



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Centro de Engenharia Elétrica e Informática

Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica

Departamento de Engenharia Elétrica

MODELAGEM DINÂMICA DE ROBÔS MÓVEIS COM TRAÇÃO DIFERENCIAL

Abordagens de Lagrange e Newton-Euler

Discente: Matheus Lucas Tavares de Farias

Docente: Antônio Marcus Nogueira Lima

Campina Grande - PB

12 de Junho de 2025

Sumário

1	Introdução	2
2	Sistemas de Coordenadas	2
3	Restrições Cinemáticas do Robô com Tração Diferencial	3
3.1	Ausência de Deslizamento Lateral	3
3.2	Rolagem Pura das Rodas	4
3.3	Forma Matricial das Restrições	5
4	Modelo Cinemático do Robô com Tração Diferencial	5
5	Modelagem Dinâmica do DDMR	6
5.1	Abordagem Dinâmica de Lagrange	6
5.2	Abordagem de Newton-Euler	10
6	Modelagem dos Atuadores	13
7	Conclusão	14
8	Referência	14

1 Introdução

A robótica móvel tem ganhado destaque nos últimos anos, especialmente no meio educacional. Enquanto a modelagem cinemática de robôs móveis com rodas (WMRs) é bem documentada e de fácil compreensão, a modelagem dinâmica ainda representa um desafio, por envolver sistemas não lineares e restrições não-holonômicas, o que dificulta seu aprendizado.

No caso dos robôs com tração diferencial (DDMR), há uma carência de materiais didáticos que tratem a modelagem dinâmica de forma clara e sistemática. A literatura costuma ser fragmentada, com diferentes escolhas de variáveis, referenciais e hipóteses, o que compromete a comparabilidade entre os modelos.

Os métodos mais comuns para modelagem dinâmica são os de Lagrange e Newton-Euler. O primeiro baseia-se na energia do sistema e requer o uso de multiplicadores para lidar com restrições. O segundo trata diretamente das forças envolvidas, exigindo maior detalhamento das interações físicas.

Este trabalho propõe um modelo dinâmico estruturado para o DDMR, considerando explicitamente as restrições não-holonômicas. Primeiramente, utiliza-se o método de Lagrange com transformações que eliminam os multiplicadores. Em seguida, aplica-se o formalismo de Newton-Euler para rederivar o mesmo modelo. Por fim, demonstra-se a equivalência entre ambas as abordagens.

O objetivo é oferecer uma base unificada e acessível sobre a modelagem dinâmica de DDMRs, contribuindo para o ensino e a pesquisa na área.

2 Sistemas de Coordenadas

Para descrever a posição e o movimento de um robô móvel com tração diferencial (DDMR), utilizam-se dois sistemas de coordenadas: um referencial inercial e outro acoplado ao robô.

O referencial inercial, fixo no ambiente, é representado pelas coordenadas $\{X_I, Y_I\}$ e serve como base para observar o movimento do robô em relação ao mundo. Já o referencial do robô, dado por $\{X_r, Y_r\}$, está preso ao seu corpo, com origem no ponto médio entre as rodas (ponto A), orientado na direção frontal do robô.

O centro de massa, denotado por C , está localizado sobre o eixo longitudinal do robô, a uma distância d do ponto A .

Como ilustrado na Figura 1, a posição do robô no plano inercial é expressa pelo vetor q^I , composto pelas coordenadas de A e pelo ângulo θ , que define sua orientação em relação ao eixo x_I :

$$q^I = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Um ponto qualquer no plano pode ser descrito em ambos os referenciais. No sistema inercial, como X^I , e no sistema do robô, como X^r :

$$X^I = \begin{bmatrix} x^I \\ y^I \\ \theta^I \end{bmatrix}, \quad X^r = \begin{bmatrix} x^r \\ y^r \\ \theta^r \end{bmatrix} \quad (2)$$

A conversão entre os sistemas é feita por meio da matriz de rotação $R(\theta)$:

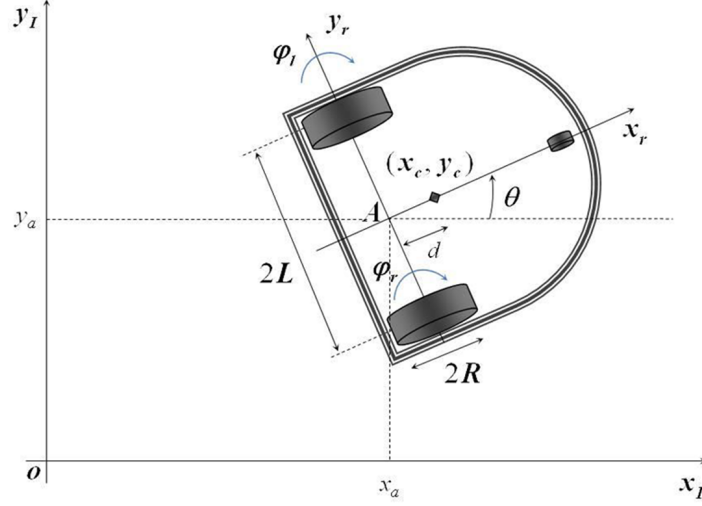


Figura 1: Robô Móvel com Tração Diferencial (DDMR)

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Essa matriz transforma coordenadas do referencial do robô para o inercial, conforme:

$$X_I = R(\theta) X_r \quad (4)$$

De modo análogo, as velocidades se relacionam por:

$$\dot{X}_I = R(\theta) \dot{X}_r \quad (5)$$

As expressões acima são fundamentais para o desenvolvimento dos modelos cinemáticos e dinâmicos, pois estabelecem a correspondência entre os dois referenciais.

3 Restrições Cinemáticas do Robô com Tração Diferencial

O modelo cinemático de um robô com tração diferencial (DDMR) impõe restrições não-holonômicas, que limitam suas velocidades sem poderem ser expressas apenas em termos de posição. Nesta seção, são apresentadas duas restrições fundamentais.

3.1 Ausência de Deslizamento Lateral

Admite-se que o robô não apresenta movimento lateral em seu próprio referencial (eixo y_r), o que implica velocidade nula do ponto médio entre as rodas (A) nessa direção:

$$\dot{y}_a^r = 0 \quad (6)$$

Com o uso da matriz de rotação $R(\theta)$, essa condição é expressa no referencial inercial como:

$$-\dot{x}_a \sin \theta + \dot{y}_a \cos \theta = 0 \quad (7)$$

3.2 Rolagem Pura das Rodas

Assume-se que as rodas mantêm contato constante com o solo, sem escorregar ou derrapar, com o contato ocorrendo em um único ponto (ponto P), como ilustrado na Figura ???. A velocidade linear no ponto de contato das rodas direita (v_{pR}) e esquerda (v_{pL}) está relacionada às respectivas velocidades angulares por:

$$v_{pR} = R\dot{\varphi}_R, \quad v_{pL} = R\dot{\varphi}_L \quad (8)$$

A velocidade desses pontos em relação ao ponto A pode ser obtida por meio da equação da velocidade relativa para corpos rígidos:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ap} \quad (9)$$

Nessa equação, \vec{v}_p representa a velocidade do ponto de contato, \vec{v}_A é a velocidade do ponto A , $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do robô, e \vec{r}_{Ap} é o vetor de posição do ponto P em relação a A , denotado por \vec{r}_{pAR} para a roda direita e \vec{r}_{pAL} para a esquerda.

No referencial inercial, esses vetores são expressos por:

$$\vec{v}_p = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_A = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{pAR} = \begin{bmatrix} L \sin \theta \\ -L \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{pAL} = \begin{bmatrix} -L \sin \theta \\ L \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Aplicando a equação da velocidade relativa, obtêm-se as expressões da velocidade dos pontos de contato das rodas. Para a roda direita:

$$\begin{cases} \dot{x}_{pR} = \dot{x}_a + L\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_{pR} = \dot{y}_a + L\dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (11)$$

E para a roda esquerda:

$$\begin{cases} \dot{x}_{pL} = \dot{x}_a - L\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_{pL} = \dot{y}_a - L\dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (12)$$

Ao aplicar a matriz de rotação, obtêm-se as relações entre essas velocidades e as velocidades angulares das rodas:

$$\begin{cases} \dot{x}_{pR} \cos \theta + \dot{y}_{pR} \sin \theta = R\dot{\varphi}_R \\ \dot{x}_{pL} \cos \theta + \dot{y}_{pL} \sin \theta = R\dot{\varphi}_L \end{cases} \quad (13)$$

Substituindo as expressões das velocidades dos pontos P e reorganizando, obtêm-se as seguintes restrições:

$$\dot{x}_a \cos \theta + \dot{y}_a \sin \theta + L\dot{\theta} - R\dot{\varphi}_R = 0 \quad (14)$$

$$\dot{x}_a \cos \theta + \dot{y}_a \sin \theta - L\dot{\theta} - R\dot{\varphi}_L = 0 \quad (15)$$

3.3 Forma Matricial das Restrições

As equações (7), (14) e (15) podem ser reunidas na forma matricial:

$$\Lambda(q)\dot{q} = 0 \quad (16)$$

sendo $\Lambda(q)$ a matriz de restrição:

$$\Lambda(q) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & L & -R & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & -L & 0 & -R \end{bmatrix} \quad (17)$$

e o vetor de velocidades generalizadas:

$$\dot{q} = [\dot{x}_a \quad \dot{y}_a \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi}_R \quad \dot{\varphi}_L]^T \quad (18)$$

Essa forma compacta será usada na formulação cinemática e dinâmica do modelo do DDMR.

4 Modelo Cinemático do Robô com Tração Diferencial

O modelo cinemático descreve o movimento do robô sem considerar as forças atuantes, relacionando diretamente as velocidades angulares das rodas às velocidades linear e angular do robô.

As velocidades lineares das rodas, dadas pela equação (8), permitem determinar a velocidade linear do robô no ponto A como:

$$v = \frac{v_R + v_L}{2} = R \frac{\dot{\varphi}_R + \dot{\varphi}_L}{2} \quad (19)$$

De forma análoga, a velocidade angular do robô é dada por:

$$\omega = \frac{v_R - v_L}{2L} = R \frac{\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L}{2L} \quad (20)$$

Com essas expressões, o vetor velocidade do ponto A no referencial do robô pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a^r \\ \dot{y}_a^r \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (21)$$

Aplicando a matriz de rotação, obtém-se a representação do vetor velocidade no referencial inercial:

$$\dot{q}^I = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} \cos \theta & \frac{R}{2} \cos \theta \\ \frac{R}{2} \sin \theta & \frac{R}{2} \sin \theta \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (22)$$

A equação (22) constitui o modelo cinemático direto do DDMR, que também pode ser expressa relacionando as velocidades linear e angular do robô como:

$$\dot{q}^I = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (23)$$

Este modelo é essencial para a navegação e controle do robô móvel, pois permite estimar sua posição e orientação futuras a partir das velocidades das rodas.

5 Modelagem Dinâmica do DDMR

A dinâmica estuda o movimento de sistemas mecânicos levando em consideração as forças que afetam esse movimento, ao contrário da cinemática, que desconsidera essas forças. No contexto de robôs móveis com acionamento diferencial (*Differential-Drive Mobile Robot* - DDMR), o modelo dinâmico é essencial para a análise de simulação e para o projeto de algoritmos de controle de movimento.

Um DDMR não-holonômico, com n coordenadas generalizadas $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ e sujeito a m restrições, pode ser descrito pelas seguintes equações de movimento:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_d = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (24)$$

Nesta equação, $M(q)$ é a matriz de inércia simétrica e definida positiva de dimensão $n \times n$; $V(q, \dot{q})\dot{q}$ representa os termos centrífugos e de Coriolis; $F(\dot{q})$ é a matriz de forças de atrito superficial; $G(q)$ é o vetor de forças gravitacionais; τ_d representa perturbações externas e dinâmicas não modeladas; $B(q)$ é a matriz de entrada do sistema; τ é o vetor de entradas de controle; e $\Lambda^T(q)\lambda$ representa as restrições cinemáticas, sendo $\Lambda(q)$ a matriz das restrições e λ o vetor de multiplicadores de Lagrange.

Essa formulação unificada permite representar com precisão a dinâmica de robôs móveis diferenciais submetidos a restrições não-holonômicas e a perturbações externas, sendo fundamental para simulação e controle.

5.1 Abordagem Dinâmica de Lagrange

A formulação dinâmica baseada no formalismo de Lagrange oferece um método sistemático e eficiente para a obtenção das equações de movimento de sistemas mecânicos com restrições não-holônomas, como é o caso do robô móvel de tração diferencial (DDMR). Utilizando a diferença entre as energias cinética e potencial do sistema, a equação de Lagrange com restrições é expressa como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F - \Lambda^T(q)\lambda \quad (25)$$

onde $L = T - V$ é a função Lagrangiana, na qual T é a energia cinética do sistema e V a energia potencial, q_i são as coordenadas generalizadas, F representa as forças generalizadas externas, Λ é a matriz de restrições e λ é o vetor de multiplicadores de Lagrange.

Para o DDMR, assume-se que o movimento ocorre no plano horizontal, de forma que a energia potencial V é nula.

As coordenadas generalizadas utilizadas para o DDMR é dada por

$$q = [x_a \quad y_a \quad \theta \quad \varphi_R \quad \varphi_L]^T, \quad (26)$$

com x_a e y_a representando a posição do ponto médio entre as rodas, θ a orientação do robô, e φ_R , φ_L os ângulos de rotação das rodas direita e esquerda, respectivamente.

A energia cinética total T do sistema é a soma da energia do corpo principal do robô e da energia das rodas e dos atuadores.

A energia cinética do corpo principal é dada por

$$T_c = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \frac{1}{2}I_c \dot{\theta}^2, \quad (27)$$

enquanto a energia cinética das rodas direita e esquerda, respectivamente, incluindo os motores, é

$$T_{wR} = \frac{1}{2}m_w v_{wR}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\phi}_R^2, \quad (28)$$

$$T_{wL} = \frac{1}{2}m_w v_{wL}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\phi}_L^2. \quad (29)$$

Para a aplicação em questão, deve-se obter a equação da energia cinética total em função das coordenadas generalizadas. Para isso, é possível escrever a velocidade linear das equações seguindo essa especificação ao saber que

$$v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2, \quad (30)$$

e usar as seguintes relações

$$\begin{cases} x_c = x_a + d \cos \theta \\ y_c = y_a + d \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_c = \dot{x}_a - d\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_c = \dot{y}_a + d\dot{\theta} \cos \theta \end{cases}, \quad (31)$$

$$\begin{cases} x_{wR} = x_a + L \sin \theta \\ y_{wR} = y_a - L \cos \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{wR} = \dot{x}_a + L\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_{wR} = \dot{y}_a + L\dot{\theta} \sin \theta \end{cases}, \quad (32)$$

$$\begin{cases} x_{wL} = x_a - L \sin \theta \\ y_{wL} = y_a + L \cos \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{wL} = \dot{x}_a - L\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_{wL} = \dot{y}_a - L\dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (33)$$

Com isso, ao substituir as equações (31) - (33) nas equações (27) - (29), somando os termos da energia cinética e realizando algumas manipulações, a energia cinética total do sistema torna-se

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) + m_c d \dot{\theta} (\dot{y}_a \cos \theta - \dot{x}_a \sin \theta) + \frac{1}{2}I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w (\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2), \quad (34)$$

onde $m = m_c + 2m_w$ e $I = I_c + 2I_m + 2m_w L^2 + m_c d^2$ representam a massa total e a inércia equivalente, respectivamente.

Sabendo que a energia potencial do sistema é nula, a lagrangiana é dada por $L = T$. Substituindo a equação (34) na equação (25) obtêm-se os seguintes resultados:

$$m\ddot{x}_a - m_c d \ddot{\theta} \sin \theta - m_c d \dot{\theta}^2 \cos \theta = C_1 \quad (35)$$

$$m\ddot{y}_a + m_c d \ddot{\theta} \cos \theta - m_c d \dot{\theta}^2 \sin \theta = C_2 \quad (36)$$

$$-m_c d \ddot{x}_a \sin \theta + m_c d \ddot{y}_a \cos \theta + I \ddot{\theta} = C_3 \quad (37)$$

$$I_w \ddot{\phi}_R = \tau_R + C_4 \quad (38)$$

$$I_w \ddot{\phi}_L = \tau_L + C_5 \quad (39)$$

Os termos (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) representam contribuições associadas às restrições cinemáticas do sistema. Esses coeficientes podem ser expressos em termos dos multiplicadores de Lagrange λ e da matriz de restrições cinemáticas $\Lambda(q)$, definida na Seção 3, conforme:

$$\Lambda^T(q) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Dessa forma, as equações do movimento (35) - (39) podem ser representadas de forma geral dada pela equação (24) como sendo

$$M(q)\ddot{q} + V(\dot{q}, q)\dot{q} = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda, \quad (41)$$

na qual

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m_c d \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & m & m_c d \cos \theta & 0 & 0 \\ -m_c d \sin \theta & m_c d \cos \theta & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix},$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^T(q)\lambda = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta & \sin \theta \\ 0 & L & -L \\ 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}$$

Em seguida, o sistema descrito pela equação (41) é transformado para uma forma alternativa, que é mais adequada para fins de controle e simulação. O objetivo principal é eliminar o termo de restrição $\Lambda^T(q)\lambda$ na equação (41), já que os multiplicadores de Lagrange λ_i são desconhecidos.

Para isso, define-se primeiro o vetor reduzido:

$$\eta = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad (42)$$

Em seguida, ao expressar as velocidades das coordenadas generalizadas usando o modelo cinemático direto, descrito na equação (22), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R \cos \theta & R \cos \theta \\ R \sin \theta & R \sin \theta \\ \frac{R}{L} & -\frac{R}{L} \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad (43)$$

Isso pode ser escrito na forma compacta:

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (44)$$

Pode-se verificar que a matriz de transformação $S(q)$ pertence ao espaço nulo da matriz de restrição $\Lambda(q)$. Portanto, temos:

$$S^T(q)\Lambda^T(q) = 0 \quad (45)$$

Derivando a equação (44) em relação ao tempo, obtemos:

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\dot{\eta} + S(q)\ddot{\eta} \quad (46)$$

Substituindo as equações (44) e (46) na equação principal (41), obtemos:

$$M(q) [\dot{S}(q)\dot{\eta} + S(q)\ddot{\eta}] + V(q, \dot{q}) [S(q)\dot{\eta}] = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (47)$$

Expandindo a equação, agrupando os termos e multiplicando previamente por $S(q)^T$ obtém-se:

$$S^T(q)M(q)S(q)\dot{\eta} + S^T(q) [M(q)\dot{S}(q) + V(\dot{q}, q)S(q)] \eta = S^T(q)B(q)\tau - S^T(q)\Lambda^T(a)\lambda \quad (48)$$

Dessa forma, o último termo é nulo. Com isso, e definindo as novas matrizes:

$$\overline{M}(q) = S^T(q)M(q)S(q),$$

$$\overline{V}(\dot{q}, q) = S^T(q) [M(q)\dot{S}(q) + V(\dot{q}, q)S(q)] ,$$

$$\overline{B}(q) = S^T(q)B(q)$$

a equação da dinâmica do DDMR é reduzida a:

$$\overline{M}(q)\dot{\eta} + \overline{V}(\dot{q}, q)\eta = \overline{B}(q)\tau \quad (49)$$

com

$$\overline{M}(q) = \begin{bmatrix} I_w + \frac{R^2}{4L^2} (mL^2 + I) & \frac{R^2}{4L^2} (mL^2 - I) \\ \frac{R^2}{4L^2} (mL^2 - I) & I_w + \frac{R^2}{4L^2} (mL^2 + I) \end{bmatrix}$$

$$\overline{V}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R^2}{2L} m_c d \dot{\theta} \\ -\frac{R^2}{2L} m_c d \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O modelo dinâmico apresentado na equação (49) pode ser reescrito em termos das velocidades linear (v) e angular (ω) do robô diferencial. Essa reformulação é possível ao utilizar as equações do modelo cinemático (19) e (20), permitindo expressar a dinâmica do sistema de forma mais compacta. O sistema resultante é dado por:

$$\begin{cases} \left(m + \frac{2I_w}{R^2} \right) \dot{v} - m_c d \omega^2 = \frac{1}{R} (\tau_R + \tau_L) \\ \left(I + \frac{2L^2}{R^2} I_w \right) \dot{\omega} + m_c d \omega v = \frac{L}{R} (\tau_R - \tau_L) \end{cases} \quad (50)$$

Esse modelo descreve a evolução das velocidades do robô em função dos torques aplicados pelos motores das rodas direita (τ_R) e esquerda (τ_L).

5.2 Abordagem de Newton-Euler

A primeira etapa essencial na modelagem dinâmica via abordagem de Newton-Euler é a construção do diagrama de corpo livre do robô, com o objetivo de identificar e analisar todas as forças que atuam sobre o sistema. O diagrama de corpo livre do sistema pode ser visto na Figura (2).

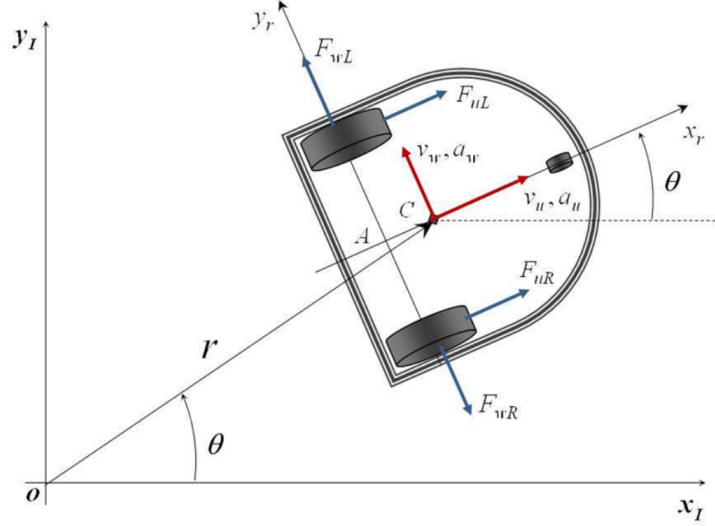


Figura 2: Diagrama de corpo livre do robô para modelagem dinâmica Newtoniana

Considerando o robô móvel diferencial e adotando o referencial local $\{x_r, y_r\}$, introduzem-se as seguintes variáveis relevantes para a descrição do sistema: a velocidade do centro de massa C do robô, expressa por (v_u, v_w) , onde v_u é a componente longitudinal e v_w é a componente lateral; a aceleração do centro de massa, indicada por (a_u, a_w) ; as forças longitudinais aplicadas pelas rodas direita e esquerda, representadas por F_{uR} e F_{uL} , respectivamente; e as forças laterais correspondentes, F_{wR} e F_{wL} . A orientação do robô no plano é dada pelo ângulo θ , enquanto ω representa sua velocidade angular. A massa total do robô é denotada por m , e I corresponde ao momento de inércia em relação ao centro de massa.

Com base no diagrama de corpo livre apresentado, observa-se que as únicas forças externas que atuam sobre o robô são aquelas geradas pelos atuadores localizados nas rodas, o que simplifica a análise dinâmica ao concentrar a origem das forças no sistema de propulsão.

Iniciamos a derivação representando a posição do robô utilizando coordenadas polares. Supondo que o robô seja um corpo rígido, suas coordenadas polares no referencial inercial podem ser expressas por meio de um vetor complexo:

$$\hat{r} = r e^{j\theta} \quad (51)$$

Derivando esse vetor posição em relação ao tempo, obtemos a velocidade e a aceleração do robô no referencial inercial:

$$\dot{\hat{r}} = \dot{r} e^{j\theta} + j r \dot{\theta} e^{j\theta} \quad (52)$$

$$\ddot{\hat{r}} = \ddot{r} e^{j\theta} + 2j \dot{r} \dot{\theta} e^{j\theta} + j r \ddot{\theta} e^{j\theta} - r \dot{\theta}^2 e^{j\theta} \quad (53)$$

Simplificando e escrevendo os termos de velocidade e aceleração nas componentes radial e tangencial, temos:

$$\dot{\hat{r}} = [\dot{r}]e^{j\theta} + [r\dot{\theta}]e^{j(\theta+\frac{\pi}{2})} \quad (54)$$

$$\ddot{\hat{r}} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]e^{j\theta} + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]e^{j(\theta+\frac{\pi}{2})} \quad (55)$$

As componentes de velocidade e aceleração nas direções radial e tangencial são definidas como:

$$v_u = \dot{r} \quad (56)$$

$$v_w = r\dot{\theta} \quad (57)$$

$$a_u = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (58)$$

$$a_w = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad (59)$$

A partir das quatro equações acima, podemos escrever as seguintes relações entre as componentes radial e tangencial da velocidade e aceleração do robô:

$$a_u = \dot{v}_u - v_w\dot{\theta} \quad (60)$$

$$a_w = \dot{v}_w + v_u\dot{\theta} \quad (61)$$

As equações acima (60) e (61) são as equações fundamentais da aceleração, que também podem ser obtidas por meio do teorema do movimento de um corpo rígido em um referencial rotativo.

O próximo passo é escrever a segunda lei de Newton no referencial do robô e encontrar a relação entre as forças, torques e acelerações. O modelo DDMR apresenta dois tipos de movimento: translações nas direções radial e tangencial, e rotação em torno do eixo vertical passando pelo centro de massa. Seja M a massa total do robô, incluindo as rodas e os atuadores, e seja J o momento de inércia em relação ao centro de massa. Assim, as equações dinâmicas são dadas por:

$$Ma_u = F_{uL} + F_{uR} \quad (62)$$

$$Ma_w = F_{wL} - F_{wR} \quad (63)$$

$$J\ddot{\theta} = (F_{wR} - F_{wL})L + (F_{uR} - F_{uL})d \quad (64)$$

Substituindo as expressões de aceleração das equações (60) e (61), tem-se:

$$\dot{v}_u = \dot{v}_w\dot{\theta} + \frac{F_{uL} + F_{uR}}{M} \quad (65)$$

$$\dot{v}_w = -v_u\dot{\theta} + \frac{F_{wL} - F_{wR}}{M} \quad (66)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{J}(F_{wR} - F_{wL}) + \frac{d}{J}(F_{uR} - F_{uL}) \quad (67)$$

A ausência de deslizamento (rolamento puro) na direção longitudinal e a ausência de escorregamento na direção lateral criam uma independência entre as velocidades longitudinal, lateral e angular, o que simplifica as equações dinâmicas. Essas restrições não-holônomas são incorporadas ao definir-se a velocidade do ponto central A no referencial local e forçá-la a ser zero. Utilizando a matriz de transformação $R(\theta)$, inicialmente determinamos a velocidade do centro de massa C no referencial inercial como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_w \end{bmatrix} \quad (68)$$

A seguir, utilizando a equação (31), podemos encontrar a velocidade do ponto central A no referencial inercial. Dessa forma, pode-se então demonstrar que a velocidade lateral do ponto A , no referencial local, é $v_w - d\dot{\theta}$. Portanto, na ausência de escorregamento lateral, $y_a^r = 0$, tem-se:

$$v_w = d\dot{\theta} \quad (69)$$

Substituindo a equação (69) em (65) e (66), e combinando com a equação (67), obtemos:

$$\dot{v}_u = d\dot{\theta}^2 + \frac{1}{M}(F_{uL} + F_{uR}) \quad (70)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{Md^2 + J}(F_{uR} - F_{uL}) - \frac{Mdv_u}{Md^2 + J}\dot{\theta} \quad (71)$$

As duas equações acima representam as equações dinâmicas do robô considerando as restrições não-holônomas. Essas equações podem ser transformadas para expressar os torques dos atuadores aplicados às rodas, de forma semelhante à notação usada na abordagem Lagrangiana:

$$M\dot{v}_u - Md\dot{\theta}^2 = \frac{1}{R}(\tau_R + \tau_L) \quad (72)$$

$$(Md^2 + J)\ddot{\theta} + Md\dot{\theta}v_u = \frac{L}{R}(\tau_R - \tau_L) \quad (73)$$

As duas equações acima podem ser escritas na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & Md^2 + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_u \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -Md\dot{\theta} \\ Md\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (74)$$

Como pode ser observado, a equação (65) é similar à equação (50), que foi obtida usando a abordagem Lagrangiana. Note que, na abordagem de Newton-Euler, as massas e inércias das rodas não são consideradas; o robô é tratado como um corpo rígido único. Assim, ambas as formulações são equivalentes se os parâmetros de inércia e massa forem definidos como:

$$M = m_c \quad (75)$$

$$J = I_c \quad (76)$$

Agora, utilizando as equações de cinemática direta (19) e (20), é possível reescrever facilmente as equações dinâmicas gerais (74) em termos das velocidades angulares das rodas e dos torques dos atuadores. Isso leva à seguinte formulação:

$$\left[\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_R + \left[-\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_L - \left[\frac{MdR^2}{4L^2} \right] \dot{\varphi}_L^2 + \left[\frac{MdR^2}{4L^2} \right] \dot{\varphi}_R \dot{\varphi}_L = \frac{1}{R} \tau_R \quad (77)$$

$$\left[\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_L + \left[-\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_R - \left[\frac{MdR^2}{4L^2} \right] \dot{\varphi}_R^2 + \left[\frac{MdR^2}{4L^2} \right] \dot{\varphi}_R \dot{\varphi}_L = \frac{1}{R} \tau_L \quad (78)$$

As equações acima também são equivalentes às obtidas pela abordagem Lagrangiana, conforme mostrado na equação (49).

A Figura 3 apresenta o modelo dinâmico do DDMR, representando as equações de movimento (74). Esse modelo evidencia claramente o acoplamento entre os torques dos motores, as velocidades linear e angular do robô, e as velocidades das rodas. Este modelo pode ser utilizado de forma adequada para simulação e análise do DDMR.

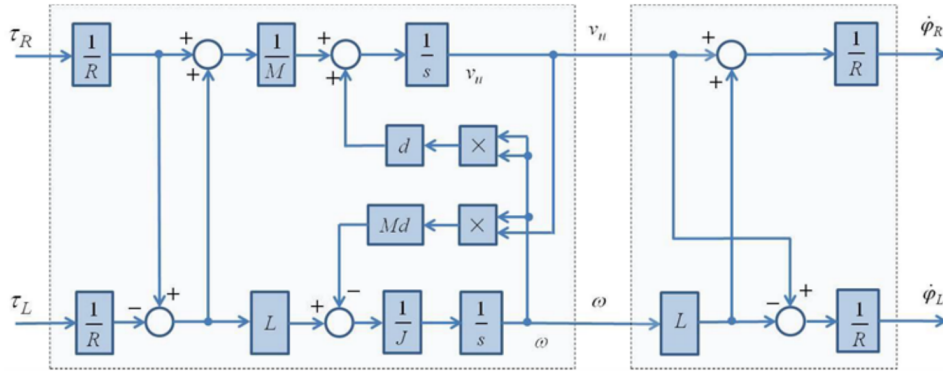


Figura 3: Modelo dinâmico do DDMR

6 Modelagem dos Atuadores

Os motores DC geralmente utilizados para acionar as rodas de um robô móvel com acionamento diferencial são considerados como atuadores do tipo servo. No nosso sistema DDMR, o motor DC é controlado pelo circuito de armadura, utilizando a tensão da armadura v_a como sinal de controle, mantendo constantes as condições no circuito de campo.

Para um motor DC de ímã permanente, temos as seguintes equações para o circuito da armadura:

$$\begin{cases} v_a &= R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \\ e_a &= K_b \omega_m \\ \tau_m &= K_t i_a \\ \tau &= N \tau_m \end{cases} \quad (79)$$

onde i_a é a corrente da armadura, (R_a, L_a) são respectivamente a resistência e a indutância do enrolamento da armadura, e_a é a força contra-eletromotriz (back emf), ω_m é a

velocidade angular do rotor, τ_m é o torque gerado pelo motor, (K_t, K_b) são as constantes de torque e de back emf, N é a razão de engrenagem, e τ é o torque aplicado à roda.

Como nos DDMRs os motores estão mecanicamente acoplados às rodas por meio de engrenagens, as equações de movimento dos motores estão diretamente ligadas à dinâmica do robô. Assim, cada motor DC satisfaz:

$$\begin{cases} \omega_{mR} &= N\dot{\phi}_R \\ \omega_{mL} &= N\dot{\phi}_L \end{cases} \quad (80)$$

A combinação da equação (79) de cada motor com a dinâmica mecânica do robô móvel com tração diferencial (DDMR) permite obter as equações completas do sistema. Distúrbios adicionais de torque atuando nas rodas podem ser considerados como termos adicionais aos torques dos motores. A Figura 4 apresenta um diagrama em blocos que representa o sistema completo. O modelo cinemático direto (equação 22) pode ser acoplado em cascata ao modelo dinâmico, formando assim um modelo completo para simulação e análise do DDMR.

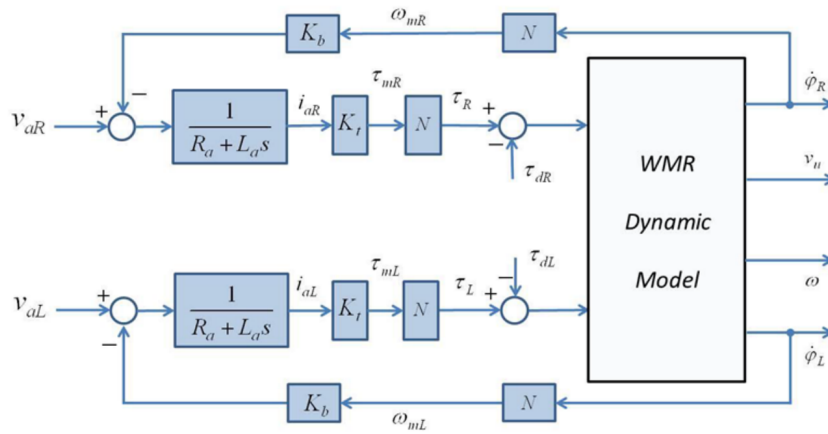


Figura 4: Modelo dinâmico do DDMR com atuadores

7 Conclusão

Neste trabalho, foi apresentada uma dedução detalhada do modelo dinâmico de um robô móvel com tração diferencial, utilizando os métodos de Lagrange e Newton-Euler. Verificou-se que ambos os métodos são matematicamente equivalentes, assegurando a consistência dos resultados. As equações de movimento dos motores de corrente contínua também foram incluídas para compor o modelo dinâmico completo do DDMR. O conhecimento adquirido neste estudo pode auxiliar estudantes de engenharia e pesquisadores na modelagem e no desenvolvimento de controladores adequados para a navegação e o rastreamento de trajetórias de robôs móveis com tração diferencial.

8 Referência

DHAOUADI, Rached; HATAB, Ahmad Abu. Dynamic modelling of differential-drive mobile robots using Lagrange and Newton-Euler methodologies: a unified framework. *Advances in Robotics & Automation*, [S.l.], v. 2, n. 2, p. 1–7, 2013.