Modelo Canônico de Artigo científico com abnTEX2

Equipe abnTEX2* Lauro César Araujo†

2015, v-1.9.6

Resumo

Neste trabalho, são apresentados problemas de modelagem matemática sugeridos pelo livro Equações Diferenciais Ordinárias, do autor Dennis G. Zill. O processo de modelagem é algo que pode ser bastante interdisciplinar, visto que, são utilizados conceitos das mais diversas áreas de estudo e conhecimento para estruturação e resolução do problema.

Palavras-chave: latex. abntex. editoração de texto.

Modelagem matemática: o que é?

A modelagem matemática é uma área de conhecimento que estuda a simulação de sistemas e situações reais, com o objetivo de prever como deve será o comportamento e o resultado dos mesmos. Abrange várias áreas de estudo, como física, biologia, engenharia, química, entre outros.

Umas das formas que continuam sendo muito utilizadas para a modelagem desses problemas, é a partir das equações diferenciais.

1 Desenvolvimento

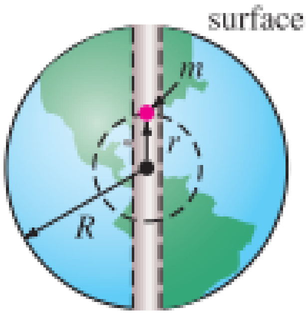
1.1 Questões propostas

1.1.1 Problema 1.1.24

Suponha que um buraco tenha sido feito através do centro da Terra, atravessando-a de ponta a ponta, e uma bola de boliche com massa m seja jogada no buraco, conforme mostra a figura abaixo. Construa um modelo matemático que descreve o movimento da bola. Em um dado instante t, seja r a distância do centro da Terra até a massa m, M a massa da Terra, M_r a massa da parte da Terra dentro de uma esfera de raio r e δ, a

* <http://www.abntex.net.br/>
† laurocesar@laurocesar.com

densidade constante da Terra.



1.1.1.1 Problematização

Devemos construir um modelo matemático que relacione o movimento que a bola de boliche, em queda, em um instante t á uma distância r do centro da terra.

1.1.1.2 Dados

$$
\begin{gathered}
m = \textit{massa da bola de boliche} \\
M = \textit{massa da Terra} \\
r = \textit{distância entre a bola e o centro da Terra} \\
M_r = \textit{massa dentro do raio} \\
R = \textit{raio da Terra} \\
\delta = \textit{densidade constante da Terra}
\end{gathered}
$$

1.1.1.3 Construção do modelo

Partindo da segunda lei de Newton, a qual afirma que a força resultante que atua sobre um corpo é proporcional ao produto da massa pela aceleração por ele adquirida. Logo:

$$F_r = m \cdot a \tag{1}$$

É conhecido também, que a aceleração pode ser obtida a partir da derivada da velocidade em relação a um instante t, que por sua vez é a derivada de um espaço r em relação a um instante t. Assim, podemos definir a aceleração de um corpo, como a derivada de segunda ordem de r em relação a t:

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} \tag{2}$$

Aplicando (2) em (1), obtém-se:

$$F_R = m \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \tag{3}$$

Para obtermos as respectivas massas, podemos valer-nos da seguinte característica intrínseca dos sólidos:

$$d = \frac{M}{V}$$

Onde d é a densidade do sólido, M a massa e V o volume do mesmo. Logo:

$$M = d \cdot V$$

Como os objetos em questão possuem formato esférico, teremos:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Assim:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \delta \rightarrow M_r = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \delta \tag{4}$$

Para fins de simplificação, podemos fazer o seguinte:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \delta \rightarrow 4\pi\delta = \frac{3M}{R^3} \tag{5}$$

Aplicando (5) em (4), obteremos:

$$M_r = \frac{M \cdot r^3}{R^3}$$

Baseado na lei de gravitação universal, formulada por Isaac Newton, podemos afirmar que força de atração gravitacional entre dois corpos é diretamente proporcional a massa dos corpos em questão e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os dois corpos.

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

A força gravitacional entre m e M_r, é dada então por:

$$F_G = G \cdot \frac{m \cdot \frac{M \cdot r^3}{R^3}}{r^2} \rightarrow F_G = G \cdot \frac{m \cdot M \cdot r^3}{R^3 \cdot r^2}$$

$$F_G = G \cdot \frac{m \cdot M \cdot r}{R^3} \tag{6}$$

Agora, pode-se fazer uma relação de igualdade entre as forças (3) e (6):

$$F_R = F_G$$

$$m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = G \cdot \frac{m \cdot M \cdot r}{R^3}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = G \cdot \frac{M \cdot r}{R^3} \tag{7}$$

A Equação 7 é o modelo matemático que relaciona as grandezas necessárias, a uma distância r e um instante t.