MC3305
Algoritmos e Estruturas de Dados II

Aula 03 – Limite assintótico para a ordenação, Ordenação em tempo linear

Prof. Jesús P. Mena-Chalco
jesus.mena@ufabc.edu.br

2Q-2015

Ordenação

- Ordenar corresponde ao **processo de re-arranjar um conjunto de objetos** em ordem ascendente ou descendente.
- O objetivo principal da ordenação **é facilitar a recuperação posterior** de itens do conjunto ordenado.
- **Diversos algoritmos** de ordenação já foram estudados e implementados...

Ordenação

- Os métodos de ordenação são classificados em 2 grandes grupos:

Ordenação Interna:

Se o arquivo a ser ordenado cabe todo na memória principal

Ordenação Externa:

Se o arquivo a ser ordenado não cabe todo na memória principal

Ordenação

- Os métodos de ordenação são classificados em 2 grandes grupos:

Ordenação Interna:

Se o arquivo a ser ordenado cabe todo na memória principal

→ **Algoritmos Baseados em Comparações**

→ **Algoritmos Não Baseados em Comparações**

Ordenação baseada em comparações

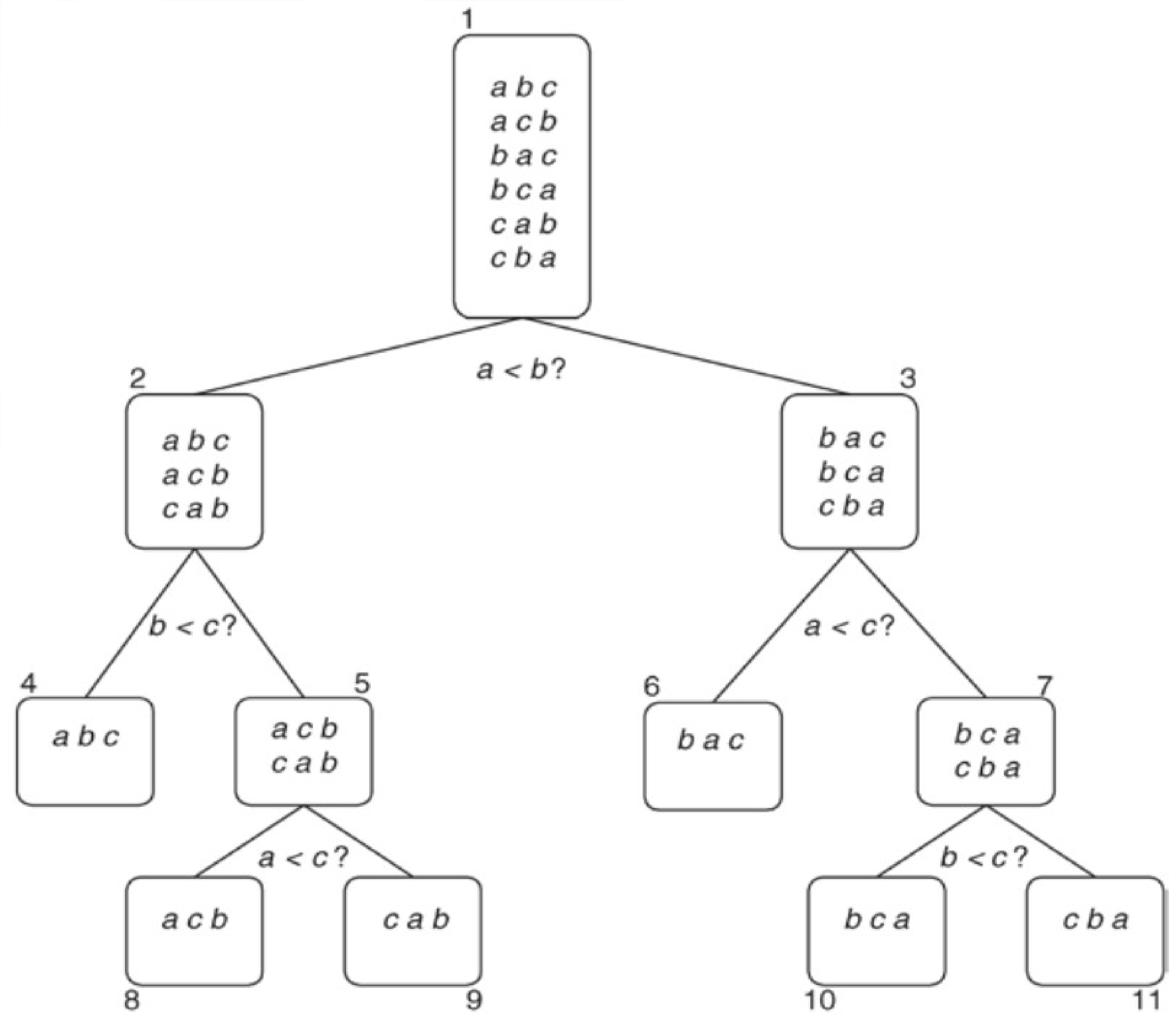
Ordenação

- **Algoritmos basedos em Comparações**
  - Insertion sort
  - Selection sort
  - Bubble sort
  - Merge sort
  - Quick sort

Complexidade computacional $\Omega(n \log(n))$

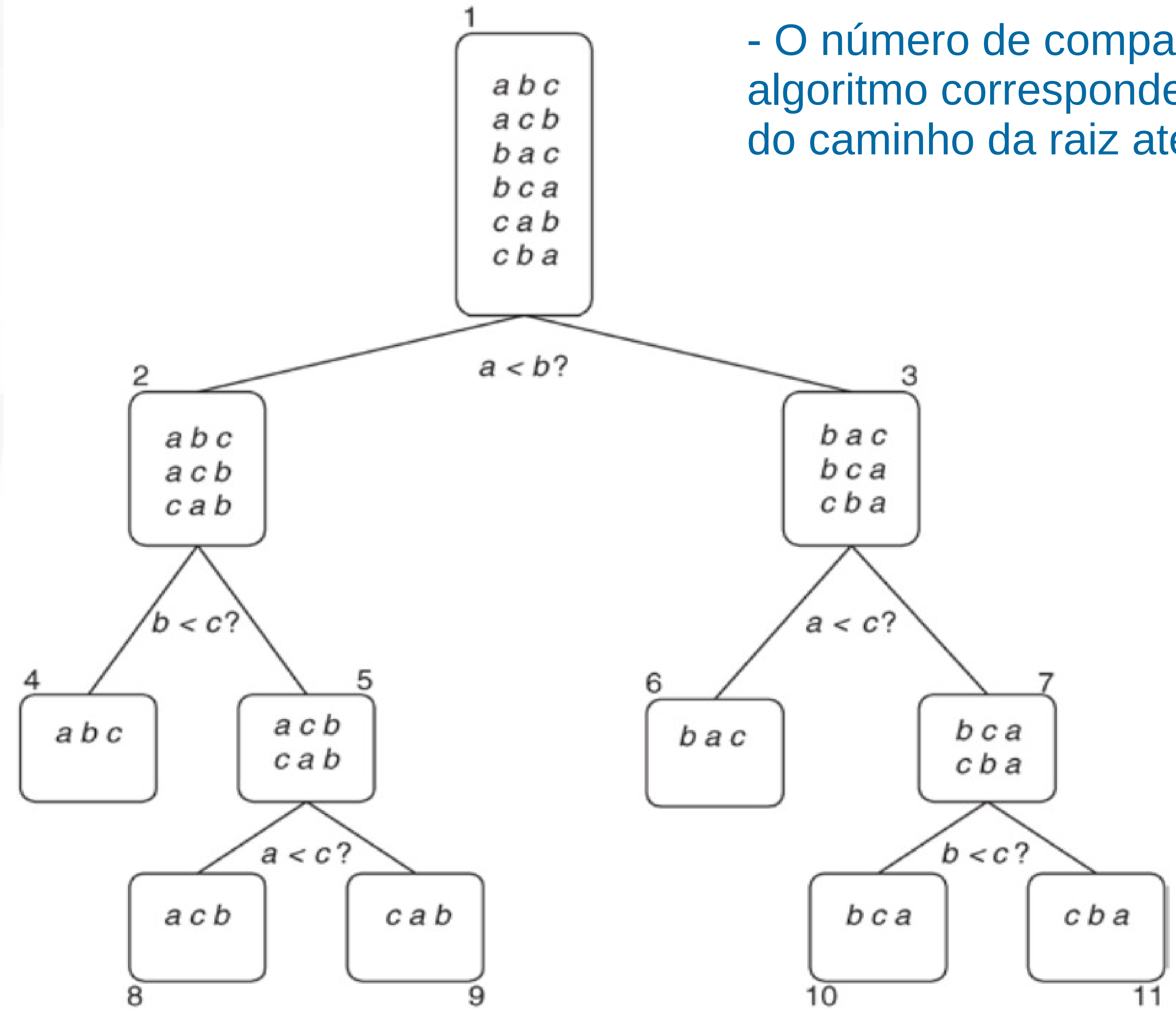
[limite matemático]
[limite assintótico para a ordenação]

- Qualquer algoritmo de ordenação por comparação pode ser representado por uma árvore de decisão.

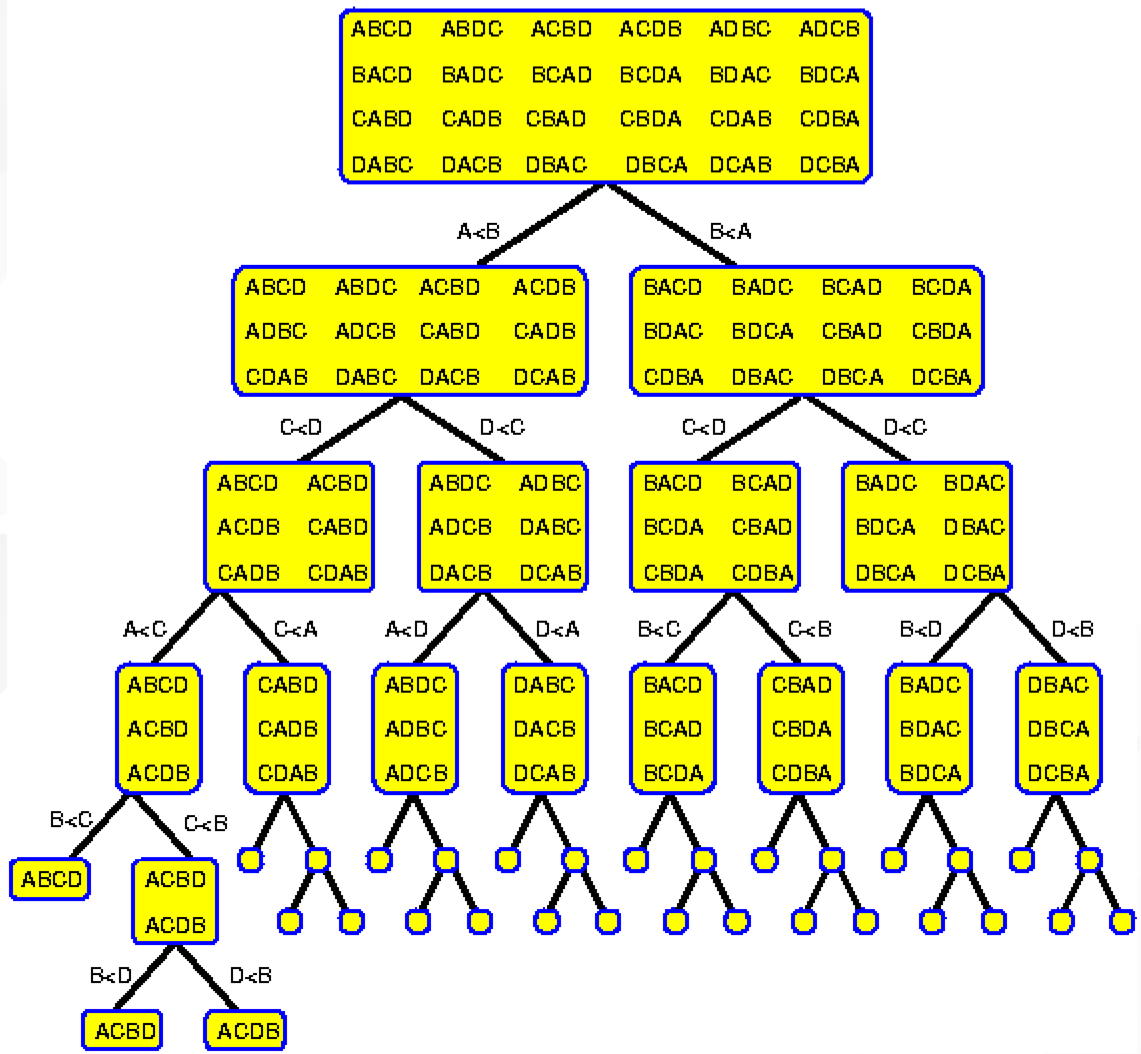


- Qualquer algoritmo de ordenação por comparação pode ser representado por uma árvore de decisão.

- O número de comparações efetuadas pelo algoritmo corresponde ao **maior comprimento** do caminho da raiz até uma de suas folhas.



DECISION TREE

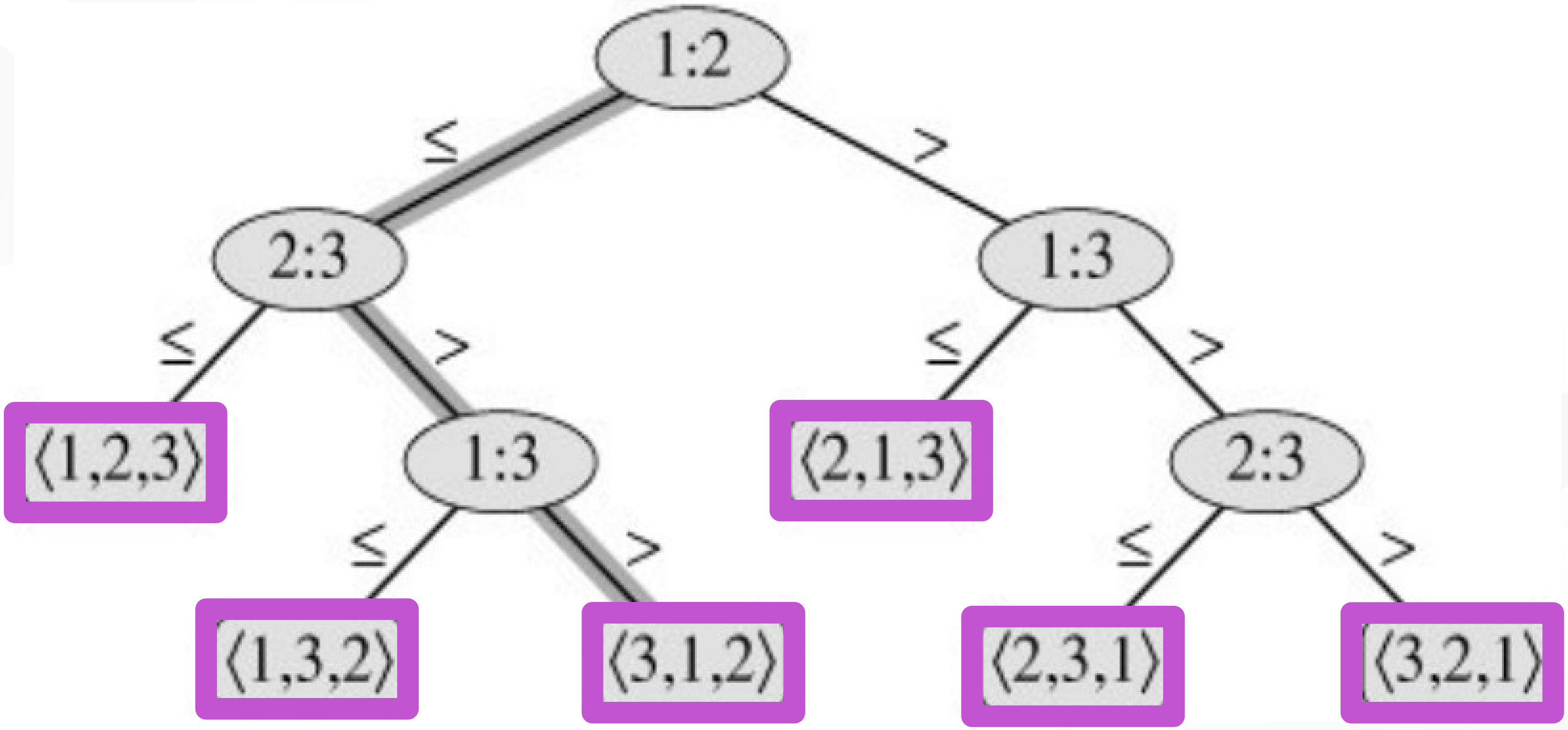


Fonte: http://users.informatik.uni-halle.de/~jopsi/dinf205/chap8.shtml

Ordenação baseada em comparações

Sem perda de generalidade suponha que os valores a ser ordenados são sempre distintos

[Árvore de decisão]

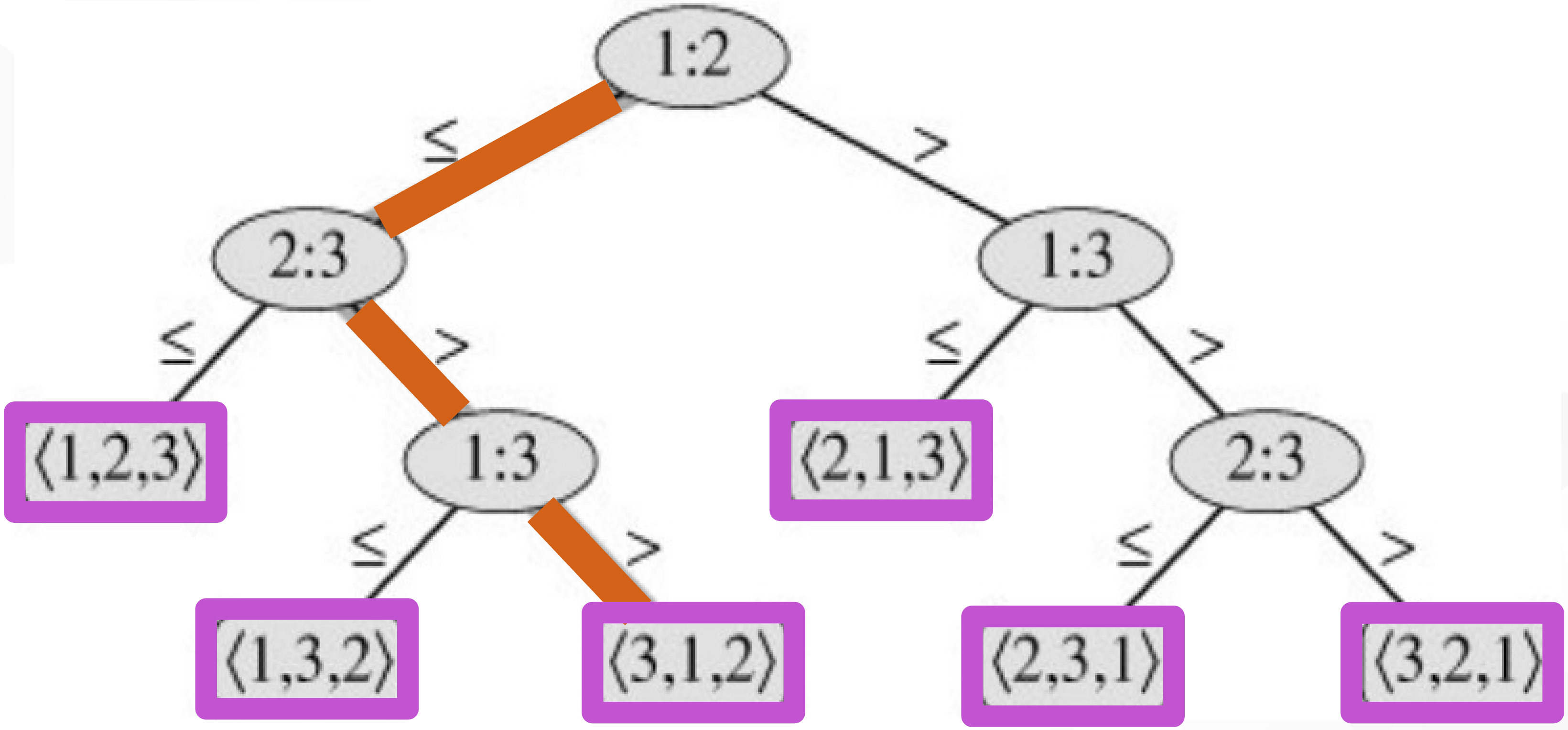


[Cada nó folha está associada a uma permutação dos elementos do vetor]

Ordenação baseada em comparações

Sem perda de generalidade suponha que os valores a ser ordenados são sempre distintos

[Árvore de decisão]



[Qualquer algoritmo de ordenação deverá percorrer um caminho desta árvore]

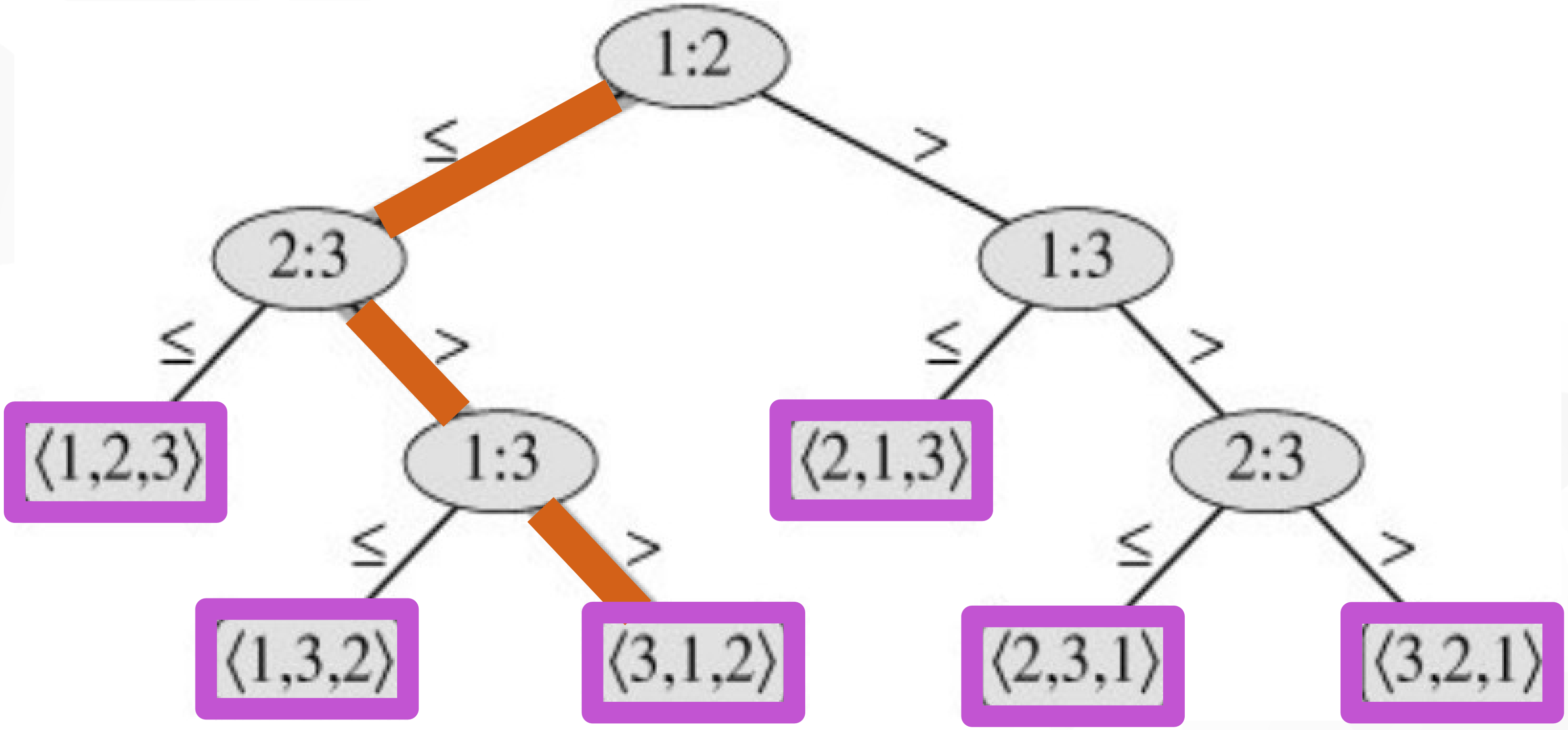
da raiz até a folha

Ordenação baseada em comparações

Sem perda de generalidade suponha que os valores a ser ordenados são sempre distintos

[Árvore de decisão]

Número de folhas = n!



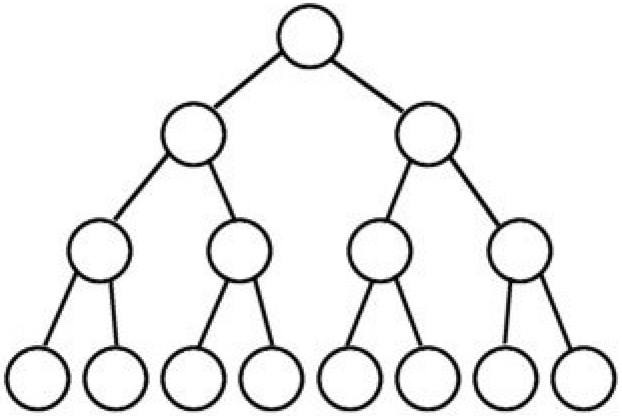
[Qualquer algoritmo de ordenação deverá percorrer um caminho desta árvore]

da raiz até a folha

Ordenação baseada em comparações

Seja ***L*** o número de folhas de uma árvore binária e ***h*** sua altura.

Então $L \leq 2^h$



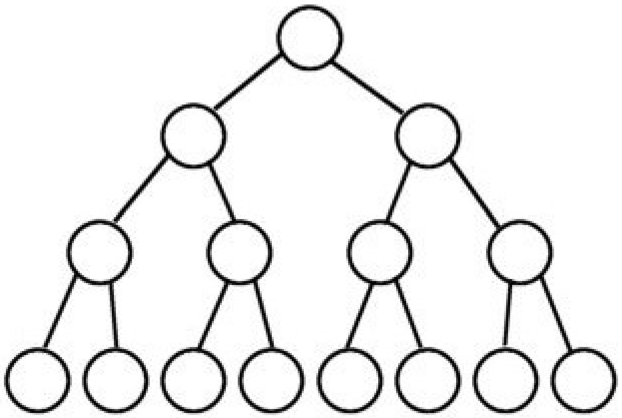
h=3

L=8

Ordenação baseada em comparações

Seja ***L*** o número de folhas de uma árvore binária e ***h*** sua altura.

Então $L \leq 2^h$



h=3

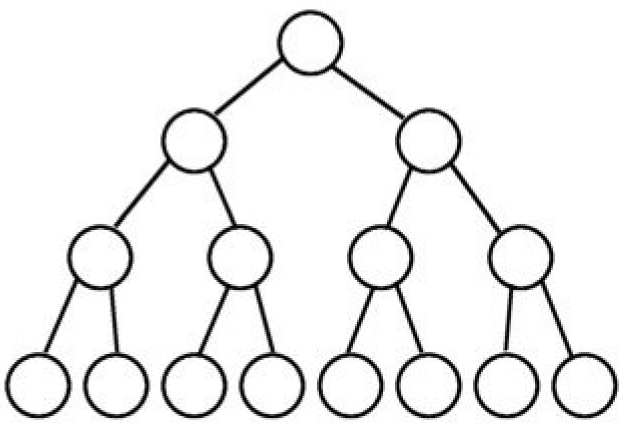
L=8

$$h \geq \log(n!)$$

Ordenação baseada em comparações

Seja ***L*** o número de folhas de uma árvore binária e ***h*** sua altura.

Então $L \leq 2^h$



h=3

L=8

$$h \geq \log(n!)$$

$$h = \Omega(n \log n)$$

Ordenação baseada em comparações

- **Algoritmos basedo em Comparações**
  - Insertion sort
  - Selection sort
  - Bubble sort
  - Merge sort
  - Quick sort

Vários algoritmos aqui listados são ótimos pois a sua complexidade computacional é $O(n \log n)$

Ordenação em tempo linear

Ordenação

- Algoritmos basedo em Comparações
    - Insertion sort
    - Selection sort
    - Bubble sort
    - Merge sort
    - Quick sort

- **Algoritmos não baseados em Comparações** (utilizam alguma informação sobre os dados)
    - Counting sort
    - Radix sort
    - Bin sort / Bucket sort

Algoritmos que fazem a ordenação em tempo linear $O(n)$

Counting sort

- Os elementos a serem ordenados são números inteiros "pequenos"

- **Números inteiros todos menores ou iguais a k,** $k \in O(n)$

Counting sort

- Os elementos a serem ordenados são números inteiros "pequenos"

- **Números inteiros todos menores ou iguais a k,** $k \in O(n)$

- Counting sort ordena estes **n** números em tempo $O(n+k)$

  Exemplo:

  → n = 1 000 000

  → k = 30

Counting sort

O algoritmo usa dois vetores auxiliares para ordenar **A**:

- **C (de tamanho k)**, que guarda em **C[i]** o número de ocorrencias de elementos ***i*** em **A**.

- **B (de tamanho n)**, onde se constroi o vetor ordenado.

Simulação:

https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/CountingSort.html

Counting sort

A

13	2	18	9	3	1	6	12	7	9	19	28	5	14	4	16	15	10	7	22	21	8	5	5	4	4	24	22	30	10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

C

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

B

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Counting sort

A

13	2	18	9	3	1	6	12	7	9	19	28	5	14	4	16	15	10	7	22	21	8	5	5	4	4	24	22	30	10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

C

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

B

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Counting sort

A

13	2	18	9	3	1	6	12	7	9	19	28	5	14	4	16	15	10	7	22	21	8	5	5	4	4	24	22	30	10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

C

0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

B

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Counting sort

A

13	2	18	9	3	1	6	12	7	9	19	28	5	14	4	16	15	10	7	22	21	8	5	5	4	4	24	22	30	10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

C

0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

B

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Counting sort

A

13	2	18	9	3	1	6	12	7	9	19	28	5	14	4	16	15	10	7	22	21	8	5	5	4	4	24	22	30	10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

C

0	1	1	1	3	3	1	2	1	2	2	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	2	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

B

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Counting sort

A	13	2	18	9	3	1	6	12	7	9	19	28	5	14	4	16	15	10	7	22	21	8	5	5	4	4	24	22	30	10
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

C	0	1	2	1	3	3	1	2	1	2	2	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	2	0	1	0	0	0	1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

B																														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Counting sort

A

13	2	18	9	3	1	6	12	7	9	19	28	5	14	4	16	15	10	7	22	21	8	5	5	4	4	24	22	30	10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

C

0	1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	3	3	1	2	1	2	2	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	2	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

B

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Counting sort

A

13	2	18	9	3	1	6	12	7	9	19	28	5	14	4	16	15	10	7	22	21	8	5	5	4	4	24	22	30	10
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

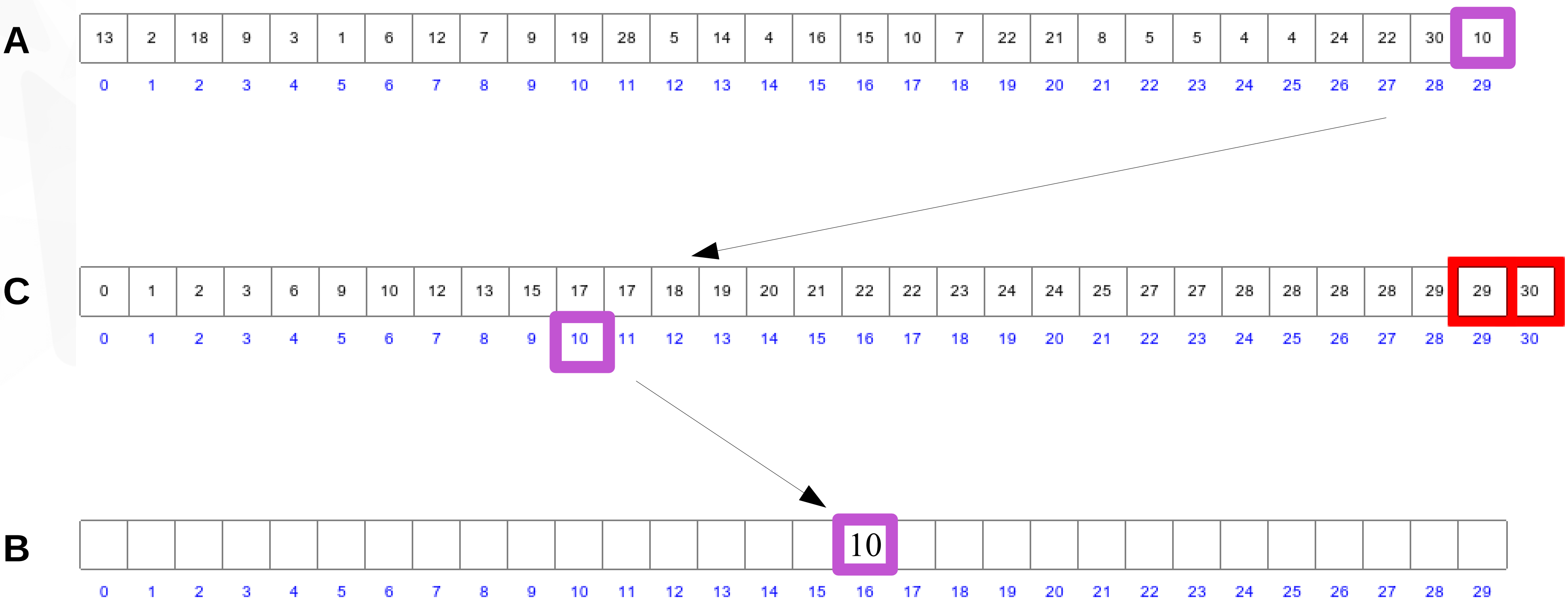
C

0	1	2	3	6	9	10	12	13	15	17	17	18	19	20	21	22	22	23	24	24	25	27	27	28	28	28	28	29	29	30
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

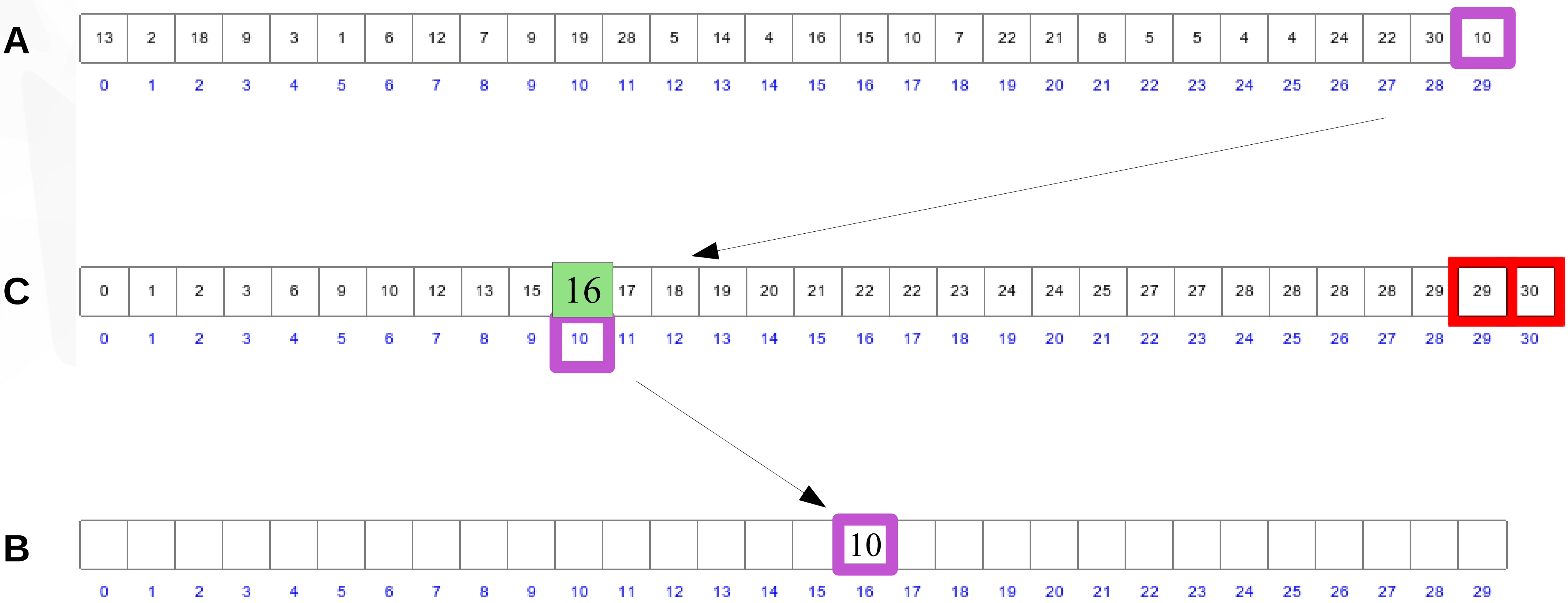
B

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

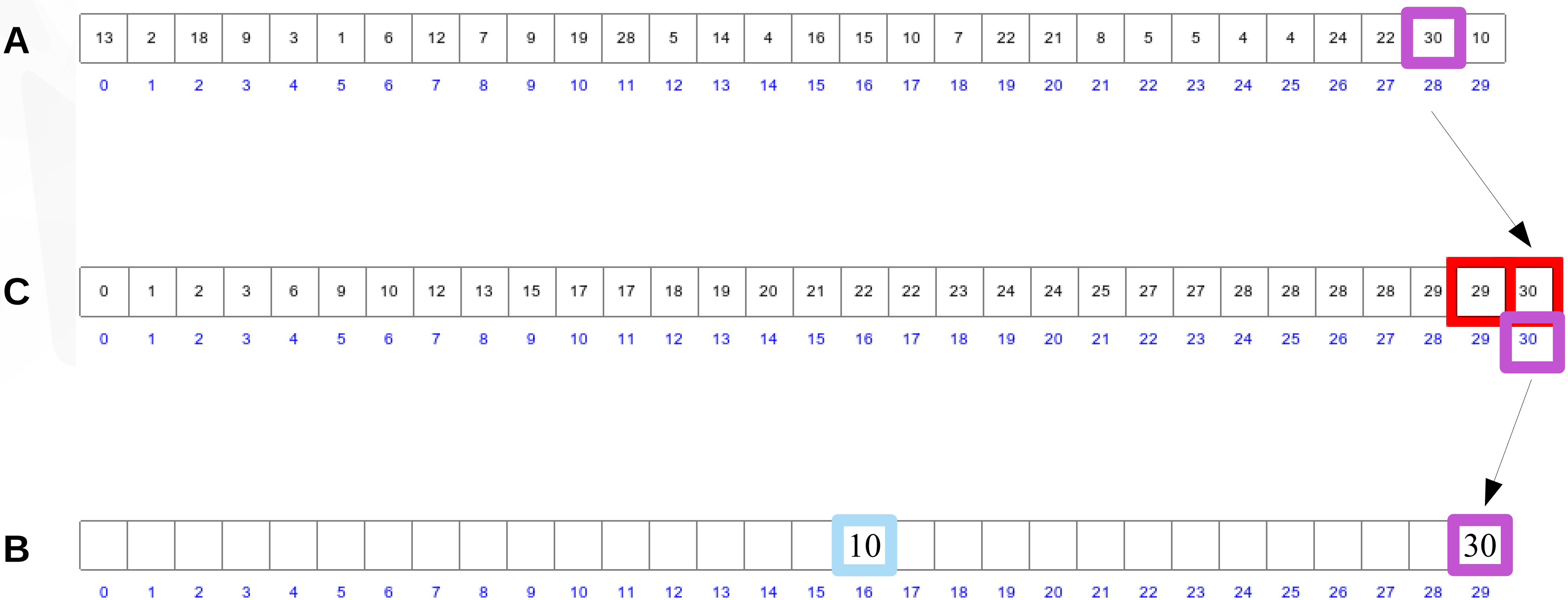
Counting sort



Counting sort



Counting sort



Counting sort

A

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
13	2	18	9	3	1	6	12	7	9	19	28	5	14	4	16	15	10	7	22	21	8	5	5	4	4	24	22	30	10

C

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	1	2	3	6	9	10	12	13	15	17	17	18	19	20	21	22	22	23	24	24	25	27	27	28	28	28	28	29	29	29

B

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
																10													30

Counting sort

Esboçe o algoritmo! (~7 min)

Pode usar vetores auxiliares:

- **C (de tamanho k)**, que guarda em **C[i]** o número de ocorrências de elementos ***i*** em **A**.

- **B (de tamanho n)**, onde se constroi o vetor ordenado.

Counting sort

```c
int CountingSort (int *A, int N)
{
	int k = encontrarK(A,N);
	int B[N];
	int C[k+1];

	for(int i=0; i<=k; i++)
		C[i] = 0;

	for(int j=0; j<N; j++)
		C[A[j]] = C[A[j]] + 1;
	for(int i=1; i<=k; i++)
		C[i] = C[i] + C[i-1];

	for(int j=N-1; j>=0; j--)
	{
		B[C[A[j]]-1] = A[j];
		C[A[j]]    = C[A[j]] - 1;
	}

	for(int i=0; i<N; i++)
		printf("%d ",B[i]);
}
```

Counting sort

```c
int encontrarK(int *A, int N)
{
        int max = A[0];
        for(int i=1; i<N; i++)
                if(max<A[i])
                        max = A[i];
        return max;
}
```

```c
int CountingSort (int *A, int N)
{
        int k = encontrarK(A,N);
        int B[N];
        int C[k+1];

        for(int i=0; i<=k; i++)
                C[i] = 0;

        for(int j=0; j<N; j++)
                C[A[j]] = C[A[j]] + 1;
        for(int i=1; i<=k; i++)
                C[i] = C[i] + C[i-1];

        for(int j=N-1; j>=0; j--)
        {
                B[C[A[j]]-1] = A[j];
                C[A[j]]    = C[A[j]] - 1;
        }

        for(int i=0; i<N; i++)
                printf("%d ",B[i]);
}
```

Counting sort

```c
int encontrarK(int *A, int N)
{
        int max = A[0];
        for(int i=1; i<N; i++)
                if(max<A[i])
                        max = A[i];
        return max;
}
```

```c
int CountingSort (int *A, int N)
{
        int k = encontrarK(A,N);
        int B[N];
        int C[k+1];

        for(int i=0; i<=k; i++)
                C[i] = 0;

        for(int j=0; j<N; j++)
                C[A[j]] = C[A[j]] + 1;
        for(int i=1; i<=k; i++)
                C[i] = C[i] + C[i-1];

        for(int j=N-1; j>=0; j--)
        {
                B[C[A[j]]-1] = A[j];
                C[A[j]]    = C[A[j]] - 1;
        }

        for(int i=0; i<N; i++)
                printf("%d ",B[i]);
}
```

Counting sort

$k + 1$

n

k

$2n$

```
int CountingSort (int *A, int N)
{
        int k = encontrarK(A,N);
        int B[N];
        int C[k+1];

        for(int i=0; i<=k; i++)
                C[i] = 0;

        for(int j=0; j<N; j++)
                C[A[j]] = C[A[j]] + 1;
        for(int i=1; i<=k; i++)
                C[i] = C[i] + C[i-1];

        for(int j=N-1; j>=0; j--)
        {
                B[C[A[j]]-1] = A[j];
                C[A[j]]    = C[A[j]] - 1;
        }

        for(int i=0; i<N; i++)
                printf("%d ",B[i]);
}
```

M: número de movimentações de registros

$$M(n) = 3n + 2k + 1 = O(n + k)$$

```c
int CountingSort (int *A, int N)
{
        int k = encontrarK(A,N);
        int B[N];
        int C[k+1];

        for(int i=0; i<=k; i++)
                C[i] = 0;

        for(int j=0; j<N; j++)
                C[A[j]] = C[A[j]] + 1;
        for(int i=1; i<=k; i++)
                C[i] = C[i] + C[i-1];

        for(int j=N-1; j>=0; j--)
        {
                B[C[A[j]]-1] = A[j];
                C[A[j]]    = C[A[j]] - 1;
        }

        for(int i=0; i<N; i++)
                printf("%d ",B[i]);
}
```

M: número de movimentações de registros

$$M(n) = 3n + 2k + 1 = O(n+k)$$

Se $k=n^2$, o algoritmo teria custo linear?

01. Atividade em aula

Dado o seguinte vetor de 7 elementos e quatro sequências de índices do vetor que representam uma permutação. Selecione todas as sequências que pertencem ao resultado da execução de um algoritmo de ordenação estável.

0	1	2	3	4	5	6
40	30	10	40	10	30	40

(a) 4 2 5 1 6 3 0

(b) 2 4 1 5 0 3 6

(c) 0 3 6 1 5 2 4

(d) 6 3 0 5 1 4 2

(e) nehuma sequência de índices pertence a um algoritmo de ordenação estável

01. Atividade em aula

Um algoritmo de ordenação é estável quando números com o mesmo valor aparecem no arranjo de saída na mesma ordem em que se encontram no arranjo

7 5 2 5

2 5 5 7 ← **Estável**
2 5 5 7 ← **Não-estável**

01. Atividade em aula

Dado o seguinte vetor de 7 elementos e quatro sequências de índices do vetor que representam uma permutação. Selecione todas as sequências que pertencem ao resultado da execução de um algoritmo de ordenação estável.

0	1	2	3	4	5	6
40	30	10	40	10	30	40

(a) 4 2 5 1 6 3 0

(b) 2 4 1 5 0 3 6

(c) 0 3 6 1 5 2 4

(d) 6 3 0 5 1 4 2

(e) nehuma sequência de índices pertence a um algoritmo de ordenação estável

02. Atividade em aula

```c
void CountinhoSort (int v[], int n) {
    int i, j, count[n], s[n];

    for (i=0; i<n; i++)
        count[i] = 0;

    for (i=0; i<n-1; i++) {
        for (j=i+1; j<n; j++) {
            if (v[i]<v[j])
                count[j] += 1;
            else
                count[i] += 1;
        }
    }

    for (i=0; i<n; i++)
        s[count[i]] = v[i];

    for (i=0; i<n; i++)
        v[i] = s[i];
}
```

v :=	62	31	84	96	19	47
count :=	0	0	0	0	0	0
i=0	3	0	1	1	0	0

O algoritmo é estável?

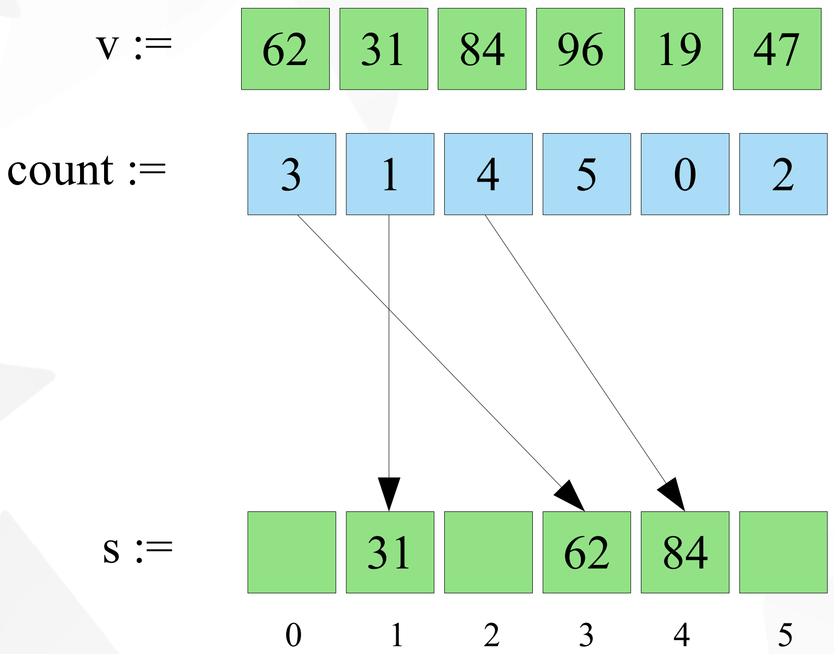
02. Atividade em aula

```
void CountinhoSort (int v[], int n) {
    int i, j, count[n], s[n];

    for (i=0; i<n; i++)
        count[i] = 0;

    for (i=0; i<n-1; i++) {
        for (j=i+1; j<n; j++) {
            if (v[i]<v[j])
                count[j] += 1;
            else
                count[i] += 1;
        }
    }

    for (i=0; i<n; i++)
        s[count[i]] = v[i];

    for (i=0; i<n; i++)
        v[i] = s[i];
}
```

v :=	62	31	84	96	19	47
count :=	0	0	0	0	0	0

i=0	3	0	1	1	0	0
i=1	3	1	2	2	0	1
i=2	3	1	4	3	0	1
i=3	3	1	4	5	0	1
i=4	3	1	4	5	0	2

02. Atividade em aula



02. Atividade em aula

```
void CountinhoSort (int v[], int n) {
    int i, j, count[n], s[n];

    for (i=0; i<n; i++)
        count[i] = 0;

    for (i=0; i<n-1; i++) {
        for (j=i+1; j<n; j++) {
            if (v[i]<v[j])
                count[j] += 1;
            else
                count[i] += 1;
        }
    }

    for (i=0; i<n; i++)
        s[count[i]] = v[i];

    for (i=0; i<n; i++)
        v[i] = s[i];
}
```

(a) O algoritmo ordena através da contagem de elementos menores e maiores de cada elemento do vetor v.

→ Afirmação correta

(b) O algoritmo é $O(n^2)$ pois são realizadas n^2 comparações (2 laços aninhados)

→ Afirmação incorreta

Counting sort

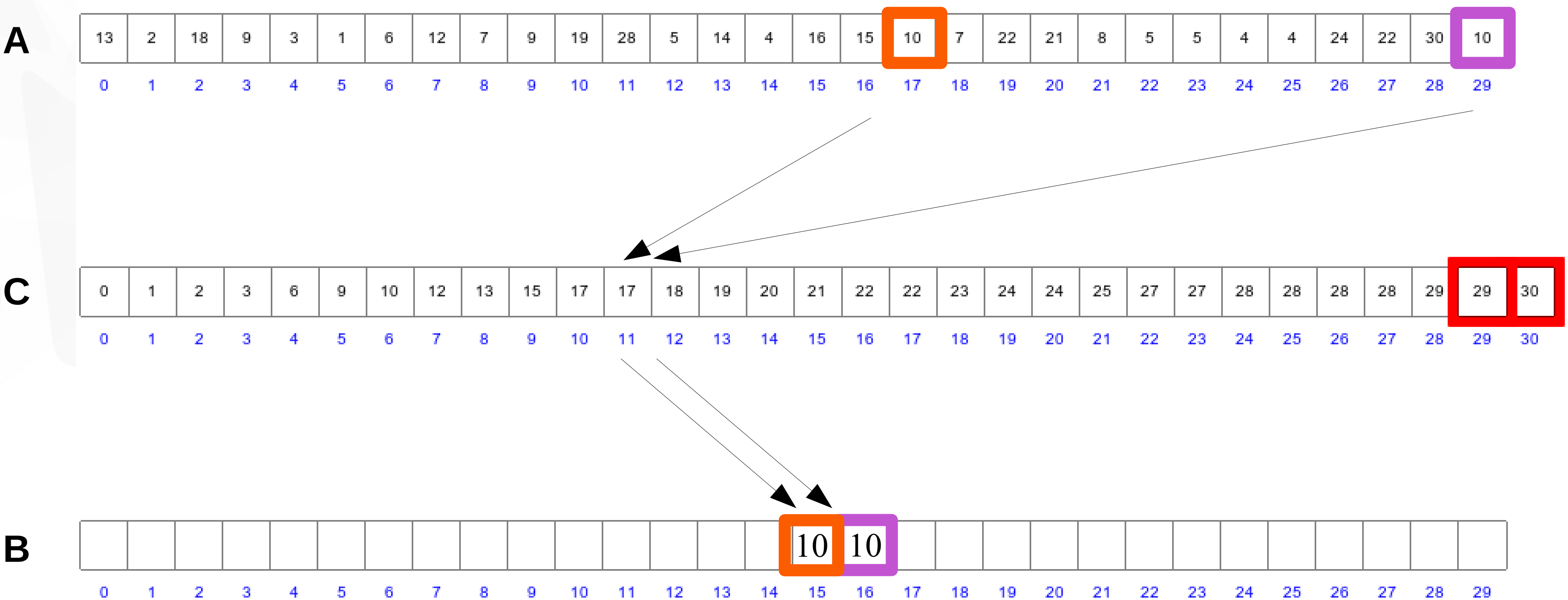
O Counting sort é um algoritmo que faz a ordenação de forma **estável**:

> **A posição relativa de elementos iguais que ocorrem no vetor ordenado permanecem na mesma ordem em que aparecem na entrada.**

→ Counting sort e Quick sort são estáveis

→ Heap sort é não-estável.

Counting sort



Radix sort

Ordena o vetor ***A*** de ***n*** números inteiros com um número constante **d** de digitos

A ordem começa pelo digito menos significativo.

RadixSort (A, d)

1. **para** $i := 1$ **até** d **faça**
2. ordene os elementos de A pelo i-ésimo dígito usando um método **estável**

Simulação: https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/RadixSort.html

Radix sort

RADIX SORT

Initial situation	89	28	81	69	14	31	29	18	39	17
After sorting on second digit	81	31	14	17	28	18	89	69	29	39
After sorting on first digit	14	17	18	28	29	31	39	69	81	89

Fonte: http://users.informatik.uni-halle.de/~jopsi/dinf205/chap8.shtml

Radix sort

A complexidade computacional, considerando o número de movimentações de registros, e o counting sort:

$$M(n) = O\Big(d(n+k)\Big)$$

- Counting sort = $O(n+k)$ ← Vantajoso quando $d < \log(n)$
- Merge sort = $O(n \log n)$

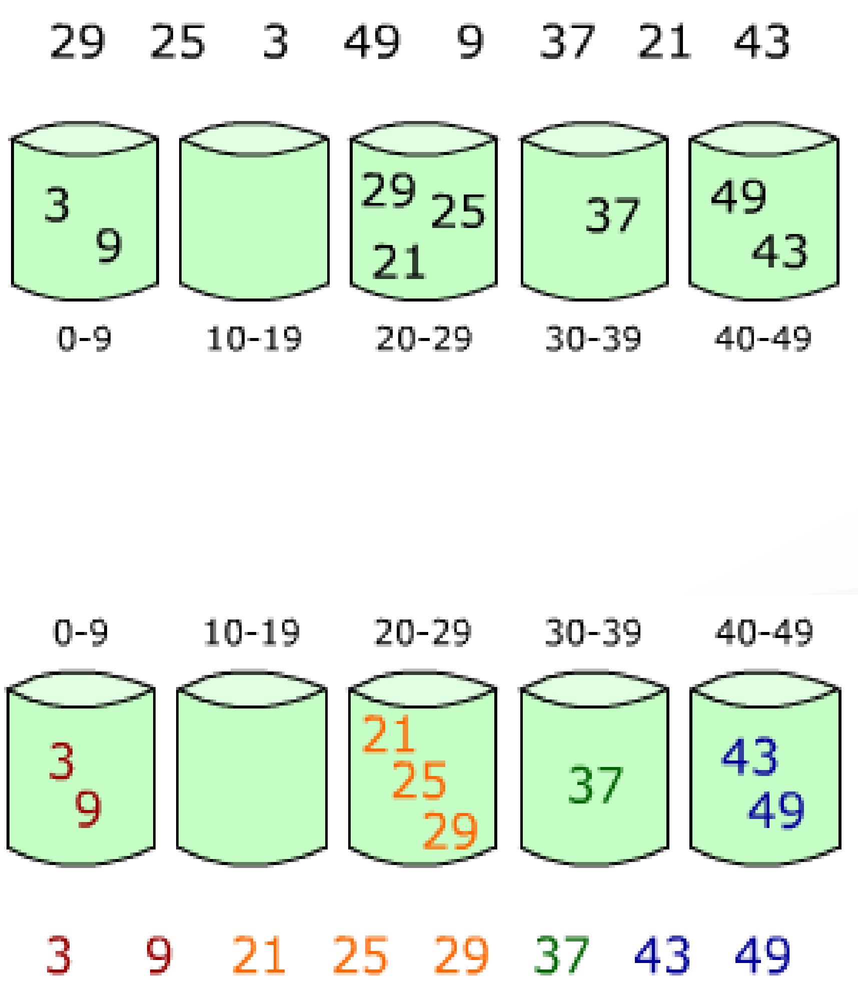
Bucket sort (Ordenação por balde)

Possui tempo linear, desde que os valores a serem ordenados sejam distribuídos uniformemente sobre o intervalo [0, 1).

Divide o intervalo [0, 1) em **n** sub-intervalos iguais, denominados buckets (baldes), e então distribui os **n** números reais nos **n** buckets.

Como a entrada é composta por dados distribuídos uniformemente, espera-se que cada balde possua, ao final deste processo, um número equivalente de elementos (usualmente 1).

Bucket sort (Ordenação por balde)



Bucket sort (Ordenação por balde)

Cada elemento A[i] satisfaz 0 ≤ A[i] < 1.

Para obter o resultado, basta ordenar os elementos em cada bucket e então apresentá-los em ordem

BucketSort(A)

1. $n :=$ comprimento de A
2. **para** $i := 1$ **até** n **faça**
3. insira $A[i]$ na lista ligada $B[\lfloor nA[i] \rfloor]$
4. **para** $i := 0$ **até** $n - 1$ **faça**
5. ordene a lista $B[i]$ com *Insertion Sort*
6. Concatene as listas $B[0], B[1], \ldots, B[n-1]$ nessa ordem.

Simulação: https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BucketSort.html

Desafio 01 – opcional – 0,5 na média final da disciplina
Envio até 09/06 (23h50-Tidia)

- Implemente o algoritmo de ordenação RadixSort.
- Seu programa não deve impor limitações sobre o número de elementos (n), nem o número de digitos (d), nem o valor de k (os números podem estar em qualquer base, por exemplo, octal, hexadecimal, etc).
- Apresentação livre de exemplos (quanto mais completo melhor).

- Apenas 2 arquivos que deverá submeter pelo Tidia:
  - Código fonte em C/C++ (RA_desafio1.c/cpp)
  - Um PDF contendo uma simples descrição do programa (não maior a 4 páginas). O formato desse relatório é livre.