

Árvores

SCC-202 – Algoritmos e Estruturas de
Dados I

Listas e árvores

■ Listas lineares

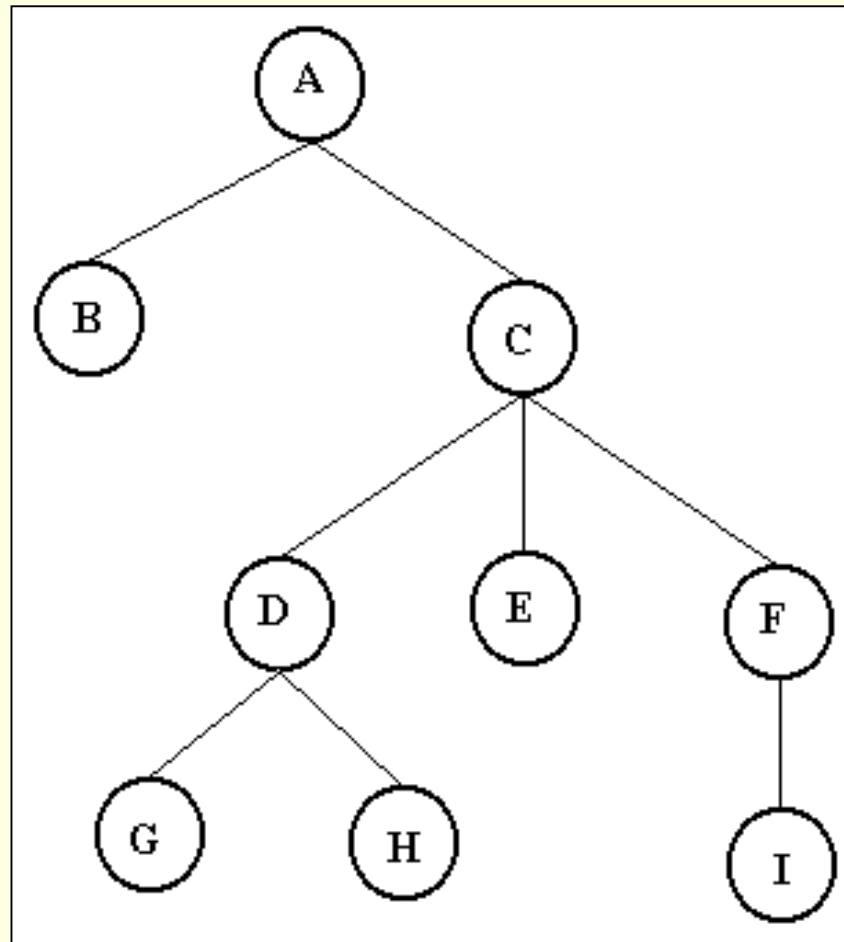
- Um nó após o outro, adjacentes
- Sem relações hierárquicas entre os nós, em geral

■ Diversas aplicações necessitam de estruturas mais complexas do que as listas estudadas até agora

- **Listas não lineares:** árvores, grafos, etc.

Árvores

■ Exemplo



Árvores

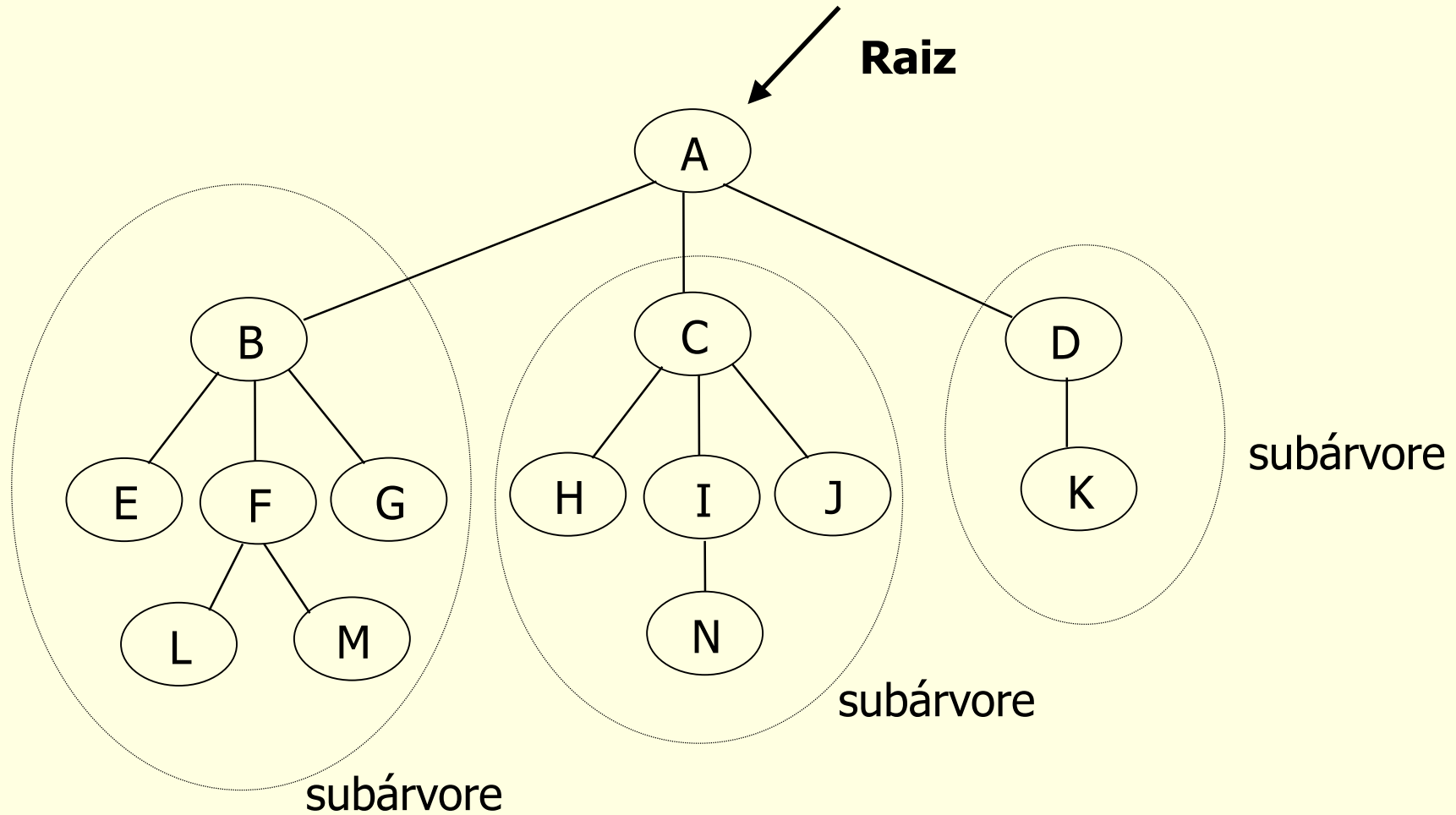
- Motivações para usá-las
 - Inúmeros problemas podem ser representados e tratados por árvores
 - Árvores admitem tratamento computacional eficiente quando comparadas a estruturas mais genéricas como os grafos (os quais, por sua vez, são mais flexíveis e, portanto, de mais complexa manipulação)
 - Ótimas para busca!

Árvores

■ Definição

- Uma árvore T , ou simplesmente uma árvore, é um conjunto finito de elementos denominados nós ou vértices tais que
 - $T=0$ é a árvore dita vazia ou
 - Existe um nó especial R , chamado raiz de T ; os nós restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em m (≥ 1) conjuntos não vazios que são as subárvores de R , sendo que cada subárvore é, por sua vez, uma árvore

Árvores



Árvores

■ Subárvores

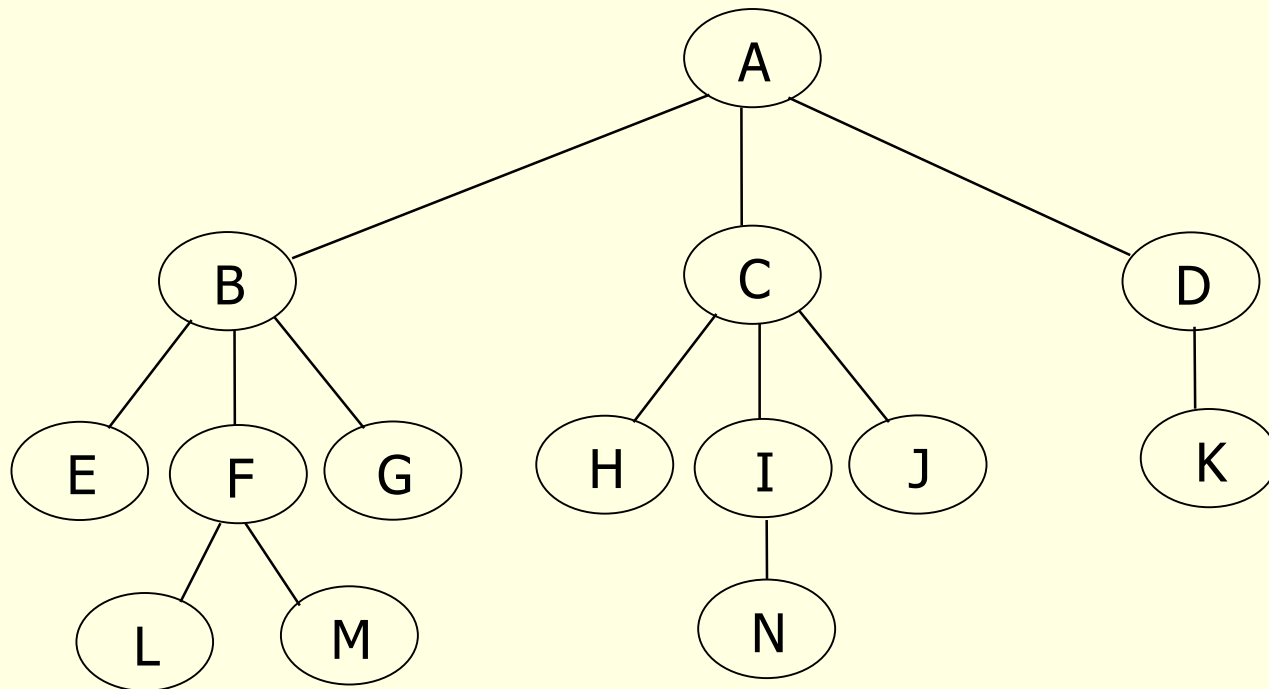
- Seja S uma subárvore de T
 - A subárvore S é composta de um nó raiz pertencente a T e todos os seus $n \geq 0$ descendentes.

Árvores

- Nós filhos, pais, tios, irmãos e avô
- Seja V o nó raiz de uma subárvore de T
 - Os nós raízes w_1, w_2, \dots, w_j das subárvores de V são chamados filhos de V
 - V é chamado pai de w_1, w_2, \dots, w_j
 - Os nós w_1, w_2, \dots, w_j são irmãos
 - Se Z é filho de w_1 , então w_2 é tio de Z e V é avô de Z

Árvores

- Filhos de A? Pai de F? Irmãos de H? Tios de J? Avô de K? Primos de G?



Árvores

- Grau de saída, descendente e ancestral
 - O número de filhos de um nó é chamado grau (de saída) desse nó
 - Se X pertence à subárvore V de T , então X é descendente de V e V é ancestral, ou antecessor, de X

Árvores

■ Nó folha e nó interior

- Um nó que não possui descendentes é chamado de nó folha, ou seja, um nó folha é aquele com grau de saída nulo ou zero
- Um nó que não é folha (isto é, possui grau de saída diferente de zero) é chamado nó interior, nó interno ou, ainda, nó intermediário

Árvores

- Grau de uma árvore
 - O grau de uma árvore é o máximo entre os graus de seus nós

Árvores

- Floresta

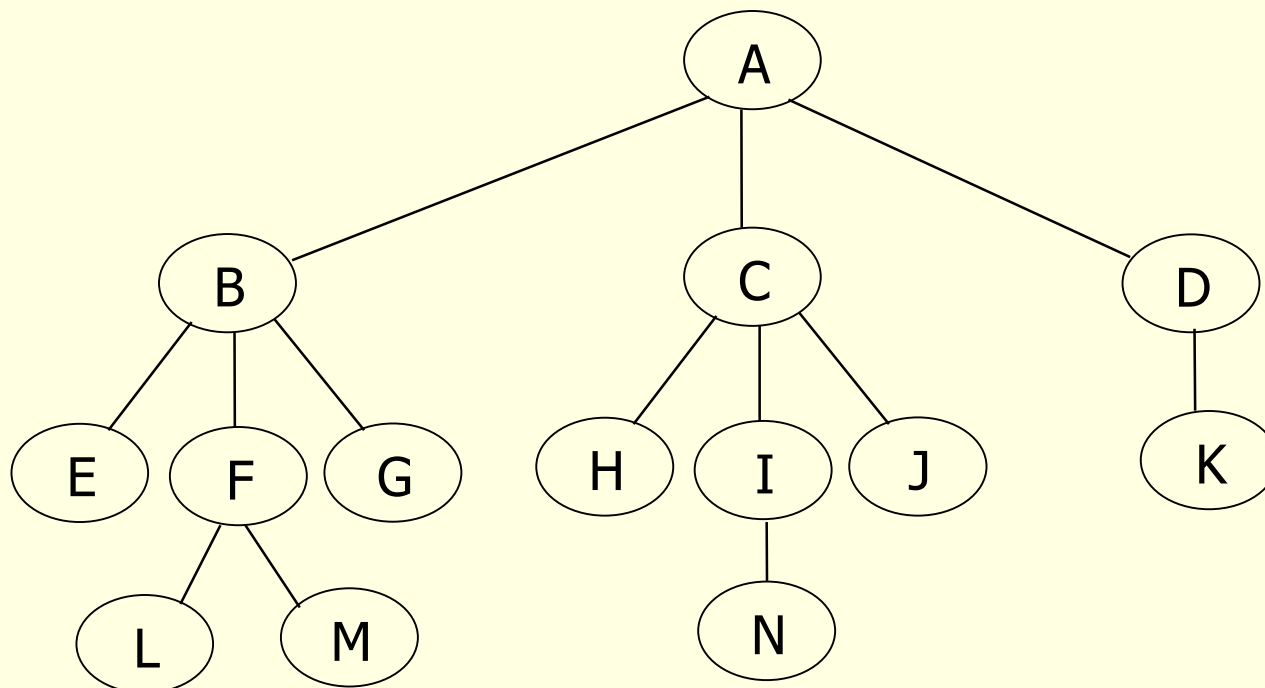
- Uma floresta é um conjunto de zero ou mais árvores

Árvores

- Caminho, comprimento do caminho
 - Uma sequência de nós distintos v_1, v_2, \dots, v_k , tal que existe sempre entre nós consecutivos (isto é, entre v_1 e v_2 , entre v_2 e v_3 , ... , $v_{(k-1)}$ e v_k) a relação "é filho de" ou "é pai de" é denominada um caminho na árvore; diz-se que v_1 alcança v_k e que v_k é alcançado por v_1
 - Um caminho de k vértices é obtido pela sequência de $k-1$ pares de vértices; o valor $k-1$ é o comprimento do caminho

Árvores

- Caminho entre A e J? Comprimento desse caminho?



Árvores

- **Nível (ou profundidade)**
 - O nível de um nó é o número de nós do caminho da raiz até o nó
 - O nível da raiz é 1 (alguns consideram zero)
 - Pode ser visto como o comprimento do caminho (raiz = 0)
 - Ou o número de nós envolvidos entre eles (raiz = 1)

Árvores

- Altura de um nó

- A altura de um nó V é o número de nós no maior caminho de V até um de seus descendentes
- As folhas têm altura 1

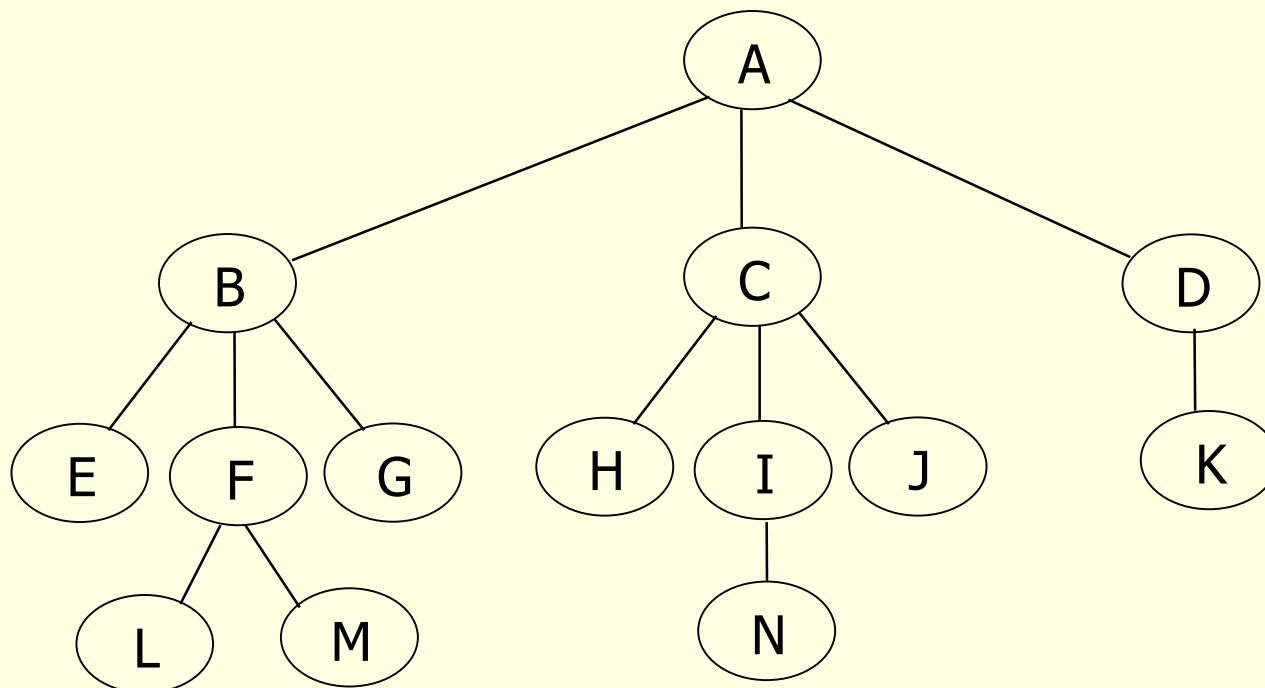
Árvores

- Altura de uma árvore

- A altura de uma árvore T é igual ao máximo nível de seus nós
- Em geral, representa-se a altura de T por $h(T)$ e a altura da subárvore de raiz V por $h(V)$

Árvores

- Qual a altura dessa árvore? Qual o nível do nó C?



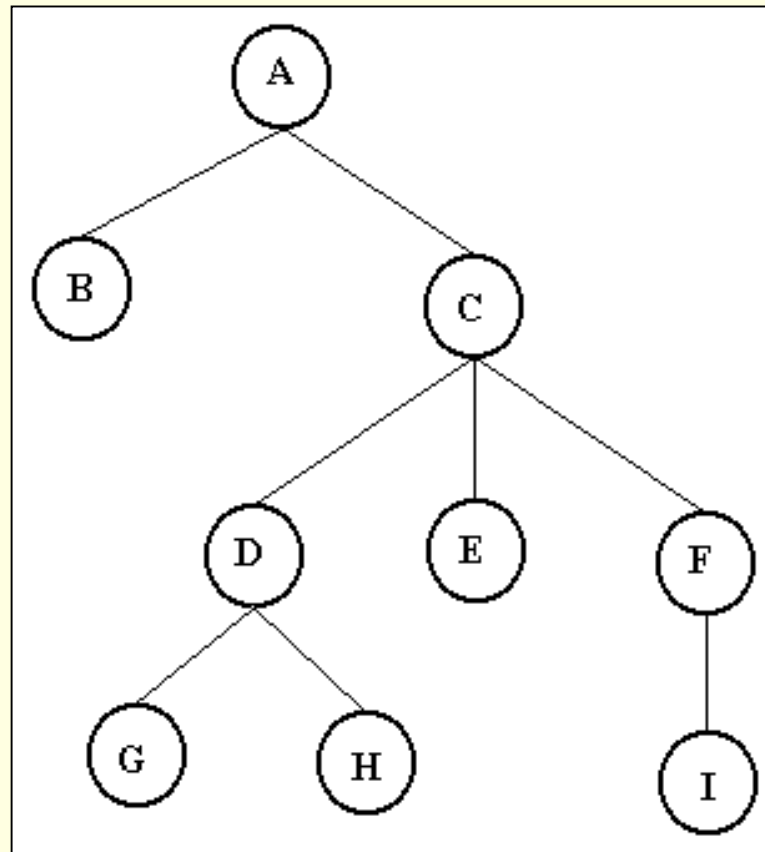
Árvores

■ Árvore ordenada

- Uma árvore ordenada é aquela na qual os filhos de cada nó estão ordenados
- Assume-se ordenação da esquerda para a direita

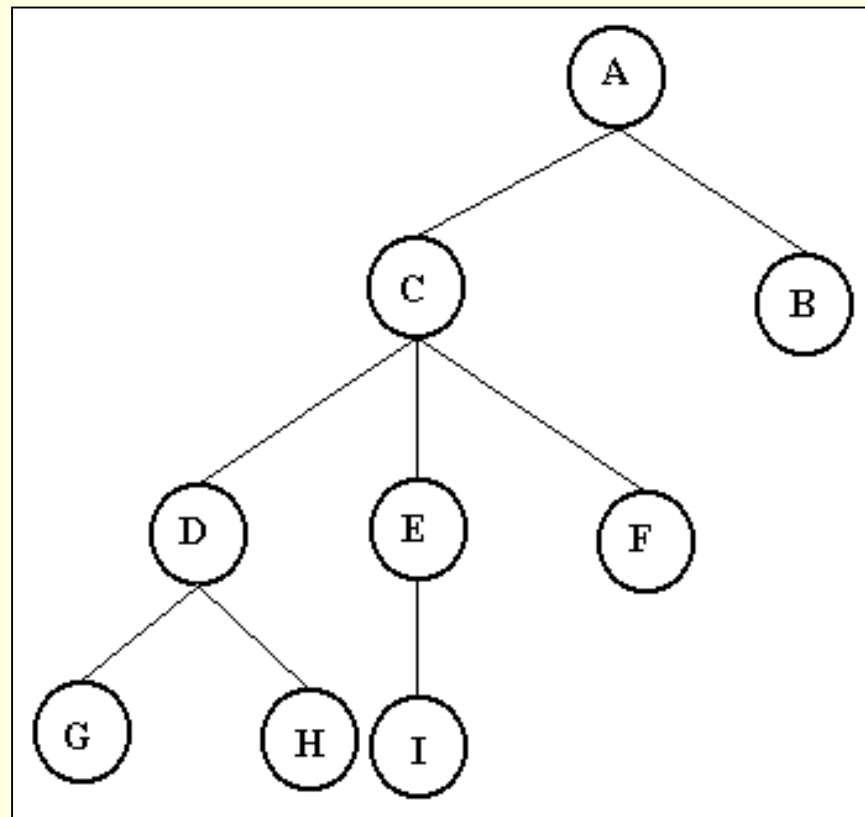
Árvores

■ Árvore ordenada



Árvores

- Árvore não ordenada



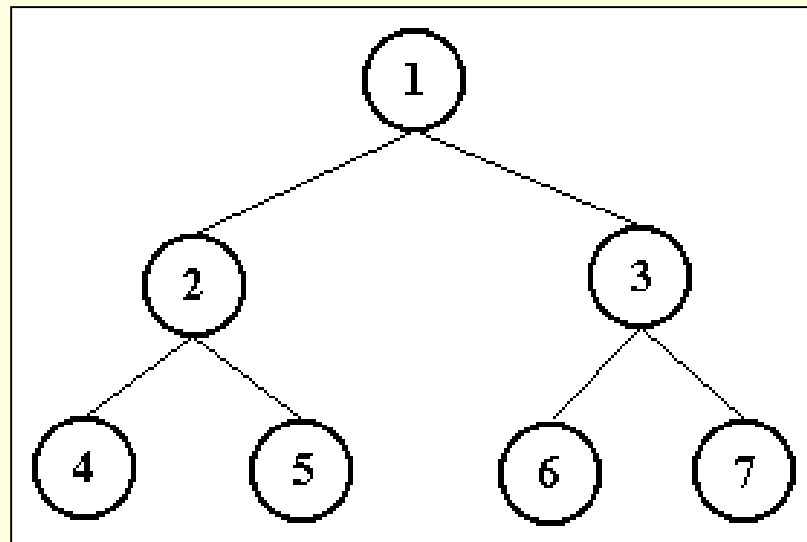
Árvores

- **Árvore cheia**

- Uma árvore de grau d é uma árvore cheia se possui o número máximo de nós, isto é, todos os nós tem número máximo de filhos (exceto as folhas, logicamente) e todas as folhas estão na mesma altura

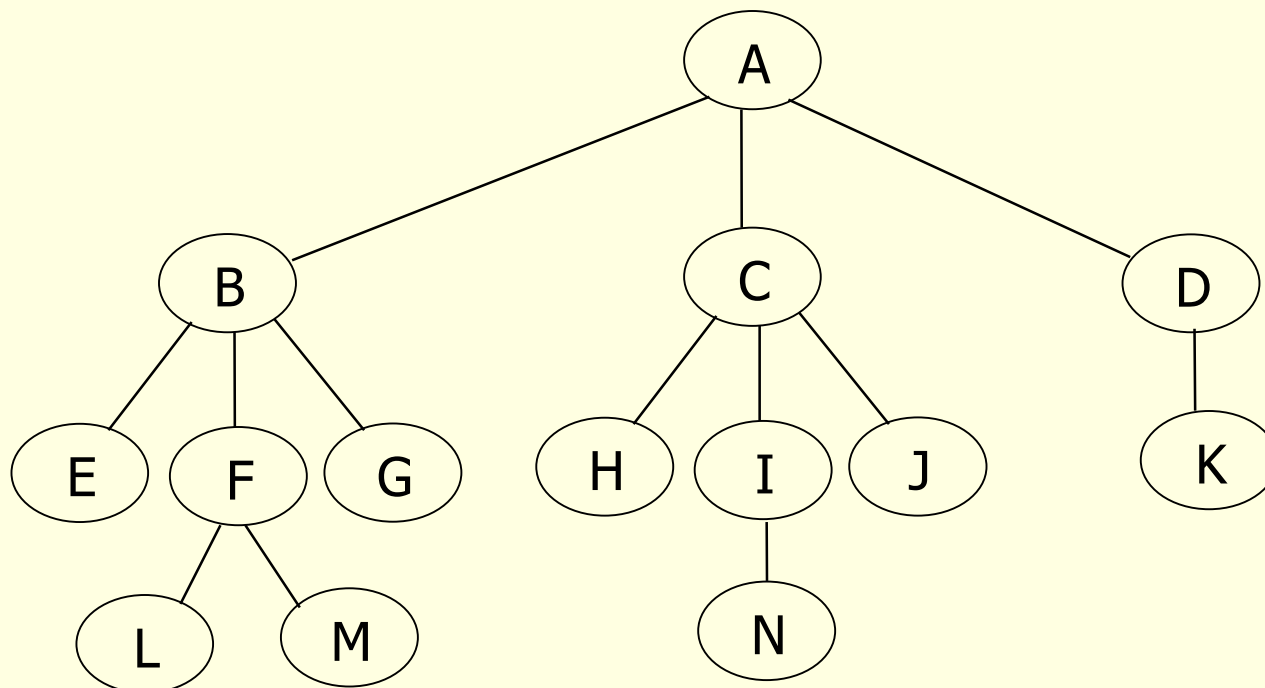
Árvores

- Exemplo de árvore cheia de grau 2



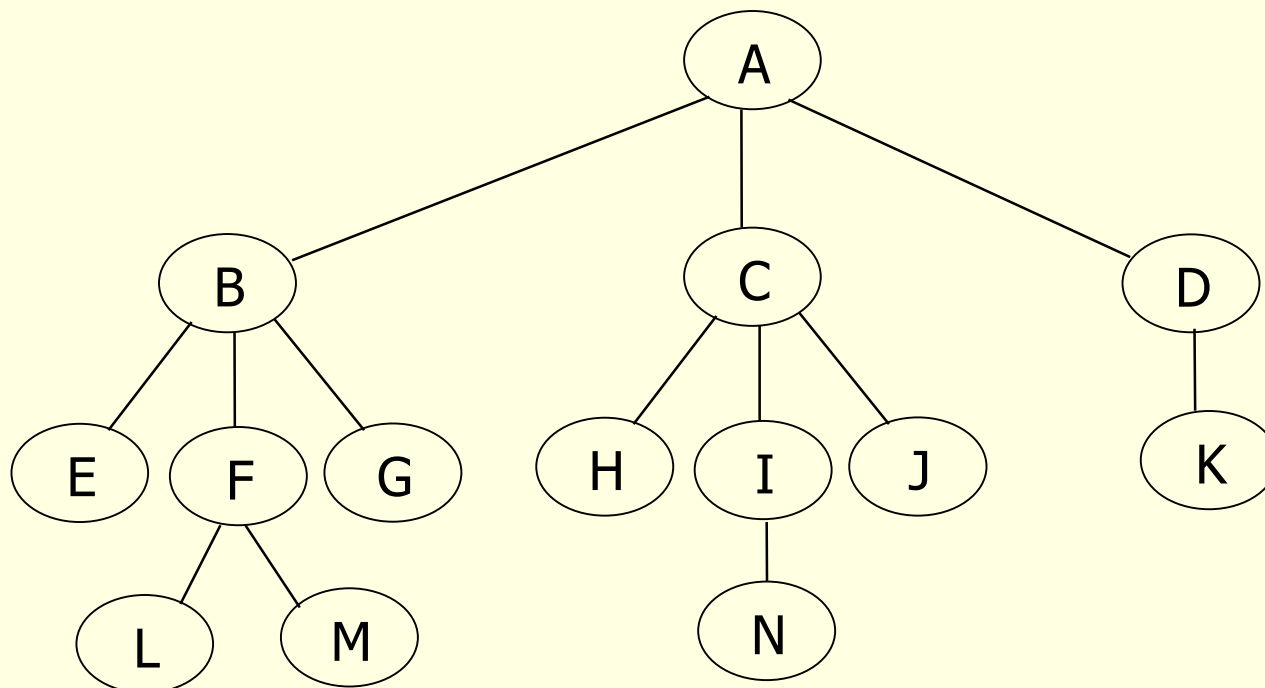
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Quantas subárvores A tem? **14 subárvores**



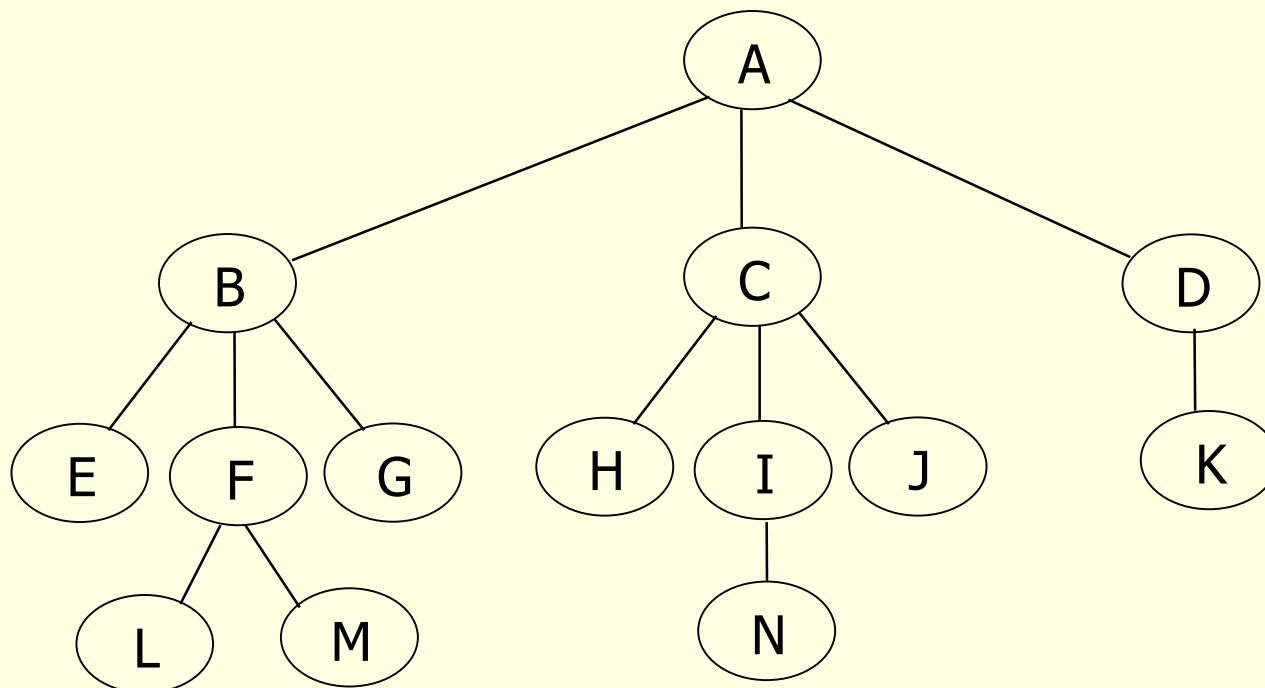
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Quem são os filhos de A? E os descendentes de A?



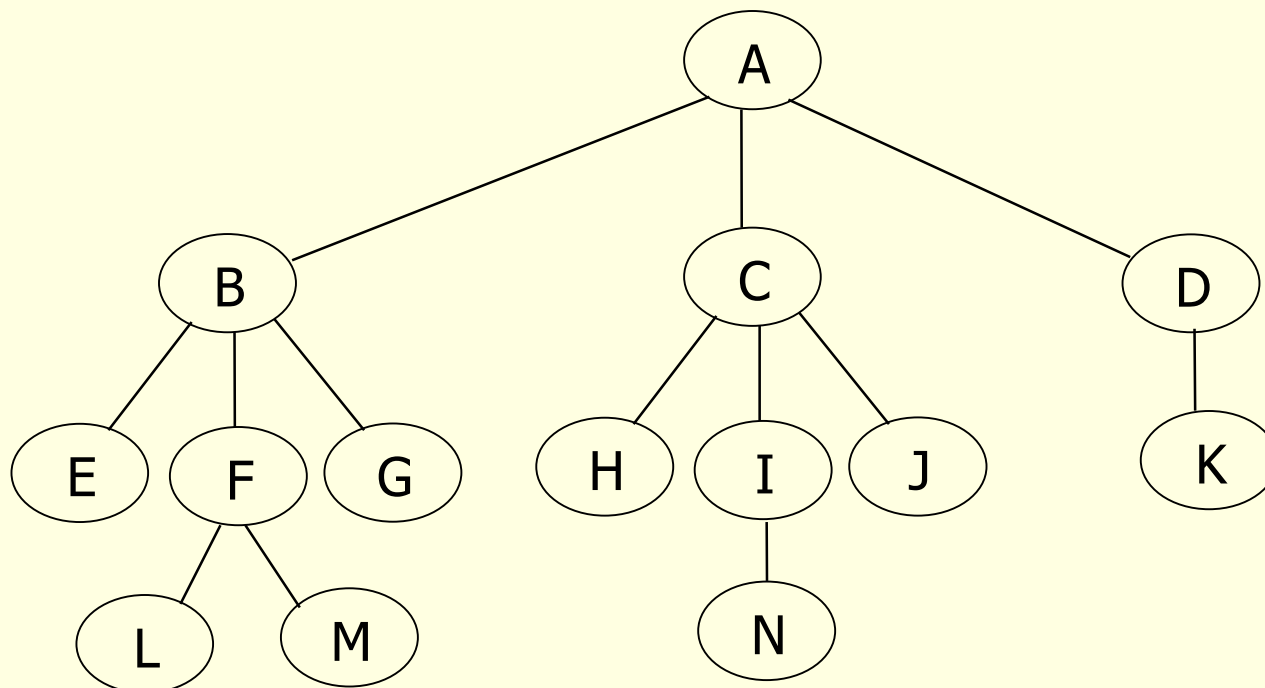
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Quais são os nós folha dessa árvore?



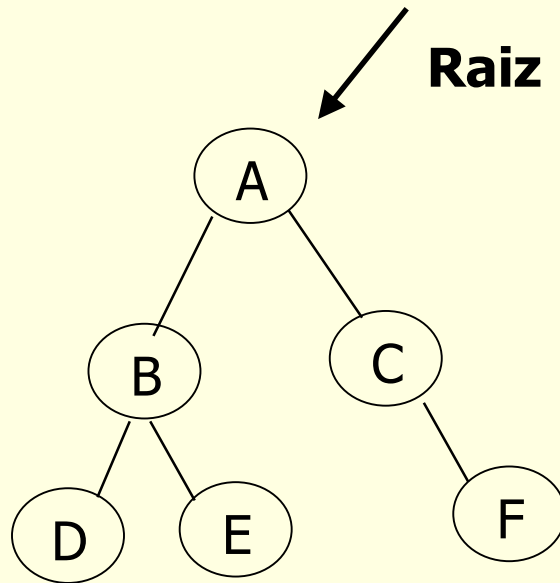
Árvores

- Considere a árvore abaixo
 - Qual o grau dessa árvore?



Árvores binárias

- Árvores com grau 2, ou seja, cada nó pode ter 2 filhos, no máximo



Terminologia:

- filho esquerdo
- filho direito
- informação

Árvores binárias

■ Exercício

- Considerando a implementação dinâmica e encadeada, declare a estrutura de cada nó de uma árvore binária

Árvores binárias

■ Exercício

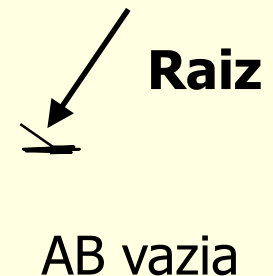
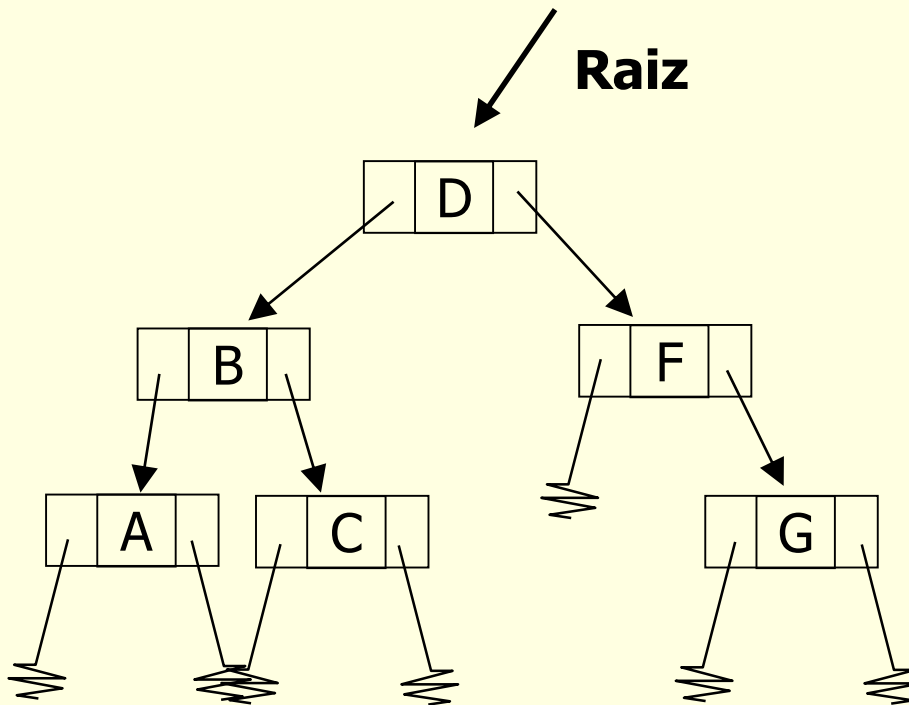
```
typedef char elem;
```

```
typedef struct bloco {  
    elem info;  
    struct bloco *esq, *dir;  
} no;
```

```
typedef struct {  
    no *raiz;  
} Arvore;
```

Árvores binárias

- Representação dinâmica e encadeada de uma árvore binária



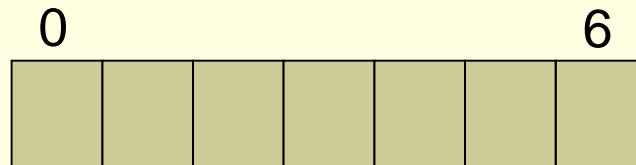
Árvores binárias

■ Perguntas

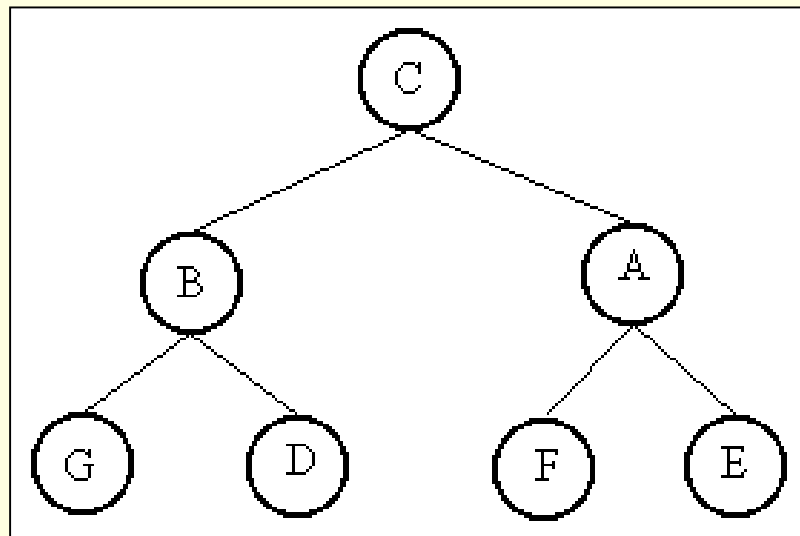
- Quantos ponteiros são necessários para se percorrer uma árvore binária completamente?
- Quantos são necessários para percorrer qualquer tipo de árvore?

Árvores binárias

- Representação estática e sequencial de árvores binárias
 - Vetor

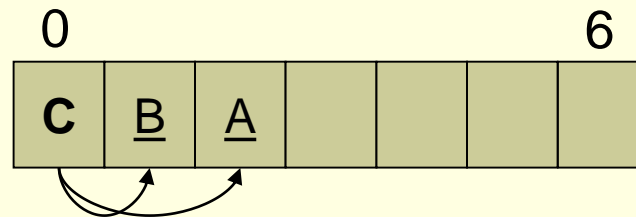


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

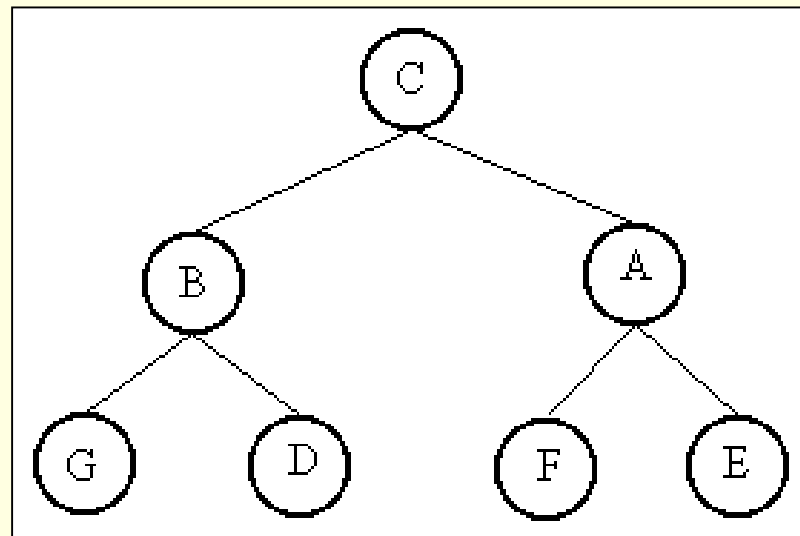


Árvores binárias

- Representação estática e sequencial de árvores binárias
 - Vetor

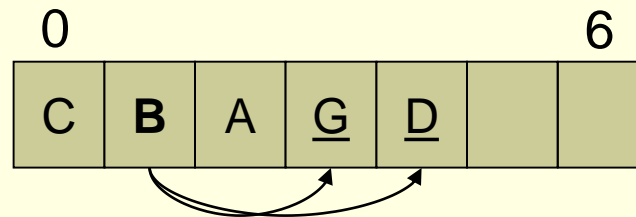


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

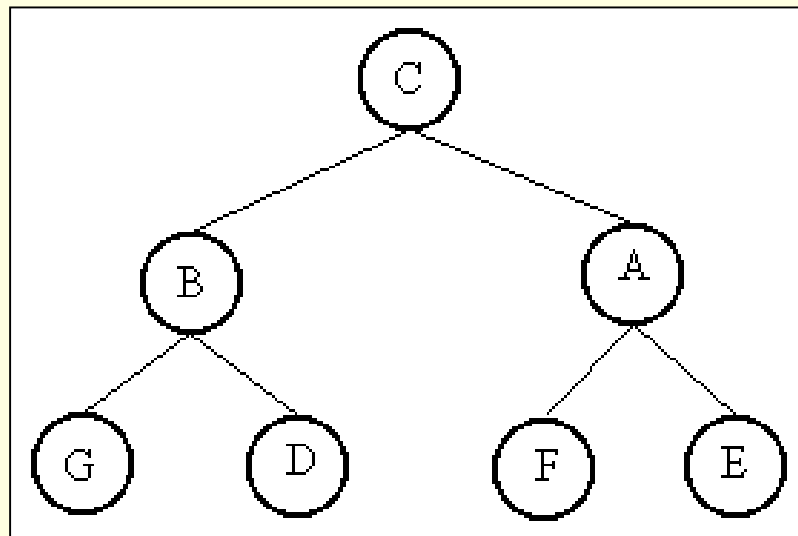


Árvores binárias

- Representação estática e sequencial de árvores binárias
 - Vetor

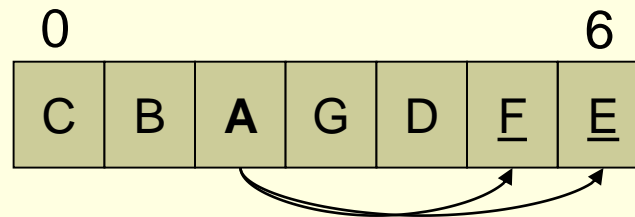


- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

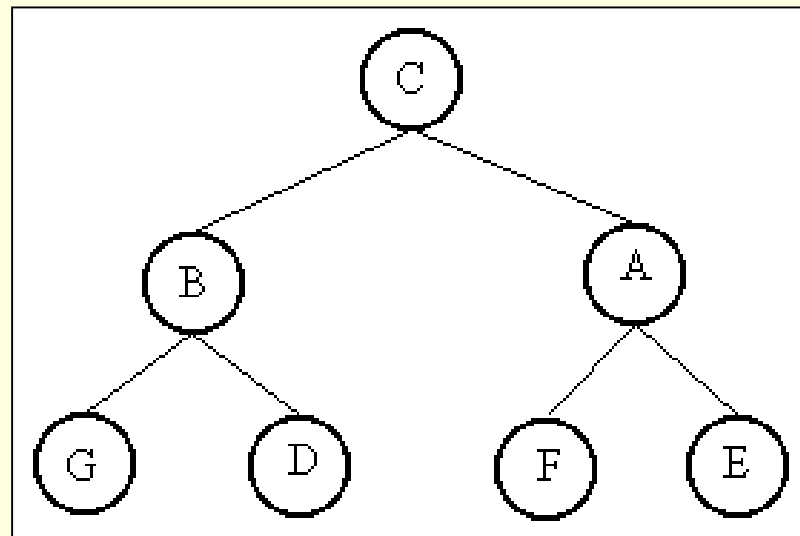


Árvores binárias

- Representação estática e sequencial de árvores binárias
 - Vetor



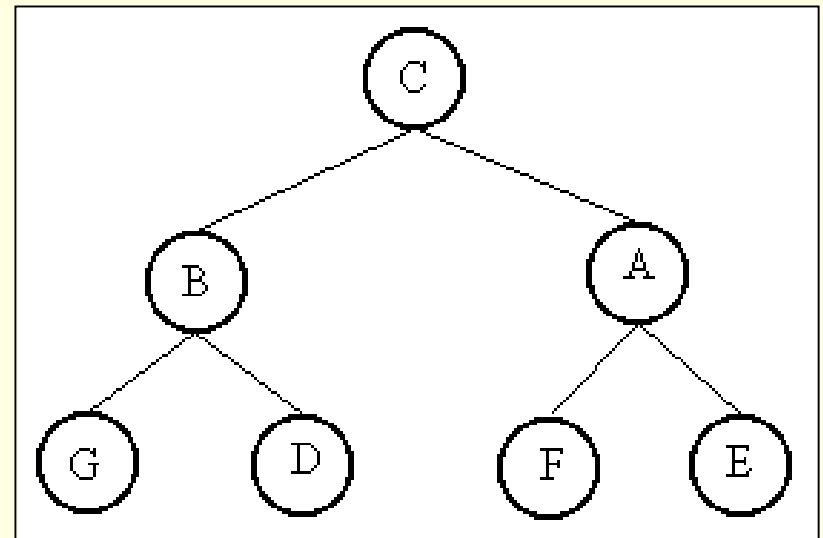
- Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?



Árvores binárias

- Representação estática e sequencial de árvores binárias

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| C | B | A | G | D | F | E |

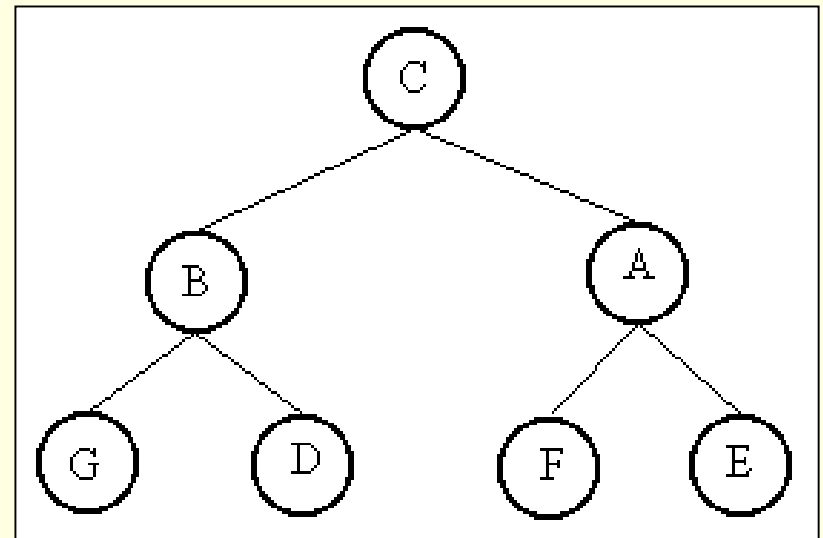


- Como saber quem é filho de quem?

Árvores binárias

- Representação estática e sequencial de árvores binárias

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| C | B | A | G | D | F | E |

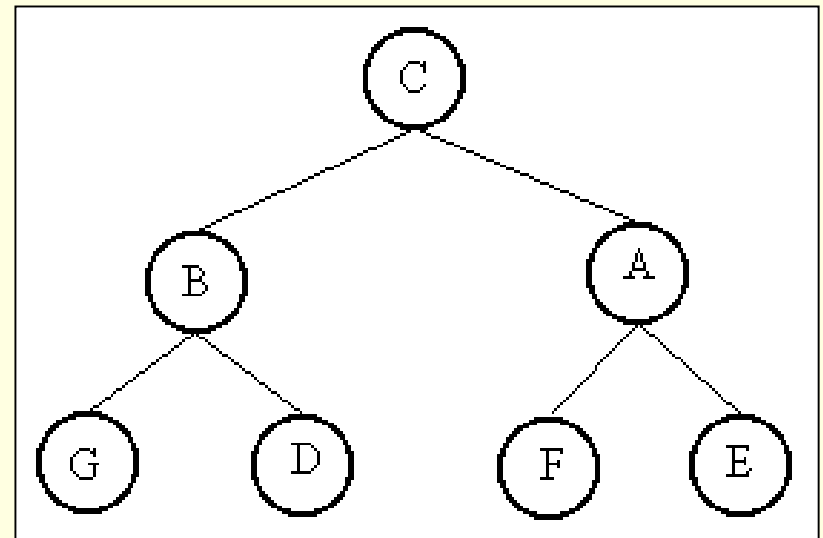


- Como saber quem é filho de quem?
 - Filhos de i são $2i+1$ e $2i+2$

Árvores binárias

- Representação estática e sequencial de árvores binárias

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| C | B | A | G | D | F | E |

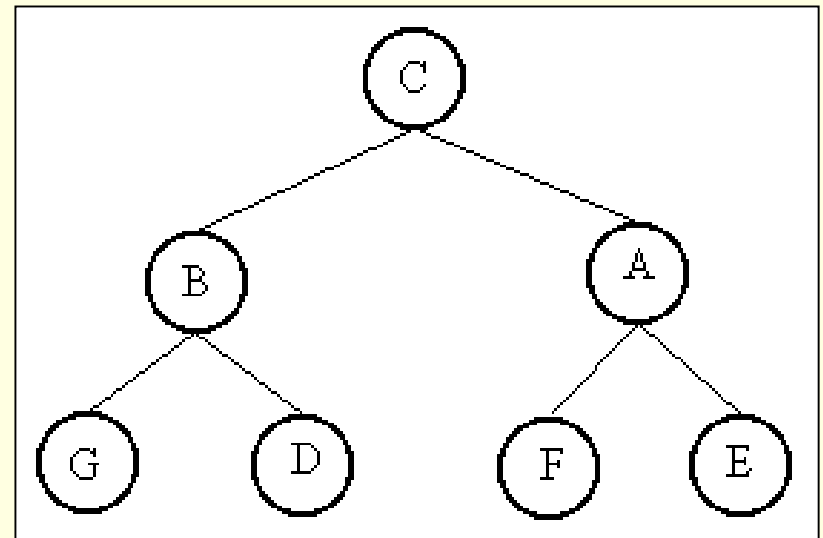


- Como saber quem é filho de quem?
 - Filhos de i são $2i+1$ e $2i+2$
- E o pai?

Árvores binárias

- Representação estática e sequencial de árvores binárias

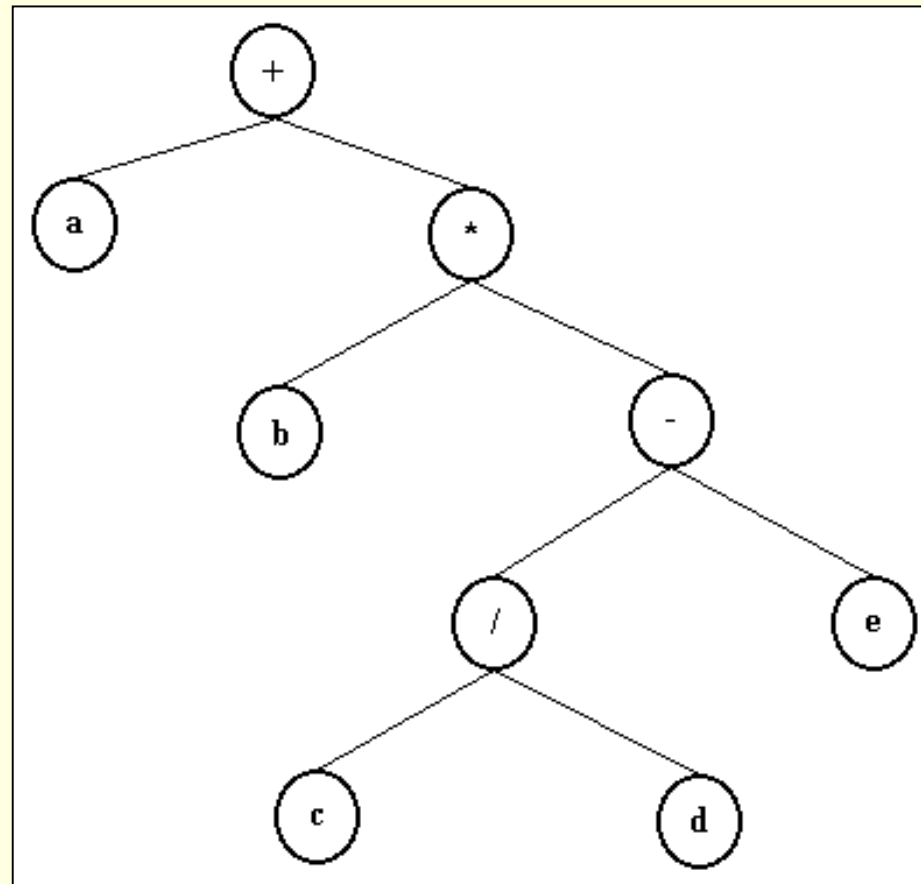
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| C | B | A | G | D | F | E |



- Como saber quem é filho de quem?
 - Filhos de i são $2i+1$ e $2i+2$
- E o pai? $(i-1) \text{ div } 2$

Árvores binárias

- **Exercício:** represente a árvore abaixo em um vetor
 - O que essa árvore representa?



Árvores binárias

- **Questões:** considerando a representação estática e sequencial de árvores binárias
 - Como fazer a inserção e remoção de elementos nessa representação?
 - É mais fácil ou difícil do que na implementação encadeada e dinâmica?
 - E em termos de uso da memória?

Operações em árvores binárias

- **Exercício em duplas**
 - Implementar as seguintes operações do TAD
 - Criar árvore
 - Verificar se a árvore está vazia
 - Buscar um elemento

Operações em árvores binárias

- Exercício em duplas, para entregar
 - Implementar função de buscar pai de um elemento na árvore