Teoria de Grupos e Tensores

Matheus Pereira Coutinho
Instituto de Física da USP
matheus.coutinho9@usp.br

Sumário

1 Monóides, Semigrupos e Grupos

1.1 Definições Básicas

Antes de definir as estruturas algébricas básicas de monóides, semigrupos e grupos, é necessário introduzir algumas noções, mais elementares ainda, são essas, conjuntos em mapas.

Definição **[Conjunto]**

Um conjunto é uma coleção de elementos, e para se definir um conjunto específico é necessária uma regra que me permita verificar se um determinado objeto pertence ao conjunto ou não.

Definição **[Mapa]**

Consideremos dois conjuntos X e Y. Um mapa é uma regra que associa um elemento $y \in Y$ a cada $x \in X$

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$
$$\varphi : x \mapsto \varphi(x)$$

O conjunto X é chamado de Domínio do mapa e Y de contradomínio do mapa. A imagem do mapa é o conjunto de elementos de Y, tais que $\varphi(x) = y$

Algumas definições

- Um mapa é dito ser injetivo se, quando $x \neq x' \;\Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(x')$
- Um mapa é dito ser sobrejetivo se, para cada elemento de $y \in Y$ existe um $x \in X$, tal que $\varphi(x) = y$
- Um mapa é dito ser bijetivo quando ele é injetivo e sobrejetivo

Dadas as definições acima, podemos definir um tipo especial de mapa, que também tem um nome particular, o produto ou operação.

Definição **[Produto]**

Consideremos um conjunto X qualquer e o conjunto $X \times X$ chamado de produto cartesiano, que o é conjunto formado por pares de elementos de X, ou seja, $X \times X := \{(a, b), a, b \in X\}$. Um **produto** em X é um mapa da forma

$$\varphi : X \times X \longrightarrow X$$
$$\varphi : (a, b) \longmapsto \varphi(a, b)$$

em outros termos, é um mapa que associa um elemento de X a cada par de elementos de X.

Por vezes, $\varphi(a, b)$ é denotado, simplesmente, por $a \star b$ ou $a \cdot b$

Dados os ingrediente, podemos definir as estruturas algébricas mais elementares

1.2 Estruturas Algébricas

Definição [Semigrupo]

Um **semigrupo** é um conjunto não-vazio S dotado de um produto, ou seja, um mapa da forma $\varphi : S \times S \longrightarrow S$, tal que

$\varphi(\varphi(a,b),c) = \varphi(a,\varphi(b,c)) \quad \forall a,b,c \in S$ (Associatividade)

Ou, em notação simplificada $\quad (a \star b) \star c = a \star (b \star c))$

Deste modo, o semigrupo é representado pelo par, conjunto, produto $(S, \star)$

Definição [Monóide]

Um **monóide** é um conjunto não-vazio M dotado de um produto, ou seja, um mapa da forma $\varphi : M \times M \longrightarrow M$, tal que

- $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)) \quad \forall a,b,c \in M$ (Associatividade)
- Existe um (único) elemento $e \in M$ tal que $e \star a = a \star e = a \ \forall a \in M$ (elemento neutro)

Deste modo, o monóide é representado pelo par, conjunto, produto $(M, \star)$

Definição [Grupo]

Um **grupo** é um conjunto não-vazio G dotado de um produto, ou seja, um mapa da forma $\varphi : G \times G \longrightarrow G$, tal que

- $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)) \quad \forall a,b,c \in G$ (Associatividade)
- Existe um (único) elemento $e \in M$ tal que $e \star a = a \star e = a \ \forall a \in G$ (elemento neutro)
- Para cada $a \in G$ exite um (único) a^{-1} tal que $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e \quad \forall a \in G$ (elemento inverso)

Deste modo, o grupo é representado pelo par, conjunto, produto $(G, \star)$

★ Um grupo é dito ser abeliano se o seu produto é comutativo, ou seja, $a \star b = b \star a \quad \forall a,b \in G$

Exemplos:

► O conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ de todas as matrizes reais $n \times n$ com determinante não nulo (e, portanto, inversíveis) é um grupo em relação à operação de produto usual de matrizes. $GL(n, \mathbb{R})$ é não Abeliano se $n > 1$

► Sendo X um conjunto não-vazio qualquer e denotamos por $S = X^X$ o conjunto de todos os mapas $\varphi : X \longrightarrow X$, S então é um monóide com o produto sendo a composição de mapas e o elemento neutro sendo o mapa ou função identidade $id(x) = x \ , \quad \forall x \in X$.

► Sendo X um conjunto não-vazio qualquer e denotamos por $S = X^X$ o conjunto de todos os mapas bijetores $\varphi : X \longrightarrow X$, S então é um grupo não abeliano com o produto sendo a composição de mapas, o elemento neutro sendo o mapa ou função identidade $id(x) = x \ , \quad \forall x \in X$ e o elemento inverso é o mapa inverso φ^{-1}. Esse grupo é chamado de grupo de permutações de X e é denotado por $Perm(X)$

► O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com a soma usual de números reais é um grupo abeliano, sendo 0 o elemento neutro e $-a$ o elemento inverso de cada elemento a. Este grupo é denominado de grupo aditivo dos reais $(\mathbb{R}, +)$

2 Homomorfismo, Grupo do Círculo e Semigrupos

3 Corpos, Espaços Vetoriais, Álgebras e Álgebras de Lie

Definição **[Corpos]**

Um **corpo** é um conjunto não vazio dotado de dois mapas, ambos de forma $f : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, denominados de soma e produto, e denotados por $+$ e $\cdot$, respectivamente, tais que valem as seguintes propriedades para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$

- $a + b = b + a$
- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a \ , \quad \forall a \in \mathbb{K}$
- Para cada $a \in \mathbb{K}$ existe um elemento b tal que $a + b = 0$. Frequentemente esse elemento é denotado por $-a$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \ , \quad \forall a \in \mathbb{K}$
- Para cada elemento a existe um elemento b tal que $a \cdot b = 1$. Frequentemente esse elemento é denotado por a^{-1}
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Com isso, podemos representar um corpo pela tripla $(\mathbb{K}, +, \cdot)$

★ É comum, especialmente em fisica, chamar os elementos de um corpo de escalares.

★ Os corpos utilizados em física são, na grande maioria dos casos, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$

3.1 Espaço Vetorial

Definição **[Espaço Vetorial]**

Um **espaço vetorial** sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto V não vazio dotado de dois mapas, de formas $\varphi : V \times V \longrightarrow V$ e $\psi : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$, cujos nomes são soma vetorial e produto por escalar, respectivamente, tais que valem as seguinte propriedades para todos $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$

- $u + v = v + u$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- Existe um elemento $0 \in V$ tal que $u + 0 = 0 + u = u \ , \quad \forall u \in V$
- Para cada $u \in V$ existe um elemento v tal que $u + v = 0$. Frequentemente esse elemento é denotado por $-u$
- $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$
- Existe um único elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $u \cdot 1 = 1 \cdot u = u \ , \quad \forall u \in V$
- $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
- $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$

Com isso, podemos representar um espaço vetorial pela tripla $(V, +, \cdot)$

★ Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores.

Exemplos:

▶ Se $\mathbb{K}$ é um corpo, então ele também é um espaço vetorial sob as ele mesmo e com as operações nele definidas.

▶ Um exemplo muito relevante me física é o conjunto $\mathbb{R}^n := \{(x_1, ..., x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$ com as operações soma

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

e produto por escalar

$$a \cdot (x_1, ..., x_n) = (a \cdot x_1, ..., a \cdot x_n)$$

Frequentemente um elemento de $\mathbb{R}^n$ é denotado por uma matriz coluna

$$(x_1, ..., x_n) \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

▶ O mesmo exemplo do espaço $\mathbb{R}^n$ também pode ser considerado para o espaço $\mathbb{C}^n$

▶ Um exemplo de fundamental importância é o espaço vetorial formado pelo conjunto de funções $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um conjunto qualquer, e com a soma vetorial e produto por escalar definidos por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ , \quad \forall x \in X$$
$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$$

Esse exemplo demonstra o quão amplo é o conceito de espaço vetorial.

3.2 Álgebra

Definição **[Álgebra]**

Uma álgebra é um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ e com um terceiro mapa, denominado de produto da álgebra, e de forma $\varphi : V \times V \longrightarrow V$. A notação para esse produto será, a priori, $\varphi(u, v) := u \times v$. Tal produto deve ainda satisfazer os seguintes requerimentos para todos $u, v, w \in V$

$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w \quad \text{e} \quad (u + v) \times w = u \times w + v \times w$$
$$a \cdot (u \times v) = (a \cdot u) \times v = u \times (a \cdot v) \ , \quad \forall a \in \mathbb{K}$$

★ Uma álgebra é dita ser comutativa se $u \times v = v \times u$

★ Uma álgebra é dita ser associativa se $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$

Um exemplo de álgebra, muito utilizada em física, é a a álgebra do produto vetorial, que é o espaço vetorial $\mathbb{R}^3 := \{(x_1, x_2, x_3), x_i \in \mathbb{R}\}$ com o produto da álgebra

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

Propriedades notáveis dessa álgebra,em partícular, são

$$u \times v = -v \times u$$

$$u \times (v \times w) \neq (u \times v) \times w$$

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$$

A ultima propriedade é chamada de identidade de Jacobi.

Constantes de Estrutura

Se A é uma álgebra de dimensão n, portanto é também um espaço vetorial, podemos considerar o conjunto $B := \{b_1, ..., b_n\}$. Com base na noção de base da álgebra, sabemos que qualquer elemento dela pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos da base. Em especial, podemos escrever o produto de dois elementos da base como combinação dos elementos da base

$$b_i \cdot b_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k b_k$$

Os coeficientes c_{ij}^k são denominados constantes de estrutura da álgebra A na base B. Por meio dessas constantes nós podemos determinar o produto de dois elementos da álgebra, pois dados dois elementos u e v escritos na base B.

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i b_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{j=1}^{n} v_j b_j$$

O produto $u \times v$ será

$$u \times v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k$$

com

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j c_{ij}^k$$

E, portanto

$$u \times v = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j c_{ij}^k \right) b_k$$

Nosso próximo passo definir uma álgebra de Lie. Mas antes disso é preciso falar de notação, pois o o produto em álgebras de Lie é denotado por $[u, v]$

3.3 Álgebra de Lie

Definição **[Álgebras de Lie]**

Uma álgebra L é dita ser uma álgebra de Lie se satisfazer as seguintes condições

- $\forall a \in L \quad [a, a] = 0$
- $\forall a, b, c \in L \quad [a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0$ (identidade Jacobi)

Alternativamente, podemos escrever a primeira condição como

$$[a, b] = -[b, a] \quad \text{(anticomutatividade)}$$

► Como já apresentado, é direta a conclusão de que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3 := \{(x_1, x_2, x_3), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$ com o produto vetorial é um exemplo de álgebra de Lie

Álgebra Associativa

Dada uma álgebra A associativa, isto é, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \;\; \forall a, b, c \in A$. Como por exemplo a álgebra formado pelo conjunto de matrizes reais $n \times n$, denotado por $Mat(\mathbb{R}, n)$, com o produto usual de matrizes. É sempre possível construir, a partir dela, uma álgebra de Lie. Para tanto, é necessário definir o produto da álgebra como sendo o comutador

$$[a, b] = ab - ba$$

É fácil ver que, com esse novo produto definido, as condições que definem uma álgebra de Lie são naturalmente satisfeitas

$$[a, a] = aa - aa = 0$$

$$\begin{aligned} &[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] \\ &\qquad = a(bc - cb) - (bc - cb)a + c(ab - ba) - (ab - ba)c + b(ca - ac) - (ca - ac)b \\ &\qquad = abc - acb - bca + cba + cab - cba - abc + bac + bca - bac - cab + acb \\ &\qquad = 0 \end{aligned}$$

É notável, que a última propriedade só é satisfeita se a álgebra for associativa

Definição **[Álgebra de Poisson]**

Definição **[Álgebra de Jordan]**

Definição **[Álgebra de Grassmann]**

Definição **[Álgebra de Clliford]**

4 Relações, Relações de Equivalência e Classes de Equivalência

4.1 Relação

Definição **[Relação]**

Dados dois conjuntos não vazios quaisquer A e B, o produto cartesiano entre esses dois conjuntos é simplesmente o conjunto formado por todos os pares ordenados de elementos de A e B, denotado por $A \times B := \{(a, b), a \in A, b \in B\}$. Uma **relação** R entre A e B é simplesmente um subconjunto de $A \times B$. $R \subset A \times B$

4.2 Relação de Equivalência

Definição **[Relação de Equivalência em um Conjunto]**

Consideremos A um conjunto não vazio qualquer e o produto cartasiano $A \times A := \{(a, a'),\ a, a' \in A\}$. Uma **relação de equivalência** em A é uma relação $E \subset A \times A$, tal que

- $(a, a) \in E$, $\forall a \in A$ (reflexividade)
- se $(a, b) \in E$, então $(b, a) \in E$ (simetria)
- se $(a, b) \in E$ e $(b, c) \in E$, então $(a, c) \in E$ (transitividade)

Se um par (a, b) pertence a uma relação de equivalência E então dizemos que a é equivalente a b seguindo E. Uma notação comum é $a \sim b$. Segunda essa notação as propriedades que uma relação deve possuir para ser considerada uma relação de equivalência escrevem-se

- $a \sim a$ para todo $a \in A$ (Reflexividade)
- Se $a \sim b$ então $b \sim a$ (simetria)
- Se $a \sim b$ e $b \sim c$ então $a \sim c$ (transitividade)

Exemplo:

Consideremos V um espaço vetorial e U um subespaço qualquer de V

★ Só para se ter intuição, o exemplo acima pode ser pensado, simplesmente, considerando V o espaço $\mathbb{R}^2$ e U os pontos que pertencem à uma reta que cruza a origem, por exemplo.

Consideremos a relação $E = \{(a, b),\ a, b \in V,\ b - a \in U\}$, isto é, $a \sim b$ se $b - a \in U$

Chequemos se as condições são satisfeitas

$a \sim a$ se $a - a \in U$, e portanto se $0 \in U$. Essa condição é satisfeita, pois U contém o elemento neutro (do contrário não seria subespaço)

$a \sim b$ implica que $b - a \in U$ e $b \sim a$ implica que $a - b \in U$. Mas $a - b = -(b - a)$ e $b - a \in U$, e como trata-se de um subespaço vetorial um elemento multiplicado por um escalar também é um elemento do subespaço. Logo $a - b \in U$

$a \sim b\ \Rightarrow b - a \in U$ e $b \sim c\ \Rightarrow c - b \in U$. $a \sim c$ implica que $c - a \in U$, para ver com clareza que $c - a \in U$ basta considerar $b - a = u_1 \in U$ e $c - b = u_2 \in U$, se u_1 e u_2 pertencem a U, certamente a subtração deles também pertence a U. Logo, $u_2 - u_1 = c - b - (b - a) = c - a \in U$

4.3 Classe de Equivalência

Definição **[Classe de Equivalência]**

Sendo A um conjunto e $E \subset A \times A$ uma relação de equivalência em A, definimos, para cada $a \in A$, sua **classe de equivalência** como sendo o conjunto de todos os elementos que são equivalente a a, isto é

$$E(a) := \{a' \in A \text{ tal que } (a, a') \in E\}$$

Uma outra notação para a classe de equivalência de a é $[a]$

$$[a] = \{a' \in A,\ a' \sim a\}$$

★ É notável que, pela reflexividade, um elemento a sempre é equivalente a ele mesmo, $a \sim a$, e, por isso uma classe de equivalência nunca é um conjunto vazio, pois contém, no mínimo, o próprio elemento.

★ Com base na observação acima, temos que, o conjunto A pode ser escrito a partir da união das classes de equivalência dos seus elementos

$$A = \bigcup_{a \in A} [a]$$

★ Além do mais, se $a, b \in A$ e $a \sim b$, então $[a] = [b]$. Isso é trivial, pois se $[a] \neq [b]$, então existiria algum elemento, digamos c, que pertence a $[a]$ mas não pertence a b ($c \in [a]$ e $c \notin [b]$) , isso significa que esse suposto elemento é equivalente a a mas não é equivalente a b, essa conidção, porém, não pode ser verdade, uma vez que, pela transitividade, se $c \sim a$ e $a \sim b$, então, necessariamente, $c \sim b$, e portanto $c \in [b]$. Logo, as classes de equivalência de dois elementos equivalentes tem de ser iguais.

★ Segue-se disso que, se $a \nsim b$ então $[a] \cap [b] = \varnothing$

5 Relações de Equivalência e o Espaço Quociente

5.1 Espaço Vetorial Quociente

Notação: O conjunto de todas as classes de equivalência em um conjunto A, segundo uma relação $\sim$ é denotado por:

$$A/\sim = \{[a], a \in A\}$$

Definição **[Espaço Vetorial Quociente]**

Consideremos V um espaço vetorial, U um subespaço de V, a relação de equivalência, $x \sim y$ se $y - x \in U$ e o conjunto das classes de equivalência $V/\sim = V/U = \{[x], \quad x \in V\}$. O **espaço quociente** é um espaço vetorial formado pelo conjunto V/U com a soma definida por

$$[x] + [y] := [x + y]$$

e o produto por escalar

$$a \cdot [x] := [a \cdot x]$$

6 Grupo de Permutações e Grupos Matriciais

6.1 Grupo de Matrizes

Notação: Conjuntos de matrizes reais e complexas $n \times n$ são denotados por $Mat(\mathbb{R}, n)$ e $Mat(\mathbb{C}, n)$, respectivamente.

★ Ambos os conjuntos acima são grupos abelianos sob a operação de soma usual de matrizes, mas não sob a operação de multiplicação usual de matrizes, pois nem toda matriz possui elemento inverso.

★ Se considerarmos agora o subconjunto de $Mat(\mathbb{R}, n)$ formado por matrizes inversíveis, então esse conjunto é um grupo não abeliano sob a operação de multiplicação usual de matrizes. Esse grupo é denominado de grupo linear real $GL(\mathbb{R}, n)$. Analogamente, tem-se o grupo linear complexos $GL(\mathbb{C}, n)$. Uma forma de garantir que uma matriz tenha inversa é dizendo que seu determinante é não nulo, com isso, podemos escrever os grupos lineares como

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat(n, \mathbb{R}), det(A) \neq 0\} \quad \text{e} \quad GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in Mat(n, \mathbb{C}), det(A) \neq 0\}$$

★ Além destes, devido à propriedade do determinante $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$, o produto de duas matrizes com determinante 1 também possui determinante igual a 1, por isso podemos forma um subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$, formado pelas matrizes de determinante 1

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat(n, \mathbb{R}), det(A) = 1\}$$

Analogamente, para matrizes complexas

$$SL(n, \mathbb{C}) := \{A \in Mat(n, \mathbb{C}), det(A) = 1\}$$

Esses grupos são chamados de grupos lineares especiais

6.2 Grupo de Heisenberg $GH_3(\mathbb{C})$

O grupo de Heisenberg é composto pelo conjunto de matrizes da forma

$$H(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com a operação usual de multiplicação de matrizes, e $a, b, c \in \mathbb{C}$

★ É fácil ver que a matriz identidade está no grupo, pois $H(0, 0, 0) = \mathbb{I}$, e é o elemento neutro

$$H(a, b, c) \cdot H(x, y, z) = H(a + x, b + y, c + z + a \cdot y) = H(a, b, c)$$

$$\begin{aligned} &a + x = a \Rightarrow x = 0 \\ &b + y = b \Rightarrow y = 0 \\ &c + z + ay = c \Rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

$$e = H(0,0,0)$$

Além disso, o produto de duas matrizes do grupo de Heisenberg é

$$H(a,b,c) \cdot H\left(a', b', c'\right) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(a,b,c) \cdot H\left(a', b', c'\right) = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & c'+a\cdot b'+c \\ 0 & 1 & b'+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(a,b,c)H\left(a', b', c'\right) = H\left(a+a', b+b', c+c'+ab'\right)$$

A inversa de uma matriz $H(a,b,c)$ é dada por

$$H(a,b,c)^{-1} = H(-a,-b,ab-c) = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pois

$$H(a,b,c) \cdot H(x,y,z) = H(0,0,0)$$

$$H(a+x, b+y, c+z+a\cdot y) = H(0,0,0)$$

$$\begin{aligned} x &= -a \\ y &= -b \\ z &= a\cdot b - c \end{aligned}$$

$$H^{-1}(a,b,c) = H(-a,-b,ab-c)$$

★ Podemos identificar um subgrupo do grupo de Heisenberg formado pelas matrizes

$$H_1(t) := H(t,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_2(t) := H(0,t,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_3(t) := H(0,0,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_j(t) H_j(t') = H_j(t+t')$$

Cada matriz $H_j(t)$ gera um subgrupo uniparamétrico. Que podem ser representados a partir de seus geradores

$$h_j := \left.\frac{d}{dt} H_j(t)\right|_{t=0}$$

6.3 Exponenciação de Matrizes

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

$$e^0 = 1$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

7 Grupo de Heisenberg, Subgrupos Uniparamétricos

8 Grupos Associados a Formas Lineares e Sesquileares

8.1 Formas

Definição **[Forma Bilinear]**

Seja V um espaço vetorial real, um mapa do tipo $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega(u,v) \in \mathbb{R},\ \forall\ u,v \in V$$

é dito ser uma forma bilinear se

- $$\omega\left(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v\right) = \alpha_1 \omega\left(u_1 v\right) + \alpha_2 \omega\left(u_2, v\right)$$
- $$\omega\left(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\right) = \beta_1 \omega\left(u, v_1\right) + \beta_2 \omega\left(u, v_2\right)$$

Exemplo:

$V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

$$x = (x_1, x_2) \quad y = (y_1, y_2)$$

$$\omega(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$\omega(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

$$\omega(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

★ Se $\omega(x,y) = \omega(y,x)$, então ω é dito ser uma forma simétrica
★ Se $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$, então ω é dito ser uma forma alternante

Definição **[Produto Escalar]**

$\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

- ω é uma forma bilinear
- ω é simétrica
- $\omega(x,x) \geqslant 0$ e se $\omega(x,x) = 0\ \Rightarrow x = 0$

Exemplo:

$\mathbb{R}^n = \{\left(x_1, \ldots, x_n\right), x_n \in \mathbb{R}\} \equiv V$

$$x \equiv \left(x_1, \ldots, x_n\right), \quad y \equiv \left(x_1, \ldots, y_n\right)$$

$$\omega(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Definição **[Forma Sesquilineares]**

8.2 Grupos que mantém invariantes formas bilineares

Seja V um espaço vetorial real e ω um forma bilinear em V, isto é, para todo $u, v \in V$

$$\omega(u,v) \in \mathbb{R}$$

Consideremos $\mathrm{GL}(V)$ o conjunto de operadores lineares inversíveis (bijetores) agindo em V

$$\omega(Ou, Ov) = \omega(u,v)$$

O conjunto de matrizes $O \in \mathrm{GL}(v)$ que mantém ω invariante forma um grupo, podemos ver isso notando as seguintes propriedades

- A identidade pertence ao conjunto $\omega(\mathbb{1}u, \mathbb{1}v) = \omega(u,v)$
- Dados O_1 e O_2, tais que $\omega(O_1u, O_1v) = \omega(u,v)$ e $\omega(O_2u, O_2v) = \omega(u,v)$, então o produto também mantém a forma ω invariante

$$\omega\left(O_1O_2u, O_1O_2v\right) = \omega\left(O_2u, O_2v\right) = \omega(u,v)$$

- Se O mantém ω invariante, então existe um O^{-1} também mantém ω invariante

$$\omega(O^{-1}u, O^{-1}v) = \omega(u,v)$$

$$\omega(OO^{-1}u, OO^{-1}v) = \omega(\mathbb{1}u, \mathbb{1}v) = \omega(u,v)$$

Representamos esse grupo por

$$\Omega(V,\omega) = \{O \in \mathrm{GL}(V), \omega(Ou, Ov) = \omega(u,v) \forall u, v \in V\}$$

Denominado Grupo de invariância da forma bilinear ω

★ As mesmas noções se extendem naturalmente para formas sesquilineares

8.3 Grupos Ortogonais

Consideremos $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), x_k \in \mathbb{R}\}$ e o produto escalar

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{m} x_k x_k$$

Qual é o grupo de matrizes que mantém essa forma invariante?
$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

$$\Omega(\ \langle\ ,\ \rangle\ ; \mathbb{R}^n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}\}$$

Em ordem de vizualizar a forma das matrizes A , tem se a seguinte identidade

$$\langle x, My\rangle = \left\langle M^T x, y\right\rangle$$

$$\left(M^T\right)_{ij} = M_{ji}$$

Prova:

$$\langle x, My\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i (My)_i$$

$$(My)_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} y_i$$

$$\langle x, My\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i M_{ij} y_j$$

$$\langle x, My\rangle = \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{m} x_i M_{ij}$$

A segunda soma pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{m} x_i M_{ij} = \sum_{i=1}^{m} M_{ij} x_i$$

$$M_{ij} = \left(M^T\right)_{ji}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i M_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \left(M^T\right)_{ji} x_i = (M^T x)_j$$

$$\langle x, My\rangle = \sum_{j=1}^{m} y_j \left(M^T x\right)_j = \sum_{j=1}^{m} \left(M^T x\right)_j y_j$$

$$\langle x, My\rangle = \left\langle M^T x, y\right\rangle$$

Agora utilizemos a identidade para demosntrar a forma das matrizes $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tais que $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$\langle Ax, Ay\rangle = \left\langle A^T A x, y\right\rangle$$

$$\left\langle A^T A x, y\right\rangle - \langle x, y\rangle = 0$$

$$\left\langle \left(A^T A - \mathbb{1}\right) x, y\right\rangle = 0$$

$$\langle Tx, y\rangle = 0 \quad \forall x, y \Rightarrow \quad T = 0$$

$$\langle Tx, Tx\rangle = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$A^T A - \mathbb{1} = 0$$

$$A^T A = 1 \rightarrow A^T = A^{-1}$$

Com isso, concluímos que o grupo de matrizes que mantém o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$ invariante é o grupo de matrizes que possuem a transposta como inversa

$$\Omega(\ \langle\ ,\ \rangle\ ; \mathbb{R}^n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), A^{-1} = A^T\}$$

As matrizes com essa propriedade são chamadas de matrizes ortogonais.

★ Uma notação mais comum para o grupo das matrizes ortogonas é

$$O(n) = \left\{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), A^{-1} = A^T\right\}$$

Uma propriedade importante das matrizes ortogonais é a seguinte

Se $A^{-1} = A^T$, então $AA^T = \mathbb{1}$

$$\det(A) \cdot \det(A^T) = 1$$

$$(\det(A))^2 = 1$$

Segue-se disso que, se $A \in O(n)$ então $\det(A) = \pm 1$

Podemos definir um subgrupo de $O(n)$ composto pelas matrizes de $O(n)$ que possuem determinante igual a 1, isto é

$$SO(n) = \{A \in O(n), \det(A) = 1\}$$

Esse grupo é denominado grupo das matrizes ortogonais especiais de ordem n

9 Grupo Ortogonal Especial SO(2)

9.1 Propriedades de SO(2)

Consideremos o grupo SO(2) como sendo

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{\mathrm{R} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid \mathrm{R}^{-1} = \mathrm{R}^T, \det \mathrm{R} = 1\right\}$$

Como as matrizes R tem ordem 2 eles tem a seguinte a forma

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ao passo que sua inversa tem a seguinte forma

$$\mathrm{R}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Podemos checar a afirmação acima

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - dc & -bc + ad \end{pmatrix}$$

$$ad - bc = \det A = 1$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Mas a inversa também é igual à transpostas

$$\mathrm{R}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{R}^T = \mathrm{R}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$a = d$$

$$b = -c$$

Portanto, a matriz R deve possuir a seguinte forma

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

Além do mais, o determinante de R deve ser igual a 1, de forma que os elementos a e c não são independentes

$$\det \mathrm{R} = a^2 + c^2 = 1$$

Podemos definir o grupo SO(2) de forma equivalente

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{R}, a^2 + c^2 = 1 \right\}$$

A relação $a^2 + b^2 = 1$ nos sugere a possibilidade de escrever os parâmetros a e c em termos de um único parâmetro θ

$$a = \cos\theta$$

$$b = \sin\theta$$

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in (-\pi, \pi\} \right\}$$

Denotamos essas matrizes por

$$\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Algumas propriedades relevantes

$$\mathrm{R}(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathrm{R}(-\theta)$$

$$\mathrm{R}(\theta_1)R(\theta_2) = \mathrm{R}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\mathrm{R}(0) = \mathbb{1}$$

$$\mathrm{R}(-\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{R}(\pi)$$

9.2 Significado Geométrico

Consideremos um vetor em $\mathbb{R}^2$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a atuação de uma matriz de SO(2) sobre ele resulta

$$x' = R(\theta)x = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{con}\,\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\ x_1 - \mathrm{sen}\,\theta\ x_2 \\ \mathrm{sen}\,\theta\ x_1 + \cos\theta\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1' = \cos\theta \; x_1 - \operatorname{sen}\theta \; x_2$$
$$x_2' = \operatorname{sen}\theta \; x_1 + \cos\theta \; x_2$$

As componentes do novo vetor x' mostram que a atuação da matriz $\mathrm{R}(\theta)$ corresponde a uma rotação do vetor x por um ângulo θ. Por essa razão identificamos os grupo SO(2) como sendo o grupo de rotações em $\mathbb{R}^2$

9.3 Gerador de SO(2)

As propriedades

- $\mathrm{R}(0) = \mathbb{1}$
- $\mathrm{R}(\theta_1)\,\mathrm{R}(\theta_2) = \mathrm{R}(\theta_1 + \theta_2)$

caracterizam o grupo SO(2) como um subgrupo uniparamétrico. Podemos definir, portanto, um gerador J como sendo

$$J = \frac{d}{d\theta} R(\theta)\Big|_{\theta=0}$$

Todo elemento do grupo pode ser escrito a partir do gerador J

$$R(\theta) = e^{\theta J}$$

$$\frac{d}{d\theta} R(\theta) = \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora verifiquemos que todo elemento de SO(2) pode ser escrito como a exponencial de J

A exponencial de J pode ser escrita como uma série de Taylor ($J^0 = \mathbb{1}$)

$$e^{\theta J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} J^n$$

J^2

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

Essa propriedade nos torna simples o cálculo da exponencial de J, pois

$$J^{2m} = (J^2)^m = (-\mathbb{1}^m = (-1)^m \mathbb{1}$$

$$J^{2m+1} = J^{2m}J = (-1)^m J$$

Podemos dividir a somatória entre os J ímpares e pares

$$e^{\theta J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} J^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m}}{(2m)!} J^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} J^{2m+1}$$

$$e^{\theta J} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m}(-1)^m}{(2m)!} (-1)^m \mathbb{1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} (-1)^m J$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m}(-1)^m}{(2m)!} (-1)^m = \cos\theta$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} (-1)^m = \sin\theta$$

$$e^{\theta J} = \cos\theta \mathbb{1} + \sin\theta J$$

$$e^{\theta J} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\theta J} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathrm{R}(\theta)$$

10 Grupos U(n) e SU(n), e U(2) e SU(2)

10.1 Adjunta de uma Matriz

Consideremos o espaço $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n), z_k \in \mathbb{C}\}$, dois elementos de $\mathbb{C}^n$
$z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$, e uma forma sesquilinear

$$\omega(z, w) = \sum_{k=1}^{n} z_k^* w_k$$

Exite um grupo de matrizes que mantém essa forma invariante, isto é

$$U(n) = \{U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \omega\,(Uz, Uw) = \omega(z, w)\ \forall x, z \in \mathbb{C}^n\}$$

Para estudar esse grupo precisamos adaptar a expressão $\langle x, Ay\rangle = \left\langle A^T x, y\right\rangle$ válida em $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}^n$

$$\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^{m} z_k^* w_k$$

$$\langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}} = \left\langle A^\dagger z, w\right\rangle_{\mathbb{C}}$$

onde $A^\dagger = (A^*)^T$

Demonstração

$$\langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^{n} z_i^*\,(Aw)_i$$

$$(Aw)_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} w_j$$

$$\langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^{n} z_i^* \sum_{j=1}^{n} A_{ij} w_j = \sum_{j=0}^{n} w_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij} z_i^* = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ij}^* z_i\right)^*$$

$$A_{ij}^\dagger = A_{ji}^*$$

$$\langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^{n} w_j \left(\sum_{i}^{n} (A^\dagger)_{ji} z_i\right)^*$$

$$\left(\sum_{i}^{n} (A^\dagger)_{ji} z_i\right)^* = (A^\dagger z)_j$$

$$\langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n} w_j (A^\dagger z)_j^*$$

$$\langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}} = \sum (A^\dagger z)_j^* w_j$$

$$\langle z, Aw\rangle_{\mathbb{C}} = \langle A^\dagger z, w\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji} \quad \text{matriz adjunta de A}$$

Algumas propriedades elementares

- $\mathbb{1}^\dagger = \mathbb{1}$
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
- $(\alpha A + \beta B)^\dagger = \alpha^* A^\dagger + \beta^* B^\dagger$
- $(A^{-1})^\dagger = (A^\dagger)^{-1}$

10.2 Grupo de Matrizes Unitárias

$$\langle Uz, Uw\rangle_{\mathbb{C}} = \langle z, w\rangle$$

$$\langle Uz, Uw\rangle_{\mathbb{C}} = \langle U^\dagger Uz, w\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$\left\langle U^\dagger Uz, w\right\rangle_{\mathbb{C}} - \langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} = 0$$

$$\left\langle \left(U^\dagger U - \mathbb{1}\right) z, w\right\rangle_{\mathbb{C}} = 0$$

$$\langle Tx, y\rangle = 0 \quad \forall x, y \Rightarrow \quad T = 0$$
$$\langle Tx, Tx\rangle = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$U^\dagger U - \mathbb{1} = 0$$

$$U^\dagger U = \mathbb{1}$$

$$U^{-1} = U^\dagger$$

Definição [Matriz Unitária]

Uma matriz $U \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ é dita ser unitária se $U^{-1} = U^\dagger$

★ Matrizes unitárias tem um especial importância em mecânica quântica. Todas as transformações em mecânica quântica são implementadas por operadores unitários (Teorema de Wigner)

★ Outra noção importante em mecânica quântica é a de matriz autoadjunta, isto é $A = A^\dagger$. Todas as grandezas físicas observáveis são representadas por matrizes autoadjuntas

Em suma

$$\langle Uz, Uw\rangle_{\mathbb{C}} = \langle z, w\rangle$$

$$U(n) = \left\{U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}), \quad U^{-1} = U^{\dagger}\right\}$$

Segue-se da relação

$$\det A^T = \det A$$

que

$$\det A^{\dagger} = (\det A)^*$$

Para matrizes unitárias

$$U^{\dagger}U = \mathbb{1}$$

$$\det U^{\dagger} \det U = 1$$

$$|\det U|^2 = 1$$

Se $U \in U(n) \Rightarrow |\det U| = 1$

$$\det U = e^{i\phi}$$

com $\phi \in (-\pi, \pi]$

Um caso especial é o grupo de matrizes unitárias com determinante 1

$$\mathrm{SU}(n) = \{U \in U(n), \det U = 1\}$$

Se $U \in U(n) \Rightarrow U = e^{i\phi}S$, $S \in \mathrm{SU}(n)$

10.3 Grupo SU(2)

Matrizes de Pauli

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Identidades úteis

- $$[\sigma_a, \sigma_b] := \sigma_a\sigma_b - \sigma_b\sigma_a = 2i\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\sigma_c$$

- $$\{\sigma_a, \sigma_b\} := \sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab}\mathbb{1}$$

- $$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{1} + i\sum_{c=1}^{3}\varepsilon_{abc}\sigma_c$$

Forma geral das matrizes SU(2)

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A inversa de U é dada por

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

impondo $U^{-1} = U^{\dagger} = (U^*)^T$ temos

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

Comparando elemento a elemento obtemos

$$c = -b^*$$
$$d = a^*$$

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

A condição $\det U = 1$ implica em

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{C} \, \text{com} \, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Decompondo on números a e b em suas respectivas partes reais e imaginárias

$$a = a_1 + ia_2$$
$$b = b_1 + ib_2$$

$$U = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix}$$

É possível, ainda, expressar U como combinação linear das matrizes de Pauli

$$U = a_1\mathbb{1} + i\left(b_2\sigma_1 + b_1\sigma_2 + a_2\sigma_3\right)$$

Agora usando a condição de que $|a|^2 + |b|^2 = 1$, podemos escrever o grupo SU(2) da seguinte forma

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix}, \text{ onde } (a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 \,\text{com}\, a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \right\}$$

11 Grupos O(p,n) e SO(p,n)

11.1 Invariância de formas lineares

Consideremos uma forma bilinear especial, definida por

$$\omega_A(x,y) = \langle x, Ay\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} x_k (Ay)_k$$

onde A é alguma matriz real, $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$

Estamos interessados em indentificar o grupo de matrizes que mantém essa forma invariante, isto é, o grupo de matrizes M tais que

$$\langle Mx, AMy\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, Ay\rangle_{\mathbb{R}}$$

Usando a identidade

$$\langle x, My\rangle = \left\langle M^T x, y\right\rangle$$

temos a seguinte condição

$$\left\langle x, M^T AMy\right\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, Ay\rangle_{\mathbb{R}}$$

E portanto

$$M^T AM = A \tag{1}$$

Expressamos o grupo que mantém a forma ω_A invariante como

$$\Omega := \left\{M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \quad M^T AM = A\right\}$$

Onde A é uma matriz qualquer, cuja escolha depende do nosso interesse.

★ É fácil ver que o caso em que a matriz A é igual a identidade retorna ao caso do grupo de matrizes ortogonais, então esse grupo é, no fundo, uma generalização dos grupos ortogonais

Se A for inversível, podemos reescrever a relação (1)

$$A^{-1} M^T AM = \mathbb{1}$$

$$M^{-1} = A^{-1} M^T A \tag{2}$$

$$\Omega := \left\{M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \quad M^{-1} = A^{-1} M^T A\right\}$$

Matrizes que respeitam a relação (2) possuem determinante ± 1.

$$\det M^{-1} = \det A^{-1} \det M^T \det A = \det M^T$$

$$\frac{1}{\det M} = \det M^T = \det M$$

$$(\det M)^2 = 1$$

$$\det M = \pm 1$$

Definimos então um subgrupo, formado pelas matrizes de determinante 1

$$S\Omega := \left\{ M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),\ \det M = 1\ ,\ M^{-1} = A^{-1} M^T A \right\}$$

Um caso de grande interesse em geometria e em física é quando a matriz A é da seguinte forma

$$A = \eta(p,q) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

onde p é a quantidade de números 1 na diagonal e q a quantidade de números -1 na diagonal, $p + q = n$

A forma se escreve

$$\omega(x, y) = \langle x, \eta(p,q) y \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}} \tag{3}$$

$$Ay = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ -y_{p+1} \\ \vdots \\ -y_n \end{pmatrix}$$

$$\omega(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \cdots - x_m y_m$$

O grupo de matrizes que mantém a forma (3) invariante é

$$O(p,q) = \left\{ L \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),\ L^{-1} = \eta(p,q) L^T \eta(p,q) \right\}$$

Utilizamos o fato de $\eta(p,q)^{-1} = \eta(p,q)$

O subgrupo formado pelas matrizes de determinante 1 é

$$SO(p,q) = \{ L \in O(p,q),\ \det\ L = 1 \}$$

11.2 O(1,1) e SO(1,1)

Um caso de particular interesse em física é quando $p = q = 1$, isto é

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

Mudança de notação: é comum em física expressar os vetores x e y como

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

De forma que

$$\omega(x, y) = x_0 y_0 - x_1 y_1$$

Agora podemos investigar a forma das matrizes L que mantém essa forma invariante

$$L^{-1} = \eta L^T \eta$$

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A inversa de qualquer matriz 2×2 é dada por

$$L^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\eta L^T \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

Como $L \in \mathrm{SO}(1,1)$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

Comparando elemento a elemento

$$a = d$$
$$b = c$$

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\det L = 1 \longrightarrow a^2 - b^2 = 1$$

Podemos identificar o grupo $SO(1,1)$ como

$$\mathrm{SO}(1,1) = \left\{ M \in \mathrm{Mat}(\mathrm{R},2) \mid \; M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R}, \text{com}\, a^2 - b^2 = 1 \right\}$$

11.3 Intuição Geométrica

A condição $a^2 - b^2 = 1$ com $a, b \in \mathbb{R}$ define uma hipérbole

$\mathrm{SO}(1,1)$ é homeomorfo à superfície $H_+ \cup H_-$ formada pelas hipérboles H_+ e H_-

$$H_\pm := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm\sqrt{1+y^2}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Não é a primeira vez que identificamos um homeomorfismo entre um grupo de matrizes e uma superfície em $\mathbb{R}^n$

- $\mathrm{GH}_3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$
- $\mathrm{SO}(2) \longrightarrow \mathbb{S}^1$
- $\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathbb{S}^3$
- $\mathrm{SO}(1,1) \longrightarrow H_+ \cup H_-$

Partindo de $a^2 - b^2 = 1$, escrevemos

$$a = \pm\sqrt{1+b^2}$$

Dizemos que o grupo $\mathrm{SO}(1,1)$ possui duas componentes conexas, uma associada a $a = \sqrt{1+b^2}$ e a outra a $a = -\sqrt{1+b^2}$

$$\mathcal{L}_+^\uparrow := \left\{ L \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},2) \mid \; L = \begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & b \\ b & \sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow := \left\{ L \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},2) \mid \; L = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+b^2} & b \\ b & -\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Podemos, ainda, parametrizar a e b em termos de um único parâmetro θ

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$

$$b = -\sinh\theta$$
$$a = \cosh\theta$$

$$\mathcal{L}_+^\uparrow := \left\{ L \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},2) \mid \; L = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{L}_+^{\downarrow} := \left\{ L \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R},2) \mid \ L = \begin{pmatrix} -\cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{B}_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}_+^{\uparrow} := \{\mathcal{B}_1(\theta) \ , \ \theta \in \mathbb{R}\}$$

As propriedades

- $\mathcal{B}_1(0) = \mathbb{1}$
- $\mathcal{B}_1(\theta_1)\mathcal{B}_1(\theta_2) = \mathcal{B}_1(\theta_1 + \theta_2)$

caracterizam $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ como um subgrupo uniparamétrico de $\mathrm{SO}(1,1)$. Podemos definir, portanto, um gerador M como sendo

$$M = \frac{d}{d\theta}\mathcal{B}_1(\theta)\bigg|_{\theta=0}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_1(\theta) = e^{\theta M}$$

11.4 Relação com Física

Podemos definir uma nova parametrização para os grupos $\mathcal{B}_1$

$$\tanh\theta = \frac{v}{c} \tag{4}$$

★ Esse novo parâmetro $v = c\tanh\theta$ é limitado por c, já que $\tanh\theta$ varia de -1 a 1

De (4) derivamos

$$\cosh\theta = \gamma(v)$$
$$\sinh\theta = \frac{v}{c}\gamma(v)$$

com $\gamma(v) := \left(1 - (v/c)^2\right)^{-1/2}$

$$B_1(v) := \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\frac{v}{c}\gamma(v) \\ -\frac{v}{c}\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(z) & -\mathrm{senh}(z) \\ -\mathrm{senh}(z) & \cosh(z) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_+^{\uparrow} = \{\mathcal{B}_1(v), -c < v < c\}$$

Analisemos agora como uma matriz $\mathcal{B}_1(v)$ age em um vetor $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$, isto é

$$B_1(v)\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

Derivamos, com isso, as expressões das chamadas *transformações de Lorentz*

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ou

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$
$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

Com $\beta = v/c$

12 Grupos de Lorentz

13 Grupos SO(3)

13.1 Características de SO(n) e SO(3)

O grupo O(3) é definido como

$$\mathrm{O}(3) = \left\{R \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}), R^{-1} = R^T\right\}$$

O grupo SO(3) é definido de forma semelhante, mas com a exigência de que o determinante seja 1

$$\mathrm{SO}(3) = \left\{R \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}), R^{-1} = R^T, \det R = 1\right\}$$

Ambos mantém invariante a forma bilinear

$$\langle Rx, Ry\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}$$

onde $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

★ Por manter o produto escalar invariante, a ação desses grupos preserva os ângulos entre os vetores e a norma deles

★ Dada uma matriz $R \in \mathrm{SO}(n)$ com n ímpar, então 1 é autovalor de R, isto é, existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ que sarisfaz a equação

$$Rv = v$$

Prova:

$R \in \mathrm{SO}(n) \longrightarrow RR^T = \mathbb{1}$ e $\det R = 1$

$$\det(\mathbb{1} - R) = \det\left(R\left(R^T - \mathbb{1}\right)\right) = \det R \cdot \det(R - \mathbb{1})^T$$

$$\det(\mathbb{1} - R) = \det(R - \mathbb{1})$$

$$\det(\mathbb{1} - R) = \det(-(\mathbb{1} - R)) = -\det(\mathbb{1} - R)$$

$$\det(\mathbb{1} - R) = 0$$

Portanto, existe um vetor v tal que

$$(\mathbb{1} - R)v = 0 \ \longrightarrow Rv = v$$

⊛ Se $Rv = v$ então $R(\lambda v) = \lambda v$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$

⊛ Supondo que exitem dois vetores que satisfazam

$$Rv_1 = v_1$$
$$Rv_2 = v_2$$

então a combinação linear deles também satisfaz

$$R(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 R v_1 + \alpha_2 R v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

Concluímos que o conjunto de vetores com essa propriedade forma um subespaço vetorial

$$V_R := \{v \in \mathbb{R}^3,\ Rv = v\}$$

★ Se $R \in \mathrm{SO}(3)$ então V_R tem dimensão 1

Prova:

14 Grupo SO(3) e o ângulos de Euler

15 Grupo de Lorentz em 3+1 dimensões e o Grupo de Galileu

16 Grupos Simpléticos e Ações de Grupos