Matriz Inversa

Matheus Pereira
Instituto de Física, Universidade de São Paulo
(Dated: September, 2022)

Métodos básicos de determinação da matriz inversa

PACS numbers:

I. DETERMINAÇÃO DA INVERSA DE UMA MATRIZ 2×2

Uma matriz A^{-1} é dita ser a inversa de A se satisfazer a condição

$$AA^{-1} = 1$$

onde 1 é a matriz identidade. Consideremos um exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz A^{-1} deve ser tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando

$$a + 4c = 1 \tag{1}$$

$$b + 4d = 0 \tag{2}$$

$$2a + 3c = 0 \tag{3}$$

$$2b + 3d = 1 \tag{4}$$

Olhando para a terceira equação vemos que $2a = -3c$, e portanto $a = -3c/2$. Podemos substituir esse valor de a na primeira equação e com isso teremos uma equação só c.

$$-\frac{3c}{2} + 4c = 1$$

Resolva essa equação para c. Você deve encontrar o seguinte valor

$$c = \frac{2}{5}$$

Uma vez que sabemos c o valor de a também pode ser determinado, já que sabemos que $a = -3c/2$, portanto

$$a = -\frac{3}{5}$$

Verifique todos os resultados!

Agora devemos usar a segunda e a quarta equação para descobrir b e d, note que da segunda equação temos que $b = -4d$, se multiplicarmos essa equação por 2 obtemos $2b = -8d$. Agora que sabemos o valor de $2b$ podemos substituir na equação (4)

$$-8d + 3d = 1$$

$$d = -5$$

E o valor de b também está determinado pois sabemos que $b = -4d$

$$b = 20$$

Descobrimos a matriz inversa!

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/5 & 20 \\ 2/5 & -5 \end{bmatrix}$$

Este método é particulamente direto quando estamos lidando com matrizes 2×2 mas pode ser um tanto quanto desagradável para matrizes 3×3.

II. DETERMINAÇÃO DA INVERSA DE UMA MATRIZ 3×3

Consideremos como exemplo a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Primeiramente devemos calcular o determinante dessa matriz. Faça essa conta e verifique que $\det(A) = 1$.

O próximo passo é calcular o determinante de 3 "submatrizes" de A, as chamadas matrizes dos cofatores. Veja o elemento $a_{11} = 1$ dessa matriz, vamos eliminar a primeira linha e a primeira coluna.

O determinante dessa "submatriz" é

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24$$

Agora vamos eliminar a linha e a coluna do elemento $a_{12} = 2$, isto é, a primeira linha e terceira coluna, e o determinante da matriz que sobre é

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

Por último vamos eliminar a linha e a coluna do elemento $a_{13} = 3$, isto é, a primeira linha e a terceira coluna, assim o determinante da matriz que sobre é

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -5$$

Ufa!! Mas o trabalho não acabou ... ainda devemos eliminar as linhas e as colunas dos outros 6 elementos e calcular 6 determinantes!

Eliminemos a linha e a coluna do elemento $a_{21} = 0$, isto é, a segunda linha e primeira coluna, o determinante da matriz que sobre é

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

Eliminemos a linha e a coluna do elemento $a_{22} = 1$, isto é, a segunda linha e a segunda coluna, o determinante da matriz que sobre é

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15$$

Eliminemos a linha e a coluna do elemento $a_{23} = 4$, isto é, a segunda linha e a terceira coluna, o determinante da matriz que sobre é

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4$$

Eliminemos a linha e a coluna do elemento $a_{31} = 5$, isto é, a terceira linha e a primeira coluna, o determinante da matriz que sobre é

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

Eliminemos a linha e a coluna do elemento $a_{32} = 6$, isto é, a terceira linha e a segunda coluna, o determinante da matriz que sobre é

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

Eliminemos a linha e a coluna do elemento $a_{33} = 0$, isto é, a terceira linha e a terceira coluna, o determinante da matriz que sobre é

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Agora sim! com todos esses determinantes em mão podemos montar a matriz dos cofatores, que nada mais é do que a matriz formado por todos esses determiantes.

$$\mathrm{COF} = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

CUIDADO: note que eu não simplesmente coloquei os determinantes na matriz, mas eu também mudei o sinal de alguns, perceba que fiz isso intercaladamente, isto é, mante o sinal -24, mudei o sinal de -20 para 20, depois mante o sinal -5, e mudei o sinal de -18 para 18. Faça sempre assim, mantenha o sinal do primeiro, troque do próximo, mantenha o do seguinte, depois troque e assim por diante.

A parte desagradável já passou, agora devemos tomar a matriz transposta de COF, isto é, devo trocar as linhas pelas colunas

$$\mathrm{COF}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pronto! a matriz inversa é igual à matriz $\mathrm{COF}^{\mathrm{T}}$ dividida pelo determinante da matriz A (lembra do determinante da matriz A? Foi a primeira coisa que calculamos, $\det(A) = 1$). No nosso casso o determinante de A é igual a 1 e dividir por 1 não altera em nada a matriz, se fosse diferente de 1 você deveria dividir cada elemento da matriz $\mathrm{COF}^{\mathrm{T}}$ pelo valor do determinante, como nosso caso o $\det(A) = 1$ a matriz inversa é simplesmente

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

O mundo seria muito mais simples se só precisássemos lidar com matriz 2×2, não é mesmo? Felizmente existem computadores que fazem essas contas por nóis, matrizes são muuuuuito importantes na vida real mas nós não perdemos tempo fazendo essas contas, imagina como seria calcular a inversa de uma matriz 6×6, até bons computadores demoram para fazer esse tipo de cálculo.

Enfim, estude bastante, ao menos a ponto de se certificar que consegue fazer essas contas e sinta-se livre para me escrever caso necessite de ajuda!

Meus contatos:

matheus.coutinho9@hotmail.com
matheus.coutinho9@usp.br