# Controle Go-to-Goal para Robôs com tração diferencial usando critério de estabilidade de Lyapunov

Matheus L. T. Farias

24 de Julho de 2025

Automação Inteligente

# Introdução

## Motivação

- Robôs móveis autônomos enfrentam desafios de controle devido a restrições não-holonômicas.
- O controle preciso é essencial em aplicações como:
    - Veículos autônomos
    - Robôs de vigilância
    - Robôs assistivos
- Métodos com garantias formais de estabilidade são desejáveis.

# Objetivos do Trabalho

- Implementar leis de controle para o modelo cinemático Uniciclo para o problema do tipo *Go-to-Goal* seguindo duas abordagens:
    - Aicardi et al. (1995)
    - Benbouabdallah et al. (2013)
- Utilizar o critério de estabilidade de Lyapunov para garantir convergência assintótica.
- Verificar a eficácia das abordagens.
- Comparar o desempenho das abordagens propostas.
- Utilizar o ambiente CoppeliaSim para validação experimental.

# Fundamentação Teórica

## Estabilidade de Lyapunov

- A teoria de Lyapunov permite verificar a estabilidade de sistemas dinâmicos sem resolver suas equações diferenciais.
- Baseia-se na definição de uma função escalar $V(x)$, chamada de **função de Lyapunov**.
- O sistema é estável se:
  - $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e $V(0) = 0$ (positividade definida)
  - $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x$ (derivada negativa semi-definida)

# Estabilidade Assintótica

- Se $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, a estabilidade é **assintótica**.
- Isso significa que as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio ao longo do tempo.
- Utilizado especialmente para sistemas não lineares.

**Exemplo de sistema dinâmico:**

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(0) = 0$$

# Função de Lyapunov Quadrática

- Uma escolha comum para sistemas lineares:

$$V(x) = x^\top P x$$

- Onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica e definida positiva ($P = P^\top > 0$).
- A derivada temporal de $V$ pode ser obtida como:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x}$$

- Essa estrutura é base para projetar leis de controle estáveis.

# Modelo Cinemático do Robô

# Equações do Modelo Cinemático

- O modelo de cinemático Uniciclo é dado pela equação abaixo, considerando um vetor de estados $q$:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}, \qquad q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

- Onde:
  - $(x, y)$: posição do robô no plano
  - $\theta$: orientação do robô em relação ao eixo $x$ global
- Entradas de controle:
  - $v$: velocidade linear
  - $\omega$: velocidade angular

# Aplicação da Teoria de Lyapunov

- A estrutura do modelo é compatível com sistemas da forma $\dot{x} = f(x)$.
- Isso permite aplicar a teoria de Lyapunov para projetar leis de controle para $v$ e $\omega$.
- O objetivo é garantir estabilidade assintótica em relação a uma pose alvo desejada.

# Problema do Estacionamento

# Definição do Problema

- O problema do estacionamento consiste em levar o robô de uma pose inicial qualquer até uma pose desejada $(x_T, y_T)$.
- Requer o controle tanto da posição quanto da orientação final do robô.
- Importante: deve-se garantir estabilidade do sistema durante todo o movimento.

# Abordagens Consideradas

Neste trabalho, o problema do estacionamento é tratado com base em duas abordagens da literatura:

- **Aicardi et al. (1995)**:
  - Foca na estabilização assintótica para alvos fixos.
- **Benbouabdallah et al. (2013)**:
  - Originalmente proposta para rastreamento de alvos móveis.
  - Aplicada aqui ao caso particular de alvos fixos.

## Objetivo da Solução de Controle

- Projetar leis de controle para $v$ (linear) e $\omega$ (angular) que:
  - Garantam a convergência do robô à posição e orientação desejadas.
  - Satisfaçam os critérios de estabilidade de Lyapunov.

# Abordagem de Aicardi et al.

# Visão Geral da Abordagem

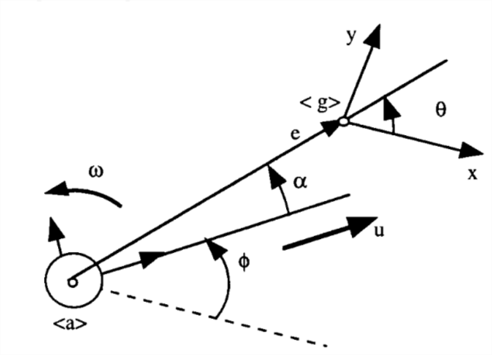



**Figure 1:** Sistema Robô-Alvo

- Baseada em uma reformulação do sistema em coordenadas relativas ao alvo.

## Redefinição de Variáveis

- Variáveis relativas:
  - $e$: distância entre o robô e o alvo
  - $\theta$: orientação desejada
  - $\phi$: orientação atual do robô
  - $\alpha = \theta - \phi$: erro angular
- Vetor de estado:

$$x = \begin{bmatrix} e \\ \alpha \\ \theta \end{bmatrix}$$

- O ponto de equilíbrio desejado é $x = [0, 0, \theta]^T$.

# Função de Lyapunov Proposta

$$V = \frac{1}{2}\lambda e^2 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + h\theta^2), \quad \lambda, h > 0$$

- Baseado numa forma quadrática com:

$$x = \begin{bmatrix} e \\ \alpha \\ \theta \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}h \end{bmatrix}$$

# Derivada de Lyapunov

$$\dot{V} = -\lambda e u \cos(\alpha) + \alpha \left[ -\omega + \frac{u}{e} \sin(\alpha) \cdot \frac{\alpha + h\theta}{\alpha} \right]$$

- O objetivo é projetar $u$ e $\omega$ para que $\dot{V} < 0$ para todo $x \neq 0$.

# Leis de Controle Propostas

$$\begin{cases} u = \gamma e \cos(\alpha), \quad \gamma > 0 \\ \omega = k\alpha + \gamma \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\alpha}(\alpha + h\theta) \end{cases}$$

- Substituindo essas leis em $\dot{V}$, obtém-se:

$$\dot{V} = -\lambda\gamma e^2 \cos^2(\alpha) - k\alpha^2 \leq 0$$

- Estabilidade assintótica garantida pela teoria de Lyapunov.

# Abordagem de Benbouabdallah et al.

# Visão Geral da Abordagem

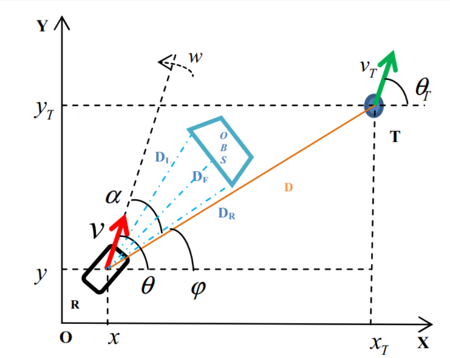



**Figure 2:** Sistema Robô-Alvo

- Utiliza um modelo geométrico com variáveis relativas entre o robô e o alvo.

## Variáveis Geométricas

- Variáveis relativas:
  - $D$: distância entre o robô e o alvo
  - $\theta$: orientação atual do robô
  - $\phi$: orientação desejada
  - $\alpha = \theta - \phi$: erro angular
- Erros definidos como:

$$e_D = D_d - D, \quad e_\alpha = \alpha_d - \alpha$$

- Vetor de estado:

$$x = \begin{bmatrix} e_D \\ e_\alpha \end{bmatrix}$$

- O ponto de equilíbrio desejado é $x = [0, 0]^T$.

# Função de Lyapunov Proposta

$$V = \frac{1}{2}e_D^2 + \frac{1}{2}e_\alpha^2$$

- Baseado numa forma quadrática com:

$$x = \begin{bmatrix} e_D \\ e_\alpha \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

# Derivada de Lyapunov

$$\dot{V} = e_D v \cos\alpha + \alpha \left( w - \frac{v}{D} \sin\alpha \right)$$

Com: $\alpha_d = 0$

- O objetivo é projetar $v$ e $w$ para que $\dot{V} < 0$ para todo $x \neq 0$.

# Leis de Controle Propostas

$$\begin{cases} v = -K_v e_D \cos\alpha \\ \omega = -K_\omega \alpha - \dfrac{v}{D}\sin\alpha \end{cases} , \quad K_v, K_\omega > 0$$

Substituindo em $\dot{V}$:

$$\dot{V} = -K_v e_D^2 \cos^2\alpha - K_\omega \alpha^2 \leq 0$$

- Garante estabilidade assintótica.

# Implementação e Simulação

# Ambiente de Simulação

- As leis de controle foram implementadas no simulador **CoppeliaSim**.
- Robô utilizado: **Pioneer 3-DX**, com tração diferencial.
- Informações de posição e orientação foram obtidas com sensores virtuais:
    - `sim.getObjectPosition()`
    - `sim.getObjectOrientation()`

# Conversão de Velocidades

- O controle direto do robô no simulador é feito via velocidade angular das rodas ($\omega_R$, $\omega_L$).
- As leis de controle fornecem $v$ (linear) e $\omega$ (angular).
- Conversão para controle das rodas:

$$\begin{cases} \omega_R = \dfrac{2v + \omega L}{2R} \\ \omega_L = \dfrac{2v - \omega L}{2R} \end{cases}$$

- Onde:
  - $L$: distância entre rodas (eixo)
  - $R$: raio das rodas

## Cenários de Teste

- Foram realizados testes em 4 cenas com posições iniciais distintas.
- A posição inicial do robô é fixa, mas o alvo muda:
  - Cena 1: Alvo à frente
  - Cena 2: Alvo ao lado
  - Cena 3: Alvo na diagonal
  - Cena 4: Alvo atrás do robô
- Cada abordagem foi testada com os mesmos parâmetros em todas as cenas.

# Parâmetros de Controle

- **Aicardi et al.**

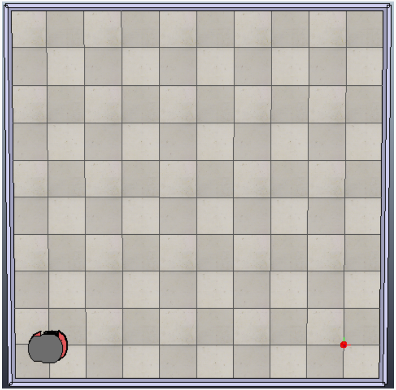
$$\gamma = 0.1, \quad k = 1, \quad h = 1$$

- **Benbouabdallah et al.**

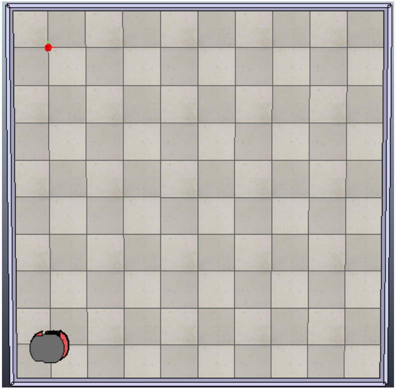
$$K_v = 0.1, \quad K_\omega = 1$$

- Valores escolhidos arbitrariamente, respeitando a condição de estabilidade.

# Cenas de Teste

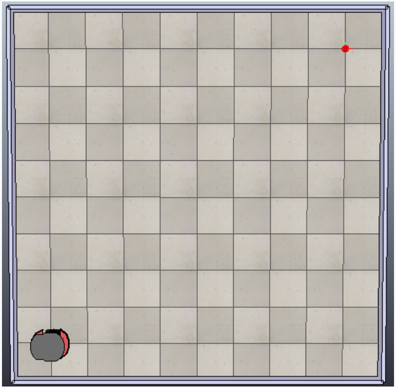


Cena de Teste 1

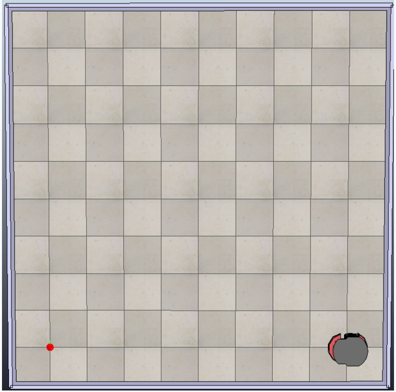


Cena de Teste 2

# Cenas de Teste



Cena de Teste 3



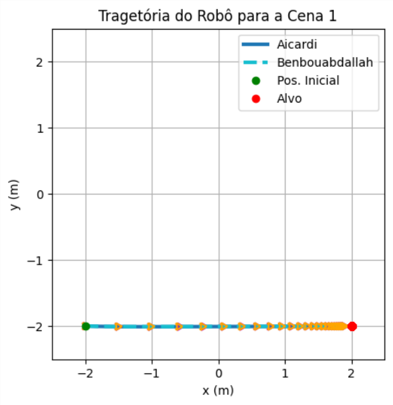
Cena de Teste 4

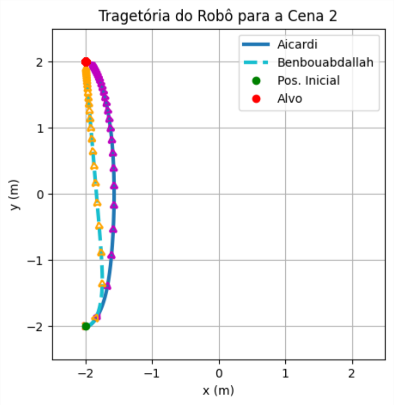
# Resultados

# Trajetória do Robô

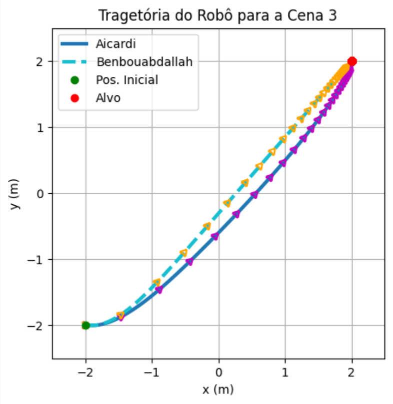
- A trajetória do robô foi registrada em todas as cenas de teste.
- Cada abordagem gerou um padrão diferente de movimento.
- Os triângulos indicam a posição e orientação do robô, inseridos a cada 1,5 segundos para análise temporal.

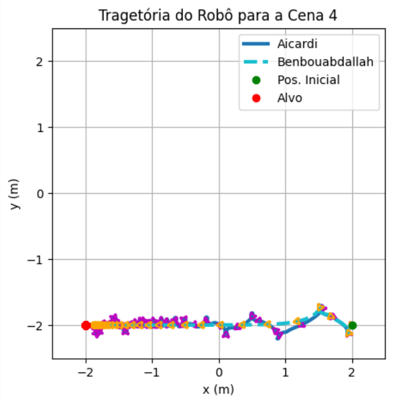
# Trajetória do Robô



# Trajetória do Robô

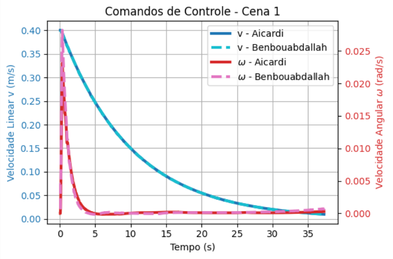


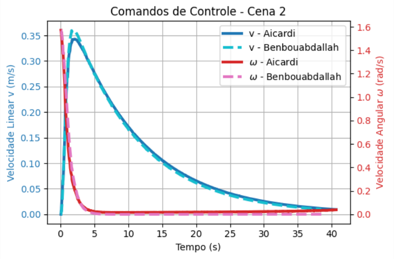



# Comandos de Controle

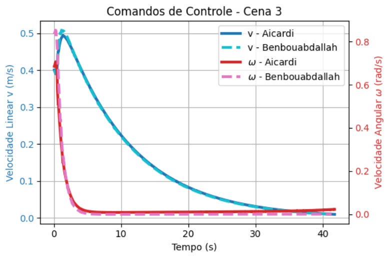
- As figuras mostram a evolução desses sinais em cada cenário.
- Comandos analisados: $v(t)$ e $\omega(t)$

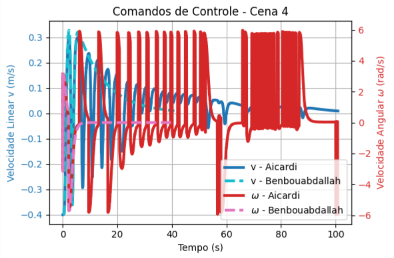
# Comandos de Controle



# Comandos de Controle

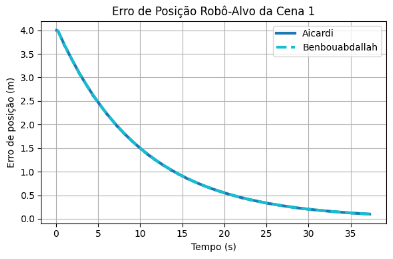


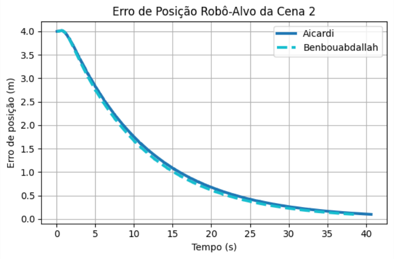



# Erro de Posição

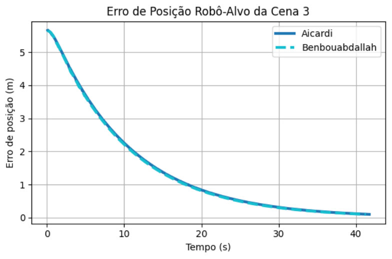
- A distância entre o robô e o alvo foi monitorada durante a simulação.

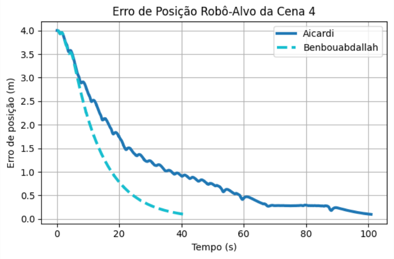
# Erro de Posição



# Erro de Posição

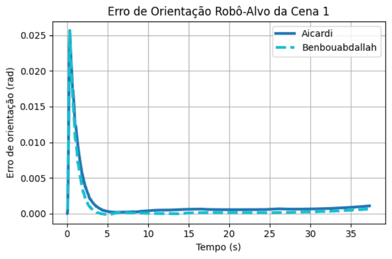


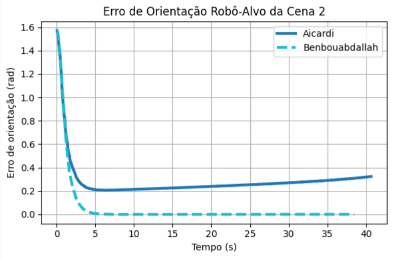



# Erro de Orientação

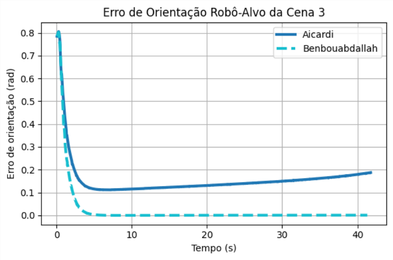
- O erro angular $\alpha$ foi avaliado ao longo do tempo.

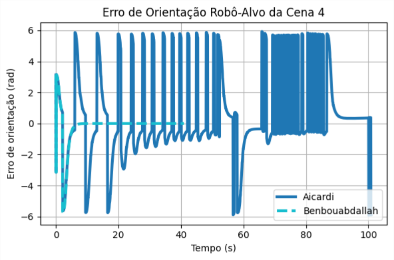
# Erro de Orientação



# Erro de Orientação



# Comparação Quantitativa

- Tempo necessário para alcançar o alvo em cada cena:

| Abordagem | Cena 1 | Cena 2 | Cena 3 | Cena 4 |
|---|---|---|---|---|
| Aicardi et al. | **37.25** s | 40.65 s | 41.75 s | 100.85 s |
| Benbouabdallah et al. | 37.35 s | **38.45 s** | **41.30 s** | **40.95 s** |

**Table 1:** Tempo para o robô atingir o alvo

# Conclusão

# Conclusões Gerais

- Ambas as abordagens, Aicardi et al. e Benbouabdallah et al., foram capazes de resolver o problema Go-to-Goal com sucesso.
- A estabilidade assintótica foi comprovada teoricamente com base no critério de Lyapunov.
- As simulações no CoppeliaSim validaram o comportamento esperado das leis de controle.

# Análise Comparativa

- A abordagem de **Benbouabdallah et al.** demonstrou desempenho superior na maioria dos testes.
- Foi especialmente mais eficaz no caso da Cena 4 (alvo atrás do robô), onde a abordagem de Aicardi teve dificuldade significativa.
- A trajetória gerada foi mais direta e o erro de orientação foi menor ao final do movimento.

# Considerações Finais

- O uso da teoria de Lyapunov se mostrou adequado para sistemas não lineares e não-holonômicos.
- Resultados indicam que abordagens com estrutura geométrica (como Benbouabdallah) podem ser mais robustas a diferentes configurações iniciais.

# Referências

# Referências


Aicardi, M., Casalino, G., Bicchi, A., & Balestrino, A. (1995). *Closed loop steering of unicycle-like vehicles via Lyapunov techniques.* IEEE Robotics & Automation Magazine, 2(1), 27–35.

Benbouabdallah, K., & Zhu, Q. (2013). *A behavior-based controller for a mobile robot tracking a moving target in multi-obstacles environment.* In International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, 5(2), 416–422.

# Obrigado!

**Perguntas?**