Upper Saddle river, NJ: Prentice Hall, 2002.

[3] Åström, Karl Johan, and Katsuhisa Furuta. "Swinging up a pendulum by energy control."Automatica 36.2 (2000): 287-295.