

AVL

SCC-202 – Algoritmos e Estruturas de
Dados I

Árvores binárias de busca (ABB)

- Muito boas para busca, se elementos bem distribuídos
 - $O(\log N)$
- Sabe-se que
 - **Lista encadeada**
 - Eficiente para **inserção** e **remoção** dinâmica de elementos, mas ineficiente para busca
 - **Lista sequencial (ordenada)**
 - Eficiente para **busca**, mas ineficiente para inserção e remoção de elementos

mas... **ABBs**: solução eficiente para inserção, remoção e busca

ABB

- Contra-exemplo
 - Inserção dos elementos na ordem em que aparecem
 - A, B, C, D, E, ..., Z
 - 1000, 999, 998, ..., 1

ABB

- O **desbalanceamento** da árvore pode tornar a busca tão ineficiente quanto a busca sequencial (no pior caso)
 - **$O(N)$**
- Solução?

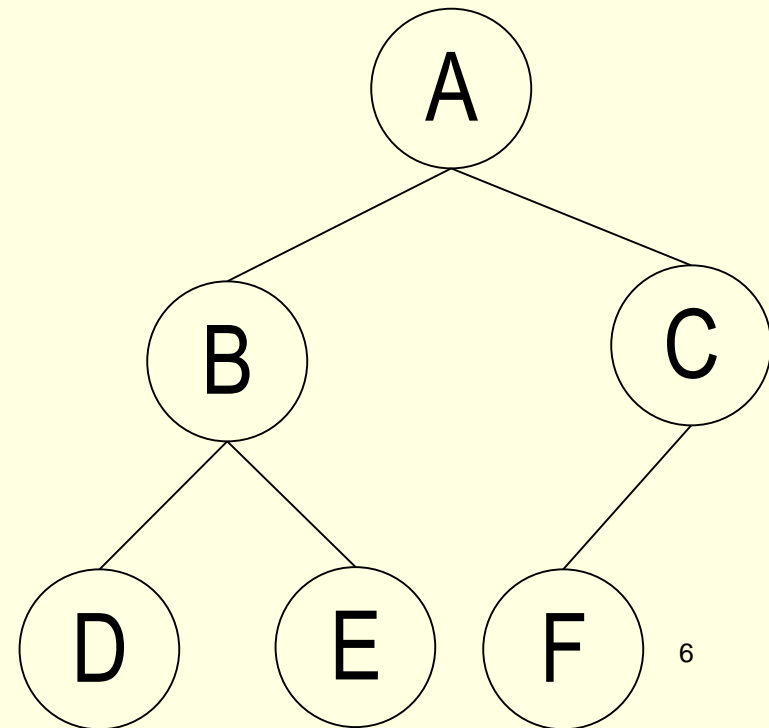
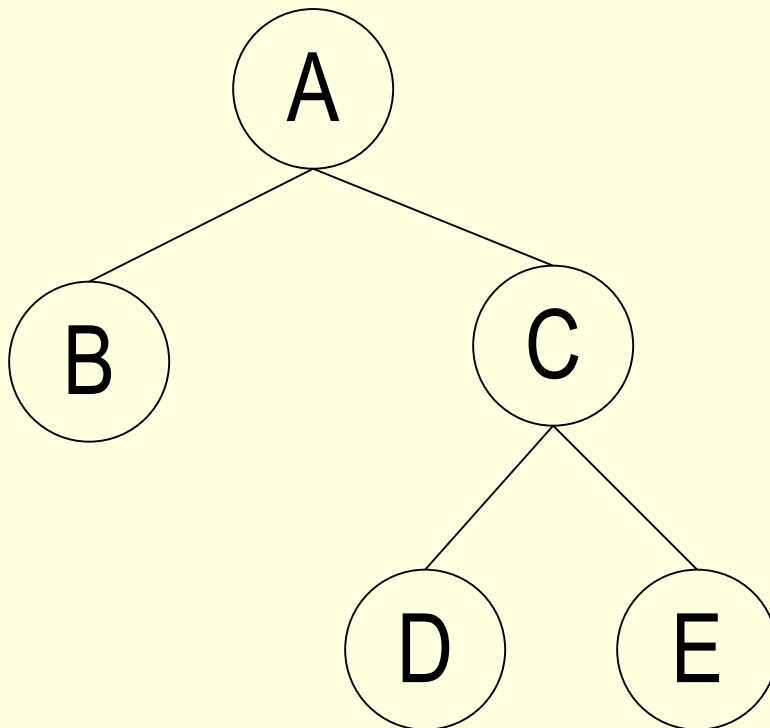
ABB

- O **desbalanceamento** da árvore pode tornar a busca tão ineficiente quanto a busca sequencial (no pior caso)
 - **$O(N)$**
- Solução?

Balanceamento da árvore!

Árvores balanceadas

- Uma árvore binária é dita balanceada se, para cada nó, as alturas de suas duas subárvores diferem de, no máximo, 1

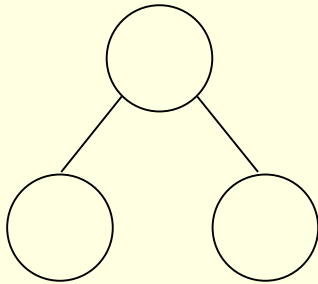


AVL

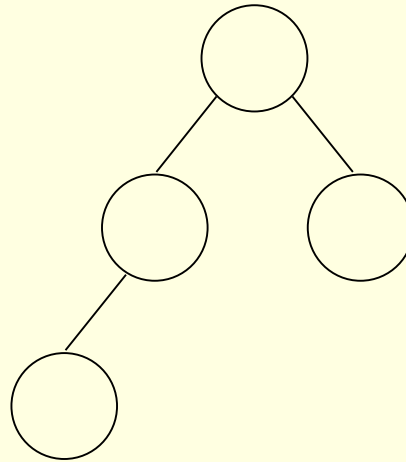
- **Árvore binária de busca balanceada**
 - Para cada nó, as alturas das subárvores diferem em 1, no máximo
 - Proposta em 1962 pelos matemáticos russos G.M. **A**delson-**V**elskki e E.M. **L**andis
 - Métodos de **inserção** e **remoção** de elementos da árvore de forma que ela fique balanceada

AVL: quem é e quem não é?

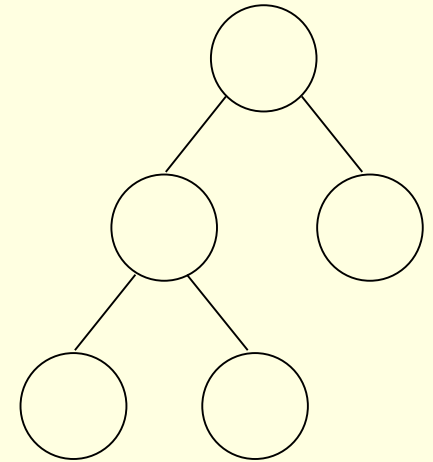
(a)



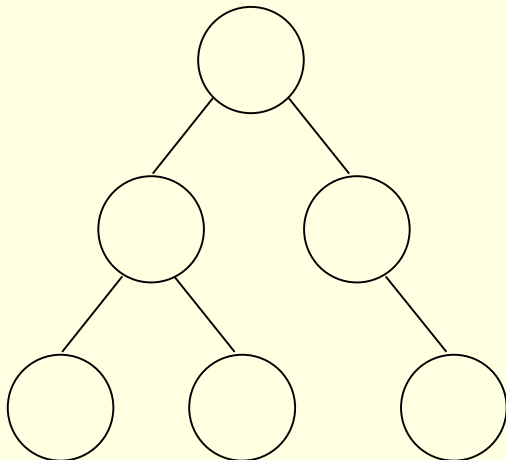
(b)



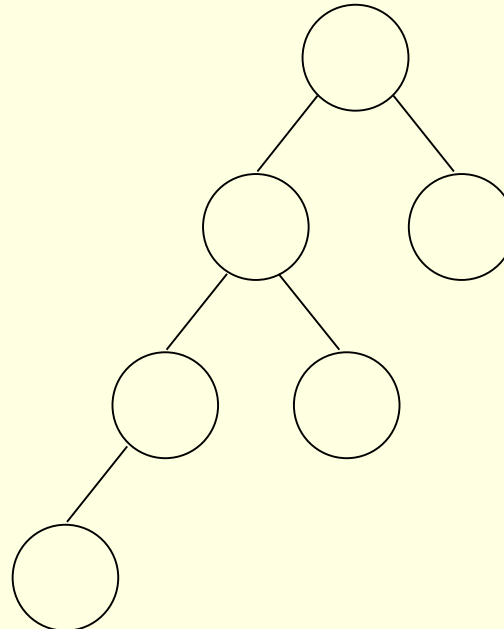
(c)



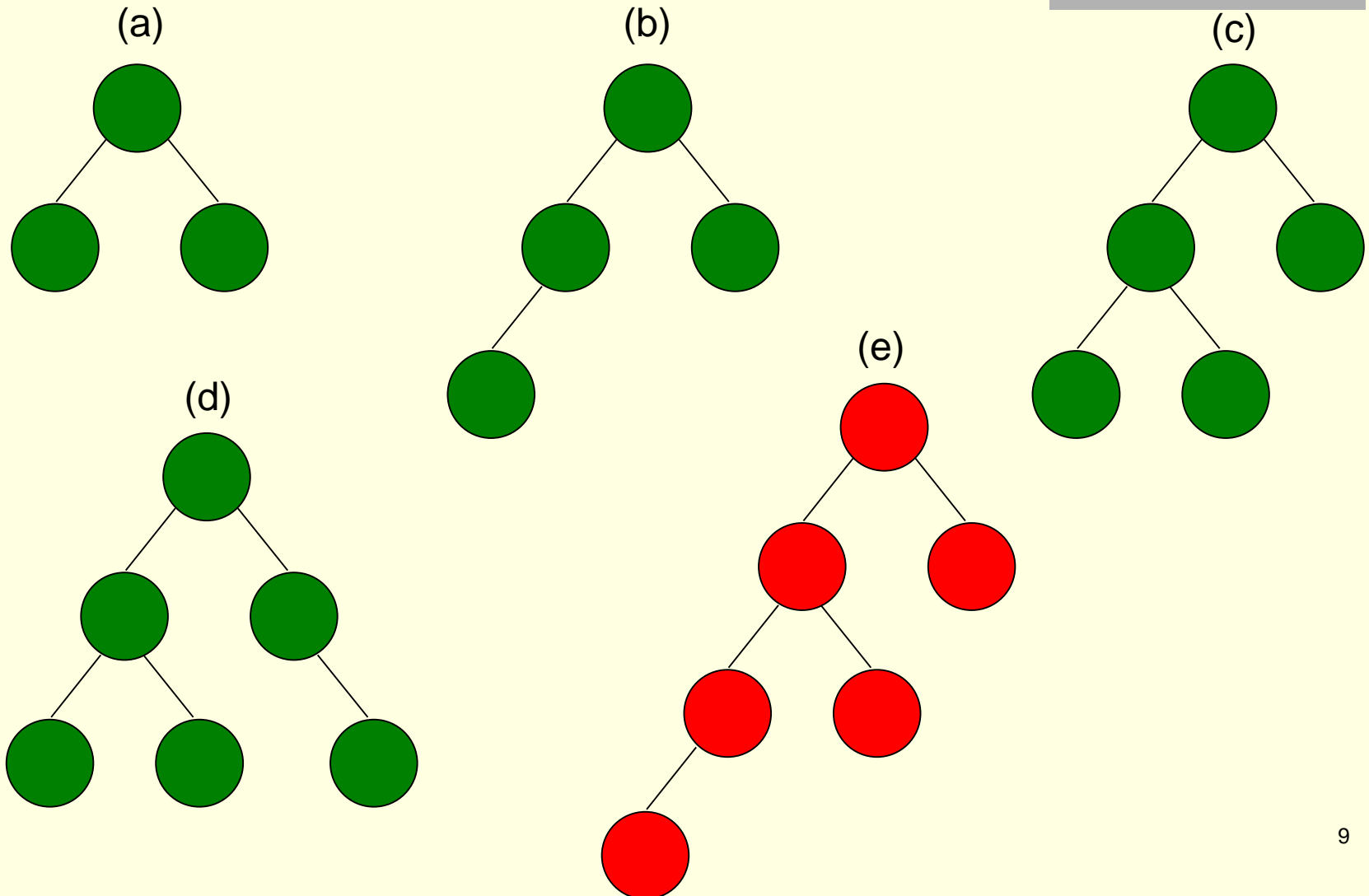
(d)



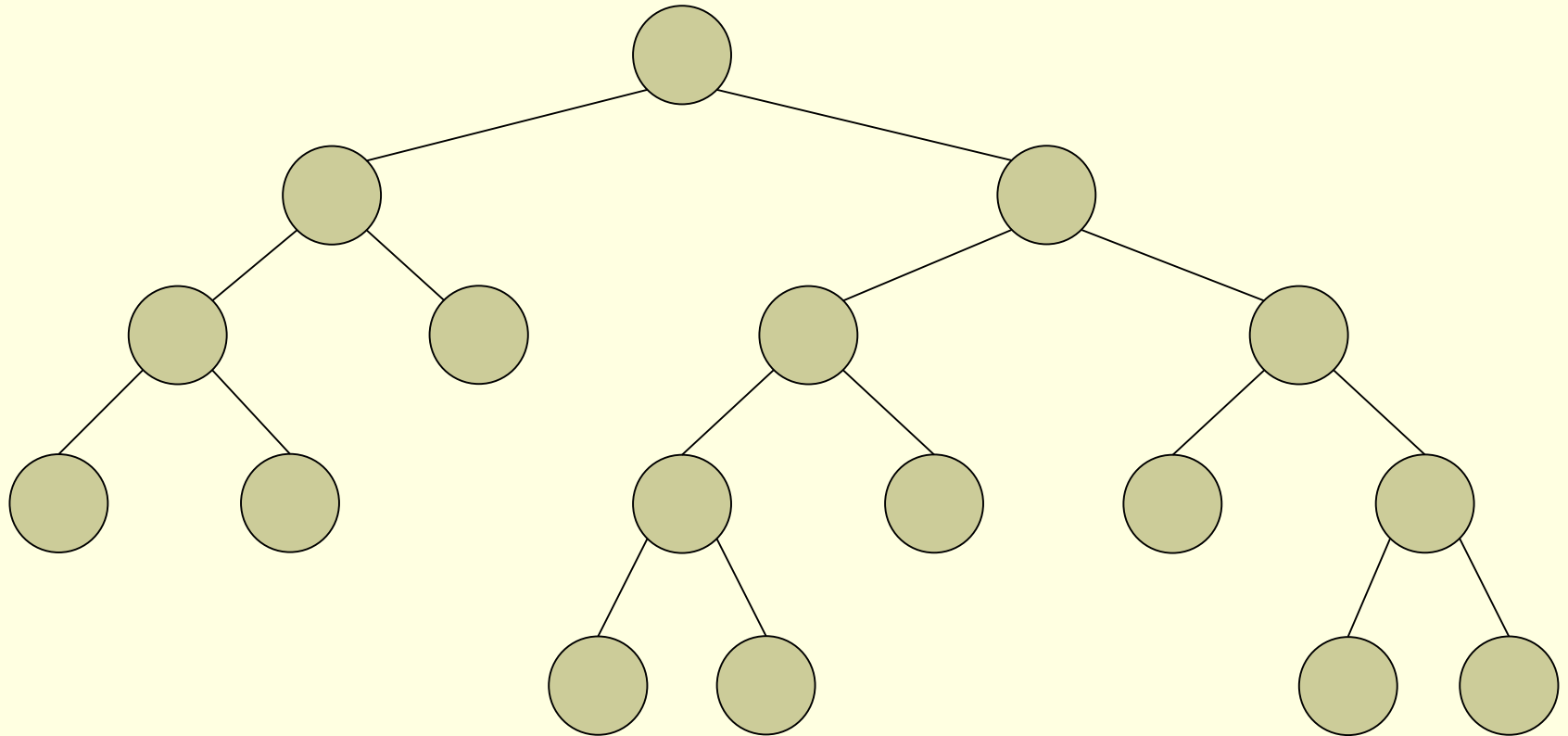
(e)

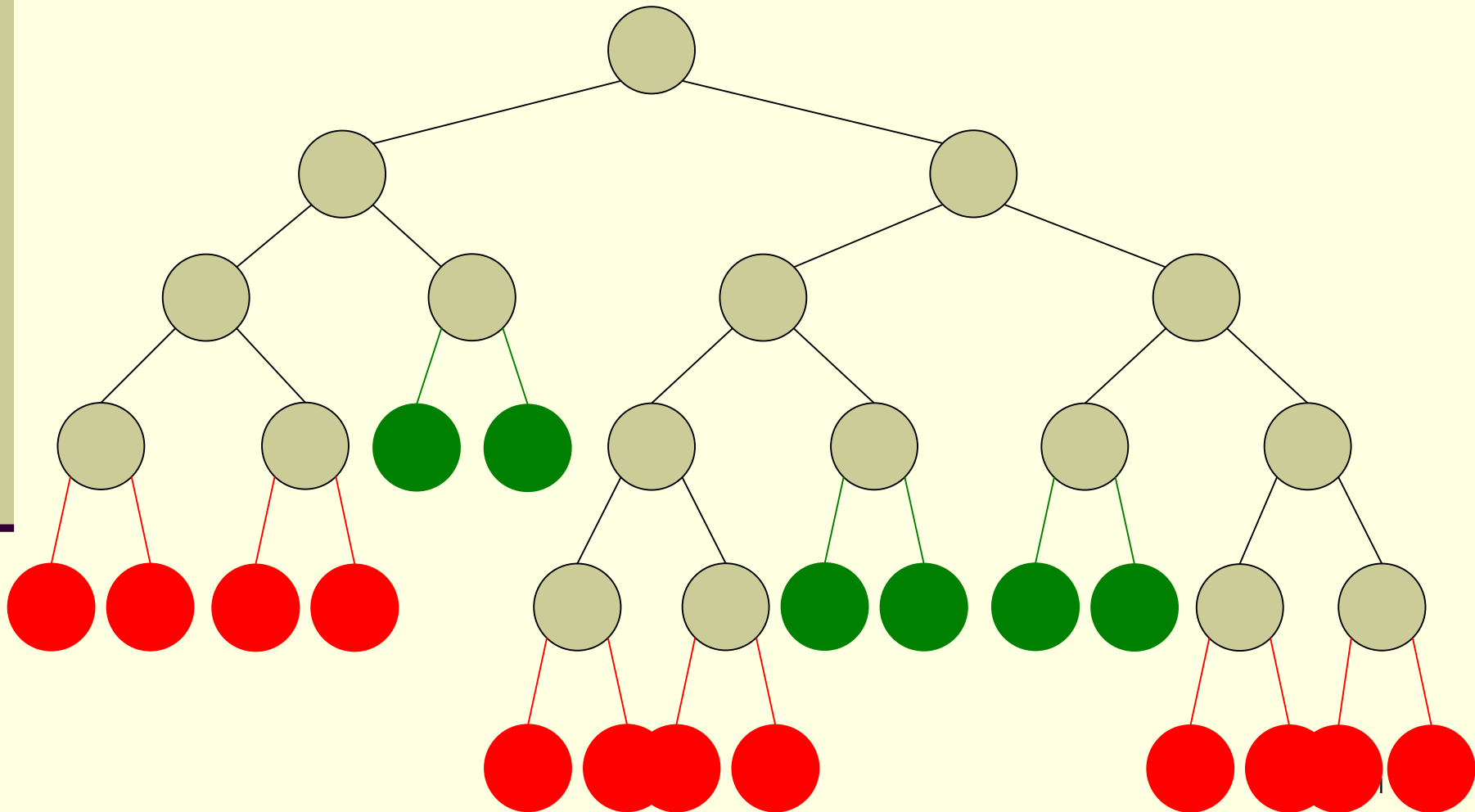


AVL: quem é e quem não é?



Pergunta: a árvore abaixo é AVL?





AVL

- Como é que se sabe **quando é necessário balancear** a árvore?
 - Se a diferença de altura das subárvores deve ser 1, no máximo, então temos que procurar diferenças de altura maior do que isso
 - Possível solução: cada nó pode manter a diferença de altura de suas subárvores
 - Convencionalmente chamada de fator de balanceamento do nó

AVL

- Fatores de balanceamento dos nós
 - Altura da subárvore direita menos altura da subárvore esquerda
 - Hd-He
 - Atualizados sempre que a árvore é alterada (elemento é inserido ou removido)
 - Quando um fator é 0, 1 ou -1, a árvore está balanceada
 - Quando um fator se torna 2 ou -2, a árvore está desbalanceada
 - Operações de balanceamento!

AVL

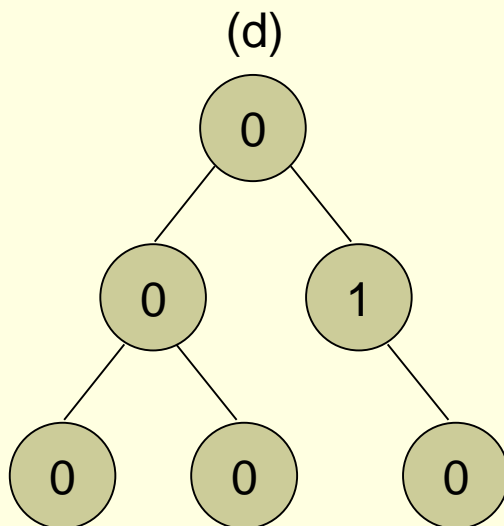
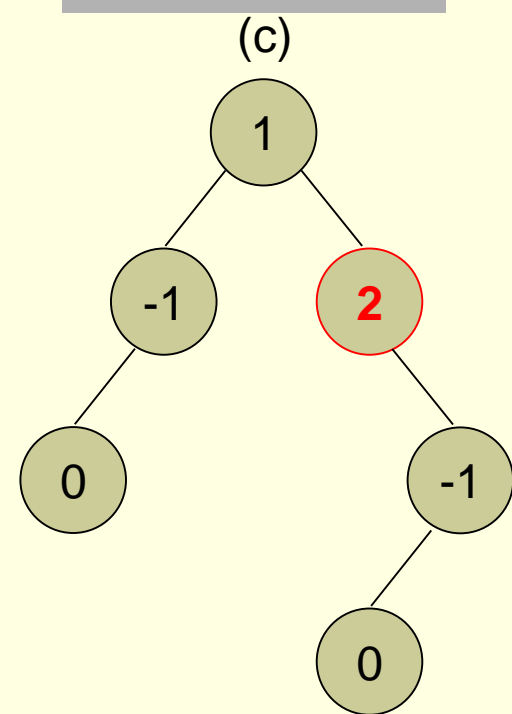
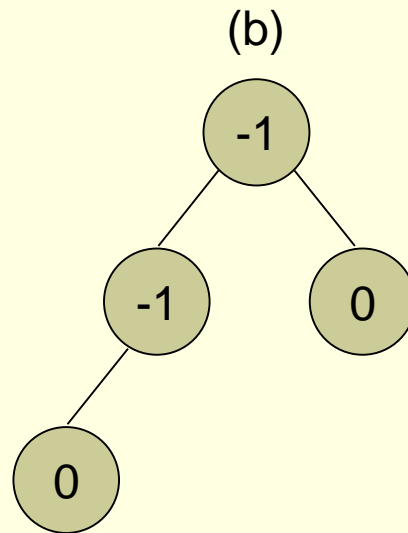
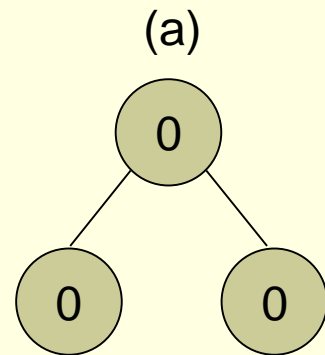
■ Exemplo de declaração

```
typedef int elem;
```

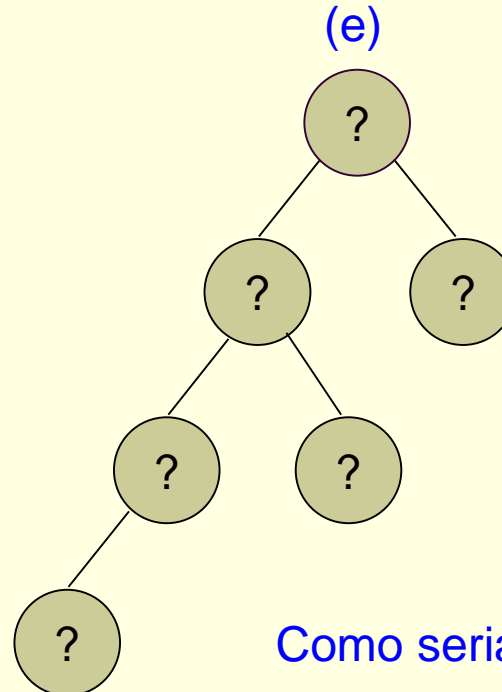
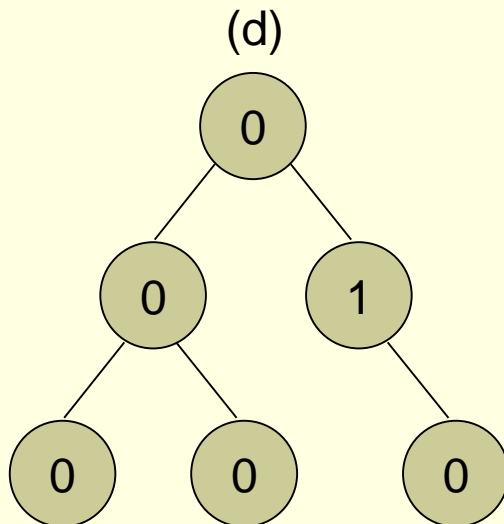
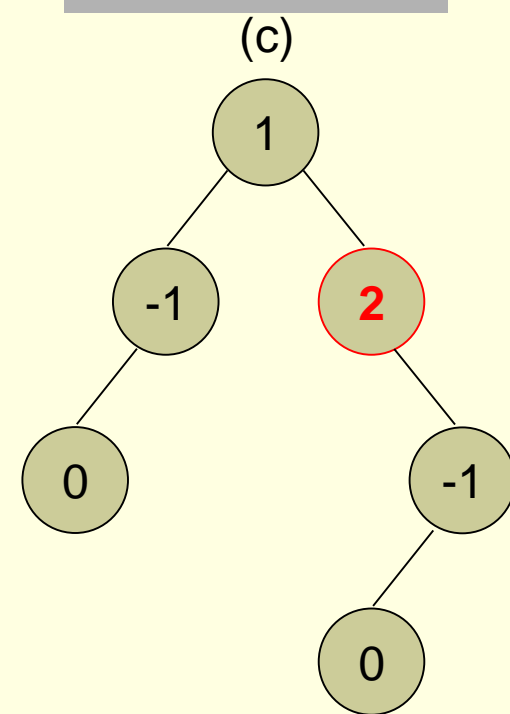
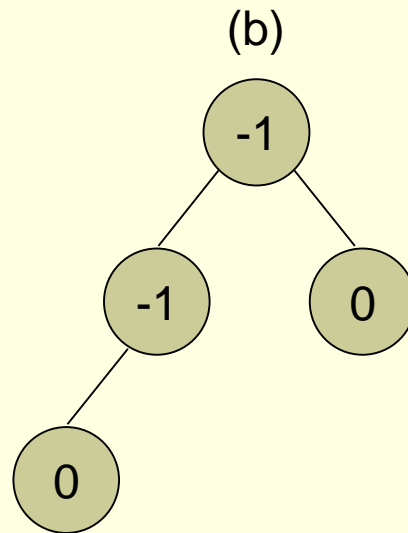
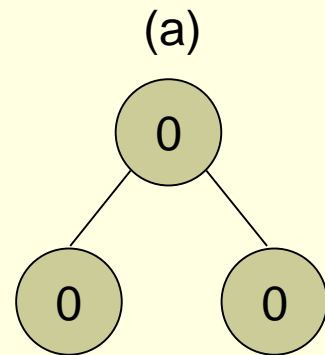
```
typedef struct bloco {  
    elem info;  
    struct bloco *esq, *dir;  
    int FB;  
} no;
```

```
typedef struct {  
    no *raiz;  
} AVL;
```

AVL: quem é e quem não é

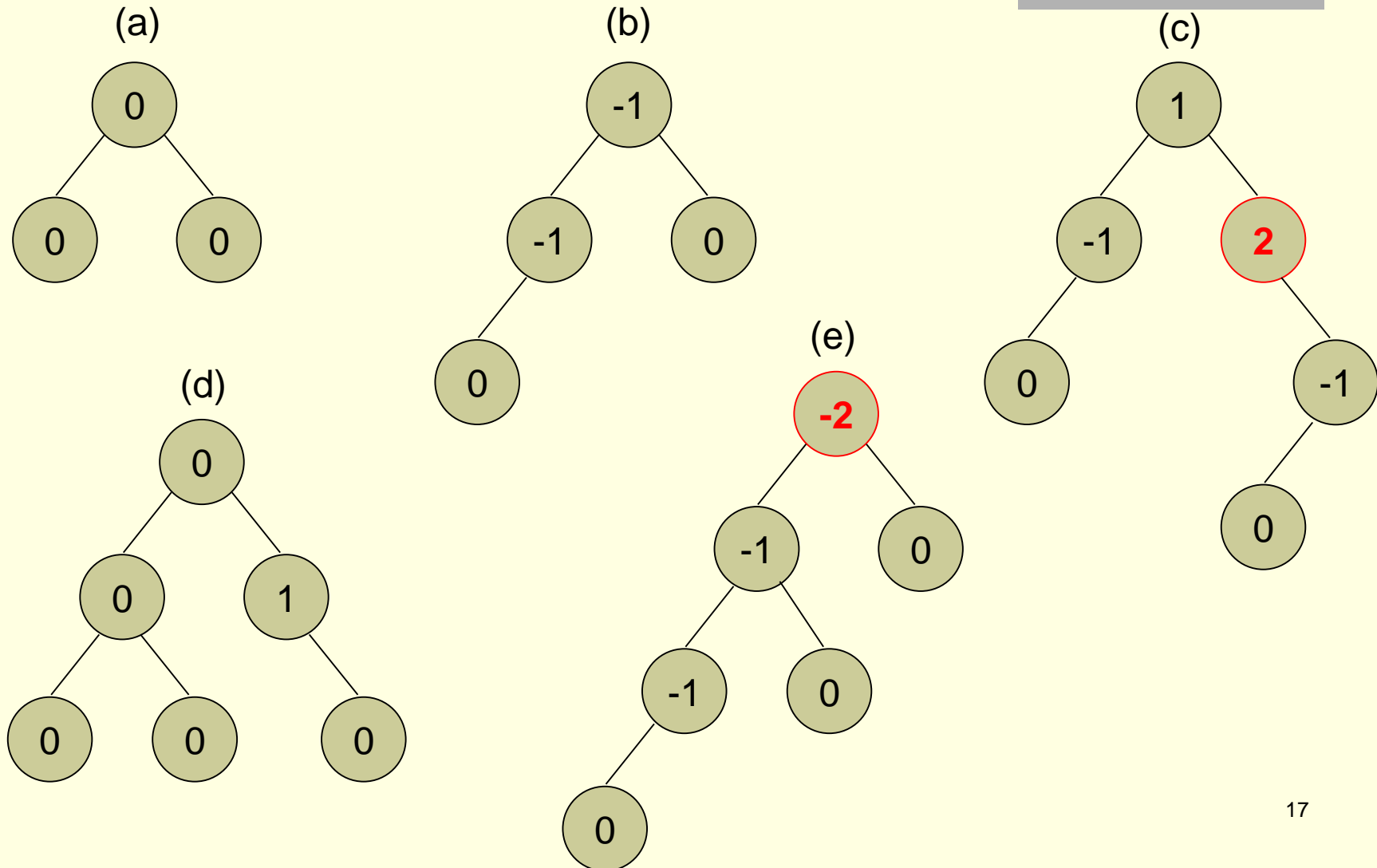


AVL: quem é e quem não é



Como seria nesta árvore?

AVL: quem é e quem não é



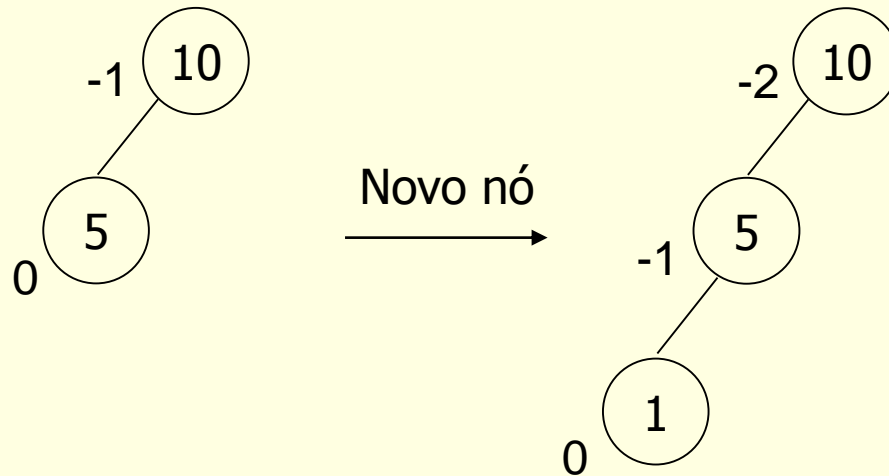
Exercício

- Em duplas
 - Como manter a árvore balanceada durante a inserção de elementos?
 - Simulem a inserção de alguns elementos (na ordem abaixo)
 - 10, 20, 30, 40, 50, 25, etc.
 - Proponham uma estratégia

AVL

- Balanceamento
 - Intuitivamente

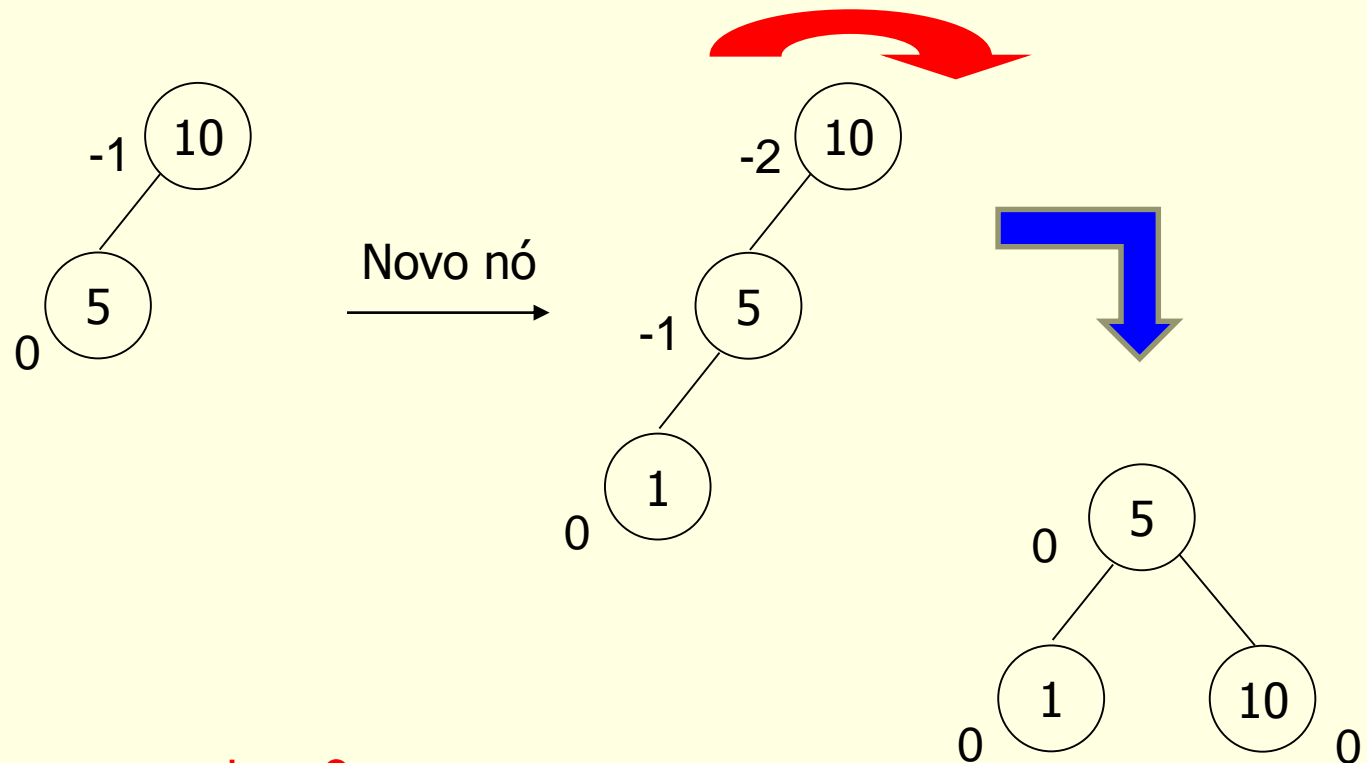
AVL: exemplo de desbalanceamento



Desbalanceou!!!

Como arrumar isso?

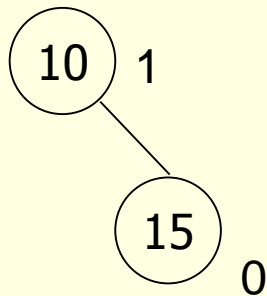
AVL: exemplo de desbalanceamento



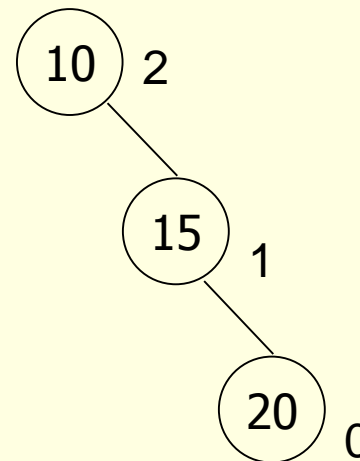
Como arrumar isso?

Rotação simples para direita!

AVL: exemplo de desbalanceamento



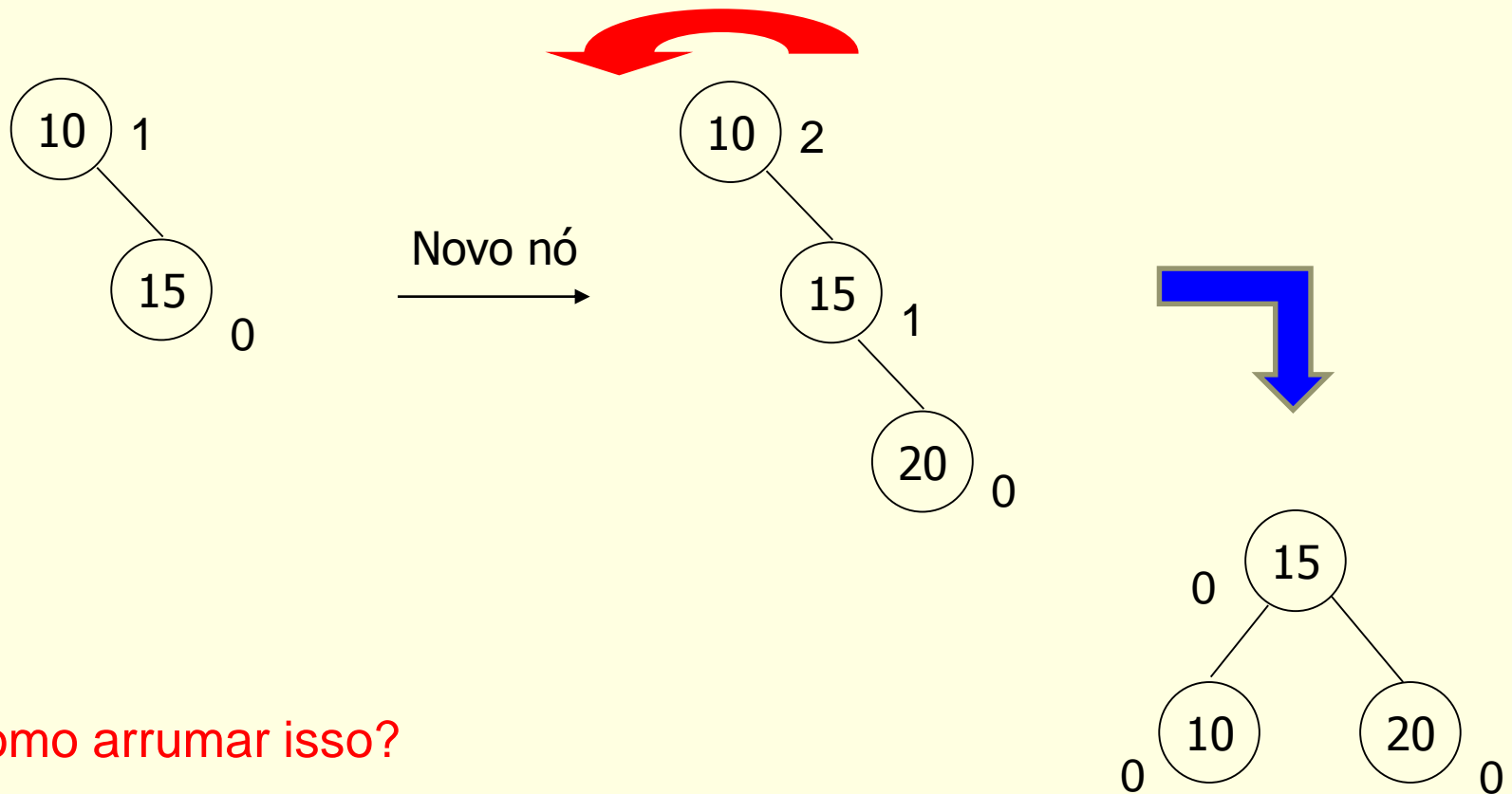
Novo nó
→



Desbalanceou!!!

Como arrumar isso?

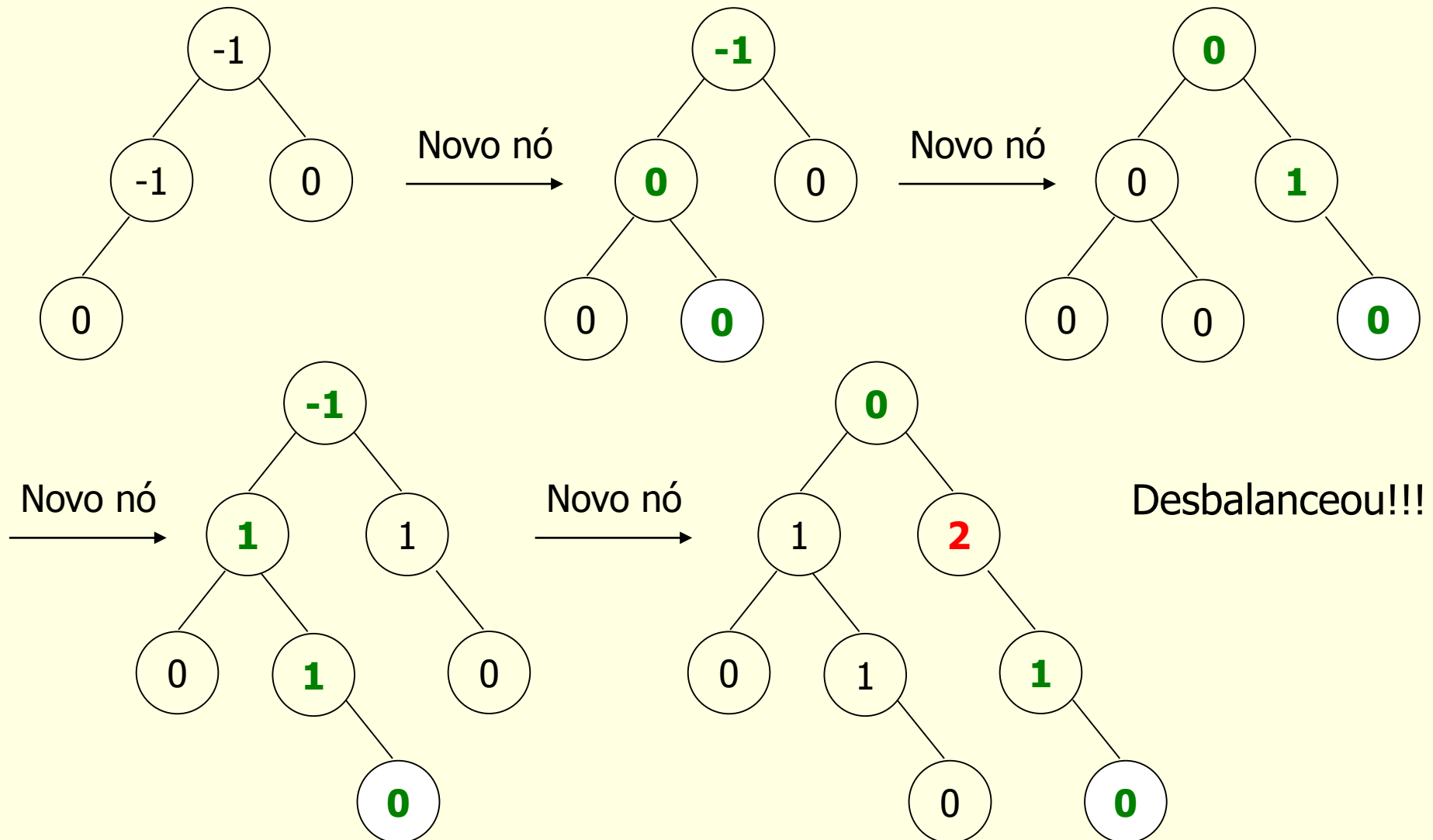
AVL: exemplo de desbalanceamento



Como arrumar isso?

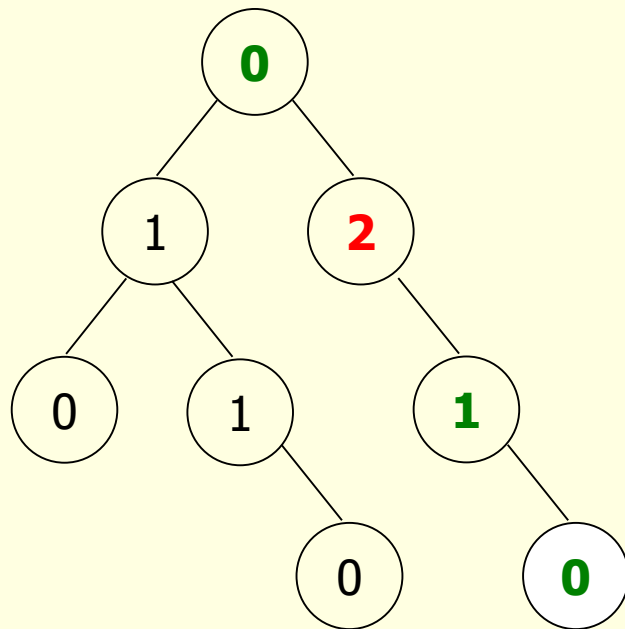
Rotação simples para esquerda!

AVL: exemplo de desbalanceamento



Questão

- Como cuidar disso?

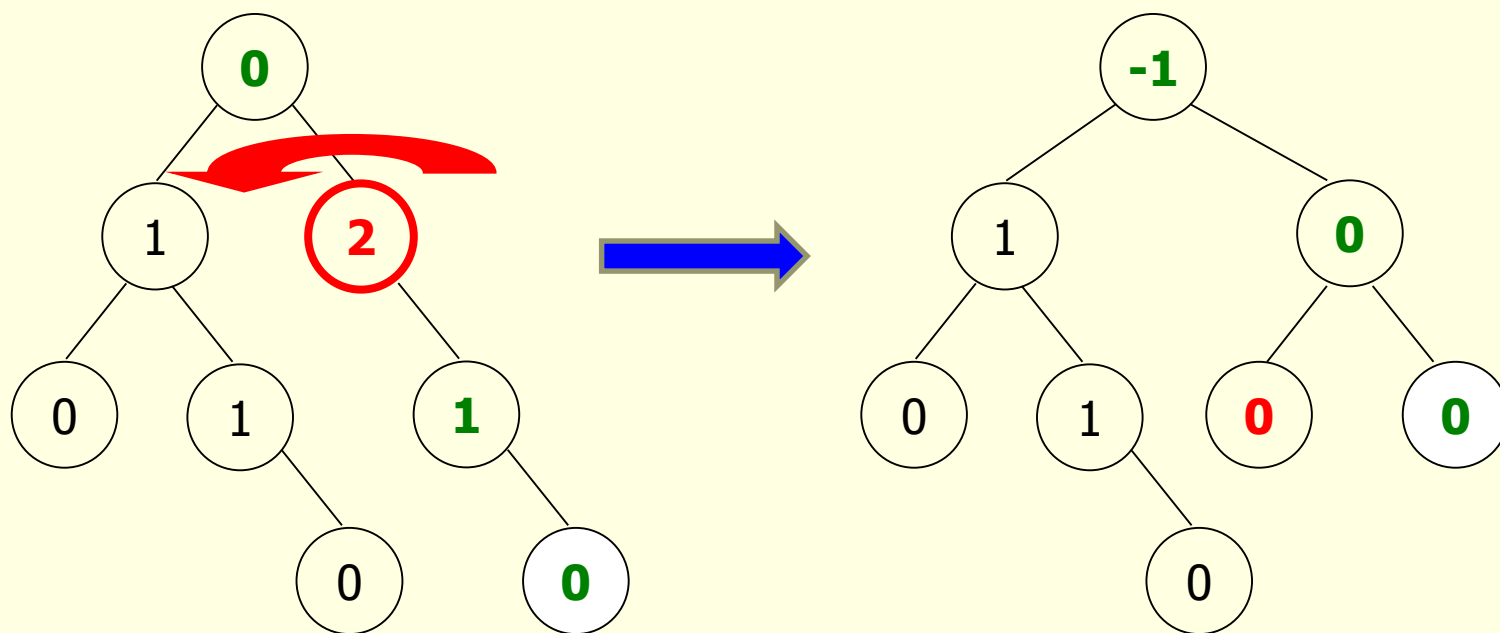


Questão

■ Como cuidar disso?

■ Rotação simples para esquerda no local com problema

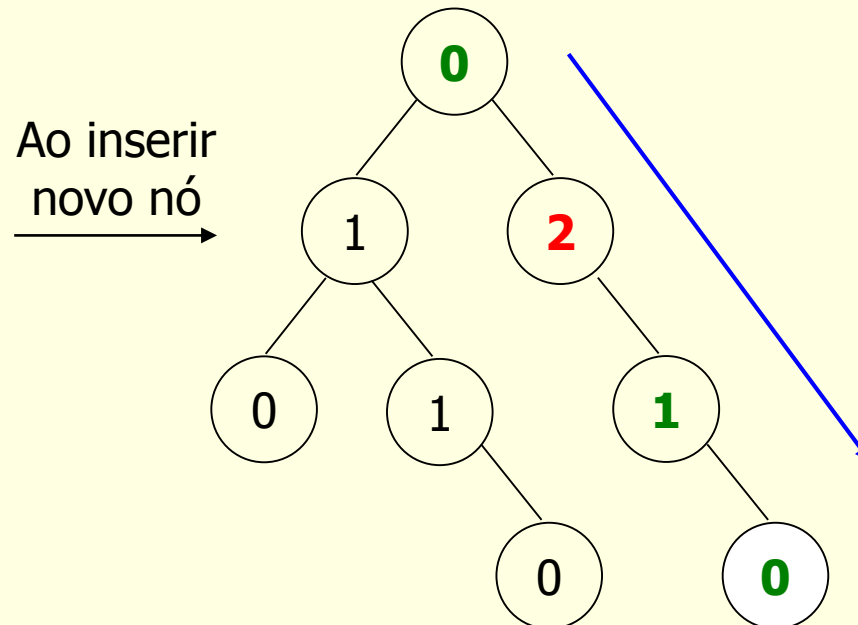
- De forma ascendente, procura-se pelo primeiro 2/-2 a partir do local da inserção



Balanceamento

- Note que

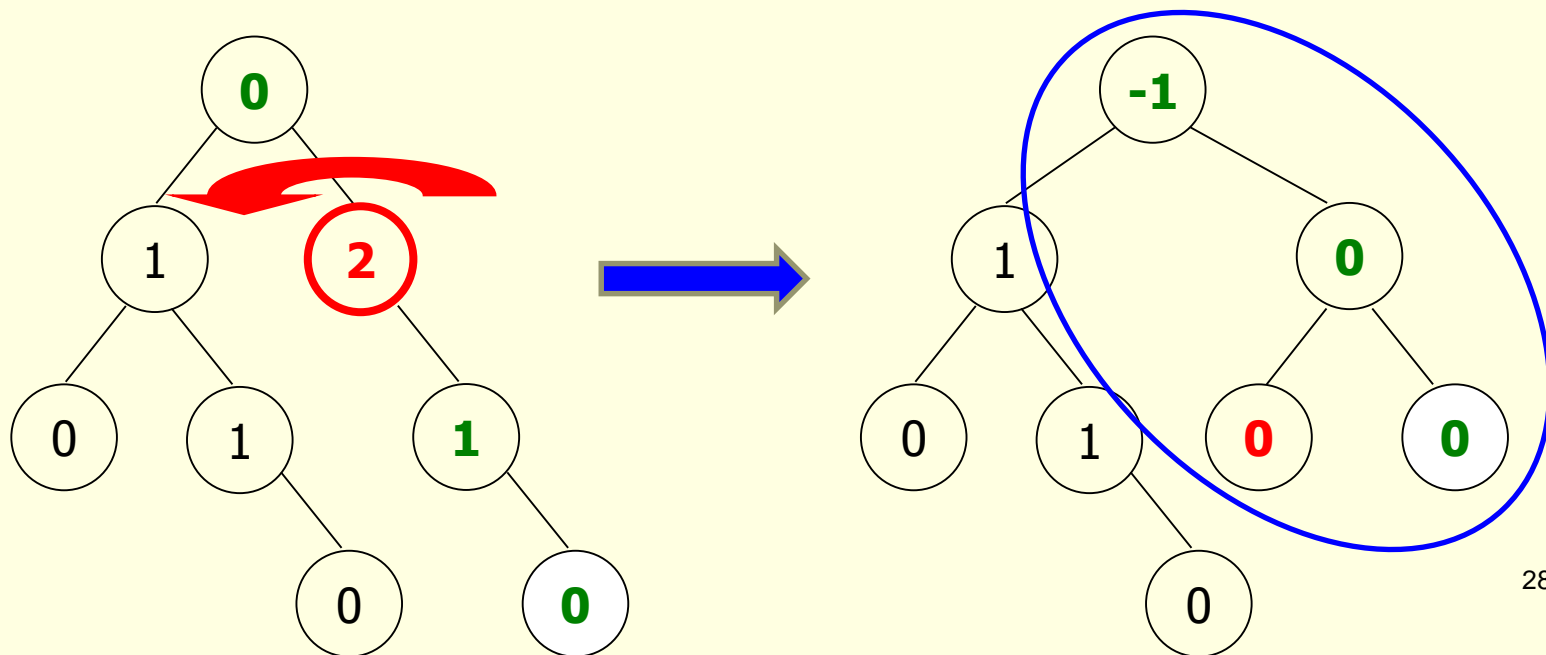
- Quando se insere um nó, todo o trajeto pode ter seus fatores de balanceamento alterados



Balanceamento

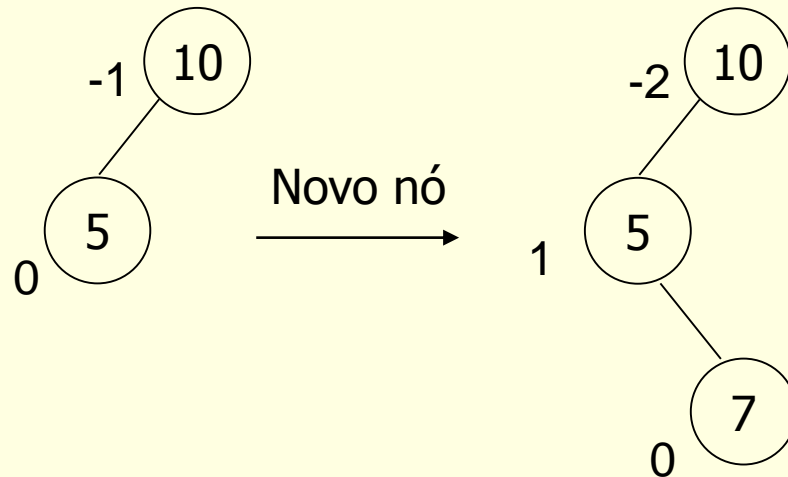
- Note que

- Ao arrumar localmente o problema, o problema se resolve globalmente



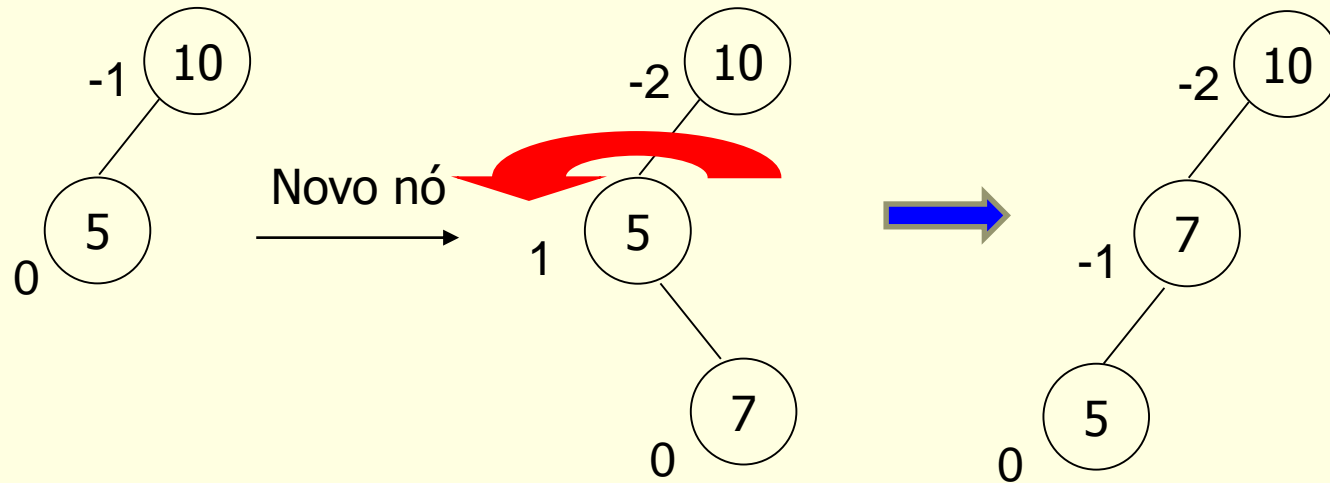
AVL: exemplo de desbalanceamento

Desbalanceou!!!



Como arrumar isso?

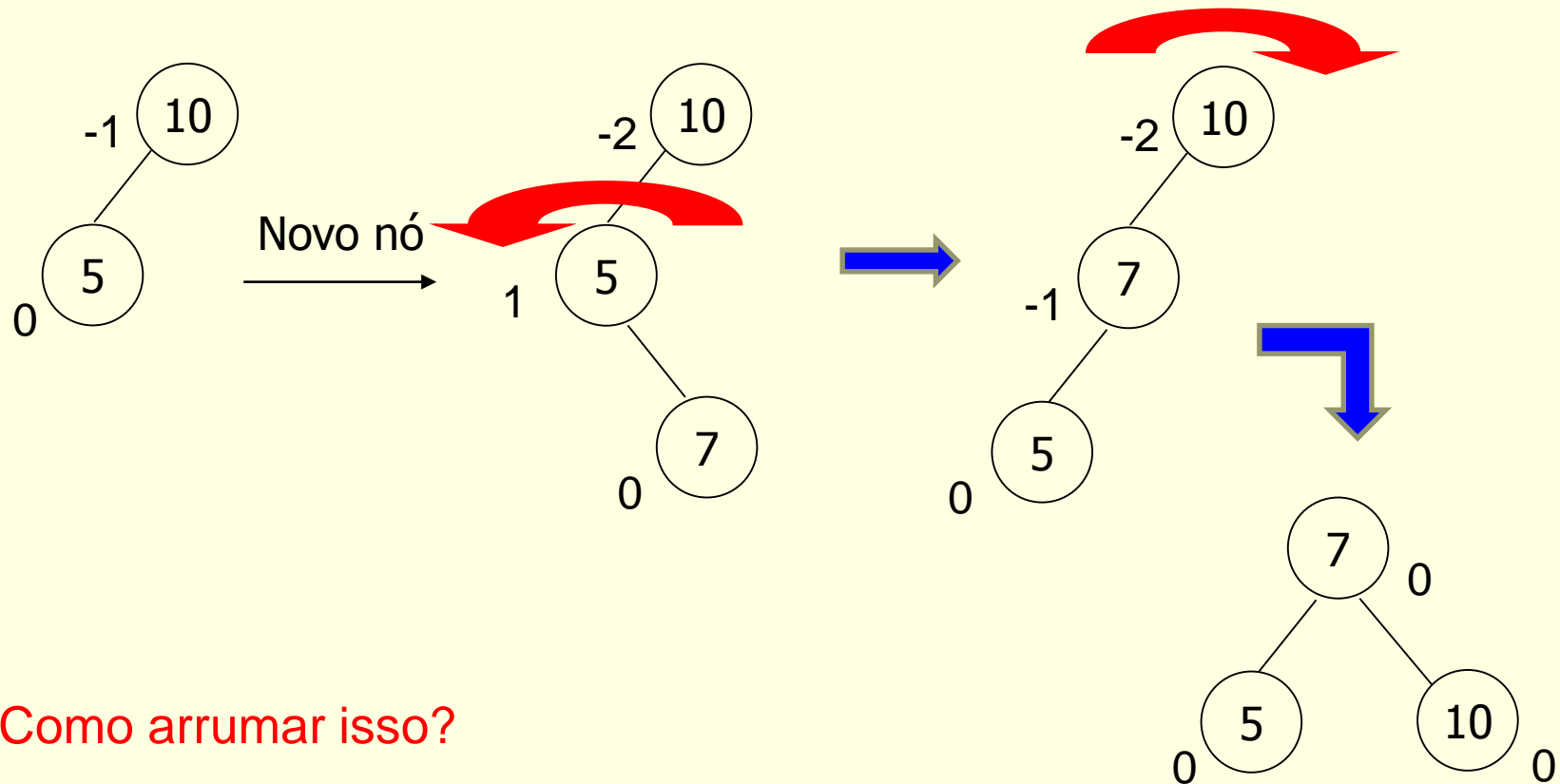
AVL: exemplo de desbalanceamento



Como arrumar isso?

Rotação dupla: esquerda

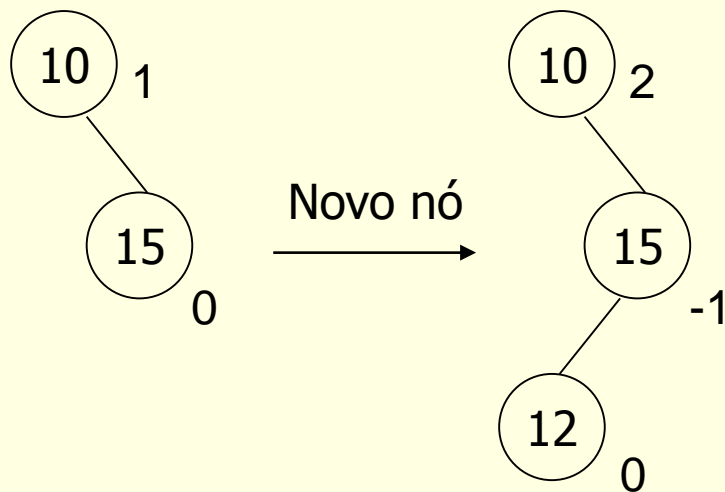
AVL: exemplo de desbalanceamento



Como arrumar isso?

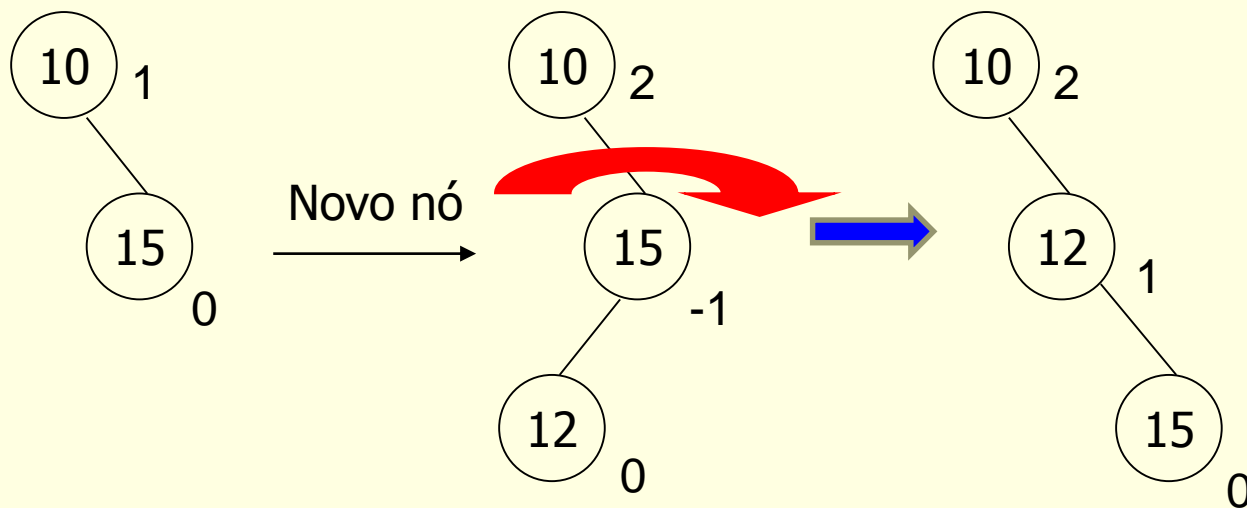
Rotação dupla: esquerda + direita

AVL: exemplo de desbalanceamento



Como arrumar isso?

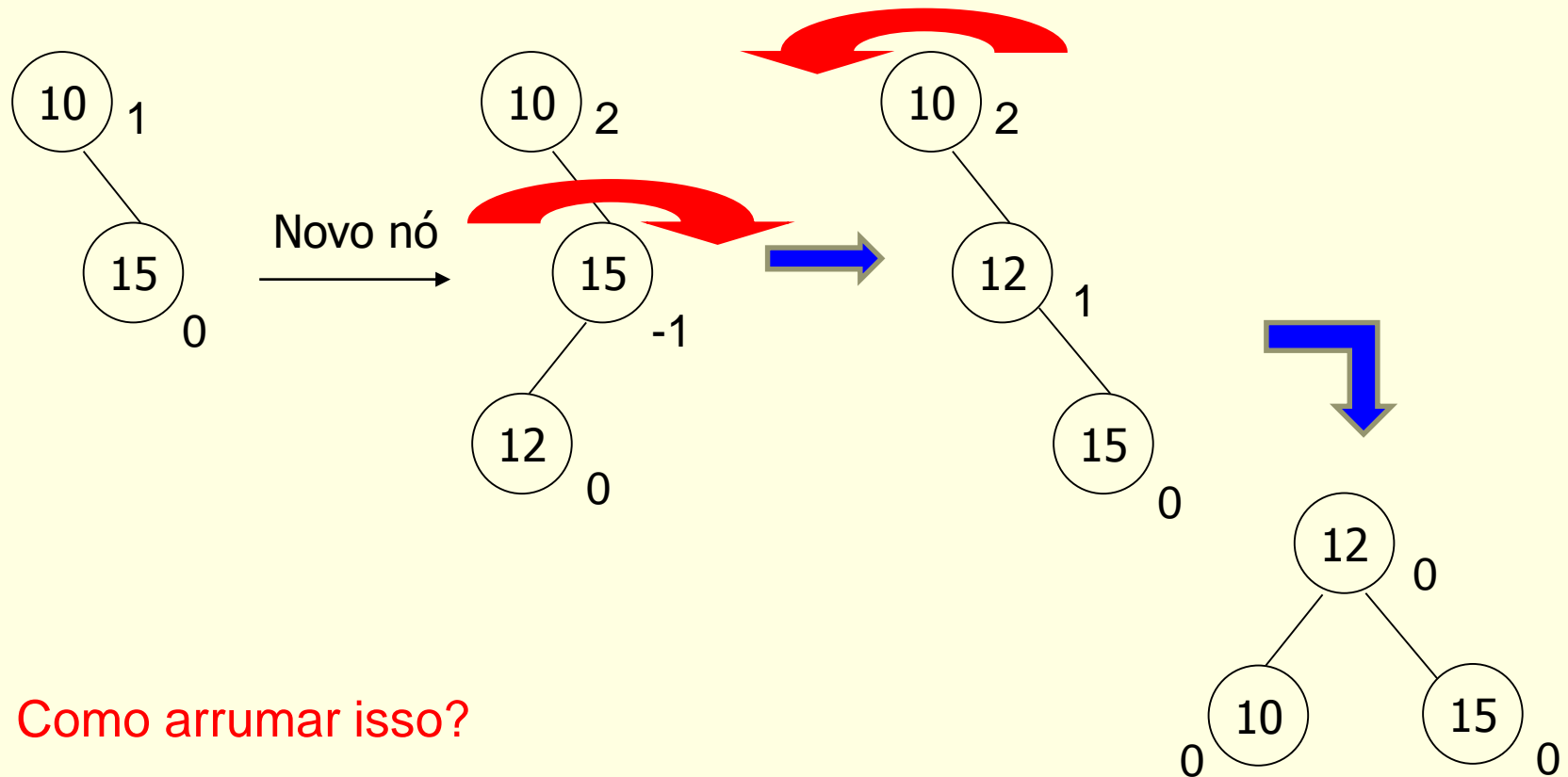
AVL: exemplo de desbalanceamento



Como arrumar isso?

Rotação dupla: direita

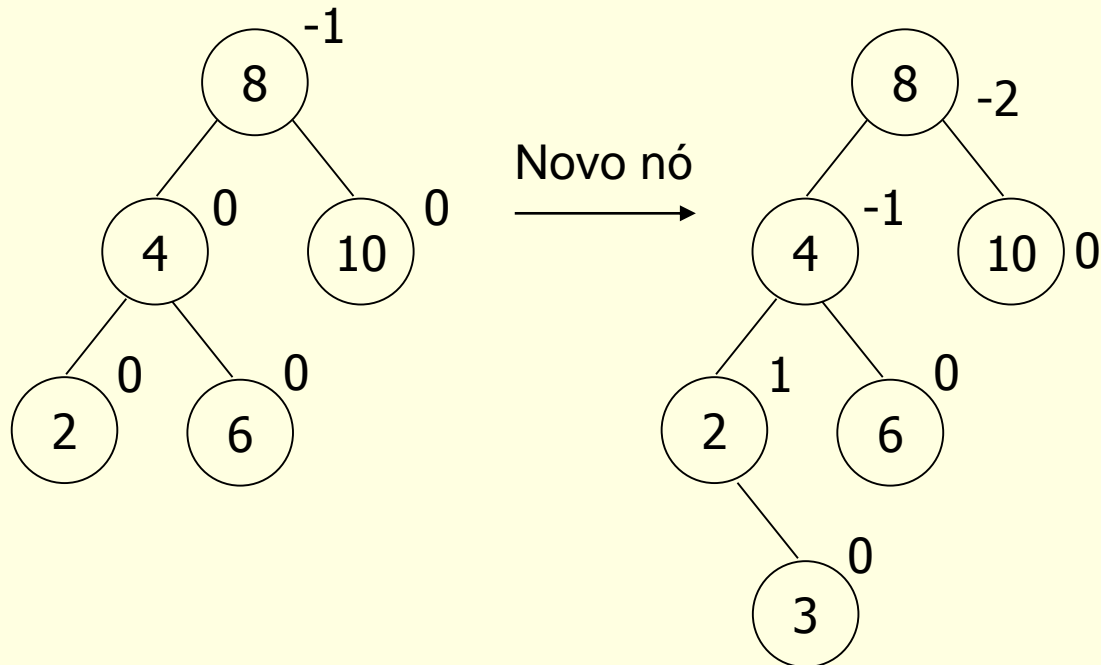
AVL: exemplo de desbalanceamento



Como arrumar isso?

Rotação dupla: direita + esquerda

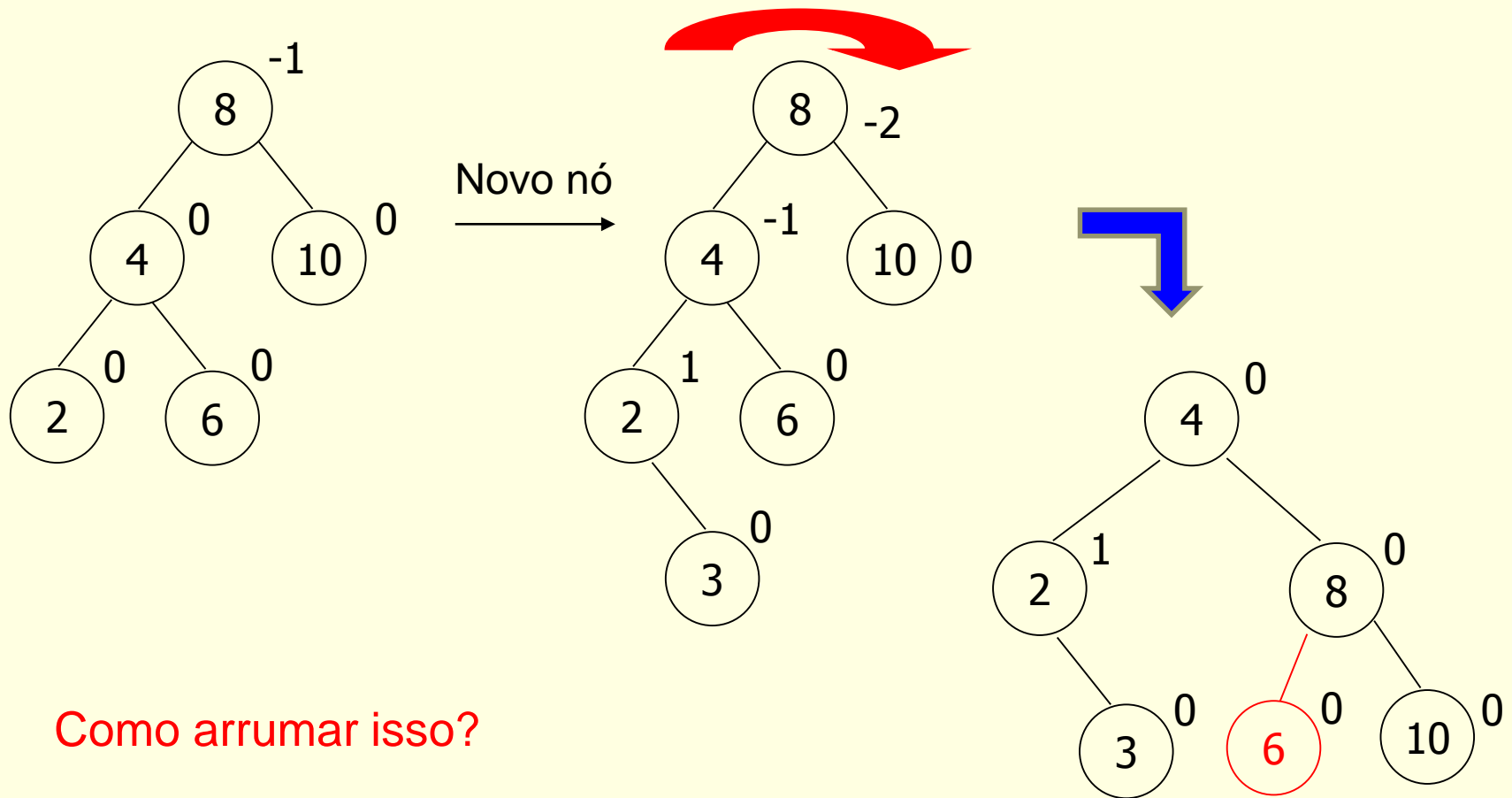
AVL: exemplo de desbalanceamento



Como arrumar isso?

EXERCÍCIO

AVL: exemplo de desbalanceamento



Como arrumar isso?

Rotação simples para direita

Cuidado: realocação!

AVL

■ Exercício

- Inserir os elementos 10, 3, 2, 5, 9, 7, 15, 12 e 13, nesta ordem, em uma árvore e balancear quando necessário

AVL

- Exercício
 - Inserir os elementos A, B, C, ..., J em uma árvore e balancear quando necessário

AVL

- Os **percursos** em-ordem da árvore original e da balanceada **permanecem iguais**
- Exercício: prove para um dos exemplos anteriores!