A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DE CÁLCULO PARA O CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

O bacharel em Ciência da Computação não é aquele profissional que deve saber apenas conhecimentos práticos na sua área de conhecimento, mas precisa também ter um embasamento teórico por detrás dessa prática. Ele deve saber pensar, deve saber organizar as ideias, equacionar problemas, trabalhar em equipe, escolher os conhecimentos científicos e tecnológicos que se aplicam ao problema que precisa ser resolvido. Este tipo de capacidade só se obtém com o domínio da ciência. Só depois de muitas aulas de Cálculo, filosofia, programação, entre outras, é que ele terá esse domínio mais abrangente.

Logo, pode se ver que o estudo do cálculo é fundamental para sua formação acadêmica e profissional.

A construção desta poderosa ferramenta matemática que é o Cálculo, é resultado de diversas contribuições de muitos matemáticos em diferentes períodos históricos. Cada teórico, ao seu tempo, desenvolveu novas ideias e aperfeiçoou os métodos para o estudo e a aplicação do Cálculo em diferentes áreas do conhecimento, podendo ser aplicado desde a Biologia até ao estudo da Eletricidade, entre outros.

O Cálculo Diferencial e Integral é uma parte importante da matemática, diferente de tudo que o aluno ingressante na Universidade já estudou, ele é dinâmico. Trata da variação, de movimento e de quantidades que mudam, tendendo a outras quantidades. É a matemática dos movimentos e das variações.

Sendo a matemática uma disciplina onde o conhecimento é acumulativo e sequencial, seria necessário que desde as séries iniciais fosse desenvolvido o gosto dos alunos em perceber que a matemática é mais que um amontoado de números e resolução de “continhas”, mas principalmente uma forma de raciocinar sobre determinadas situações.

As contribuições dos matemáticos para o nascimento do Cálculo foram inúmeras. Algumas foram desenvolvidas desde tempos anteriores ao cristianismo, com pensadores como Arquimedes, Hipócrates e Antifon. Outros, já utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas como por exemplo, Cavalieri, Barrow, Fermat, Kleper, Cauchy e Riemann. A união das partes conhecidas e utilizadas até então, aliada ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas, aconteceu com Newton e Leibniz, nos séculos XVI e XVII, que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as derivadas e as integrais. Assim podemos dividir o Cálculo em duas partes; uma relacionada às derivadas ou cálculo diferencial e outra parte relacionada as integrais ou cálculo integral.

Logo, é interessante perceber que, se a formação e construção dos raciocínios para os estudos de Cálculo Diferencial e Integral levaram tanto tempo para serem estabelecidos, seria interessante que esta história fosse de domínio dos estudantes universitários que optam pelos cursos de Engenharias.

Neste semestre, vamos estudar o Cálculo I, que se inicia com uma revisão dos Conjuntos Numéricos, depois passa para o estudo das Funções Linear, Quadrática, Exponencial, Logarítmica, Trigonométricas, etc., já vistas no ensino médio, e, em seguida introduzimos os conceitos de limites e derivadas. Na sequência, vocês estudarão o cálculo II, onde aprenderão sobre as integrais.

O texto abaixo, é uma revisão dos Conjuntos Numéricos e suas operações e aplicações.

É muito importante que todos os alunos saibam esses conteúdos básicos para ter maior compreensão durante o desenvolvimento da nossa disciplina.

Outra coisa muito importante é o nosso lema para o semestre:

AULA DADA É AULA ESTUDADA HOJE.

Sendo assim, precisamos estudar todos os dias os conteúdos vistos em aula. Espero que você esteja animado e que seja comprometido com a construção do seu conhecimento de Cálculo I.

CONJUNTOS NUMÉRICOS E SUAS OPERAÇÕES

Os números estão presentes em muitas das atividades do nosso dia a dia. Os números são uma engenhosa maneira de expressar os aspectos quantitativos de objetos e fenômenos.

Historicamente, as duas principais fontes das quais se originaram os números são a contagem e a mensuração, sendo a contagem a operação de contar e a mensuração, a de medir. Embora essas operações acompanhem o homem desde os tempos mais primitivos, foram necessários milhares de anos até chegarmos aos conjuntos numéricos atuais.

Podemos caracterizar um conjunto como sendo uma reunião de elementos que possuem características semelhantes. Caso esses elementos sejam números, temos então a representação dos conjuntos numéricos. Quando esse conjunto é representado por extenso, escrevemos os números entre chaves { }, se o conjunto for infinito irá possuir incontáveis números. Para representar essa situação devemos utilizar reticências, ou seja, três pontinhos.

Existem cinco conjuntos numéricos que são considerados fundamentais, por serem os mais utilizados em problemas e questões relacionados à matemática.

Acompanhem a seguir a representação desses conjuntos:

1. Conjunto dos Números Naturais

Esse conjunto é representado pela letra maiúscula **N**, sendo formado por todos os números inteiros positivos incluindo o zero. A seguir acompanhe a notação da representação simbólica e um exemplo numérico.

- **Representação simbólica:** $N = \{x \in N / x \geq 0\}$
- **Exemplo:** N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, …}

Caso esse conjunto não possua o elemento zero, será chamado de conjunto dos números naturais não nulos, sendo representado por **N*.** Veja a sua representação simbólica e um exemplo numérico:

- **Representação simbólica:** $N^* = \{x \in N / x \neq 0\}$
- **Exemplo:** N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, …}

Os números naturais formam uma sucessão sem fim: depois de cada natural *n*, podemos apontar o seu sucessor *n + 1*, depois do qual virá *n + 2*, e assim por diante. Também podemos, exceto para 0, apontar o antecessor de qualquer número natural.

O sistema de numeração que usamos é o *sistema decimal* ou *sistema de base 10*, pois contamos em grupos de 10. A palavra decimal vem de *decem*, termo latino que significa dez. Cada dez unidades de uma *ordem* formam uma unidade da ordem imediatamente superior. Consideramos a primeira ordem como sendo a ordem das unidades ($1 = 10^0$); a segunda ordem é a das dezenas ($10 = 10^1$, ou seja, 10 unidades formam uma dezena); a terceira ordem é a das centenas ($100 = 10^2$, ou seja, 10 dezenas formam uma centena); a quarta ordem é a das unidades de milhar ($1000 = 10^{3,}$ ou seja, 10 centenas formam uma unidade de milhar) e assim, por diante.

A mais disso, o sistema de numeração que usamos segue o princípio do *valor posicional dos algarismos*, ou seja, cada algarismo tem um valor de acordo com a posição ou a ordem que ocupa na representação do número. Por exemplo:

- $645 = \underbrace{6 \cdot 10^2}_{\text{Seiscentos}} + \underbrace{4 \cdot 10^1}_{\text{quarenta}} + \underbrace{5 \cdot 10^0}_{\text{cinco}}$

  Seiscentos e quarenta e cinco

- $36.329 = \underbrace{3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3}_{\text{Trinta e seis mil}} + \underbrace{3 \cdot 10^2}_{\text{trezentos}} + \underbrace{2 \cdot 10^1}_{\text{vinte}} + \underbrace{9 \cdot 10^0}_{\text{nove}}$

  Trinta e seis mil e trezentos e vinte e novembro

Obs.: Na escrita por extenso ou na leitura de um número, trocamos o sinal + pela conjunção *e*.

Geralmente, nas tecnologias de base computacional (por exemplo, em calculadoras, computadores e celulares), é usado o *sistema binário* de numeração. Nesse sistema a base é 2 e, na notação, utilizam-se apenas os algarismos 0 e 1. Na estruturação dessas tecnologias, 1 e 0 são adequados à descrição de fenômenos que envolvem situações de liga-desliga, certo-errado, sim-não, abre-fecha, passa-veda etc., uma vez que os circuitos digitais são constituídos por elementos dotados de dois estados distintos.

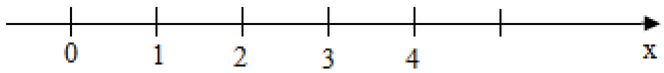
Também o sistema binário de numeração segue o princípio do valor posicional. Por exemplo:

$1011011_{(2)} = 1.\ 2^6 + 0.\ 2^5 + 1.\ 2^4 + 1.\ 2^3 + 0.\ 2^2 + 1.\ 2^1 + 1.\ 2^0 = 91_{(10)}$

$10_{(2)} = 1.\ 2^1 + 0.\ 2^0 = 2_{(10)}$

$128_{(10)} = 2^7{}_{(10)} = 1\ .\ 2^7 + 0\ .\ 2^6 + 0\ .\ 2^5 + 0\ .\ 2^4 + 0\ .\ 2^3 + 0.\ 2^2 + 0\ .\ 2^1 + 0\ .\ 2^0 = 10000000\ _{(2)}$

Podemos representar o conjunto dos números naturais sobre uma reta, denominada reta numérica. Nessa representação, escolhemos um ponto ao qual associamos o número 0 e arbitramos uma unidade de medida, representada pelo segmento de extremos 0 e 1. Além disso, indicamos o sentido de crescimento dos números por meio de uma seta.



Na sucessão dos números naturais, se um número *a* vem antes de um número *b*, dizemos que *a é menor que b* e escrevemos $a < b$. Na reta numérica, escrevemos $a < b$ quando *a* estiver à esquerda de *b*. De modo análogo, se um número *q* vem depois de um número *p*, na sucessão de números naturais, dizemos que *q é maior que p* e escrevemos $q > p$; se, na reta numérica, *q* está à direita de *p*, escrevemos $q > p$.

Número primo é um número *natural* que não é múltiplo de nenhum outro, exceto do número 1 e dele próprio. Ou, dito de outro jeito: *Número primo* é um número natural que só admite como divisores 1 e ele mesmo.
São números primos, por exemplo: 2, 3, 5, 7, 13 e 29. Já os números 4, 6, 9, 51 e 105 não são números primos.

Os números que não são primos são chamados *números compostos*. Por ser composto, um número que não é primo pode ser decomposto em um produto que só apresente fatores primos.
Assim, por exemplo, o número 630 pode ser decomposto em fatores primos:

$$630 = 2\ .\ 3^2.\ 5.\ 7$$

Os múltiplos de 2 são chamados *números pares*; o único número que é, ao mesmo tempo, par e primo é 2. Os números naturais que não são pares são chamados *números ímpares*.

O *mínimo múltiplo comum* de dois ou mais números naturais é o menor número natural que é múltiplo desses números.
O mínimo múltiplo dos números 12, 30 e 42, por exemplo, é: MMC (12, 30, 42) = $2^2.\ 3\ .\ 5\ .\ 7$

O *máximo divisor comum* de dois ou mais números naturais é o maior número natural que é divisor desses números.
O máximo divisor comum dos números 12, 30 e 42, por exemplo, é: MDC (12, 30, 42) = 2

Dois números naturais são *primos entre si* quando seu máximo divisor comum é 1.
Os números 4 e 15, por exemplo, são primos entre si.

EXERCÍCIOS

1. Escreva os elementos de cada um dos subconjuntos de N descritos abaixo:

a. $A = \{ x \in N / x \geq 12\}$

b. $B = \{ x \in N / 8 < x < 12\}$

c. $C = \{ x \in N / 4 \leq x < 8\}$

2. Entre os números naturais m e n, com m > n , existem (m – n – 1) números naturais. Com base nessa informação, calcule quantos são os elementos de cada um dos conjuntos:
a. D = $\{ x \in N / 13 \leq x < 970\}$
b. E = $\{ x \in N / 100 \leq x \leq 1000\}$
c. F = $\{ x \in N / x \leq 15\}$

3. Classifique cada afirmativa em verdadeira (V) ou falsa(F):
a. A soma de dois números naturais quaisquer é um número natural.
b. A diferença entre dois números naturais quaisquer é um número natural.
c. O produto de dois números naturais quaisquer é um número natural.
d. Dado o número natural n $\neq 0$, seu antecessor é n – 1 e seu sucessor é n + 1.
e. Os números 15 e 21 são primos entre si.
f. Se , n ∈ N^*, então 2n é um número par e 2n – 1 é um número ímpar.

4. Determine o MMC e MDC dos números abaixo:

a. 210 e 462
b. 90, 108 e 144

5. Resolva os problemas abaixo:

a. Nas últimas eleições, três partidos políticos tiveram direito, por dia, a 108 s, 210 s e 360 s de tempo gratuito de propaganda na televisão, com diferentes números de aparições. O tempo de cada aparição, para todos os partidos, foi sempre o mesmo e o maior possível. Qual é o valor da soma do número das aparições diárias dos partidos na TV?

b. Certo fenômeno raro ocorre de 12 em 12 anos. Outro fenômeno, mais raro ainda, ocorre de 32 em 32 anos. Se em 2016 os dois eventos ocorreram juntos, em qual ano eles irão ocorrer juntos novamente?

RESPOSTAS:

1. a) {12, 13, 14, ...} b) {9, 10, 11} c) { 4, 5, 6, 7}

2. a) 957 b) 901 c) 16

3. V, F, V, V, F, V

4. a) MMC (210, 462) = 2310 MDC (210, 462) = 42

b) MMC (90, 108, 144) = 2160 MDC (90, 108, 144) = 18

5. a) 113 apurações b) 96 anos

2. <u>Números Inteiros</u>

Sendo *a* e *b* números naturais, a diferença a – b resulta em um número natural somente quando b $\leq$ a. Durante muitos séculos, diferenças tais como, por exemplo, 7 - 12 eram consideradas impossíveis ou inexistentes; de modo geral, para b > a, a diferença a – b não existia. Aos poucos, porém, situações práticas como as que envolvem escalas de temperatura (abaixo ou acima de zero), linhas do tempo (antes ou depois de Cristo) e saldos (negativos ou positivos) revelaram o significado dessas subtrações.

Dezembro - 2012				
Data	Lançamento		Valor (R$)	Saldo (R$)
03/12	TBI 4092.03651	4175	220,00	
03/12	IOF		9,49-	
03/12	S A L D O			3,57-
04/12	TAR TALAO DOMICILIO11/12		5,50-	
04/12	S A L D O			9,07-
05/12	CH COMPENSADO 001 000442	5140	100,00-	
05/12	S A L D O			109,07-
06/12	CH COMPENSADO 756 000443	5140	176,00-	
06/12	TBI 4092.03651	4175	115,00	
06/12	S A L D O			170,07-

Neste caso o resultado dessas subtrações é um número negativo e não um número natural.

Entre os pitagóricos, *negativo* significava *aquilo que não existe*. O conjunto desses dois tipos de números – naturais e negativos – é o conjunto dos números inteiros.

Representamos esse conjunto com a letra maiúscula **Z**, ele é formado pelos números inteiros negativos, positivos e o zero. Logo a seguir temos um exemplo numérico.

Exemplo: Z = {… -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …}

O conjunto dos números Inteiros possui alguns subconjuntos, os quais estão listados a seguir:

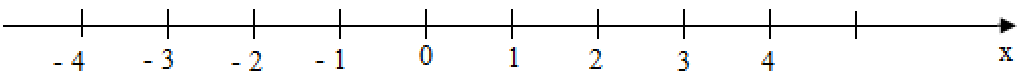
Inteiros não negativos: Representado por **Z_+,** pertencem a esse subconjunto todos os números inteiros que não são negativos, podemos considera-lo como sendo igual ao conjunto dos números naturais.
Exemplo: Z_+ ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ,8, …}

Inteiros não positivos: Esse subconjunto é representado por **Z-,** sendo composto por números inteiros negativos.
Exemplo: Z- ={…, – 4, – 3, – 2, – 1, 0}

Inteiros não negativos e não nulos: Representado por Z^*_+, todos os elementos desse subconjunto são números positivos. À exclusão do número zero é representada pelo asterisco, com isso o zero não faz parte do subconjunto.
Exemplo: Z^*_+= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 …}

Inteiros não positivos e não nulos: Esse conjunto é representado pela notação **Z*- ,** sendo formado pelos número inteiros negativos, possuindo a exclusão do zero.
Exemplo: Z*–= {… – 5,- 4, – 3, – 2, – 1}

No conjunto dos inteiros, qualquer número negativo é menor que zero. Na representação desse conjunto por meio da reta numérica, os negativos estão à esquerda de zero; à direita de zero estão os números positivos. Zero não é nem positivo e nem negativo.



Para cada número a ∈ Z, existe um número – a ∈ Z, chamado *simétrico* de a em relação a 0 (zero), tal que a+(-a) = 0. Em consequência, o simétrico de -a em relação a zero é a, isto é, -(-a) = a ; além disso, como 0 + 0 = 0 , o simétrico de zero em relação a zero é , ou seja, -0 = 0.

Quando somamos, subtraímos ou multiplicamos dois inteiros, obtemos como resultado um número inteiro. Desse modo, sempre é possível somar, subtrair ou multiplicar dois números inteiros, obtendo como resultado um número inteiro.

Operações com números inteiros

Soma e Subtração de números inteiros

A adição e a subtração de números inteiros envolvem algumas regras básicas, essenciais para a obtenção do resultado correto. Para uma melhor fixação dessas regras e como utilizá-las, vamos demonstrar os cálculos seguidos da respectiva regra matemática.

Quando não ocorrer a presença de parênteses nas operações, devemos proceder da seguinte maneira:

Quando os sinais dos números são iguais, devemos adicionar mantendo o sinal dos números.
Quando os sinais dos números são diferentes, devemos subtrair os números mantendo o sinal do número de maior módulo.

Exemplos:

+ 4 + 6 = +10	–7 – 8 = – 15	– 9 – 10 = – 19	
– 60 + 80 = + 20	– 21 + 5 = – 16	– 100 + 12 = – 88	+ 15 – 30 = – 15

Caso ocorra a presença de parênteses nas operações entre os números inteiros, devemos eliminá-los, utilizando o jogo do sinal.

(–8) + (–2) + (–7) = – 8 – 2 – 7 = - 17

(+81) + (–12) – (+ 7) = + 81 – 12 – 7 = + 81 – 19 = + 62

Multiplicação e Divisão de números inteiros

Regra Prática dos sinais na multiplicação e divisão:

SINAIS IGUAIS o resultado é sempre positivo +

SINAIS DIFERENTES o resultado é sempre negativo –

(+5) . (-8) = - 40
(- 3) . (- 4) = + 12
(+ 6) : (- 2) = -3
(- 24) : (- 8) = + 4
(+5) . (- 4) : (-2) = (- 20) : (- 2) = + 10

No conjunto dos inteiros, podemos escrever um produto de fatores iguais na forma de uma potência de expoente não negativo. Por exemplo:

5^4 = 5. 5. 5. 5 = 625 Em 5^4, 5 é a base e 4 é o expoente. O resultado 625 é a potência 4 de 5.
$(-4)^3$ = (- 4) . (- 4) . (- 4) = - 64
$(-2)^4$ = (- 2) . (- 2) . (- 2) . (- 2) = 16
-2^4 = - 2. 2. 2. 2 = - 16

Por definição, qualquer número elevado a 0 é igual a 1.

VALOR ABSOLUTO

O valor absoluto ou módulo de um número *a*, denotado por $|a|$, é definido pela igualdade:

$$|a| = \begin{cases} a, se\ a \geq 0 \\ -a, se\ a < 0 \end{cases}$$

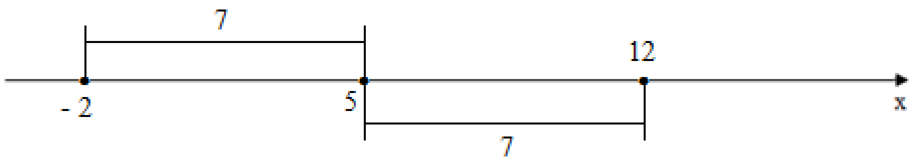
Por exemplo:
$|3|=3$ $|-3|=3$ $|0|=0$

Geometricamente, o módulo de um número *a* é a distância do ponto *a* até a origem.
Podemos escrever: $|a|=|a-0|$. De modo análogo, a distância de *a* até *b* é $|b-a|$.
Assim, por exemplo:

- A distância de -5 à origem 0 é $|-5-0|$= 5
- A distância de 5 à origem 0 é $|5-0|$= 5
- A distância de -7 a 6 é $|-7-6| = |-13| = 13$

Ao lidar com valores absolutos, precisamos ter presentes as seguintes propriedades dessa operação:
1. $|a-b| = |b-a|$ Pensando em distância, podemos concordar que a distância de *a* até *b* é igual à distância de *b* até *a*.
2. $|a.b| = |a|.|b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$
5. $\sqrt{a} = |a|$ Desse modo $\sqrt{(-3)^2} = |-3|$= 3 e $\sqrt{3^2} = |3|$= 3

Para resolver uma equação como $|x-5|$= 7, podemos pensar que a distância entre *x* e 5 deve ser igual a 7. Tendo em mente a reta real, fica fácil perceber que as soluções são x = - 2 e x = 12.



EXERCÍCIOS

1. Complete cada item com os sinais <, >, ou = , formando sentenças verdadeiras:
a. – 8 _____3
b. – 3^4 _____$(-3)^4$
c. - 3 . 4 _____ 3 . (-4)
d. (- 13 + 9) _____(13 – 9)
e. (14 – 14) _____ - 10
f. (11 – 19) _____ (-6 – 3)
g. 10 + $(- 2)^3$ _____ 10 - 2^3
h. – 5 . (53 – 9) _____ - 42 . 5
i. (- 23 + 18) ______ - 41

2. Escreva cada um dos seguintes subconjuntos de Z:

a. A = { x ∈ Z ⁄ x > -4}
b. B = { x ∈ Z ⁄ x ≤ 12}
c. C = { x ∈ Z ⁄ -7< x < - 3}
d. D = { x ∈ Z ⁄ - 4 ≤ x ≤ 2}
e. E = { x ∈ Z ⁄-3 < x ≤ 1}

3. Calcule o valor de cada expressão:

a. $x^2 + 3x - 5$, para x = 4
b. $2x^3 + x^2 - 3x + 1$, para x = -2
c. $-x^4 - 3x^2 + 7x - 6$, para x = -1
d. $2xy^2 - 3x^2y + 4x + 5y$, para x = -2 e y = 2

4. Reescreva cada uma das expressões eliminando o símbolo de valor absoluto.
a. $|5-28|$ b. $|-3|$- $|-25|$ c. $|2-e|$ d. $|\pi-4|$ e. $|\sqrt{3}-3|$ f. $||-4|-|-5||$

5. Determine os possíveis valores de x em cada uma das equações.
a. $|x|$=4 b. $|x+5|$=3 c. $|2x|$=7 d. $|x-2| = |x+1|$
e. $|x-2|$= 4 f. $|x^2-9|$= 7 g. $|2x-2| = |x+3|$ h. $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|$=3

RESPOSTAS:

1.a) < b) < c) = d) < e) > f) > g) = h) < i) >

2. a) {-3, -2, -1, ...} b) {..., 10, 11, 12} c) {-6, -5, -4} d) {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2} e) {-2, -1, 0, 1}

3. a) 23 b) -5 c) -17 d) -38

4. a) 23 b) -22 c) e – 2 d) $4 - \pi$ e) $3 - \sqrt{3}$ f) 1

5. a) x = -4 ou x = 4 b) x = -8 ou x = - 2 c) x = $\frac{-7}{2}$ ou x = $\frac{7}{2}$ d)x = $\frac{1}{2}$ e) x = 6 ou x = -2
f) x = ± 4 ou x = $\pm\sqrt{2}$ g) x = 5 ou x = $\frac{-1}{3}$ h) x = - 4 ou x = $\frac{-2}{5}$

3. Conjunto dos Números Racionais

Nem sempre, ao dividir um inteiro *p* por outro inteiro q $\neq$ 0, obtemos outro inteiro; de fato, o resultado da divisão de p por *q* só é um número inteiro quando q é um múltiplo de p, ou seja, quando p = k . q. Neste caso, escrevemos: $\frac{p}{q}$ =k. O conjunto dos números obtidos pela divisão de um inteiro *p* por outro inteiro q é chamado de conjunto dos números racionais. Usamos para representar o conjunto dos números racionais a letra Q, que lembra quociente.

Esse conjunto é representado pela letra maiúscula Q, sendo formado pela reunião dos conjuntos referentes aos números naturais e inteiros, portanto o conjunto N (naturais) e o Z (inteiros) estão inclusos no conjunto Q (racionais). Os termos numéricos que compõem o conjunto dos números racionais são: os números inteiros positivos e negativos, números decimais, números fracionários e dízima periódica. Acompanhe a seguir a representação simbólica desse conjunto e um exemplo numérico.

Representação simbólica: Q = {x = $\frac{p}{q}$, com a є Z e b є Z*}

Na expressão $\frac{p}{q}$ do número racional, p e q são os *termos* da fração, o inteiro p é o *numerador* e o inteiro q , o *denominador*.

Descrição: A representação simbólica indica que todo o número racional é obtido de uma divisão com números inteiros, em que o denominador no caso ***q*** deve ser diferente de zero.
Exemplo: Q = {… – 2; $\frac{-3}{2}$;– 1; 0; +$\frac{1}{3}$; + 1; +2; + 2,6; + 4; + 4,555…}

Classificando os elementos do conjunto Q:

- {+ 1, + 4} à Números naturais.
- {- 2, -1, 0, + 1, + 4} à Números inteiros.
- {+ $\frac{2}{3}$ } à Fração.
- {+ 0,14; + 1,25} à Número decimal.
- {+ 4,555…} à Dízima periódica.

O conjunto dos números racionais também possuem subconjuntos, são eles:

Racionais não negativos: Representado por **Q_+**, esse conjunto possui o número zero e todos os termos numéricos racionais positivos.
Exemplo: Q_+= {0; + $\frac{1}{3}$; + 1; +2,14; + 3; 4,555…}

Racionais não negativos não nulos: Esse conjunto é representado por **Q^*_+**. É formado por todos os números racionais positivos, sendo que o zero não pertence ao conjunto.
Exemplo: Q^*_+ = {+ $\frac{1}{3}$; + 1; +2,14; + 3; 4,555…}

Racionais não positivos: Representamos esse conjunto pelo símbolo **Q-,** pertencem a esse conjunto todos os números racionais negativos e o zero.
Exemplo: Q – = {…- 2; – 1; 0}

Racionais não positivos não nulo: Para representar esse conjunto utilizamos a notação **Q*–** . Esse conjunto é composto por todos os números racionais negativos, sendo que o zero não pertence ao conjunto.
Exemplo: Q* – = {…- 2, – 1}

Dois ou mais números racionais que representam a mesma quantidade são chamados de *números equivalentes*. As frações $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{14}$ e $\frac{20}{35}$, representam o mesmo número racional e, por isso, são frações equivalentes; a equivalência entre números é indicada pelo sinal de igualdade: $\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{20}{35}$ **.**

A igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é verdadeira se somente se, a. d = b. c.

$\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$, 4 . 14 = 7 . 8, 56 = 56.

Utilizamos esta mesma relação para simplificar as frações. Podemos obter a máxima simplificação de um número racional $\frac{p}{q}$ dividindo cada um de seus termos, p e q , pelo máximo divisor comum deles.
Por exemplo, para simplificarmos a fração $\frac{1260}{2100}$, precisamos encontrar o MDC dos termos 1260 e 2100.
MDC (1260 e 2100) = 2^2. 3. 5. 7 = 420

Então, $\frac{1260:420}{2100:420} = \frac{3}{5}$ **.** A fração $\frac{3}{5}$ é uma fração irredutível porque seus termos são primos entre si.

Operações com os números racionais

Adição e subtração

No caso das frações, só se podem somar ou subtrair frações que tenham o mesmo denominador. Neste caso conservamos o denominador e somamos ou subtraímos os numeradores.

$$\mathbf{\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}}$$

Caso os denominadores sejam diferentes, precisamos encontrar as frações equivalentes que tenham o mesmo denominador, para em seguinte efetuarmos a soma ou a subtração.

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{3\,.\,4}{15} - \frac{5\,.\,2}{15} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

Multiplicação ou divisão

O produto dos números racionais é dado por $\frac{numerador\ x\ numerador}{denominador\ x\ denominador}$.

$$\frac{3}{4} . \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$$

A divisão é a operação inversa da multiplicação.

Se p e q ∈ Z, o quociente de p por q, indicado por $\frac{p}{q}$ ou p : q , é definido como o resultado da multiplicação de r pelo inverso de s.

$$\frac{3}{4} . \frac{5}{6} = \frac{3}{4} . \frac{6}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

Potenciação

Na potenciação de uma fração, elevamos o numerador e o denominador ao expoente da fração.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{(2)^3}{(3)^3} = \frac{8}{27}$$

Frações decimais e números decimais

As frações decimais são aquelas cujo numerador são potências de dez.

$$\frac{5}{10}, \frac{24}{100}, \frac{3}{1000}, \frac{245}{100}, etc$$

Todas elas podem ser escritas em forma de número decimal.

Em geral, transforma-se uma fração decimal em um número decimal fazendo com que o numerador da fração tenha o mesmo número de casas decimais que o número de zeros do denominador. Na verdade, realiza-se a divisão do numerador pelo denominador. Por exemplo:

$\frac{5}{10} = 0{,}5$ $\quad \frac{24}{100} = 0{,}24$ $\quad \frac{3}{1000} = 0{,}003$ $\quad \frac{245}{100} = 2{,}45$

Dízimas periódicas

A fração geratriz é aquela que dá origem a uma dízima periódica.
Aqui, vamos dar dicas de como achar as frações geratrizes de dízimas periódicas simples e compostas, de uma forma bem prática. Coloca-se o período no numerador e para cada algarismo do período põe-se um nove no denominador.

Dízimas periódicas simples

b) 0,444...
Período: 4 (1 algarismo)

$$0{,}444\ldots = \frac{4}{9}$$

c) 0,313131...
Período: 31 (2 algarismos)

$$0{,}313131\ldots = \frac{31}{99}$$

d) 0,278278278...
Período: 278 (3 algarismos)

$$0{,}278278278\ldots = \frac{278}{999}$$

e) 1,55555...
Período: 5 (1 algarismo)

Nesse caso, temos uma dízima simples e a parte inteira diferente de zero.
Uma estratégia é separar parte inteira e parte decimal.

$$1{,}5555\ldots = 1 + 0{,}5555\ldots = 1 + \frac{5}{9} = \frac{9+5}{9} = \frac{14}{9}.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule o valor de cada expressão:

a. $a^2 - 5ab - 3b^2$, para a = $\frac{2}{5}$ e b = - $\frac{1}{2}$
b. $\frac{xy+y^2}{x^2-y}$ para x = 0,2 e y = 0,1
c. $\frac{a+b}{1-ab} - \frac{a.b^2}{1-ab}$ para a = $\frac{3}{4}$ e b = $\frac{1}{6}$

2. Um iphone que, antes do Natal, era comercializado por R$2.100,00 passou a ser vendido com um desconto de 20%. Determine o novo preço desse aplicativo.

3. Após um aumento de 12%, o preço de um eletrodoméstico passou a ser de R$980,00. Determine o preço desse artefato, antes desse aumento.

4. Devido às condições da rodovia, certo motorista que viajava a 80 km/h aumentou a velocidade em 20% e, depois de algum tempo, a reduziu em 20%. Determine a velocidade do veículo após cada um desses dois procedimentos.

5. Estabeleça o valor de x em cada caso:

a. $\frac{8}{12} = \frac{20}{x}$ b. $\frac{-45}{36} = \frac{x}{48}$ c. $\frac{x}{72} = \frac{-26}{117}$

6. O produto de dois números é igual a zero somente quando um desses números é igual a zero. Em símbolos, escrevemos: $a\ .\ b = 0 \leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.
Com base nessa ideia, resolva cada uma das equações.

a. (2x – 3) . (5x + 2) = 0
b. 3x . (2x -1) . (x + $\frac{5}{6}$) = 0
c. x^2 . (20 x – 12) = 0
d. $\frac{x}{2} \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - 3\right) = 0$

7. Resolva as equações:

a. $x + \frac{x}{2} + \frac{3x}{4} = 0$
b. $\frac{5-x}{4} + \frac{2x}{3} = \frac{25}{12}$
c. $2x - \frac{7x+4}{3} = \frac{3}{2} - x$
d. $\frac{3x+4}{2} - \frac{2x-6}{3} = 4 - \frac{x}{5}$

RESPOSTAS:

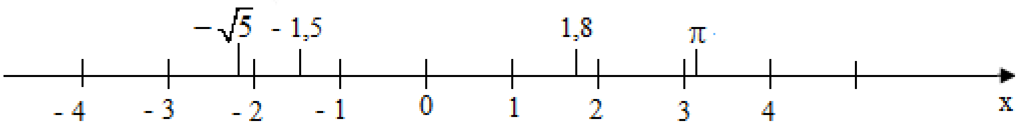
1. a) $\frac{41}{100}$ ou 0,41
   b) – 0,5
   c) $\frac{43}{42}$
2. R$ 1680,00
3. R$ 875,00
4. 96 km/h 76,8 km/h
5. a) x = 30 b) x = - 60 c) x = -16
6. a) x = $\frac{3}{2}$ ou x = $\frac{-2}{5}$ b) x = 0 ou x = $\frac{1}{2}$ ou x = $\frac{-5}{6}$ c) x = 0 ou x = $\frac{3}{5}$ d) x = 0 ou x = $\frac{3}{2}$ ou x = 6
7. a) x = 0 b) x = 2 c) x = $\frac{17}{4}$ d) x = 0

4. **<u>Conjunto dos Números Irracionais</u>**

Esse conjunto é representado pela letra maiúscula **I**, é formado pelos números decimais infinitos não periódicos, ou seja, números que possui muitas casas decimais, mas que não tem um período. Entenda período como sendo a repetição de uma mesma sequencia de números infinitamente.

Exemplos:
O número π que é igual a 3,14159265…,

Raízes não exatas como: $\sqrt{2}$ = 1,4142135…



Operações com radicais

A) Adição e Subtração

Só podemos adicionar ou subtrair radicais semelhantes, ou seja, as unidades devem ser obrigatoriamente iguais.

Regra

Para adicionar ou subtrair radicais semelhantes, basta adicionar ou subtrair, algebricamente, os fatores externos de cada radical, conservando o radical:

1º) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2+5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

2º) $\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (1+5-2)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(devemos extrair o fator radicando, isto é, simplificar os radicandos, lembra?)

B) Multiplicação

Regra

Para multiplicar radicais de mesmo índice, basta efetuar multiplicação entre os radicandos:

1º) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$

2º) $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{5 \times 2 \times 3} = \sqrt[4]{30}$

Observação: para multiplicar radicais de índices diferentes, primeiramente é necessário reduzi-los ao mesmo índice e, depois, aplicar a regra acima:

1º) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{200}$

2º) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{b} = \sqrt[12]{a^4 \times b^3} = \sqrt[12]{a^4 b^3}$

C) Divisão

Regra

Para dividir radicais de mesmo índice, basta efetuar a divisão entre os radicandos:

1º) $\sqrt[3]{21} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{21 : 7} = \sqrt[3]{3}$

2º) $\sqrt[4]{0,32} : \sqrt[4]{0,4} = \sqrt[4]{0,32 : 0,4} = \sqrt[4]{0,8}$

Observação: Para dividir 2 radicais de índices diferentes, reduzem-se ao mesmo índice e dividem-se os radicandos:

1º) $\sqrt{5} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{5^3} : \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{125 : 16} = \sqrt[6]{\dfrac{125}{16}}$

2º) $\sqrt[3]{4^3} : \sqrt{4} = \sqrt[6]{4^6} : \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Racionalização

A racionalização de denominadores consiste, portanto, na obtenção de um fração com denominador racional, equivalente a uma anterior, que possuía um ou mais radicais em seu denominador.

Para racionalizar o denominador de uma fração, devemos multiplicar os termos desta fração por uma expressão com radical, denominado fator racionalizante, de modo a obter uma nova fração equivalente com denominador sem radical.

Principais casos de racionalização:

1º caso: O denominador é um radical de índice 2

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$\sqrt{a}$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a}$, pois $\sqrt{a}\ \sqrt{a}\ \sqrt{a^2} = a$

2º caso: O denominador é um radical de índice diferente de 2, ou a soma (ou a diferença) de dois termos.

Neste caso, é necessário multiplicar o numerador e o denominador da fração por um termo conveniente, para que desapareça o radical que se encontra no denominador. Exemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{7}} = \frac{3.\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}.\sqrt[3]{7}^2} = \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

A seguir, os principais fatores racionalizantes, de acordo com o tipo do denominador.

$\sqrt[n]{a^{n-m}}$ é o fator racionalizante de $\sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
$\sqrt{a}+b$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a}-b$

- $\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})}\dfrac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}=\dfrac{1.(2-\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4-3}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{1}=2-\sqrt{3}$

5. **<u>Conjunto dos Números Reais</u>**

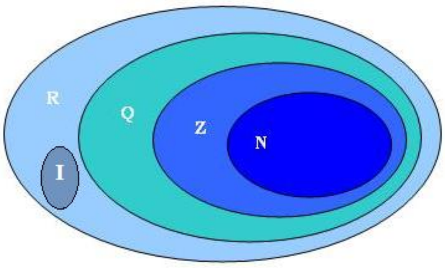
Representado pela letra maiúscula R, compõem esse conjunto os números: naturais, inteiros, racionais e irracionais. Acompanhe o exemplo numérico a seguir:

Exemplo: R = {… – $\sqrt{5}$; – 2; – 1; 0; + $\frac{1}{3}$; + 1; +2, 14; + π; + 4; 4,555…; + 5; 6,12398…}

Classificando os elementos do conjunto R:

- {0, + 1, + 4} à Números Naturais.
- {- 2, -1, 0, + 1, + 4, + 5} à Números Inteiros.
- {+ $\frac{1}{3}$ } à fração.
- {+ 2,14) à Número Decimal.
- {+ 4,555…} à dízima periódica.
- {– $\sqrt{5}$; …; 6,12398…} à Números Irracionais.

O conjunto dos números reais pode ser representado por diagramas, nele fica claro a relação de inclusão em relação aos conjuntos dos números: naturais, inteiros, racionais e irracionais. Acompanhe a seguir a representação do diagrama de inclusão dos números reais.



$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$
e
$$\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$$

Notação científica

A notação decimal para números é extremamente prática e importante. Apesar disso, ao lidarmos com números que, comparados com a unidade, são muito grandes ou muito pequenos, é conveniente utilizar a *notação científica*.
A notação científica pode ser usada para representar qualquer número real; ela é constituída sempre por um número maior ou igual a 1 e menor que 10, multiplicado por uma potência de 10 adequada para representar o número real em questão. Assim, por exemplo:

$486\ 000\ 000 = 4{,}86 \, . \, 10^{8}$

$0{,}000\ 007 = 7 \, . \, 10^{-6}$

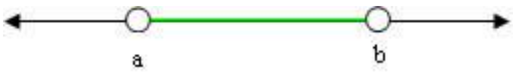
$143\ 000\ 000\ 000 = 1{,}43 \, . \, 10^{11}$

Intervalos reais

Intervalo aberto

Intervalo aberto em a e aberto em b, ***]a,b[*** , {xЄR/a < x < b}. As extremidades não fazem parte do intervalo.

Aberto à esquerda e aberto à direita



Intervalo fechado

Intervalo fechado em a e fechado em b, ***[a,b]***, {xЄR/a ≤ x ≤ b}**.** As extremidades fazem parte do intervalo.

Fechado à esquerda e fechado à direita

Intervalo misto

Intervalo aberto em a e fechado em b, ***]a,b]***, {xЄR/a < x ≤ b} ou vice versa.

Aberto à esquerda e fechado à direita

Intervalos infinitos

{xЄR/x > a}

{xЄR/x<a}

{xЄR/x≥a}

EXERCÍCIOS

1. Classifique cada um dos números reais a seguir como racional ou irracional:

a. 0,7 b. – 3657 c. $3\sqrt{2} - 5$ d. $\frac{3\pi}{2}$ e. $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ f. $\frac{22}{7}$

g. $\sqrt[3]{125}$ h. $\sqrt[4]{100}$ i. $\sqrt[5]{80}$ j. $0{,}78\overline{16}$

2. Coloquem, em ordem crescente (do menor para o maior), os números reais:
$\frac{7}{10}$, $0{,}6\overline{15}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 0, $\overline{53}$, $0{,}5333\ldots$, $0{,}25$, $\frac{7}{9}$

3. Determine a fração geratriz da dízima 1,454545...

4. Use a notação científica para expressar a medida das seguintes grandezas:
a. Massa de um átomo de oxigênio: . 0,000000000000000000000027 g
b. Distância média da Terra ao Sol: . 149600000 km
c. Velocidade da luz: . 300000 km/ s
d. Distância em torno da Terra na linha do Equador: . 40075 km

5. Resolva as operações com radicais:
a. $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ b. $\sqrt{18} + \sqrt{242} - \sqrt{72}$ c. $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$
d. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ e. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$ f. $\sqrt[3]{0{,}32} : \sqrt[3]{0{,}4}$
g. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ h. $(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})^2$ i. $\frac{3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{24}}{3\sqrt{6}}$

6. Racionalize os radicais abaixo:
a. $\frac{2}{\sqrt{7}}$ b. $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ c. $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ d. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. Resolva as equações do 2º grau:

Fórmulas para resolução da equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$ Raízes: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

a. $x^2 - 3x - 4 = 0$
b. $x^2 - 8x + 7 = 0$
c. $4x^2 + 8x + 6 = 0$
d. $x^2 - 6x = 0$
e. $3x^2 - 36 = 0$
f. $x^2 - 10x + 25 = 0$

Respostas:
1. a) R b) R c) I d) I e) R f) R g) R h) I i) I j) R
2. 0,25; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 0, 533...; $0{,}\overline{53}$; $0{,}6\overline{15}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{7}{9}$
3. $\frac{144}{99} = \frac{16}{11}$
4. a) $2{,}7 \times 10^{-23}$ g b) $1{,}496 \times 10^8$ km c) 3×10^5 km/s d) $4{,}0075 \times 10^4$ km
5. a) $4\sqrt{3}$ b) $8\sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{30}$ d) $\sqrt[6]{200}$ e) $\sqrt[12]{a^4 \cdot b^3}$ f) $\sqrt[3]{0{,}8}$
g) $5 + 2\sqrt{6}$ h) $3(31 - 10\sqrt{6})$ i) $4\sqrt{8}$ ou $8\sqrt{2}$
6. a) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ d) $5 - 2\sqrt{6}$
7. a) $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$ b) $x_1 = 1$ e $x_2 = 7$ c) não existem raízes reais
d) $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$ e) $x_1 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ f) $x_1 = x_2 = 5$