Equações Diferenciais

matheus.coutinho9@usp.br

Versão Preliminar

Sumário

1 EDO 1 Ordem

2 EDO 2 Ordem

A forma mais geral de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem é

$$a(t)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + b(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c(t)y(t) = f(t)$$

Quando $f(t) = 0$ a equação é dita ser homogênea. Frequentemente nós expressamos uma equação diferencial desse tipo de outra forma, dividimos por $a(t)$ e reescrevemos os coeficientes

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = f(t)$$

A solução mais geral para a equação homogênea é

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

Já que a equação é de ordem 2, existem duas soluções para ela, e a combinação linear delas configura a solução mais geral.

Vamos checar a declaração acima, supomos que y_1 e y_2 são soluções, isto é

$$y_1''(t) + P(t)y_1'(t) + Q(t)y_1(t) = 0$$

$$y_2''(t) + P(t)y_2'(t) + Q(t)y_2(t) = 0$$

Agora calculamos a quantidade

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\big(C_1 y_1 + C_2 y_2\big) + P(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(C_1 y_1 + C_2 y_2\big) + Q(t)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = \\
&= C_1\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} + C_2\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} P(t)C_1\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} + P(t)C_2\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} + Q(t)C_1 y_1 + C_2 Q(t) y_2 = \\
&= C_1\big(y_1''(t) + P(t)y_1'(t) + Q(t)y_1(t)\big) + C_2\big(y_2''(t) + P(t)y_2'(t) + Q(t)y_2(t)\big) = 0!
\end{aligned}$$

Dizemos que o subespaço vetorial formado pelas funções que soluções de uma equação diferencial de ordem n tem dimensão n, e como o espaço de funções é linear, qualquer combinação linear de elementos da base está no também no espaço considerado. No entanto, para que as soluções y_1 e y_2 formem uma base, é necessário que essas duas soluções sejam linearmente independentes, ou seja, uma combinação linear das suas só pode ser nula se os coeficientes da combinação forem nulos, na prática isso implica na impossobilidade de escrever uma em função da outra.

Se

$$\begin{aligned}
y_1(t_0) &= k y_2(t_0) \\
y_1'(t_0) &= k y_2'(t_0)
\end{aligned}$$

Então y_1 e y_2 são linearmente dependentes e temos a seguinte relação

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1'}{y_2'}$$

Ou seja, precissamos de duas soluçãos y_1 e y_2, tais que

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \frac{y_1'}{y_2'}$$

Para avaliar essa relação nós definimos o Wroskiano $W[y_1(t), y_2(t)] = \det W$

$$W \equiv \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

$$W\left[y_1(t), y_2(t)\right] = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t) \cdot y_2(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Se

$$y_1^{(n)}\left(t_0\right) = k \cdot y_2^{(n)}\left(t_1\right) \Rightarrow W\left[y_1\left(t_0\right), y_2\left(t_0\right)\right] = 0$$

O Wroskiano é útil para verificarmos se duas soluções são independentes.

Mas, para que a solução geral seja completamente especificado, é precisso ainda determinar as constantes C_1 e C_2, para tanto nós consideremos os valores $y(t_0)$ e $y'(t_0)$

$$y(t) = C_1 \cdot y_1(t) + C_2 \cdot y_2(t)$$

$$y(t_0) \equiv a$$
$$y'(t_0) \equiv b$$

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' = C_1\left[-P\left(t_0\right) y_1'\left(t_0\right) - Q\left(t_0\right) y_1(t)\right] + C_2\left[-P\left(t_0\right) y_2'\left(t_0\right) - Q\left(t_0\right) y_2(t)\right]$$

Já que y é solução, temos também que

$$y''\left(t_0\right) = -\left[P\left(t_0\right) y'\left(t_0\right) + Q\left(t_0\right) y\left(t_0\right)\right]$$

$$y''\left(t_0\right) = -P\left(t_0\right) \cdot b - Q\left(t_0\right) \cdot a$$

$$-P(t)b - Q\left(t_0\right) a = -P\left(t_0\right) \cdot C_1 y_1'\left(t_0\right) - Q\left(t_0\right) C_1 y_1\left(t_0\right) - P\left(t_0\right) C_2 y_2'\left(t_0\right) - Q\left(t_0\right) C_2 y_2(t)$$

$$b = C_1 y_1'\left(t_0\right) + C_2 y_2'\left(t_0\right)$$
$$a = C_1 y_1\left(t_0\right) + C_2 y_2\left(t_0\right)$$

Obtemos um sistema linear. Podemos escrevê-lo como uma equação matricial

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Para determinar os coeficientes é necessário multiplicar pela matriz invera, que só existe se o determinante dela for diferente de zero

$$\det\begin{pmatrix} y_1\left(t_0\right) & y_2\left(t_0\right) \\ y_1'\left(t_0\right) & y_2'\left(t_0\right) \end{pmatrix} = y_1\left(t_0\right) y_2'\left(t_0\right) - y_2\left(t_0\right) y_1'\left(t_0\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} y_1\left(t_0\right) & y_2\left(t_0\right) \\ y_1'\left(t_0\right) & y_2'\left(t_0\right) \end{pmatrix} = W(t) \neq 0$$

Por hipótese, as duas soluções encontradas são indepentes e portanto o Wronskiano é diferente de zero.

⋆ Outra possibilidade que o Wroskiano nos fornece é, uma vez conhecida uma solução inferir a segunda. Para demonstrar isso começamos por derivar o Wronskiano

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[y_1(t)y_2'(t) - y_1(t)y_2'(t)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

Mas

$$y_1'' = -P(t)y_1' - Q(t)y_1$$

$$y_2'' = -P(t)y_2' - Q(t)y_2$$

$$\begin{aligned} y_1 y_2'' &= -P(t)y_1 y_2' - Q(t)y_1 y_2 \\ y_1'' y_2 &= -P(t)y_2 y_1' - Q(t)y_2 y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 y_2'' + P(t)y_1 y_2' + Q(t)y_1 y_2 &= 0 \\ y_1'' y_2 + P(t)y_1' y_2 + Q(t)y_1 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Substraímos as duas equações acima

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + P(t)\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right) = 0$$

Encontramos uma equação diferencial para o Wroskiano que só envolve um coeficiente $P(t)$, e é uma equação simples de se resolver

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + P(t)W(t) = 0$$

Separamos as variáveis

$$\frac{\mathrm{d}W}{W} = -P(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}W}{W} = -\int P(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\ln\frac{W}{W_0} = -\int P(t)\,\mathrm{d}t$$

$$W(t) = W_0 \exp\left[-\int_{t_0}^{t} P(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]$$

Obtemos uma expressão final para o Wroskiano

Agora, dada uma solução y_1 conhecida, e uma y_2 desconhecida, calculamos a quantidade

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}$$

Usamos a expressão do Wronskiano

$$W(t) = W_0 \exp\left[-\int_{t_0}^{t} P(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{W_0}{y_1^2} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} P(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]$$

Agora podemos simplesmente integrar os dois lados e obtemos uma expressão para a segunda solução

$$y_2(t) = y_1(t) W_0 \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\zeta}{y_1^2(\zeta)} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} P(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]$$

3 Método da Função de Green

O método da função de Green é especial na determinação da solução da equação homogênea. Mas antes, vamos reformular nosso problema de equações diferenciais em termos de um operador diferencial linear

$$D = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + P(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + Q(t)$$

$$D[y(t)] = f(t) \Rightarrow y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = f(t)$$

Quando $D[y(t)] = 0$ temos simplesmente a equação homogênea.

Defimos a função de Green associada ao operador D como sendo a função $G(t, t')$ que respeita relação

$$D\left[G(t, t')\right] = \delta(t - t')$$

A importância dessa função pode ser vista pelo seguinte propriedade básica da função delta de Dirac

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t')\delta(t - t')$$

Mas $D\left[G(t, t')\right] = \delta(t - t')$, então

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') D\left[G(t, t')\right] = D[y(t)]$$

$$D[y(t)] = D\left[\int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G(t, t')\right]$$

Por fim obtemos uma expressão para a soluçãa da equação inhomogênea

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G(t, t')$$

A solução geral é portanto

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G(t, t')$$

Espero ter conseguido mostrar como a função de Green pode ser usada para escrever a solução da equação inhomogênea, mas isso não tem nenhuma validade até que desenvolvamos um método para determinar a função de Green, concentremo-nos nisso

3.1 Determinação da Função de Green

Podemos extrair algumas informações da definição da função de Green, na verdade essas informações advém da função delta

$$D\left[G(t, t')\right] = \delta(t - t')$$

Certamente em $t \neq t' \Rightarrow D[G(t, t')] = 0$. Ao passo que há uma divergência em $t = t'$, o que sugere uma descontinuidade de $G(t, t')$ nesse ponto.

Consideremos uma separação em tempos $t > t'$ e $t < t'$. Em tempo $t \neq t'$ a função de Green corresponde à solução da homogênea

$$G(t, t') = C_1 y_1(t) \theta(t' - t) + C_2 y_2(t) \theta(t - t')$$