Física 1

matheus.coutinho9

September 2021

Sumário

Sumário		**2**
1	**Sistemas de Partículas e Leis de Conservação**	**3**
1.1	Sistemas de Partículas	3
1.2	Movimento Relativo ao Centro de Massa	5
1.3	Sistemas Isolados e Conservação do Momento	5
1.4	Momento Angular	6
1.5	Trabalho e Energia	8
2	**Colisões**	**12**
2.1	Colisões Elásticas 1D	12
2.2	Colisões Elásticas 2D	13
2.3	Teoria Cinética e Gás Ideal	14
3	**Oscilações**	**15**
3.1	Movimento Harmônico Simples	15
3.2	Osciladores Acoplados	20
4	**Forças Centrais**	**23**
4.1	Coordenadas Polares	23
4.2	Lei de Newton	23
4.3	Energia	24
4.4	Gravitação	24
4.5	Leis de Kepler	24
5	**Movimento de Corpos Rígidos**	**25**
	REFERÊNCIAS	**26**

1 Sistemas de Partículas e Leis de Conservação

1.1 Sistemas de Partículas

A segunda Lei de Newton estabelece um protocolo para estudarmos a dinâmica de um corpo. Inicialmente, nossos objetos de análise serão corpos que podem ser entendidos como partículas pontuais, isto é, suas dimensões podem ser desprezadas, pelo menos ser invalidar nossos principais resultados. No último capítulo estudaremos corpos rígidos, que possuem dimensões relevantes, constituídos por um número infinito de partículas pontuais. Veremos que estudar tais objetos é bem mais díficil, porém os resultados desenvolvidos aqui servirão de base para tal estudo.

Consideremos o uma partícula pontual de massa m e localizado por uma posição $\mathbf{x}$, a variação do seu momento $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$, a segunda Lei diz que

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

onde $\mathbf{F}$ denota a força exercída sobre essa partícula.

Essa Lei junto com as outras 2 nos permitem resolver uma enormidade de problemas físicos, envolvendo o movimento de um corpo sujeito à conjunto de forças. Mas queremos avançar e considerar agora um sistema formado por N partículas, de massas $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N$ e indexidas por posições $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N$. Podemos expressar a o movimento da i-ésima partícula pela Lei de Newton

$$\mathbf{F}_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

A força exercída sobre a i-ésima partícula pode ser dividida em duas partes, pois ela pode ser composta por forças exercidas por outras partículas do próprio sistema ou por forças externas ao sistema.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i^{int} + \mathbf{f}_i^{ext} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

Existe uma equação desse tipo para cada partícula i, podemos então somá-las

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i^{int} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

As forças internas são do tipo $\mathbf{F}_{ij}$, isto é, a força que a partícula i exerce sobre a j, mas estamos somando todas as forças e pela terceira Lei de Newton $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, com isso concluímos que a soma das forças internas é zero.

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i^{int} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

Representamos a soma das forças externas simplesmente por $\mathbf{F}_{ext}$

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

E a soma dos momentos de todas as partículas i por $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}$$

Essa equação de movimento relaciona as forças externas com a variação do momento total, ela nos mostra que a dinâmica global do sistema só pode ser modificcada por forças externas, as partículas do sistema até podem trocar momento através de forças internas, o momento total só varia com a presença de uma força externa

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i\right)$$

Sendo M a massa total do sistema

$$M = \sum_i m_i$$

Podemos multiplicar e dividir a equação por M, em ordem de obter a equação

$$\mathbf{F}_{ext} = M \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}\right)$$

A equação acima é a segunda Lei de Newton para um corpo que contém toda a massa do sistema e tem a posição indexida por

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + m_N \mathbf{r}_N}{M}$$

Reescremos a equação de movimento em notação simlpificada

$$\mathbf{F}_{ext} = M \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2}$$

O vetor $\mathbf{R}$ é denominado posição do centro de massa do sistema. O centro de massa tem uma capacidade de simplificar enormemente a resolução de problemas, uma vez que podemos considerar a força externa atuando sobre um sistema de muitos corpos como uma única força atuando sobre o centro de massa.

1.2 Movimento Relativo ao Centro de Massa

Nessa seção utilizarei um sistema simplificado, composto apenas de 2 partículaa, para extrair algumas informações sobre a dinâmica de dois corpos e o papel do centro de massa. Em especial, faremos uma mudânça de referencial para analisar o problema no referencial do centro de massa e entender suas propriedades.

1.3 Sistemas Isolados e Conservação do Momento

Conforme concluímos na subseção anterior, o momento total do sistema não pode ser alterado por forças internas. Então vamos supor que temos um sistema isolado (livre de forças externas) composto por 2 partículas, sabemos que o momento total não se altera com o tempo, mas os momentos individuas podem se alterar, as partículas podem transferir momento de uma para a outra através das forças internas, ou seja, a força que uma exerce sobre a outra.

Consideremos que a partícula 1 tem uma variação de momento $\delta\mathbf{p}$

$$\mathbf{p}_1 \to \mathbf{p'}_1 = \mathbf{p}_1 + \delta\mathbf{p}$$

Essa variação de momento foi ocasionada pela ação de uma força exercida pela partícula 2, denotamos essa força por $\mathbf{F}_{12}$. A segunda lei de Newton é quem associa essa força à mudança no momento da partícula 1

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t}$$

Para obter a variação de momento nós integramos a equação

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_{12}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_{12}\,\mathrm{d}t = \mathbf{p}_1(t) - \mathbf{p}_1(t_0)$$

$$\delta\mathbf{p} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_{12}\,\mathrm{d}t$$

A grandeza I definida pela integral da força no tempo é por vezes chamada de impulso da força, e ela expressa a variação de momento ocasionado pela atuação de uma força.

⋆ Uma vasta classe de problemas podem ser tratados como sistemas isolados e portanto serem resolvidos pelo ferramental desenvolvido, a principal característica desses sistemas é o momento total se conserva, esse fato é extremamente útil em problemas envolvendo interação, como ocorre no caso das colisões.

Pela terceira Lei de Newton,

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Então

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_{12}\, \mathrm{d}t = -\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_{21}\, \mathrm{d}t$$

$$\mathbf{p}_1(t) - \mathbf{p}_1(t_0) = -\big[\mathbf{p}_2(t) - \mathbf{p}_2(t_0)\big]$$

$$\mathbf{p}_1(t_0) + \mathbf{p}_2(t_0) = \mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t)$$

$$\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}(t)$$

Podemos ver claramente que no fundo a terceira Lei de Newton é equivalente à Lei de conservação do momento. Além disso, é óbvio que todo esse desenvolvimento se estende para sistemas com um número arbitrário de partículas.

1.4 Momento Angular

Definimos o momento angular de uma partícula de momento $\mathbf{p}$ e localizada pela vetor $\mathbf{x}$ em relação a um certo sistema de referência como sendo

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

A variação do momento angular é dada por

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} + \mathbf{x} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$$

Denominamos essa nova quantidade de Torque $\mathbf{N}$ da força $\mathbf{F}$, que é a grandeza responsável por variar o momento angular de uma partícula.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{N}$$

Dadas essas definições básicas podemos avançar e considerar não uma mas sim um sistema constituído por N partículas, e estudar a dinâmica do momento angular total. Na última seção generalizaremos essas condições por considerar um sistema em que o número de constituintes é muito grande, caracterizando um corpo sólido, o momento angular desempenhará um papel central nessa discussão.

Consideremos um sistema de N partículas, indexidas pelas suas posições $\mathbf{x}_i$ e momentos $\mathbf{p}_i$, o momento angular total do sistema é a soma dos momentos angulares individuas

$$\mathbf{L} = \sum_i^N \mathbf{L}_i$$

$$\mathbf{L} = \sum_i^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$$

A variação do momento angular total é resultado da ação do torque total sobre o sistema

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{N} = \sum_i^N \mathbf{N}_i$$

O torque total pode ser devido às forças internas internas ou externas, fazemos essa diferenciação escrevendo o torque total como

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i^{ext} + \mathbf{f}_i^{int}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i^N \mathbf{x_i} \times \left(\mathbf{f}_i^{ext} + \mathbf{f}_i^{int}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{N}^{ext} + \sum_i^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{f}_i^{int}$$

onde $\mathbf{N}^{ext} = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{f}_i^{ext}$ representa o torque externo total, isto é, a soma do torque externo sobre cada partícula.

Podemos expressar as forças internas de um jeito especial

$$\mathbf{f}_i^{int} = \sum_{j \neq i}^N \mathbf{f}_{ji}$$

onde $\mathbf{f}_{ji}$ é a força que a partícula j exerce sobre a partícula i.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{N}^{ext} + \sum_i^N \mathbf{x}_i \times \left(\sum_{j \neq i}^N \mathbf{f}_{ji}\right)$$

Uma forma equivalente é somar sobre os j's positivos

$$\sum_i^N \mathbf{x}_i \times \left(\sum_{j \neq i}^N \mathbf{f}_{ji}\right) = \sum_i^N \sum_{j>i}^N (\mathbf{x}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{x}_j \mathbf{f}_{ji})$$

Pela terceira Lei de Newton, $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$

$$\sum_i^N \mathbf{x}_i \times \left(\sum_{j \neq i}^N \mathbf{f}_{ji}\right) = \sum_i^N \sum_{j>i}^N (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \mathbf{f}_{ij}$$

A força que a partícula j exerce sobre i tem que ter a direção do vetor que liga as duas partículas, $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$. Esta é conhecida como terceira Lei de Newton na versão forte, e ela garante que a força $\mathbf{f}_{ij}$ vai zer paralela ao vetor $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ de modo que o produto vetorial se anula

$$\sum_{i}^{N}\sum_{j>i}^{N}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \mathbf{f}_{ij} = 0$$

Como resultado chegamos à conclusão de que o momento angular total de um sistema de partículas só pode ser alterado pelo torque de forças externas

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{N}^{ext}$$

E é claro que uma consequência desse resultado é que em um sistema isolado, ou seja na ausência do torque de forças externas, o momento angular total é constante. As partículas podem trocar momento angular entre si, através do torque interno, mas o momento total não se altera.

1.5 Trabalho e Energia

Consideremos o problema de um corpo de massa m e que tem aceleração constante $a = a_x$. Se a aceleração é constante, então a velocidade em função do tempo será

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t$$

$$v(t) - v(t_0) = a(t - t_0)$$

$$v(t) = v_0 + at$$

Uma vez que temos a velocidade, podemos integrar e obter a posição $x(t)$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_0 \, \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t} at \, \mathrm{d}t = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Uma vez que temos o tempo nas duas equações, podemos fazer subtituição para encontrar uma equação sem o tempo

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = x_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$x = x_0 + \frac{1}{a}v_0 v - \frac{1}{a}v_0^2 + \frac{a}{2}\left(\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2}\right)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{a}v_0 v - \frac{1}{a}v_0^2 + \frac{1}{2a}v^2 - \frac{1}{a}vv_0 + \frac{1}{2a}v_0^2$$

$$x = x_0 - \frac{1}{a}v_0^2 + \frac{1}{2a}v^2 + \frac{1}{2a}v_0^2$$

$$x = x_0 - 2\frac{1}{2a}v_0^2 + \frac{1}{2a}v^2 + \frac{1}{2a}v_0^2 = \frac{1}{2a}v^2 - \frac{1}{2a}v_0^2$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

Essa é a famosa equação de Torricelli. Podemos ainda rearranjar os termos e ver que

$$\frac{v^2}{2} - ax = \frac{v_0^2}{2} - ax_0$$

Existe uma quantidade que é igual para qualquer instante de tempo

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a(x - x_0)$$

Essa aceleração foi produzida por uma força $F = ma$, então podemos escrever

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{F}{m}(x - x_0)$$

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = F(x - x_0) = F\Delta x$$

$F\Delta x$ é igual a integral da força ao longo de x quando F é constante, em geral F não é constante, como supomos no início, nesses casos nós deixamos a integral

$$F\Delta x = F(x - x_0) = \int_{x_0}^{x} F\,\mathrm{d}x$$

Podemos reescrever a equação então

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F\,\mathrm{d}x$$

Se definirmos a energia cinética ou a energia associada ao movimento como

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Nós obtemos uma interpretação muito clara da equação acima

$$T_f = T_i + \int_{x_0}^{x} F\,\mathrm{d}x$$

O acrésimo na energia do movimento é igual a essa quantidade que definimos como sendo o trabalho

$$W = \int_{x_0}^{x} F\,\mathrm{d}x$$

O trabalho representa a quantidade de energia fornecida ao corpo de massa m pela força F para que ele aumentasse a sua velocidade de v_0 para v

$$\Delta T = W$$

⋆ Uma forma equivalente de escrever a energia cinética é em termos do seu momento $p = mv$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

⋆ Se tivéssemos começado simplesmente definindo o trabalho como

$$W = \int_{x_0}^{x} F\,\mathrm{d}x$$

Poderíamos derivar a mesma relação da variação da energia cinética

$$W = \int_{x_0}^{x} F\,\mathrm{d}x = m\int_{x_0}^{x} a\,\mathrm{d}x$$

Agora usamos a regra da cadeia para expressar a aceleração

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

$$W = m\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} v \,\mathrm{d}x = m\int_{v_0}^{v} v \,\mathrm{d}v$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = T_f - T_i$$

$$W = \Delta T$$

t

2 Colisões

Essa seção sobre colisões consiste em uma aplicação básica dos conceitos desenvolvidos no capítulo anterior, pois os princípios físicos que nos guiarão ao longo do estudo de colisões são essencialmente as leis de conservaçao, da energia e do momento. Além disso, essa seção serve como uma leitura prévia aos estudos de colisões relativísticas.

2.1 Colisões Elásticas 1D

Consideraremos sempre sistemas composto por, uma partícula com velocidade v colidindo com uma partícula em repouso. Ou seja, uma colição de alvo fixo.

Dada a configuração

m_1 , $v_1 = v$
m_2 , $v_2 = 0$

Queremos determinar as velocidades das duas partículas (u_1 e u_2) após a colisão.

Sabemos, que o momento e a energia se conservam, logo temos

$$m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \tag{2}$$

Temos um basicamente um sistema de duas equações com duas variáveis, substiuimos u_2 em (2)

$$u_2 = \frac{m_1}{m_1}(v - u_1)$$

$$m_1 v^2 = m_1 u_1^2 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}(v - u_1)^2$$

$$m_1 v^2 = m_1 u_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2}(v - u_1)^2$$

$$m_1 u_1^2 - m_1 v^2 + \frac{m_1^2}{m_2} v^2 - 2\frac{m_1^2}{m_2} v u_1 + \frac{m_1^2}{m_2} u_1^2 = 0$$

$$\left(\frac{m_1^2}{m_2} + m_1\right) u_1^2 + \left(\frac{m_1^2}{m_2} - m_1\right) v^2 - 2\frac{m_1^2}{m_2} v u_1 = 0$$

$$(m_1 + m_1) u_1^2 + (m_1 - m_2) v^2 - m_1 v u_1 - m_1 v u_1 = 0$$

$$(u_1 - v)\left[u_1(m_1 + m_2) - v(m_1 - m_2)\right] = 0$$

Obtemos, portanto que

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v$$

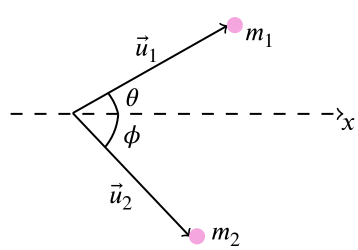
2.2 Colisões Elásticas 2D

Consideraremos agora uma configuração semelhante ao problema anterior, uma partícula com velocidade horizontal colidindo com uma partícula em repouso

Dada a configuração

m_1 , $v_1 = v\hat{\mathbf{x}}$
m_2 , $v_2 = 0$

Queremos determinar as velocidades das duas partículas (u_1 e u_2) após a colisão, e os ângulos de espalhamento θ e ϕ.



Escrevemos as conservações do momento nas direções x e y, e da energia

$$mv = m_1 u_1 \cos\theta + m_2 u_2 \cos\phi$$

$$0 = m_1 u_1 \sin\theta - m_2 u_2 \sin\phi$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Encontramos uma dificuldade, possuímos 3 equações, mas gostaríamos de determinar 4 variáveis. Em ordem de contornar esse problema vamos analisá-lo no referencial do centro de massa.

2.3 Teoria Cinética e Gás Ideal

3 Oscilações

O movimento oscilatório está presente em quase todas as área da física. O exemplo mais tradicional de oscilação talvez seja o de um sistema massa-mola, oscilando em torno de uma posição de equilíbrio, ou talvez o movimento de um pêndulo, mas as oscilações não estão restritas à esses simples sistemas, elas surgem também em circuitos elétricos e em sistemas atômicos, como móleculas e modelos para a matéria em estado sólido, que são sistemas mais complexos, em que os efeitos quânticos são necessários para entender suas dinâmicas. No entanto, a maior motivação para estudar em detalhe esse tipo de movimento é que podemos considerar sistemas acoplados formados por muitos corpos, e demonstrar que, quando o número de corpos é suficientemente grande, surge um movimento ondulatório. Ondas são objetos centrais na física, elas formam o som, tornando a comunicação possível, e formam a luz, tornando a visão possível. Além disso, as últimas tecnologias desenvolvidas, envolvendo principalmente a telecomunicação, são totalmente dependentes do nosso entendimento e capacidade de manipular ondas eletromagnéticas e mecânicas. Portanto, meu principal objetivo é mostrar como que o movimento ondulatório se origina do oscilatório, servindo como base para o seu entendimento.

3.1 Movimento Harmônico Simples

Como eu disse, um exemplo de movimento oscilatório é a posição de uma massa ligada a uma mola quando desloca de sua posição de equilíbrio. Utilizaremos esse sistema para entender como é a forma das equações desse movimento.

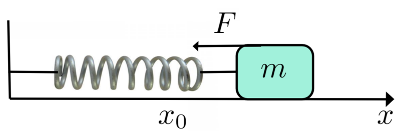


Figura 1 – Sistema massa-mola

Ao deslocar a massa *m* de sua posição de equilíbrio a mola a puxa, fazendo uma força no sentido contrário, e quanto maior é o deslocalmento maior é a força com que a massa é puxada, ou seja, podemos expressar a uma relação do tipo

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$$

Ou seja, a força é proporcional ao deslocamento, mas com o sentido invertido. A expressão acima é denomonada *Lei de Hooke*, a qual forças com essa natureza, elástica, obedecem. Quando o deslocamento está à direita da posição de equilíbrio a mola está sendo esticada, e quando o deslocamento está à esquerda da posição de equilíbrio a mola está sendo comprimida, em ambos os casos a mola tende a reestabelecer a configuração de equilíbrio.

Uma vez que conhecemos a forma da força, podemos derivar o potencial

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x}$$

$$V(\mathbf{x}) = -\int_{\infty}^{x} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}'$$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Definindo

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

temos

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Agora o caminho natural é resolver a equação de movimento, isto é

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-kx = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem, cuja solução geral é

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

★ O cosseno de ωt e o seno de ωt são duas soluções independentes, como tráta-se de uma equação linear, podemos usar o que sabemos de álgebra linear para escrever a solução geral, pois o seno e o cosseno formam uma base para o subespaço vetorial formado pelas soluções da equação de movimento. Um elemento geral desse subespaço é escrito então como uma combinação dos elementos da base. Notamos que a base tem dimensão 2 em concordância com a ordem da equação.

Para determinarmos as duas constantes a e b, temos que dar duas condições, que podem $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$

$$x(0) = x_0 \;\Rightarrow a = x_0$$

$$\dot{x}(0) = -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t) = v_0 \;\Rightarrow b = \frac{v_0}{\omega}$$

Obtemos a solução

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Uma forma equivalente de escrever essa solução é

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Desde que

$$x_0 = A\cos\phi$$
$$v_0 = -A\omega\sin\phi$$

Essa solução é matematicamente igual, mas traz uma nova intuição física, pois temos dois novos parâmetros, que são, somando as duas equações acima

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

O parâmetro A pode ser interpretado como a amplitude do movimento, já que a função cosseno é limitada ao intervalo $[-1, 1]$, a função cosseno multiplicada por A é limitada agora ao intervalo $[-A, A]$.

Já o ϕ pode ser visto como uma fase

$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

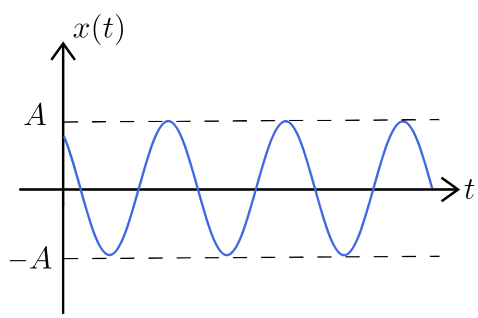


Figura 2 – Gráfico $x \times t$

A fase ϕ apenas translada o gráfico $x \times t$ para a esquerda ou para a direita. Já o parâmetro ω é uma frequência angular, que diz quantas vezes o movimento de se repete em um dado intervalo de tempo.

⋆ A solução obtida, soma de duas funções trigonométricas, pode ser reescrita usando funções exponenciais, para tanto utilizamos a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Da fórmula de Euler, reescrevemos as funções trigonométricas em termos de exponenciais

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

A solução mais geral é

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

sendo que a solução trigonométrica pode ser recuperada simplesmente por considerar as constantes C_1 e C_2 como

$$C_1 = \frac{A}{2} e^{i\phi} \quad , \quad C_2 = \frac{A}{2} e^{-i\phi}$$

e recuperamos a solução $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, e é claro, como já desenvolvemos, que a solução $x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pode também ser recuperado simplesmente definindo $a = A\cos\phi$ e $b = -A\sin\phi$

Também podemos recuperar a solução equivalente $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$, basta considerarmos as constantes C_1 e C_2

$$C_1 = \frac{A}{2i} e^{i\phi} \quad , \quad C_2 = -\frac{A}{2i} e^{-i\phi}$$

Inserindo na solução

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = \frac{A}{2i} e^{i\omega t} e^{i\phi} - \frac{A}{2i} e^{i\omega t} e^{-i\phi}$$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = A\left[\frac{e^{i(\omega t+\phi)} - e^{-i(\omega t+\phi)}}{2i}\right]$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

É evidente que a solução deve ser real, pois o deslocamento é uma grandeza real, e mostramos que a solução em termos de exponenciais também é real, por mais que as exponenciais sejam complexas, desde que as constantes sejam devidamente ajustadas. Hora escreveremos a solução em termos de exponenciais complexas e outra vezes como funções trigonométricas, isso vai variar de acordo com o problema, pois, dependendo da situação físca que estamos lidando, a forma como expressamos a solução pode tornar a análise mais ou menos simples. Em suma, as formas possíveis de se escrever a solução do oscilador harmônico simples são

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = A\ \mathrm{Re}[e^{i(\omega t+\phi)}]$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) = A\ \mathrm{Im}[e^{i(\omega t+\phi)}]$$

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

$\star$ Usamos o movimento de um sistema massa-mola apenas de base, porque as propriedades já discutidas são bem mais gerais, próprias de potenciais quadráticos. Podemos ver isso se considerarmos um movimento qualquer, caracterizado pelo potencial abaixo

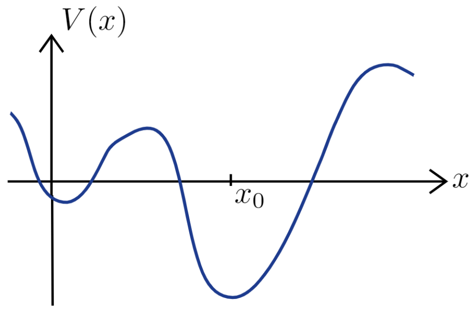


Figura 3 – Potencial $V(x)$

Como vimos no gráfico, $V(x)$ tem um mínimo em x_0, podemos escrever o potencial $V(x)$ por meio de uma série de Taylor, assim

$$V(x) = V(x_0) + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\big(x_0\big)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\big(x_0\big)(x - x_0)^2 + \ldots$$

Mas como trata-se de um ponto de equilíbrio, a primeira derivada é nula, então temos um potencial quadrático

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\big(x_0\big)(x - x_0)^2 + \ldots$$

Concluímos que qualquer sistema física na vizinha de um ponto de equilíbrio estável tem a sua dinâmica descrito por um oscilador harmônico.

Podemos também expressar a energia do oscilador harmônico

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

A energia é proporcional ao quadrado da amplitude.

O considerado até agora é o conhecimento básico sobre o oscilador harmônico simples, nesse estágio creio que podemos avançar em direção à um problema um pouco mais complexo.

3.2 Osciladores Acoplados

Nessa seção vamos considerar inicalmente o movimento de oscilação de duas massas acopladas, isto é, suas posições não são independentes, depois podemos analisar o caso com 3 massas.

2 corpos

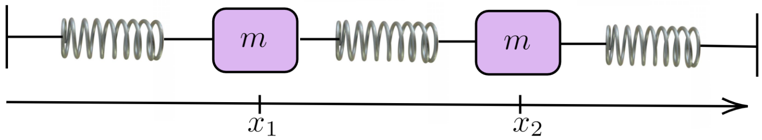


Figura 4 – Osciladores acoplados

Escrevemos as equações de movimento de cada corpo

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - \ell) + k(x_2 - x_2 - \ell)$$
$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - \ell) - k(x_2 - x_2 - \ell)$$

ℓ é o comprimento natural de cada mola.

É útil nesse ponto redefinir as posições

$$x_1' = x_1 - \ell$$
$$x_2' = x_2 - 2\ell$$

As novas variáveis medem o deslocamente em relação às posições de equilíbrio, com isso as equações ficam masi simples

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_1'}{\mathrm{d}t^2} = -kx_1' + k\left(x_2' - x_1'\right)$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_2'}{\mathrm{d}t^2} = -kx_2' - k\left(x_2' - x_1'\right)$$

Temos um sistema de equações diferenciais. Nesse caso específico, podemos resolver o sistema para $x_1(t) + x_2(t)$ e $x_1(t) - x_2(t)$, simplesmente por somar e subtrair as equações acima

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x_1' + x_2'\right) = -k\left(x_1' + x_2'\right)$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x_2' - x_1'\right) = -3k\left(x_2' - x_1'\right)$$

Agora a solução é conhecida

$$x_1(t) + x_2(t) = 2A_+ \cos\left(\omega_+ t + \phi_+\right)$$
$$x_1(t) - x_2(t) = 2A_- \cos\left(\omega_- t + \phi_-\right)$$

Com

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\omega_- = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

E obtemos as soluções dos movimentos individuas simplesmente somando e subtraindo as soluções encontradas

$$x_1(t) = A_+ \cos\left(\omega_+ t + \phi_+\right) + A_- \cos\left(\omega_- t + \phi_-\right)$$
$$x_2(t) = A_+ \cos\left(\omega_+ t + \phi_+\right) - A_- \cos\left(\omega_- t + \phi_-\right)$$

Consiguimos encontrar a solução sem grandes problemas, mas essa tarefa pode se tornar extremamente difícil se tivermos sistemas com muitos corpos, então, antes de discutir os resultados físicos associados com a solução, vamos resolver o problema utilizando outra técnica, que a princípio pode parecer mais difícil mas que será muito facilitará a generalização para oscilação de N corpos.

O método consiste em "chutarmos"uma solução do tipo $x(t) = Ae^{i\omega t}$ e escrevermos as equações de movimento em forma matricial, no intuito de determinar A e ω

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_1'}{\mathrm{d}t^2} = -kx_1' + k\left(x_2' - x_1'\right) = -2kx_1' + kx_2'$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_2'}{\mathrm{d}t^2} = -kx_2' - k\left(x_2' - x_1'\right) = kx_1' - 2kx_2'$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1'}{\mathrm{d}t^2} = -2\omega^2 x_1' + \omega^2 x_2'$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 x_2'}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2 x_1' - 2\omega^2 x_2'$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Essa é uma equação de autovetores a autovalores para o vetor solução

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = A\vec{x}$$

"Chutamos"uma solução do tipo

$$\vec{x} = \vec{\mathbf{C}} e^{\alpha t}$$

com

$$\vec{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \alpha^2 \vec{x} = A\vec{x}$$

$$(\alpha^2 - A)\vec{x} = 0$$

$$\det\left(\alpha^2 - A\right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \alpha^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix} = \left(\alpha^2 + 2\omega^2\right)^2 - \omega^4 = 0$$

$$\alpha = \pm i\omega \quad \text{ou} \quad \alpha = \pm i\sqrt{3}\omega$$

Agora inserimos as valores de α na equação

$$(\alpha^2 - A)\vec{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \alpha^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

Obtemos os valores

$$c_1 = c_2 \quad \text{para} \quad \alpha \pm i\sqrt{\omega}$$
$$c_1 = -c_2 \quad \text{para} \quad \alpha \pm i\sqrt{3\omega}$$

4 Forças Centrais

4.1 Coordenadas Polares

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + r\sin\theta\hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{y}}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{y}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\theta}$$
$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

4.2 Lei de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{r}}$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{r}}$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{dV}{dr}$$

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

$$m\ddot{r} = -\frac{dV}{dr} + \frac{L^2}{mr^3}$$

$$m\ddot{r} = \frac{dV_{ef}}{dr}$$

$$V_{ef} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

4.3 Energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta})(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Método alternativo

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = ab\cos\theta$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = ab\sin\theta$$

$$(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) + (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = (ab)^2$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$L^2 = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (rp)^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2$$

$$p^2 = \frac{L^2}{r^2} + \frac{1}{r^2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2$$

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = r(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) = rp_r$$

$$p^2 = \frac{L^2}{r^2} + p_r^2$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

4.4 Gravitação

4.5 Leis de Kepler

5 Movimento de Corpos Rígidos

(NUSSENZVEIG, 2013) (NUSSENZVEIG, 2018) (KLEPPNER; KOLENKOW, 2014) (MORIN, 2008) (MORIN, 2002) (FRENCH, 2017) (TONG, 2012) (TONG, 2005) (MARION, 2013)

Referências

FRENCH, A. P. *Vibrations and waves*. [S.l.]: CRC press, 2017.

KLEPPNER, D.; KOLENKOW, R. *An introduction to mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.

MARION, J. B. *Classical dynamics of particles and systems*. [S.l.]: Academic Press, 2013.

MORIN, D. Normal modes. *Encycl. Comput. Chem*, 2002.

MORIN, D. *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2013. v. 394.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 2.

TONG, D. Classical dynamics. *Wilberforce Road, UK*, v. 139, 2005.

TONG, D. *Dynamics and relativity*. [S.l.]: University of Cambridge, 2012.