

Modelagem dinâmica e cinemática de robôs móveis de tração diferencial

Matheus L. T. Farias

12 de Junho de 2025

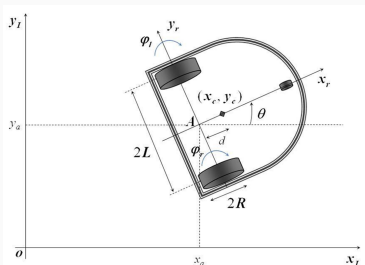
Automação Inteligente

Objetivos

- Implementar o modelo Cinemático do DDMR;
- Implementar o modelo Dinâmico do DDMR;
 - Usando o método de Lagrange;
 - Usando o método de Newton-Euler.
- Implementar o modelo dos atuadores;
- Construir o modelo completo do DDMR;
- Definir e executar uma cena teste;
- Comparar os resultados usando ambos os modelos dinâmicos.

- O artigo base para o desenvolvimento dos modelos foi:
"Dynamic Modelling of Differential-Drive Mobile Robots using Lagrange and Newton-Euler Methodologies - A Unified Framework"
- O desenvolvimento dos modelos propostos no artigo passou por uma revisão para verificar se havia inconsistências;
- Após o processo de revisão, os modelos foram implementados utilizando a ferramenta MATLAB/SIMULINK.

Como descrever o movimento do robô?



Referenciais:

- **Inercial** $\{X_I, Y_I\}$: fixo no mundo, usado para observar o robô.
- **Do Robô** $\{X_r, Y_r\}$: preso ao corpo, origem no ponto A (meio das rodas).

Ponto C: centro de massa, a uma distância d do ponto A .

Estado do robô:

$$q^I = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \theta \end{bmatrix} \quad (\text{posição e orientação do DDMR no referencial inercial})$$

Transformação de coordenadas:

$$X^I = R(\theta)X^r, \quad \dot{X}^I = R(\theta)\dot{X}^r$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Essencial para: modelagem cinemática e dinâmica do robô

Restrições Cinemáticas Consideradas

O modelo cinemático do robô com tração diferencial (DDMR) considera as seguintes três restrições não-holonômicas:

- **1. Ausência de deslizamento lateral:** O robô não se desloca lateralmente em seu próprio referencial. (Velocidade transversal no ponto médio entre as rodas é nula).
- **2. Rolagem pura da roda direita:** A roda direita permanece em contato com o solo, sem escorregar. (Velocidade linear no ponto de contato é igual à rotação vezes o raio).
- **3. Rolagem pura da roda esquerda:** A roda esquerda também mantém contato constante, sem derrapagem. (Idem à direita, com sinal invertido por simetria).

Forma Matricial das Restrições

As três restrições são expressas pelas seguintes equações:

$$-\dot{x}_a \sin \theta + \dot{y}_a \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$\dot{x}_a \cos \theta + \dot{y}_a \sin \theta + L\dot{\theta} - R\dot{\varphi}_R = 0 \quad (2)$$

$$\dot{x}_a \cos \theta + \dot{y}_a \sin \theta - L\dot{\theta} - R\dot{\varphi}_L = 0 \quad (3)$$

Essas equações podem ser compactadas na forma matricial:

$$\Lambda(q)\dot{q} \quad (4)$$

com

$$\Lambda(q) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & L & -R & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & -L & 0 & -R \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a & \dot{y}_a & \dot{\theta} & \dot{\varphi}_R & \dot{\varphi}_L \end{bmatrix}^T$$

Modelo Cinemático

O artigo propõe dois modelos equivalentes para a cinemática do DDRM, ambos representados nas equações (5) e (6)

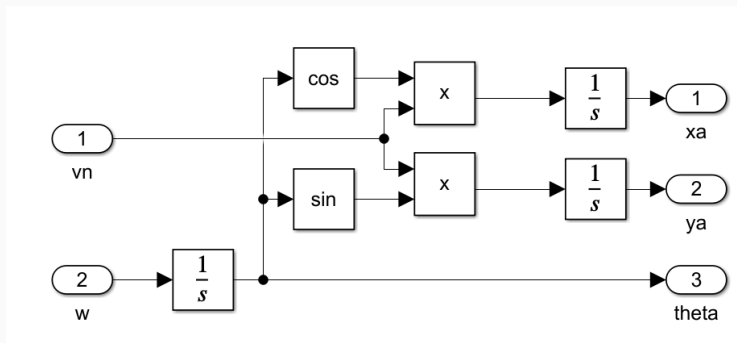
$$\dot{q}^I = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} \cos \theta & \frac{R}{2} \cos \theta \\ \frac{R}{2} \sin \theta & \frac{R}{2} \sin \theta \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\dot{q}^I = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (6)$$

O modelo da equação (5) relaciona as velocidades angulares das rodas com a variação da posição e da orientação do robô. Já o modelo da equação (6) faz essa relação a partir da velocidade angular e linear do robô.

Modelo Cinemático

A partir da equação (6) foi implementado o modelo cinemático no SIMULINK. O diagrama de bloco da implementação é:



O qual recebe como entrada as velocidades angulares e lineares do robô e tem como saída a posição e a orientação dele.

Modelo da Dinâmica do DDRM - Método de Lagrange

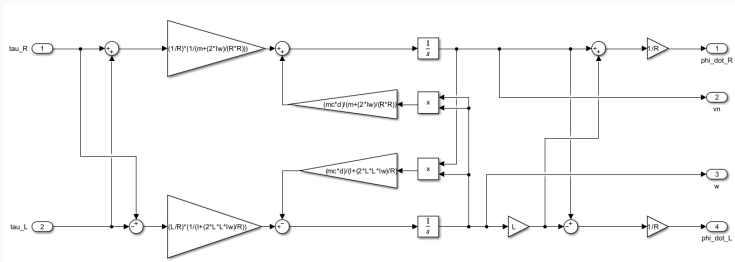
O modelo da dinâmica do DDRM, utilizando a metodologia de Lagrange, desenvolvido no artigo pode ser resumido na equação (7)

$$\begin{cases} \left(m + \frac{2I_w}{R^2} \right) \dot{v} - m_c d \omega^2 = \frac{1}{R} (\tau_R + \tau_L) \\ \left(I + \frac{2L^2}{R^2} I_w \right) \dot{\omega} + m_c d \omega v = \frac{L}{R} (\tau_R - \tau_L) \end{cases} \quad (7)$$

Na qual m é a massa total do DDRM, m_c é a massa da plataforma do robô, I_w é o momento de inércia da roda, τ_R é o torque aplicado na roda direita e τ_L é o torque aplicado na roda esquerda.

Modelo da Dinâmica do DDRM - Método de Lagrange

A partir da equação (7) foi implementado o modelo dinâmico no SIMULINK. O diagrama de bloco da implementação é:



O qual recebe como entrada os torques mecânico das rodas direita e esquerda do robô e retorna a velocidade angular e linear dele e ainda a velocidade angular de cada uma das rodas.

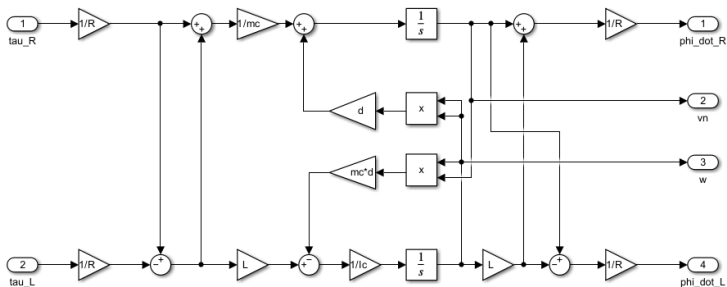
Por outro lado, o modelo da dinâmica do DDRM, utilizando a metodologia de Newton-Euler, apresentado no artigo é representado pela equação (8)

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & Md^2 + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_u \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -Md\dot{\theta} \\ Md\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (8)$$

Na qual M é a massa total do DDRM, J é o momento de inércia do centro de massa do robô, τ_R é o torque aplicado na roda direita e τ_L é o torque aplicado na roda esquerda.

Modelo da Dinâmica do DDRM - Método de Newton-Euler

Utilizando a equação (8) foi feita a implementação do modelo no SIMULINK. O diagrama de blocos do modelo dinâmico utilizando o método de Newton-Euler foi:



O qual recebe como entrada os torques mecânicos das rodas direita e esquerda do robô e retorna a velocidade angular e linear dele e ainda a velocidade angular de cada uma das rodas.

Modelagem dos Atuadores - Motores DC

- Robôs móveis com tração diferencial (DDMRs) utilizam motores DC acoplados às rodas via engrenagens.
- O controle é feito pela tensão de armadura v_a , mantendo o campo magnético constante.
- Cada roda é acionada por um motor independente (direita e esquerda).
- O modelo inclui efeitos elétricos (resistência, indutância, back emf) e mecânicos (torque, engrenagem).
- A dinâmica dos motores está diretamente acoplada à dinâmica do robô.
- Permite simulações completas ao combinar com a modelagem cinemática e dinâmica do DDMR.
- Distúrbios podem ser modelados como torques externos adicionais.

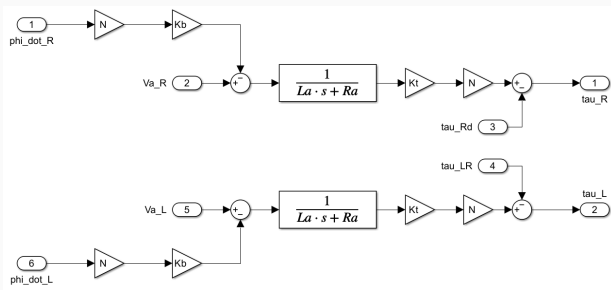
Equações do Modelo dos Atuadores

$$\left\{ \begin{array}{l} v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \\ e_a = K_b \omega_m \\ \tau_m = K_t i_a \\ \tau = N \tau_m \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{mR} = N \dot{\varphi}_R \\ \omega_{mL} = N \dot{\varphi}_L \end{array} \right. \quad (9)$$

Nas quais, R_a e L_a representam a resistência e a indutância do enrolamento da armadura, respectivamente; K_b e K_t são as constantes de força contra-eletromotriz (back emf) e de torque; N é a razão de engrenagem; ω_m , a velocidade angular do rotor.

Modelo dos Atuadores - Motores DC

Utilizando o conjunto de equações (9) foi possível implementar o modelo do atuador no SIMULINK, que resultou em:

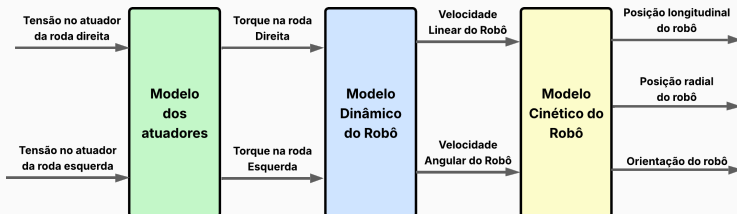


O qual recebe como entrada as tensões de armadura dos motores e as velocidades angulares das rodas. E como saída, ele possui os torques aplicados nas rodas. Além disso, há uma entrada de distúrbios para realizar simulações mais realistas.

Modelo Completo

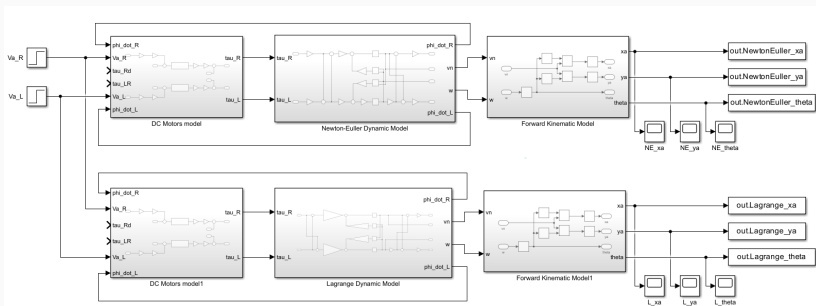
O modelo completo do DDRM, que serve para simulação e para análise de resultados, é formado pela composição em série dos modelos mencionados anteriormente.

A figura mostra um diagrama que explicita a composição do modelo completo.



Modelo Completo

A implementação feita no SIMULINK do modelo completo foi:



A qual simula ambas as metodologias para o modelo dinâmico com a mesma entrada de tensão.

Para realizar o teste dos modelos e comparar seus resultados, foi pensado no seguinte cenário de teste:

- O robô parte da origem;
- Depois dá uma volta no sentido horário até voltar para sua posição inicial;
- Em seguida dá uma volta no sentido anti-horário e volta para a posição inicial;
- Por fim o robô anda para a frente em linha reta.

Em termos da entrada, esse cenário deve ocorrer se:

- A tensão em ambos os motores forem nulas;
- Em seguida ser aplica uma tensão não nula no motor esquerdo até o robô voltar a origem;
- Depois zerar a tensão no motor esquerdo e aplicar uma tensão não nula no motor direito até o robô voltar a origem;
- Por fim aplicar uma tensão não nula em ambos os motores com mesma intensidade.

Cenário de teste

O DDMR simulado foi o Pioneer3DX que possui os seguintes parâmetros:

- $D = 195 \times 10^{-3} \text{ m}$ (Diâmetro das rodas)
- $R = \frac{D}{2} = 97.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ (Raio das rodas)
- $d = 44.51 \times 10^{-3} \text{ m}$ (Distância do centro de massa ao eixo das rodas)
- $L = 0.1655 \text{ m}$ (Meia largura do robô)
- $m_c = 13 \text{ kg}$ (Massa do chassi)
- $m_w = 1.5 \text{ kg}$ (Massa da roda + motor)
- $m = m_c + 2m_w = 16 \text{ kg}$ (Massa total do robô)
- $I_c = 130.7 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (Momento de inércia do chassi)
- $I_w = 40 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (Momento de inércia da roda em torno do eixo)

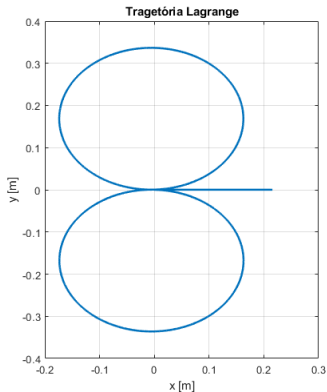
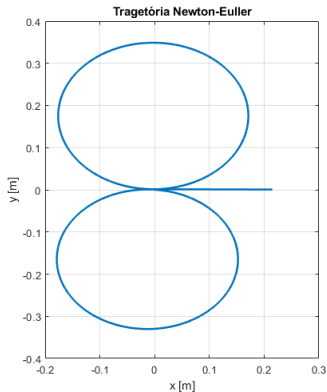
Cenário de teste

O DDMR simulado foi o Pioneer3DX que possui os seguintes parâmetros:

- $I_m = 20 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (Momento de inércia da roda em torno do diâmetro)
- $I = I_c + m_c d^2 + 2m_w L^2 + 2I_m = 0,2547 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (Inércia total)
- $R_a = 710 \times 10^{-3} \Omega$ (Resistência da armadura do motor)
- $L_a = 0.66 \times 10^{-3} \text{ H}$ (Indutância da armadura)
- $V_s = 12 \text{ V}$ (Tensão máxima de armadura)
- $K_b = 23 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{s/rad}$ (Constante de força eletromotriz)
- $K_t = 29 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m/A}$ (Constante de torque)
- $N = 38.3$ (Razão da caixa de redução, adimensional)

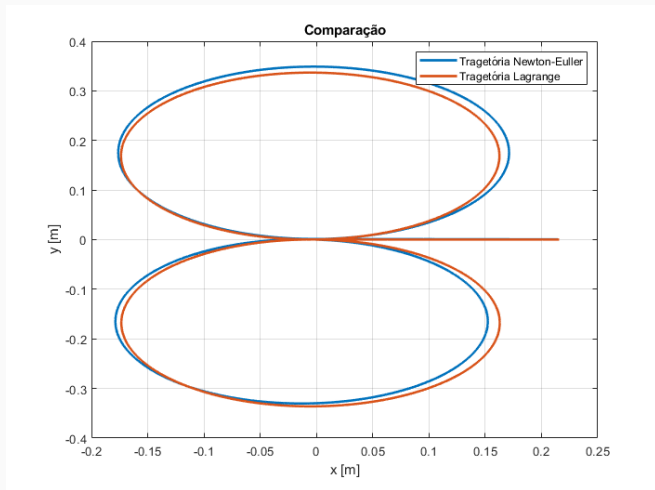
Resultado da simulação

Para o cenário descrito, foi obtida a seguinte trajetória:



Comparação

Ao mostrar ambas as trajetórias em um único gráfico tem-se:



Conclusão

Com a aplicação da modelagem proposta e os resultados obtidos das trajetórias, é possível inferir que os modelos representam bem a dinâmica e a cinemática dos componentes do sistema. Isso se evidencia ao comparar os resultados das trajetórias com a sequência de entradas descrita no cenário de teste, revelando que o modelo completo fornece uma resposta bastante próxima do esperado.

Além disso, foi realizada uma comparação entre as metodologias de modelagem da dinâmica do robô. Como observado nos resultados, as trajetórias não coincidem em todos os pontos e, em alguns casos, apresentam discrepâncias. No entanto, de modo geral, as trajetórias exibem comportamentos semelhantes e coerentes com o esperado.

DHAOUADI, Rached; HATAB, Ahmad Abu. Dynamic modelling of differential-drive mobile robots using Lagrange and Newton-Euler methodologies: a unified framework. *Advances in Robotics & Automation*, [S.l.], v. 2, n. 2, p. 1–7, 2013.

OBRIGADO!

Fico à disposição para dúvidas.

Autor: Matheus Lucas Tavares de Farias

E-mail: matheuslucas.farias@ee.ufcg.edu.br