# Dinâmica de uma corda Relativística

**Matheus Pereira, NUSP: 11813884**
**Lucas Paulino, NUSP: 10263927**
**Hector Freire, NUSP: 11224362**
**Lucas Eduardo , NUSP: 11820711**

*Instituto de Física,*
*Universidade de São Paulo,*
*Cidade Universitária, São Paulo, Brasil*

*E-mail:* matheus.coutinho9@usp.br
hectorfreire@usp.br
lucas.psantos@usp.br
lucas.et.machado@usp.br

Abstract:
Dentre as tentativas de criar uma teoria que pudesse unificar a física em suas diferentes esferas, se destaca a Teoria das Cordas, que postula a existência de cordas unidimensionais cujos diferentes modos de vibração dariam origem às diferentes partículas.
Embora em sua totalidade a teoria inclua diversos avanços da física moderna, em seu cerne está a descrição de uma corda de altíssima energia, e, portanto, relativística. Nesse trabalho, buscamos introduzir as bases da teoria das cordas por meio da dedução da dinâmica de tal sistema a partir dos conhecimentos adquiridos ao longo do curso de mecânica clássica, e exemplificar, assim, a importância desta área na descrição de problemas mais recentes da física.

[1]Corresponding author.

## Sumário

## 1 Introdução

É do conhecimento atual dos físicos a existência de 4 forças fundamentais da natureza, através das quais toda a matéria interage. Essas interações são a Eletromagnética, Gravitacional e as Forças Nucleares Forte e Fraca. Para a formulação de uma descrição precisa acerca da natureza dessas interações, é necessário considerar sistemas físicos cujas escalas de comprimento e energia são tais que somos inevitavelmente impelidos a levar em conta efeitos quânticos e relativísticos.

Criar modelos teóricos capazes de incorporar esses dois domínios da física é uma tarefa não trivial, já que a Mecânica Quântica não é, a priori, compatível com a Relatividade Especial. Para tal, foi necessário criar um novo formalismo, a Teoria Quântica de Campos (QFT), em que somos levados a pensar não mais em partículas pontuais, e sim em campos quânticos, pelos quais, grosseiramente falando, excitações se propagam, caracterizando interações, e a existência de partículas (quanta do campo) se manifesta por perturbações nesses campos. Os físicos alcançaram um sucesso sem precedentes na história da Ciência, ao obterem resultados experimentais extremamente acurados, que confirmaram as previsões teóricas da QFT.

Por meio da QFT, cujo nome designa na verdade um conjunto de teorias, 3 das 4 interações fundamentais foram entendidas. Porém, por não ser renormalizável, a Gravitação não admite tal formulação. Não existe, portanto, uma teoria da Gravitação Quântica. Existem muitas propostas para tal, e, dentre elas, talvez a mais famosa seja a Teoria de Cordas. A Teoria de Cordas surgiu, na verdade, para descrever a Força Nuclear Forte (A força responsável por manter o núcleo atômico coeso), e explicar a interação de partículas elementares, como quarks e glûons. Essa força possui a peculiar característica de se intensificar com a distância, o que chamou a atenção do jovem físico italiano Gabrielle Veneziano, que chegou a propor a existência objetos unidimensionais intermediando a interação entre os quarks (tecnicamente, tal característica está associada à aparição da função Beta de Euler em amplitudes de espalhamento de Mésons).

A Teoria de Cordas não trata, no entanto, de física nuclear, como inicialmente proposto, isso porque a Cromodinâmica Quântica deu conta de explicar a Interação forte e dar previsões compatíveis com os experimentos e rapidamente a Teoria de Cordas foi descartada, pelo menos para esse propósito. Ainda assim, os físicos construíram modelos em que todos os bósons, isto é, partículas intermediadoras de forças, são na verdade objetos vibrantes unidimensionais. Com esse formalismo, o gráviton, a partícula hipotética que caracteriza a interação gravitacional, pode ser naturalmente incluída, a ideia é que cada partícula do modelo padrão corresponde a uma corda com um diferente modo de vibração, uma correspondência análoga às diferentes notas musicais produzidas por diferentes modos de vibração da corda de um violino. Posteriormente, todas as partículas do modelo padrão foram incluídas, as razões técnicas estão associadas à implementação de supersimetria (uma simetria entre bósons e férmions) em ordem de eliminar uma partícula que aparecia na antiga teoria de cordas chamada Tachion, cuja velocidade ultrapassa a velocidade da luz, mas o ponto é que a Teoria de Cordas é uma Teoria de Gravidade Quântica. Talvez não seja A Teoria, mas certamente é uma. Ademais, a Teoria de Cordas apresenta a possibilidade de dar uma descrição unificada de todas as teorias físicas fundamentais, um sonho de muitos teóricos que buscam uma teoria de tudo.

Como se a proposta da Gravitação Quântica e descrição unificada da física não fosse suficiente para motivar o estudo da Teoria de Cordas, há ainda um aspecto digno de menção que motiva grande parte da comunidade de físicos teóricos a investir esforços em desenvolver a teoria, associado à existência de uma dualidade conjecturada pelo físico argentino Juan Maldacena, que relaciona uma Teoria de Cordas a uma Teoria Quântica de Campos. Sem adentrar em detalhes técnicos, essa dualidade, chamada correspondência AdS/CFT, tem contribuído para enormes avanços em várias áreas da física, como a Física Nuclear, Cosmologia e Física da Matéria Condensada.

Dadas a apresentação *in a nutshell* da Teoria de Cordas, advertimos que esse trabalho não ambiciona um tratamento completo da Teoria, que é extremamente complexa e requer conhecimentos avançados de Teoria Quântica de Campos e Relatividade Geral. O problema que abordaremos é o da descrição de um objeto unidimensional vibrante e de alta energia, isto é, relativístico, chegar nas equações de movimento da corda e resolver suas equações. A motivação para o problema está associada à Teoria de Cordas, porém a Teoria de Cordas necessita de mais uma série de ingredientes que não trataremos aqui, como a quantização dessa corda. A linguagem que utilizaremos ao longo de todo o texto é a da Mecânica Lagrangeana.

A Física Moderna se baseia fortemente na análise das simetrias, que é naturalmente implementada com o formalismo de Lagrange, e, além disso, a relatividade restrita também pode ser expressa com uma descrição Lagrangeana. A descrição de sistemas mecânicos de muitas partículas e sistemas contínuos, as simetrias, e a relatividade especial serão fundamentais ao longo deste trabalho, e portanto desenvolvemos esses temas à luz da mecânica clássica, para por fim tratarmos a corda relativística. Pode-se pensar que este é uma brevíssima introdução à Teoria de Cordas (um primeiro passo) para proficientes em Mecânica Clássica.

Esperamos com isso termos sido capazes de justificar a escolha do tema, em suma, cremos que a Teoria de Cordas tem muito a oferecer. Entretanto, dentro do nosso contexto da Mecânica Clássica, a Teoria de Cordas não terá um papel central, diria que ela na verdade nos servirá para evidenciar e fundamentar a essencialidade da Mecânica Clássica na Física Moderna, sobretudo no desenvolvimento de teorias fundamentais, que encontram-se no domínio de altas energias, na fronteira do nosso conhecimento. A Teoria de Cordas será o nosso meio e a centralidade da Mecânica Clássica será o nosso fim.

## 2 Metodologia

Nós propomos empregar uma metodologia que começa com o estudo de cordas não relativísticas na formulação Lagrangeana. Visamos com isto exemplificar que um sistema contínuo, no nosso caso, uma corda pode ser descrita utilizando o formalismo da mecâanica clássica. Vale ressaltar que na Seção 3.1 incluímos uma demostração dos Elementos da mecânica Lagrangeana que utilizaremos neste trabalho. Para começar iremos deduzir a Equação de Onda (Equação 2.1), considerando que o movimento ondulatório na corda se dá pela oscilaçõ de $N$ osciladores acoplados, e escrevendo a Lagrangeana desse sistema (Equação 2.2).

$$\rho\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

$$L = T - V \tag{2.2}$$

$T$ é a energia cinética e $V$ a energia potencial.

Como estamos tratando de um sistema contínuo, nossa Lagrangeana se torna uma densidade Lagrangeana (Equação 2.3), e tendo em mãos a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}$ podemos agora utilizar do príncipio de Hamilton (Equação 2.4) e deduzir as equações de movimento para a corda não relatívistica, fazendo a variação diretamente na ação.

$$L = \int \mathcal{L}\ dx \tag{2.3}$$

$$S = \int \mathcal{L}\ dt \tag{2.4}$$

Assim como feito para a corda não relativística, em todo trabalho daremos preferência por encontrar as equações de movimento fazendo uma variação das coordenadas diretamente na ação, e impondo que a ação é invariante $\delta S = 0$. Uma dedução completa das Equações de Euler-Lagrange a partir do Princípio de Hamilton está na Seção 3.1.

Partindo desse estudo inicial básico, sabemos que para formular a dinâmica de um sistema, podemos obter as equações de movimento ou uma ação. Utilizaremos da ação para desenvolver as equações de movimento para uma partícula pontual relativística. Os conceitos necessários nesse estudo serão desenvolvidos em uma seção anterior a este estudo, onde abordamos a Relatividade Especial na formulação Lagrangeana. A ação para esta partícula pontual relativística é dada pela Equação 2.5 abaixo.

$$S = -mc\int_{\mathcal{P}} ds \tag{2.5}$$

Esta ação é igual a menos a energia de repouso restante vezes o tempo próprio. A uma primeira vista podemos achar esta expressão muito simples, contudo podemos agora tornar seu conteúdo mais familiar escolhendo um observador de Lorentz específico e expressa-lá pela Equação 2.6.

$$S = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \tag{2.6}$$

Desse modo podemos calcular as equações de movimento para a partícula relativísitica partindo da variação da ação que é dada pela Equação 2.7 .

$$\delta S = -mc \int \delta(ds) \tag{2.7}$$

E por último inspirados pelo estudo da partícula pontual relativística iremos estudar a corda relativística, sendo este um passo onde consideramos a corda como um sistema contínuo, que contém infinitas partículas relativísticas (altas energias). Usamos aqui que na teoria de cordas a ação da corda relativística é proporcional a um elemento de área dA (Equação 2.8).

$$S = \alpha \int dA \tag{2.8}$$

Iremos trabalhar com isso e construir a ação da corda, a ação de Nambu-Goto (Equação 2.9) que é a ação mais simples que descreve uma corda relativística. Se formos mais além e aplicarmos as ideias da mecânica quântica às ações Nambu-Goto, podemos deduzir que cada corda pode vibrar em muitos diferentes modos, e cada estado vibracional representa uma partícula diferente. Vale ressaltar que a ação de Nambu-Goto também é usada em outras teorias que investigam, por exemplo, cordas cósmicas e também cordas infinitamente finas, usando os príncipios da Mecânica de Lagrange. Em seguida partindo da ação de Nambu-Goto, iremos deduzir as equações de movimento para a corda relativística, utilizando o formalismo de Lagrange, ou seja, a partir da variação da Lagrangeana.

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \ \gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}) \tag{2.9}$$

Por fim, a partir da ação de Nambu-Goto, deduzimos uma equação mais geral, a Ação de Polyakov (Equação 2.9). Pode-se demostrar que estas duas são equivalentes. A ação de Polyakov é uma ação da teoria conforme de campo (CFT) que descreve a variedade bidimensional que faz a incorporação de uma corda no espaço-tempo na teoria das cordas.

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

# 3 Desenvolvimento

## 3.1 Elementos da mecânica Lagrangeana

Há pelo menos duas formas de se chegar ao formalismo Lagrangeano, um é partindo da equação de Newton, e utilizando o chamado princípio de D'alembert, a outra é baseada no princípio de mínima ação de Hamilton. Nesta seção iremos mostrar os principais elementos da mecânica Lagrangeana utilizados no desenvolvimento de nosso trabalho.

### 3.1.1 Princípio de Hamilton e Equações de Euler-Lagrange

Neste trabalho daremos preferência por encontrar as equações de movimento fazendo uma variação das coordenadas diretamente na ação, e impondo que a ação é invariante $\delta S = 0$. Então, consideremos a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, L \tag{3.1}$$

Consideremos uma variação nas coordenadas de seguinte forma

$$q(t) \to q'(t) = q(t) + \delta q(t)$$

Essas variações devem se anular nos extremos

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

A variação da ação é definida como

$$\delta S = S[q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}] - S[q, \dot{q}] = 0$$

Agora, ao impor que $\delta S = 0$ obteremos uma equação dinâmica para $L$, que nos permitirá, dado uma função $L$ que caracteriza o sistema, determinar a trajetória as equações de movimento $q(t)$

$$\delta S = \int L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q})dt - L(q, \dot{q})dt$$

$$L(q + \delta q) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + L(q)$$

$$L(\dot{q} + \delta \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} + L(\dot{q})$$

$$L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + L(q,\dot{q})$$

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right) \mathrm{d}t = \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q\right) \mathrm{d}t$$

Podemos integrar o segundo termo por partes

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right)\right]$$

A integral da derivada total fornece um termo proporcional às variações $\delta q$ mas como elas são nulas nos extremos ficamos simplesmente com

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q.dt = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Se definirmos $L$ (denominada de função lagrangeana) como $L = T - V$, onde $T$ é a energia cinética e $V$ é a energia potencial, obtemos imediatamente a segunda lei de Newton.

### 3.1.2 Variação diretamente na ação

Em ordem de exemplificar o cálculo fazendo a variação diretamente na ação, vamos considerar um caso genérico e demonstrar que recuperamos a 2ª Lei de Newton como esperamos. Portanto, consideremos a Lagrangeana de uma partícula que sofre a influência de um potencial $V(x)$ qualquer.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2 - V(x) \tag{3.2}$$

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2 - V(x)\right\} \mathrm{d}t \tag{3.3}$$

Agora vamos considerar a variação da ação devido a variações nas coordenadas da forma

$$x \to x' = x + \delta x \tag{3.4}$$

Sendo que a variação é nula nas extremidades

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$$

A nova ação será

$$S[x'] = S[x + \delta x] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x + \delta x) \right)^2 - V(x + \delta x) \right\} \mathrm{d}t \tag{3.5}$$

$$S[x + \delta x] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{m}{2}\dot{x}^2 + m\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x - V(x) - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\delta x + O(\delta x^2) \right\} \mathrm{d}t$$

Duas observações: como estamos considerando apenas variações infinitesimais, podemos desprezar os termos quadráticos de $\delta x$. Além disso, notamos que a ação original reaparece.

$$S[x + \delta x] = S[x] + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ m\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\delta x \right\} \mathrm{d}t$$

Agora integramos o primeiro termo por partes

$$S[x + \delta x] - S[x] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -m\ddot{x}\delta x - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\delta x \right\} \mathrm{d}t + \left[ m\ddot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x \right]_{t_1}^{t_2}$$

Como impomos que a variação é nula nos extremos, o último termo é nulo, portanto

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( -m\ddot{x} - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \right) \delta x \, \mathrm{d}t \tag{3.6}$$

$$\delta S = 0$$

Recuperamos por fim a equação de movimento já esperada

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{3.7}$$

Esse será o método usual que adotaremos neste trabalho para encontrar as equações de movimento.

## 3.2 Movimento Ondulatório em uma corda não relativística

Nesta seção introduziremos o assunto por considerar o caso mais simples possível do movimento ondulatório em uma corda não relativística.

### 3.2.1 Oscilações e Oscilações Acopladas

Começamos nosso estudo relembrando oscilações e oscilações acopladas, de onde se pode deduzir a equação de onda. Diz-se que dois osciladores estão acoplados quando o movimento de um está vinculado com o movimento do outro, sendo o exemplo mais famoso de oscilações acopladas o pêndulo duplo. Para nosso estudo consideramos os osciladores acoplados da Figura 1 (movimento unidimensional). As referências para essa seção são as seguintes [11] e [8].

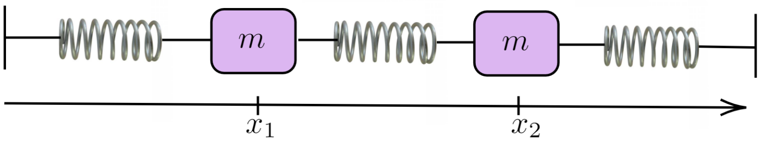



**Figura 1**. Dois osciladores acoplados de massa $m$, acoplados por molas de constante elástica $k$ em sua posição de equilíbrio.

A partir da 1ª Lei de Newton podemos escrever a equação geral desses dois osciladores acoplados.

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - kx_1 + kx_2 = -2kx_1 + kx_2$$
$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 + kx_1 - kx_2 = -2kx_2 + kx_1$$

Não estamos interessados neste trabalho em determinar as posições dos osciladores em função do tempo, mas vale ressaltar que para obter essas funções devemos resolver as equações acima considerando condições iniciais, sendo estas as posições e velocidades quanto $t = 0$.

### 3.2.2 Limite $N$ osciladores acoplados e equação de Onda

Vamos agora considerar um sistema com $N$ osciladores acoplados e $q_k$, $k \in 1, 2, \ldots, N$ as coordenadas generalizadas, que são os deslocamentos transversais, utilizando a restrição para os extremos fixos.

$$q_0 = q_{N+1} = 0$$

A Lagrangeana pode ser construída então como

$$L = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{2}\dot{q}_k^2 - \sum_{k=0}^{N} \frac{E}{2\Delta x}(q_{k+1} - q_k)^2$$

Escrevendo $q_k(t) = \xi(x,t)$ e $q_{k+1} = \xi(x+\Delta x, t)$ e multiplicando por $\Delta x/\Delta x$, temos

$$L = \frac{1}{2}\sum \Delta x \frac{m_k}{\Delta x}\dot{\xi}(x,t)^2 - \frac{1}{2}\sum \Delta x E \left(\frac{\xi(x+\Delta x,t) - \xi x,t)}{\Delta x}\right)^2$$

No limite em que $N \to \infty$, $\Delta x \to 0$, a soma se torna uma integral, e a fração $\frac{m_k}{\Delta x} \to \rho$, sendo $\rho$ a densidade de massa

$$L = \int_0^l dx \left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - \frac{E}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]$$

Com densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - \frac{E}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

Há ainda uma segunda forma de se obter a lagrangiana de uma corda, por completeza a apresentaremos também.

Consideremos um elemento infinitesimal d$x$ de massa d$m$, e que a corda possui uma densidade $\mu_0$, tensão $T_0$ e comprimento $a$. Consideremos que esse elemento da corda oscila na direção transversal, e que a altura desse elemento é descrita por uma função $y(x,t)$. A energia cinética da corda pode ser escrita como

$$T = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\mu_0 \, \mathrm{d}x\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \tag{3.8}$$

onde $\mu \, \mathrm{d}x$ é igual a d$m$

Note que a energia cinética da corda corresponde à soma da energia de cada elemento infinitesimal, o que resulta em uma integração ao longo da corda, uma consequência direta do fato de que a corda constitui um sistema contínuo.

Para a energia potencial, temos

$$V = \int_0^a \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{3.9}$$

Portanto, obtemos uma expressão para a Lagrangeana

$$L = \int_0^a \left[\frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{3.10}$$

Como a Lagrangeana possui uma integral, é útil definirmos a expressão que está sendo integrada e trabalhar com ela, a chamamos de densidade Lagrangeana, denotada por $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{3.11}$$

$$L = \int_0^a \mathrm{d}x\, \mathcal{L} \tag{3.12}$$

Notamos que agora ação possui duas integrais, uma sobre o tempo e outra sobre o espaço

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, L = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \int_0^a \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \tag{3.13}$$

Por fim, podemos checar se essa é mesmo a ação que descreve o movimento da corda, para tanto nós executaremos a variação da Lagrangeana, na esperança de recuperar a equação das cordas vibrantes (Equação 2.1).

Tomemos as variações na coordenada $y$ como

$$y(t, x) \to y(t, x) + \delta y(t, x) \tag{3.14}$$

Importante tomar cuidado em relação ao fato de que agora a variação depende de duas variáveis.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_0^a \mathrm{d}x \left[\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial(\delta y)}{\partial t} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial(\delta y)}{\partial x}\right] \tag{3.15}$$

integrando por partes, obtemos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_0^a \mathrm{d}x \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t}\delta y\right) - \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y + \frac{\partial}{\partial x}\left(-T_0 \frac{\partial y}{\partial x}\delta y\right) + T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta y\right]$$

$$\delta S = \int_0^a \left[\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t}\delta y\right]_{t=t_1}^{t=t_2} \mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} \left[-T_0 \frac{\partial y}{\partial x}\delta y\right]_{x=0}^{x=a} \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_0^a \mathrm{d}x \left(\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\delta y$$

A variação deve ser nula nos extremos

$$y(x, t_1) = y(x, t_2) = 0$$
$$y(0, t) = y(a, t) = 0$$

Essa condição faz com que os dois primeiros termos sejam zero. Para que $\delta S = 0$, temos

$$\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{3.16}$$

Que é a equação de onda para a corda em uma dimensão transversal. Da equação de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{3.17}$$

Percebe-se que a velocidade da onda é

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \tag{3.18}$$

Definimos duas novas quantidades, em termos das quais expressaremos a equação de movimento geral de uma corda

$$\mathcal{P}^t = \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \mathcal{P}^x = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \tag{3.19}$$

E então obtemos que

$$\frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} = 0 \tag{3.20}$$

A expressão acima é uma versão equivalente da equação de onda usual.

Neste problema fizemos a variação diretamente na ação, mas notamos que o objeto com o qual trabalhamos é um campo, pois $y = y(x,t)$, há uma forma generalizada das equações de Euler-Lagrange para campos, não demonstraremos-a aqui, mas a sua forma para um campo genérico $\varphi(x,t)$ é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} = 0$$

### 3.2.3 Solução Geral da Equação de Onda

Obtido a equação de onda unidimensional acima, buscamos encontrar uma solução geral. Podemos reescrever a equação como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) y(x,t) = 0$$

Considerando que $y(x,t)$ é analítica, podemos escrever sem perda de generalidade

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)y(x,t)=0 \tag{3.21}$$

Introduzindo as variáveis

$$\zeta = x+ct$$

$$\eta = x-ct$$

Podemos escrever os operadores diferenciais como

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\eta}=c\frac{\partial}{\partial\zeta}-c\frac{\partial}{\partial\eta}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial}{\partial\eta}$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}=c\frac{\partial}{\partial\zeta}-c\frac{\partial}{\partial\eta}+c\frac{\partial}{\partial\zeta}+c\frac{\partial}{\partial\eta}=2c\frac{\partial}{\partial\zeta}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}=c\frac{\partial}{\partial\zeta}-c\frac{\partial}{\partial\eta}-c\frac{\partial}{\partial\zeta}-c\frac{\partial}{\partial\eta}=-2c\frac{\partial}{\partial\eta}$$

E substituindo na equação 3.21, temos

$$\frac{\partial^2 y(\zeta,\eta)}{\partial\zeta\partial\eta}=0$$

A derivada parcial é somente zero se a função não depende da variável. Portanto, uma função puramente de $\eta$ ou de $\zeta$, incluindo uma eventual constante, leva a derivada parcial a ser zero e satisfaz essa equação. Além disso, a soma dessas funções também satisfaz a equação, e é portanto a solução mais geral.

$$y(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct) \tag{3.22}$$

Onde $f$ e $g$ são funções arbitrárias. A verificação é imediata

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x+ct)+g(x-ct))=f''(x+ct)+g''(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(x+ct)+g(x-ct))=c^2f''(x+ct)-c^2g''(x+ct)$$

E colocando na equação de onda,

$$c^2f''(x+ct)-c^2g''(x+ct)-c^2(f''(x+ct)+g''(x-ct))=0$$

### 3.2.4 Modos normais de Vibração

Uma solução de particular importância da equação (3.17) é a chamada solução harmônica

$$y(x,t) = f(x - vt) = A\cos(k(x - vt) + \delta) \tag{3.23}$$

Definido a frequência angular de oscilação $\omega = kv$, temos

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) \tag{3.24}$$

Consideremos agora o caso em que a extremidades da corda estão fixas $y(0,t) = y(L,t) = 0$, sendo $L$ o comprimento da corda. De forma análoga ao que tínhamos em sistemas de osciladores acoplados, um modo normal de vibração é caracterizado pelo fato de que todos os elementos da corda oscilam com a mesma frequência $\omega$ e uma mesma constante de fase $\delta$. Ou seja a dependência temporal é igual para todo ponto da corda, e um dado ponto $x$ oscila com uma amplitude descrita por uma função $A(x)$, caracterizando completamente o modo normal de vibração.

$$y(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \delta) \tag{3.25}$$

Podemos obter uma espécie de equação de vínculo para $A(x)$, já que a função $y(x,t)$ deve satisfazer a equação de onda, de forma que obtemos a seguite equação diferencial para $A(x)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}x^2} + k^2 A = 0 \tag{3.26}$$

Sendo $k = \omega/v$

A equação acima é simplesmente a equação do oscilador harmônico simples, cuja solução é bem conhecida

$$A(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx) \tag{3.27}$$

Impondo a condição de extremidades fixas($A(0) = A(L) = 0$) obtemos novos vínculos na solução

$$A(0) = 0 \Rightarrow A(x) = b\sin(kx)$$

$$A(L) = 0 \Rightarrow A\sin(kL) = 0$$

A segunda condição nos mostra que $k$ só pode assumir determinados valores discretos

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{3.28}$$

Como $\omega = kv$, a frequência também é limitada a valores discretos, as frequências dos modos normais de vibração

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}v \tag{3.29}$$

Não temos nenhuma restrição para a solução $y(x,t)$ em função dos $n$ possíveis valores de $k$ e $\omega$, de sorte que qualquer $y_n(x,t) = b_n \sin(n\pi x/L)\cos(n\pi vt/L + \delta_n)$ é uma solução possível da equação de onda.

Como estamos estamos tratando de equações lineares é válido o princípio da superposição, assim como no caso de osciladores acoplados, onde temos o movimento geral sendo descrito pela soma dos modos normais, com as amplitudes e fases devidamente ajustadas pelas condições iniciais. Aqui também podemois expressar o movimento geral como uma superposição de todos os modos normais

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}vt + \delta_n\right) \tag{3.30}$$

Quando tratarmos da corda relativística também expressaremos a solução em modos normais, e daremos signicado físico para os coeficientes da expansão.

## 3.3 Relatividade Especial na formulação Lagrangeana

A teoria da relatividade especial ou restrita de Einstein (1905) representa, juntamente com a mecânica quântica, uma cisão dos paradigmas nos quais repousa a física clássica. Ela nos fornece uma vastidão de efeitos físicos surpreendentes e inimagináveis para nossa intuição cotidiana, e nos leva, por exemplo, a repensar a noção de tempo como uma grandeza absoluta. Precisamos conhecer bem essa nova física que surge em altas energias, pois queremos descrever o movimento de uma corda nesse tipo de regime. As refêrencias para esta seção são as seguintes [13] e [14].

### 3.3.1 Intervalo Espaço-tempo e transformações de Lorentz

Os postulados da Relatividade Especial afirmam que as leis físicas são as mesmas para qualquer referencial inercial, e que a velocidade da luz é a mesma para qualquer referencial inercial.

A invariância da velocidade da luz é talvez um dos fatos experimentais mais bem testados de toda a física. Sempre é relevante deixar claro que a física é uma ciência experimental, e que os modelos teóricos devem ser capazes de produzir previsões testáveis em experimentos. Mas o caso da relatividade é ligeiramente diferente, pois partimos de um dado experimental e com ele toda a física de altas energias é construída.

Na física Newtoniana o módulo de um vetor no espaço é um invariante, tipicamente, as suas componentes podem ser transformadas e assumirem diferentes valores para diferentes referenciais inerciais, mas a norma dele é a mesma. Com isso, nós investigamos quais são as transformações que respeitam essa condição, para o caso da física não relativística nós fizemos essa análise no apêndice 1, sendo que ela nos permitiu chegar à expressão apropriada para uma partícula livre, bem como para um sistema de partículas.

De forma semelhante, na física relativística temos uma nova quantidade invariante e novas transformações possíveis que respeitam tal condição. Do apêndice 1 vimos que a Lei da inércia e a relatividade de Galileu derivam de propriedades do espaço, como homogeneidade e isotropia, nós abandonaremos tais propriedades mas faremos o requerimento extra de que a velocidade da luz é uma constante universal. Na relatividade especial o intervalo invariante é o intervalo espaço-tempo

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{x}^2 \tag{3.31}$$

que pode ser escrito de forma sintética usando a métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de forma que

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{3.32}$$

Podemos ver que o intervalo d$s$ é um tipo de norma em 4 dimensões de um espaço vetorial chamado espaço de Minkowski $\mathbb{M}^4$. Um ponto no espaço de Minkowski representa um evento no espaço-tempo.

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

As matrices $\Lambda$ que mantém a norma d$s$ invariante respeitam a condição

$$\Lambda^\mu_\nu \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma = \eta_{\nu\sigma} \tag{3.34}$$

ou em notação matricial

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{3.35}$$

Não faremos as deduções aqui, mas as matrizes que respeitam essa condição, e pertencem ao chamado grupo de Lorentz, possuem a seguinte forma

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ e $\beta = v/c$

A aplicação de uma transformação de Lorentz na direção $x$ tem o seguinte efeito sobre um quadrivetor $X^\mu$

$$X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu \tag{3.36}$$

em componentes

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta t) \\ t' = \gamma(t - \beta x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Essas matrizes possuem as rotações usuais e os chamados boosts de Lorentz, que são análogos aos boosts de Galileu, dizemos que o grupo de Lorentz SO$(1, 3)$ possui 6 geradores $J_{ab}$, e podemos expressar um elemento do grupo de Lorentz em termos dos seus geradores

$$\Lambda^\mu_\nu = \left(e^{i\alpha^{ab}J_{ab}}\right)^\mu_\nu \tag{3.37}$$

São várias as consequências das transformações de Lorentz, como a perda simultaneidade absoluta, causalidade, dilatação do tempo, contração do espaço e outras. Não trataremos desses efeitos daqui, e nos preocupamos agora em encontrar uma ação que nos permita encontrar as equações de movimento para uma partícula que respeita às transformações de Lorentz. Notamos que agora a trajetória de uma partícula não é mais representada por uma série de pontos no espaço, mas sim por uma sucessão de eventos que formam uma curva no espaço-tempo. Frequentemente, pontos e curvas no espaço-tempo são representadas em diagramas de Minkowski

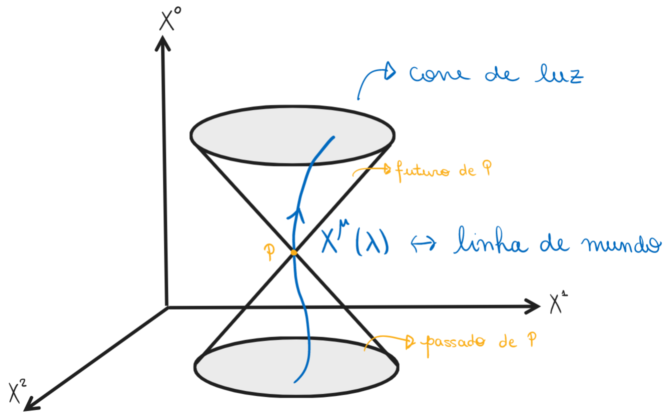



**Figura 2**. Trajetória de uma partícula no espaço de Minkowski

Podemos notar na figura acima que a trajetória de uma partícula tem de estar confinada numa certa região do espaço, que recebe o nome de cone de luz. A identificação do cone de luz é muito útil, pois vemos que uma partícula só poderia sair deste cone de luz se ultrapassasse a velocidade da luz. Também podemos estudar as relações de causalidade entre pontos do espaço-tempo, já que existem eventos que não podem causar outros, pois exigiria que uma informação saísse do cone de luz, o que não pode ocorrer de acordo com os postulados da relatividade especial.

Temos ainda que parametrizar a trajetória, e no espaço euclidiano uma curva no espaço é parametrizada pelo tempo, no entanto o tempo não é uma entidade absoluta na relatividade especial, e portanto não faz sentido usá-lo como parâmetro. Na figura acima, representamos a curva com um certo parâmetro arbitrário $\lambda$, de fato, como veremos adiante, a parametrização é arbitrária e devemos escolher a que for mais conveniente. Frequentemente usamos o tempo próprio $\tau$ como parâmetro, que o é tempo medido no referencial da partícula, o referencial em que ela está em repouso.

### 3.3.2 Ação de uma Partícula Relativística

Uma vez discutida minimamente a teoria da relatividade especial, estamos aptos a implementar todas as ideias apresentadas à nossa forma de tratar os sistemas físicos, em termos de uma ação que contém toda a informação acerca do sistema e suas eventuais interações e que nos permite conhecer as equações de movimento. Portanto, nesta seção nos preocuparemos em escrever ações que produzam equações de movimento invariantes por transformação de Lorentz.

Os requerimentos que temos para a ação são basicamente que ela seja invariante de Lorentz e que ela produza a ação já conhecida no limite não relativístico. Bem, o que sabemos com toda a certeza que é invariante é o elemento infinitesimal $\mathrm{d}s$, por construção, podemos utilizá-lo como um primeiro palpite. Verifiquemos se ele reproduz a dinâmica não relativística no limite $v << c$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x^\mu} \tag{3.38}$$

$$\sqrt{\mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x^\mu} = \sqrt{c^2 \, \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2} = c \, \mathrm{d}t \sqrt{1 - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^2}{c^2 \, \mathrm{d}t^2}}$$

$$\sqrt{\mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x^\mu} = \mathrm{d}t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\sqrt{\mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x^\mu} \simeq c \, \mathrm{d}t \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \ldots\right)$$

O termo $v^2/2$ nos lembra energia cinética, o que nos indica que estamos em um bom caminho, e também que devemos incluir a massa $m$. Consideremos a seguinte ação

$$S = -mc \int_{\mathcal{P}} \mathrm{d}s \tag{3.39}$$

ou

$$S = -mc \int \sqrt{\mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x^\mu} \tag{3.40}$$

Agora o limite não relativística produz a seguinte ação

$$S \simeq -mc^2 \int \mathrm{d}t \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \ldots\right)$$

$$S \simeq \int \mathrm{d}t \left(\frac{1}{2}mv^2 - mc^2 + \ldots\right)$$

A menos do fator $mc^2$, a ação é exatamente o que esperávamos para uma partícula não relativística livre, o significado do termo adicional ficará claro em breve.

Antes de procurarmos as equações de movimento produzidas por esta ação, vamos explorar uma propriedade dela muito notável e que será muito útil daqui pra frente, que é a invariância por reparametrização

### 3.3.3 Invariância por reparametrização

Para calcularmos a integral da ação pode ser útil parametrizar a trajetória da partícula. A invariância por reparametrização significa que o valor da ação é independente da parametrização escolhida no cálculo. Para a parametrização da trajetória $\mathcal{P}$ da partícula pontual usamos um parâmetro $\tau$. Logo a expressão das coordenadas $x^\mu$ em função de $\tau$ para a trajetória da partícula será,

$$x^\mu = x^\mu(\tau)$$

E agora nós expressamos o integrando $ds$ usando a parametrização da trajetória. Portanto

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x_\mu \, \mathrm{d}x^\mu} = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \, \mathrm{d}x^\mu \, \mathrm{d}x^\nu}$$

Para fazer o cálculos devemos escolher um parâmetro $\lambda$, de forma que o integrando se torna

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}} \, \mathrm{d}\lambda$$

Já a ação da partícula pontual relatívistica toma a seguinte forma,

$$S = -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\, \mathrm{d}\lambda \tag{3.41}$$

E por fim consideremos uma reparametrização $\lambda = \lambda(\tau)$, de forma que

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda}\, \mathrm{d}\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

$$S = -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau$$

$$S = -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}}\, \mathrm{d}\tau \tag{3.42}$$

Vale ressaltar que podemos reparametrizar a trajetória, e o valor da ação manterá o mesmo. Então, $S$ é invariante por reparametrização.

### 3.3.4 Equação de movimento

Dado que encontramos uma ação que atende os nossos requerimentos físicos, vamos fazer a sua variação em ordem de encontrar as equações de movimento. Faremos variando diretamente a ação mas poderíamos usar as equações de Euler-Lagrange também, é apenas uma conveniência. Temos o seguinte,

$$\delta S = -mc \int \delta(\mathrm{d}s)$$

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu$$

$$\delta(\mathrm{d}s^2) = \eta_{\mu\nu} \{\mathrm{d}x^\mu\, \delta(\mathrm{d}x^\nu) + \delta(\mathrm{d}x^\mu)\, \mathrm{d}x^\nu\}$$

$$\delta(\mathrm{d}s^2) = \{\mathrm{d}x_\nu\, \delta(\mathrm{d}x^\nu) + \mathrm{d}x_\mu\, \delta(\mathrm{d}x^\mu)\}$$

Como ambos os índices estão somados, podemos considerar um único índice sem representar nenhuma inconsistência

$$\delta(\mathrm{d}s^2) = 2\, \mathrm{d}x_\mu\, \delta(\mathrm{d}x^\mu)$$

$$\delta(\mathrm{d}x^\mu) = \mathrm{d}(\delta x^\mu)$$

$$\delta(\mathrm{d}s^2) = 2\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}(\delta x^\mu) \tag{3.43}$$

Por outro lado, sabemos também que

$$\delta(\mathrm{d}s^2) = 2\,\mathrm{d}s\,\delta(\mathrm{d}s) \tag{3.44}$$

Igualando as expressões (3.35) e (3.36), obtemos

$$\delta(\mathrm{d}s) = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}(\delta x^\mu) \tag{3.45}$$

Portanto,

$$\delta S = -mc\int \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}(\delta x^\mu)$$

Tomamos a parametrização $x^\mu = x^\mu(\tau)$

$$\delta S = -mc\int \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}(\delta x^\mu)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{3.46}$$

Agora integramos por partes

$$\delta S = mc\int \mathrm{d}\tau\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\right)\delta x^\mu - mc\int \mathrm{d}\tau\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\delta x^\mu\right)$$

Descartamos o termo de superfície, a derivada total, e ficamos com

$$\delta S = \int \mathrm{d}\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(mc\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\right)\delta x^\mu \tag{3.47}$$

É útil neste ponto identificarmos o termo entre parênteses como um momento relativístico

$$\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s} = u_\mu$$

$$p_\mu = mcu_\mu \tag{3.48}$$

$$\delta S = \int \mathrm{d}\tau\,\delta x^\mu\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{3.49}$$

Concluímos que a equação de movimento de uma partícula livre relativística é

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{3.50}$$

Pela invariância da reparametrização, podemos escolher uma outra parametrização conveniente. Se tomarmos $\tau \to s$, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} = 0 \tag{3.51}$$

### 3.3.5 Momento e Energia

Para estudar o momento e a energia de uma partícula relativística vamos olhar para as simetrias da ação, no caso a simetria associada a translações, do tipo

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \tag{3.52}$$

$$x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu \tag{3.53}$$

Ao executar uma transformação nas coordenadas tipicamente a lagrangeana também muda

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$$

Mas se pedimos que a ação seja invariante por translações então

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

A variação da Lagrangeana pode ser expressa como

$$\partial\mathcal{L} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\delta\dot{x}^\mu \tag{3.54}$$

No caso das translações, temos $\delta x^\mu = \epsilon^\mu$ e $\delta\dot{x}^\mu = 0$, e portanto

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\epsilon^\mu = 0 \tag{3.55}$$

Como $\epsilon^\mu$ é um quadrivetor constante e arbitrário, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0$$

Pela equação de Euler-Lagrange, sabemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

definido o momento canonicamente conjugado

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \equiv p^{\mu} \tag{3.56}$$

Temos que a simetria de translação implica a conservação do momento

$$\frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{3.57}$$

No caso da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = mc\sqrt{\dot{x}_{\alpha}\dot{x}^{\alpha}}$$

O momento é

$$p^{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{mc\dot{x}^{\mu}}{\sqrt{\dot{x}_{\mu}\dot{x}^{\mu}}} \tag{3.58}$$

Devido a invariância de parametrização é útil utilizar $\lambda = s$ como parâmetro, pois assim o denominador da expressão acima é igual a 1

$$p^{\mu} = mc\dot{x}^{\mu} = mcu^{\mu} \tag{3.59}$$

Ao abrir a expressão acima, obtemos

$$p^{\mu} = mc\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} = mc\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\sqrt{c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2}}$$

$$p^{\mu} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}$$

$$p^{\mu} = m\gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

Por análise dimensional, vemos que a primeira componente de unidade de energia/c, o que está em concordância com o que intuitivamente esperávamos, pois na física não relativística a simetria associada às translações no tempo estavam associadas à conservação da energia. Podemos escrever o quadrimomento como

$$p^{\mu} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

sendo que

$$E = mc^2\gamma \tag{3.62}$$

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \tag{3.63}$$

Podemos expandir a equação da energia no limite $v << c$, obtemos

$$E \approx mc^2\left(1 + \frac{\vec{v}^2}{2c^2}\right) \approx mc^2 + \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \cdots \tag{3.64}$$

E o mesmo fator $mc^2$ aparece, cujo nome é energia de repouso, que é uma energia intrínseca da partícula, daí vem a ideia de que massa pode ser convertida em energia e vice-versa. Notamos ainda que como a energia é proporcional à massa vezes a velocidade da luz ao quadrado, isso implica que uma pequena massa pode ser convertida em uma grande quantidade de energia.

Da equação (3.51) vemos que

$$p^2 = m^2c^2$$

Mas usando a norma de (3.53) temos que

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

Juntando as duas expressões chegamos numa expressão para a energia de uma partícula relativística em função da sua massa e do seu momento

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \tag{3.65}$$

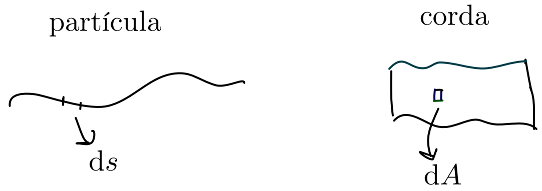
## 3.4 Corda Relativística

Dados os desenvolvimentos preliminares, podemos investigar o movimento da corda relativística. Toda a construção da seção anterior foi feita tendo como objeto físico de interesse uma partícula, ou seja, um objeto pontual, com dimensões desprezíveis. Vale a pena neste ponto pensar um pouco sobre a razoabilidade deste tipo de consideração. As refêrencias para esta seção são as seguintes [12], [3] e [18].

A ideia de que toda a matéria é feita de algum ente fundamental indivisível é bem antiga, se esse ente é uma partícula ou outra coisa não sabemos, mas uma vez que estamos a analisar objetos muito pequenos em comparação com as nossa escalas de distância, sobre essa condição é válido desprezar as dimensões do objeto e tratá-lo como partícula pontual. Na verdade, o tratamento de um sistema físico como pontual é sempre válido, se estamos na condição de escala muito maior em comparação ao objeto, por exemplo, se estamos estudando o movimento dos planetas em torno do Sol podemos considerar os planetas como objetos pontuais. No entanto, notamos que o fato de podermos tratar um sistema como pontual não quer dizer que ele o seja, essa só é uma hipótese válida dadas determinadas condições, se vamos estudar sistemas atômicos é plausível considerar o sistema como composto de partículas pontuais, mas uma investigação mais profunda pode indicar que essa não é a real natureza do sistema, por mais que possa funcionar em termos efetivos.

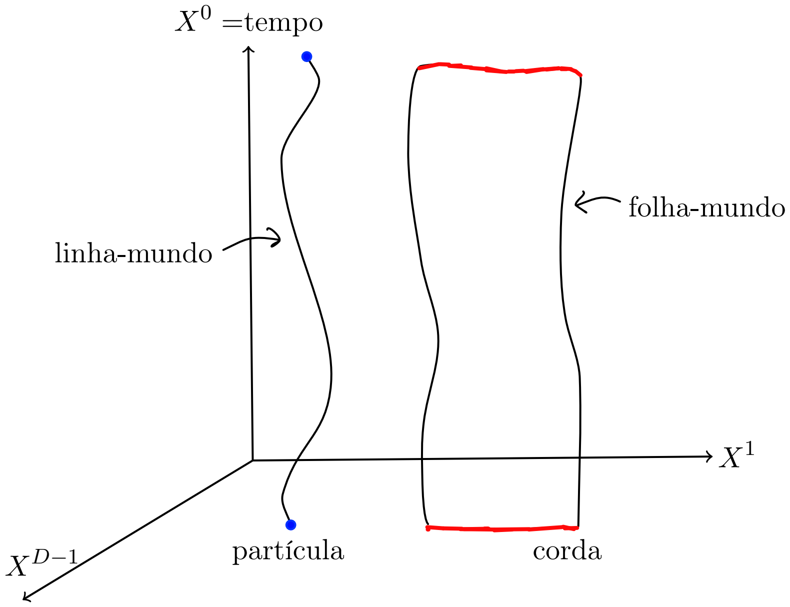
A Teoria das Cordas tem como princípio básico a ideia de que todas as partículas elementares do modelo padrão são na verdade formadas de pequenos objetos vibrantes unidimensionais, sendo que cada modo de vibração dessas cordas corresponde a um tipo de partícula, isto é, fazemos uma correspondência de um modo de vibração possível com um conjunto de quantidades que caracterizam uma partícula elementar, tipicamente a sua massa, spin e carga elétrica.

Em ordem de descrever tais objetos devemos estender o arcabouço teórico utilizado na seção anterior. A ação da partícula relativística livre é proporcional ao intervalo invariante d$s$, o que está em concordância com o que já esperamos, uma ação escrita em termos de invariantes de Lorentz. Se uma partícula pontual pode ser descrita em termos do comprimento infinitesimal de sua linha de mundo(trajetória?), a extensão natural para um objeto unidimensional é uma ação proporcional ao elemento de área infinitesimal de sua folha de mundo. Nossa hipótese está ilustrada abaixo




$$S = -m \int \mathrm{d}s \qquad\qquad S = \alpha \int \mathrm{d}A$$

Para fazer a descrição de uma curva no espaço, correspondente à linha-mundo de uma partícula, isto é, sua trajetória ao longo do espaço-tempo, precisamos apenas de uma variável como parâmetro, no caso da corda precisamos de dois parâmetros, pois a sua folha-mundo, a trajetória feita por ela ao longo do espaço-tempo, é uma superfície, conforme vemos abaixo




Portanto, nosso próximo passo é estudar a parametrização de superfícies, para depois expressarmos seu elemento de área e com isso obter a ação da corda.

### 3.4.1 Superfície Parametrizada

Por definição, uma superfície parametrizada em um espaço D-dimensional é uma aplicação do tipo

$$\vec{X} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{D-1} \tag{3.66}$$

$$\vec{X}(\sigma, \tau) = (X^0(\sigma,\tau), X^1(\sigma,\tau), \ldots, X^{D-1}(\sigma,\tau)) \tag{3.67}$$

A interpretação do parâmetro $\tau$ é a mesma que no caso da partícula, ele representa o tempo próprio, ao passo que $\sigma$ é um parâmetro associado à dimensão espacial da corda (inexistente no caso da partícula pontual), como o seu comprimento próprio.

Agora para encontrar o elemento de área $dA$ procedemos como no caso para uma superfície espacial, porém usando notação relativística (Figura 3). Logo,

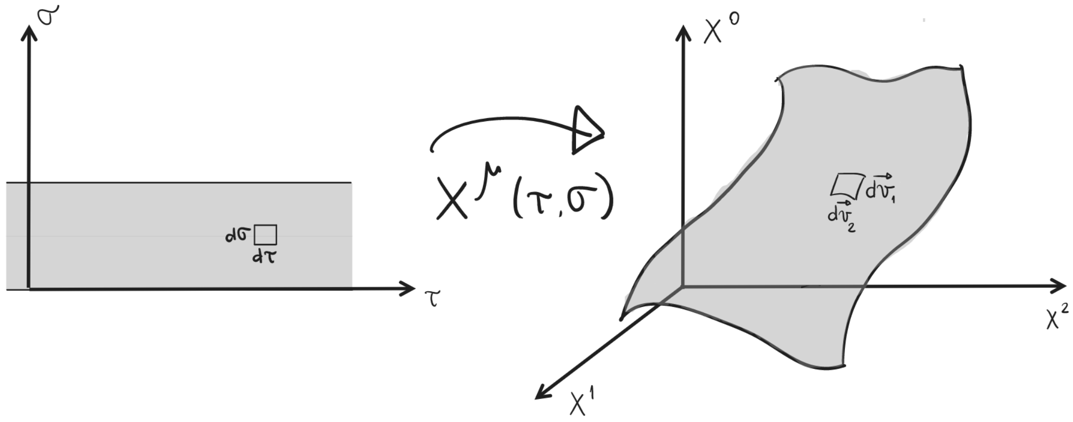



**Figura 3**. Na figura da esquerda temos o espaço de parâmetros ($\sigma$, $\tau$), com um pequeno quadrado selecionado. Na direita uma superfície do espaço tempo com um paralelogramo de lados cujos vetores são $dv_1^\mu$ e $dv_2^\mu$.

$$\mathrm{d}v_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau,\ \mathrm{d}v_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\mathrm{d}\sigma$$

Para calcular o elemento infinitesimal de área $\mathrm{d}A$ fazemos o produto vetorial entre os vetores $\mathrm{d}v_1$ e $\mathrm{d}v_2$

$$\mathrm{d}A = |\,\mathrm{d}v_1 \times \mathrm{d}v_2\,| \tag{3.68}$$

$$\mathrm{d}A = |\mathrm{d}\vec{v}_1|\,|\mathrm{d}\vec{v}_2|\,|\sin\theta| = |\mathrm{d}\vec{v}_1|\,|\mathrm{d}\vec{v}_2|\,\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\mathrm{d}A = \sqrt{|\mathrm{d}\vec{v}_1|^2\,|\mathrm{d}\vec{v}_2|^2 - |\mathrm{d}\vec{v}_1|^2\,|\mathrm{d}\vec{v}_2|^2\cos^2\theta}$$

$$\mathrm{d}A = \sqrt{(\mathrm{d}v_1\cdot\mathrm{d}v_1)(\mathrm{d}v_2\cdot\mathrm{d}v_2) - (\mathrm{d}v_1\cdot\mathrm{d}v_2)^2} \tag{3.69}$$

onde o ponto representa o produto escalar relativístico. Este produto garante que o elemento de área é invariante por transformações de Lorentz, ou seja, é o elemento de área própria. Então, a área própria é dada por

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \tau}\frac{\partial X_\nu}{\partial \tau}\right)} \tag{3.70}$$

E utilizando a notação do produto escalar relativística,

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \tag{3.71}$$

Uma discussão sobre o que caracteriza localmente a superfície do espaço-tempo traçada por uma corda é apresentada no livro 'B. Zwiebach. *A first course in String Theory'.*

### 3.4.2 Ação de Nambu-Goto

Agora que definimos a área própria, podemos introduzir a ação para uma corda relativística. Esta ação é proporcional à área própria da folha-mundo. Para termos as unidades corretas da ação se faz necessário multiplicar a área própria por $T_0/c$ para garantir as unidades da ação. Então definimos a ação da corda como

$$X^\mu = X^\mu(\sigma, \tau)$$

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} \mathrm{d}\tau \int_0^{\sigma_1} \mathrm{d}\sigma \sqrt{\left(\dot{X} \cdot X'\right)^2 - (\dot{X})^2 \, (X')^2} \tag{3.72}$$

onde $\sigma > 0$ é constante, e temos as seguintes notações para as derivadas:

$$\dot{X}^\mu := \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \; X^{\mu'} := \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

Escrevendo agora a ação de Nambu-Goto na forma invariante por reparametrização,

$$S = -\frac{T_0}{c} \int \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\sigma \, \sqrt{-\gamma} \tag{3.73}$$

onde $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$ e

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & (X')^2 \end{bmatrix}$$

Nesta forma, pode-se facilmente generalizar a ação Nambu–Goto para descrever a dinâmica de objetos que possuem mais dimensões do que cordas. Uma ação deste tipo é útil como uma primeira aproximação à dinâmica de D-branas.

### 3.4.3 Equações de Movimento

Uma vez apresentada a ação de Nambu-Goto, podemos utilizar o formalismo de Lagrange para encontrar as equações de movimento.

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau \int d\sigma \sqrt{\left(\dot{X} \cdot X'\right)^2 - (\dot{X})^2 \, (X')^2}$$

Lagrangeana

$$\mathcal{L}\left(\dot{X}^\mu, X^{\mu\prime}\right) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{\left(\dot{X} \cdot X'\right)^2 - (\dot{X})^2 \, (X')^2}$$

A variação da Lagrangeana é

$$\delta\mathcal{L}\left(\dot{X}, X'\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}\delta\left(X'^\mu\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\delta\left(\dot{X}^\mu\right)$$

$$\delta(\dot{X}^\mu) = \delta\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\delta X^\mu)$$

$$\delta(X'^\mu) = \delta\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial \sigma}(\delta X^\mu)$$

$$\delta\mathcal{L}\left(\dot{X}, X'\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}\frac{\partial}{\partial \sigma}(\delta X^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\frac{\partial}{\partial \tau}(\delta X^\mu)$$

Agora eu vamos adicionar e subtrair os termos

$$\delta X^\mu \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} + \delta X^\mu \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}\frac{\partial}{\partial \sigma}(\delta X^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\frac{\partial}{\partial \tau}(\delta X^\mu) + \delta X^\mu \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} + \delta X^\mu \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} - \delta X^\mu \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} - \delta X^\mu \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}$$

Da expressão de cima sairá duas derivada totais e um $\delta X^\mu$ será fatorado

$$\delta\mathcal{L} = \delta X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\delta X^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\delta X^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}\right) \tag{3.74}$$

Definindo os momentos conjugados

$$\Pi^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -T\frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X'^2)\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

$$\Pi^\sigma_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -T\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X}^2)X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

Pelo Princípio de Hamilton $\delta S = 0$, e a equação de movimento é

$$\frac{\partial \Pi^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \Pi^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0 \tag{3.75}$$

Esta equação de movimento é bem complicada, mas com o auxílio das simetrias da ação poderemos simplificá-la e determinar sua solução

### 3.4.4 Solução das Equações de Movimento

Esta última subseção terá um caráter mais informal, aqui discutiremos de forma qualitativa a solução das equações de movimento da corda relativística, obtida na subseção anterior pela variação da ação de Nambu-Goto, com base nos vínculos fornecidos pelas simetrias da ação, em especial da ação de Polyakov, que é mais conveniente neste contexto. Ainda que informalmente, podemos desenvolver muita intuição física em Teoria de Cordas e como ela opera, em especial o chamado espectro de massas, que será o fechamento do trabalho.

De fato, a ação que construímos na subseção anterior não é a utilizada na Teoria de Cordas, isso porque ela possui uma raiz quadrada que traz uma série de complicações técnicas na quantização da teoria. A ação mais apropriada para seguirmos é a ação de Polyakov, que é completamente equivalente à ação de Nambu-Goto

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{3.76}$$

Sendo $g_{\alpha\beta}$ a métrica da folha de mundo, e $\alpha'$ uma constante inversamente proporcional à Tensão da corda. Não demonstraremos, mas essa ação produz a seguinte equação de movimento

$$\partial_\alpha(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu) = 0 \tag{3.77}$$

Além de ser matematicamente mais interessante, a ação de Polyakov possui uma simetria adicional, que será fundamental para resolver as equações de movimento.

Notemos que a ação de Polyakov possui as duas simetrias da ação de Nambu-Goto que são a invariância por transformações de Lorentz

$$X^\mu \to \Lambda^\mu_\nu X^\nu + a^\mu$$

e a invariância por reparametrização

$$\sigma^\alpha \to \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$$
$$X^\mu(\sigma) \to \tilde{X}^\mu(\tilde{\sigma}) = X^\mu(\sigma)$$

Ao reparametrizar a folha de mundo, a métrica se transforma de acordo com a equação abaixo

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \to \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \frac{\partial\sigma^\gamma}{\partial\tilde{\sigma}^\alpha}\frac{\partial\sigma^\rho}{\partial\tilde{\sigma}^\beta} g_{\gamma\rho}(\sigma)$$

Mas além dessas, a ação de Polyakov possui uma simetria adicional, que é a invariância de Weyl, associada com a simetria por transformações locais de escala, e cujas transformações na métrica são da forma

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \to \Omega^2(\sigma) g_{\alpha\beta}(\sigma) \tag{3.78}$$

A invariância por reparametrização e a invariância de Weyl desempenham aqui uma função bastante similar às invariância de Gauge, que surgem por exemplo no eletromagnetismo e permitem a escolha de uma função que facilite a expressão do campo eletromagnético. No nosso contexto, as simetrias também nos auxiliarão por facilitar as equações de movimento.

Pela invariância por reparametrização podemos tomar uma a métrica como localmente plana

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi} \eta_{\alpha\beta} \tag{3.79}$$

Tal métrica é cohecida como Gauge Confomal

E pela invariância de Weyl, podemos escolher $\phi = 0$, de forma que ficamos simplesmente com $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Com a escolha da métrica de Minkowski a Ação de Polyakov se simplifica enormemente

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2\sigma \; \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha X \tag{3.80}$$

E a equação de movimento resultante é simplesmente uma equação de onda

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0 \tag{3.81}$$

Definindo as chamadas coordenadas do cone de luz, temos

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma \quad ; \quad \partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma) \tag{3.82}$$

E a equação de onda se escreve

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0 \tag{3.83}$$

É claro que essa simplificação não vem de graça, e que a equação de movimento (3.75) não é igual a equação (3.78). Na verdade temos além da equação de onda outras duas equações de vínculo, que examinaremos depois.

A solução mais geral, em analogia ao que fizemos na subseção 3.2.3 é

$$X^{\mu}(\sigma,\tau) = X_L^{\mu}\left(\sigma^{+}\right) + X_R^{\mu}\left(\sigma^{-}\right) \tag{3.84}$$

Sendo que as funções $X_L^{\mu}(\sigma^{+})$ e $X_R^{\mu}(\sigma^{-})$ são arbitrárias e representam ondas se propagando para a esquerda e para a direita, respectivamente. Na verdade essas funções não são totalmente arbitrárias, pois devem obedecer os vínculos. Podemos colocar ainda uma condição de periodicidade para o caso de cordas fechadas

$$X^{\mu}(\sigma,\tau) = X^{\mu}(\sigma + 2\pi, \tau) \tag{3.85}$$

De forma parecida ao que fizemos no caso não relativístico podemos expressar a solução como uma superposição dos modos normais de vibração

$$X_L^{\mu}\left(\sigma^{+}\right) = \frac{1}{2}x^{\mu} + \frac{1}{2}\alpha' p^{\mu}\sigma^{+} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^{\mu}e^{-in\sigma^{+}} \tag{3.86}$$

$$X_R^{\mu}\left(\sigma^{-}\right) = \frac{1}{2}x^{\mu} + \frac{1}{2}\alpha' p^{\mu}\sigma^{-} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{\mu}e^{-in\sigma^{-}} \tag{3.87}$$

Aqui usamos, por conveniência, exponenciais ao invés de funções seno ou cosseno, mas é claro que essas funções são equivalentes, já que o cosseno é a parte real da exponencial complexa ao passo que o seno é a parte imaginária de tal. Ademais, temos na expressão acima que as variáveis $x^{\mu}$ e $p^{\mu}$ representam a posição e o momento, respectivamente, do centro de massa da corda.

Como os coeficientes $\alpha'$s são os coeficientes de uma série de Fourier, e portanto temos uma condição para a realidade deles

$$\alpha_n^{\mu} = \left(\alpha_{-n}^{\mu}\right)^{\star} \quad , \quad \tilde{\alpha}_n^{\mu} = \left(\tilde{\alpha}_{-n}^{\mu}\right)^{\star} \tag{3.88}$$

Para a corda aberta, nós utilizamos a condição de contorno de Neumann

$$X'^{\mu}\big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \tag{3.89}$$

E a solução geral fica

$$X^{\mu}(\sigma,\tau) = x^{\mu} + 2\alpha' p^{\mu}\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{\mu}e^{-in\tau}\cos(n\sigma) \tag{3.90}$$

Ainda temos que nos preocupar com os vínculos que a corda está sujeita devido à escolhas convenientes de parametrização, elas são

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \tag{3.91}$$

Podemos expressá-los usando as coordenadas do cone de luz

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0 \tag{3.92}$$

O primeiro vínculo está associado ao fato de que os modos de vibração da corda são todos transversais e não longitudinais, enquanto que o segundo relaciona o comprimento da corda à sua velocidade instantânea.

Para ver a consequência dos vínculos vamos derivar a solução encontrada em (3.85)

$$\partial_- X^\mu = \partial_- X_R^\mu = \frac{\alpha'}{2} p^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \tag{3.93}$$

definimos

$$\alpha_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu \tag{3.94}$$

E então

$$\partial_- X^\mu = \partial_- X_R^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \tag{3.95}$$

Tomando o quadrado, temos o vínculo

$$\begin{aligned}
(\partial_- X)^2 &= \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,p} \alpha_m \cdot \alpha_p e^{-i(m+p)\sigma^-} \\
&= \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,n} \alpha_m \cdot \alpha_{n-m} e^{-in\sigma^-} \\
&\equiv \alpha' \sum_n L_n e^{-in\sigma^-} = 0
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Onde definimos o chamado modo normal de Virasoro $L_n$, uma quantidade extremamente importante na Teoria de Cordas e na Teoria de Campos Conformes, e cuja importância surge na quantização da corda. O modo normal de Virasoro é a soma dos modos normais de oscilação, ou o modo de Fourier do vínculo. O modo normal foi definido para o vínculo na solução $X_R^\mu$ mas pode ser igualmente definido para a solução $X_L^\mu$,

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m \tag{3.97}$$

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2}\sum_m \tilde{\alpha}_{n-m} \cdot \tilde{\alpha}_m \tag{3.98}$$

sendo o modo zero definido em termos do momento do centro de massa da corda

$$\tilde{\alpha}_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu \tag{3.99}$$

Atentemo-nos aos vínculos dos modos $L_0$ e $\tilde{L}_0$, como já comentado, os modos de Virasoro são estremamente importantes, pois eles possuem uma interpretação física muito bem definida e nos permite desenvolver uma enorme intuição da teoria. Notemos que os modos nulos são proporcionais ao momento do centro de massa da corda ao quadrado, mas estamos em um regime de altas energias, e, como já demonstramos, energia, momento e massa são quantidades que se confundem, o momento ao quadrado está associado à massa segundo a expressão

$$p_\mu p^\mu = -M^2 \tag{3.100}$$

A expressão acima nos indica como os vínculos $L_0$ e $\tilde{L}_0$ determinam a massa da corda em termos dos seus modos normais de vibração! Expressamos a massa da corda em termos de $\alpha_n$ e $\tilde{\alpha}_n$ por meio da equação

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\sum_{n>0} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} = \frac{4}{\alpha'}\sum_{n>0} \tilde{\alpha}_n \cdot \tilde{\alpha}_{-n} \tag{3.101}$$

Finalizamos o trabalho com essa impressionante conclusão, por mais tenhamos faltado em detalhamentos técnico, acreditamos ter alcançado o auge do trabalho ao mostrar a relação da massa da corda com os seus modos normais de vibração. A ideia de que objetos unidimensionais vibrando em diferentes configurações correspondem a diferentes partículas do modelo padrão é o cerne da Teoria de Cordas. Todas essas ideias de fato só ganham vida quando incluímos os efeitos quânticos na teoria, ainda assim demonstramos as principais ideias da teoria no domínio clássico e esperamos ter fornecido uma introdução à teoria, bem como ter motivado seu estudo.

## 4 Conclusões

A criação de uma teoria unificada da física, com a integração de suas diferentes esferas, tem sido perseguida por teóricos há decadas. Dentre as diferentes propostas para esse fim, se destaca a Teoria das Cordas.

Originalmente concebida como uma proposta para explicar as propriedades singulares da Força Nuclear Forte, avanços posteriores a tornaram mais abrangente, de forma que tornou possível a descrição não apenas das partículas interagentes por meio desta força, mas todas as outras, nem mesmo se limitando ao modelo padrão, por meio de uma modelagem que tem, em seu cerne, a mecânica Lagrangeana.

Neste trabalho, apresentamos as bases nas quais a Teoria das Cordas se fundamenta, que é o movimento oscilatório de uma corda unidimensional de altíssima energia, por meio do formalismo de Lagrange. Embora a descrição desta teoria em sua totalidade requeira conhecimentos da Teoria Quântica de Campos e uma matemática mais rebuscada, dessa base podemos ter uma ideia de com quais ferramentas é desenvolvido o raciocínio que leva a conclusões tão surpreendentes, como a determinação de propriedades como spin, carga e massa a partir dos modos normais de vibração.

A integração desta mecânica de moldes mais clássicos com os avanços feitos por Einstein com a Teoria da Relatividade Restrita, embora não seja matematicamente complexa, requer certo trabalho em ser desenvolvida. Mesmo que brevemente, buscamos introduzir conceitos como a Folha de Mundo, uma consequência direta do deslocamento de um objeto extenso pelo espaço-tempo, a ação de Nambu-Goto, que a correlaciona com o princípio de Hamilton, e as equações de movimento que permitem descrever esse movimento ondulatório no espaço-tempo de Minkowski.

Todas estas conclusões servem para exemplificar a importância da Mecânica Clássica, que, apesar do nome nos induzir a uma noção de obsolescência, fundamenta a Física Moderna no estado em que ela se encontra hoje, apesar da aparente desconexão entre os dois domínios, e esperamos que, por essa reafirmação, tenhamos sido capazes de demonstrar a importância deste curso na formação de um físico.

## 5 Apêndice

Neste apêndice utilizamos das seguites refêrencias [5], [9], [15], [7], [4], [16] e [6]. Outras refêrencias utilizadas ao longo do trabalho são as seguintes [17], [2], [10] e [1].

### 5.1 Princípio da Relatividade de Galileu e Inferência da Lagrangeana

De forma geral, o conceito de relatividade está associado à forma como as leis ou efeitos físicos podem variar de acordo com diferentes sistemas de referência, isto é, a conexão entre a física percebida por observadores em diferentes estados de movimento. Deve ser sugestivo ao leitor que para alcançar tal descrição é necessário um ferramental matemático que nos permita implementar transformações em sistema físico.

A relatividade de Galileu pode ser deduzida a partir de certas hipóteses acerca das propriedades do espaço, os princípios da homogeneidade e isotropia. Esses mesmo princípios, que esses sim são fundamentais, ou seja, são postulados como verdadeiros e com eles derivamos as consequências e previsões físicas, nos permitem também inferir a forma da Lagrangena, e que nos leva, juntamente com o princípio da mínima ação, ou princípio de Hamilton, à formulação Lagrangena da mecânica.

A primeira Lei de Newton, a famosa Lei da Inércia enuncia no fundo a existência de certos sistemas de referência muito especiais. Sempre que se deseja resolver um problema em física é necessário escolher um sistema de referência, pois por meio dele é que expressaremos as leis físicas que governam o sistema de interesse, e é sabido também que a dificuldade do problema varia em função de tal escolhar, queremos então escolher sistemas que facilitem ao máximo a descrição dos sistemas físicos, tais sistemas de referência são justamente aqueles cuja existência é argumentada na primeira Lei de Newton, os chamados *referenciais inerciais.* Em tais sistemas um corpo que se move livremente(isto é, que não está sujeito a forças) permanece em seu estado de movimento. Essa característica na verdade é uma manifestação do fato de que nesses sistemas o espaço pode ser considerado homogêneo e isotrópico, bem como o tempo é homogênio, essas mesmas propriedades do espaço nos levam às leis de conservação.

Pensemos agora em como usar as ideias de isotropia e homogeneidade para expressar uma Lagrangeana de uma partícula livre em um referencial inercial. Dado que que o espaço e o tempo são homogênios não pode haver nenhum ponto do espaço ou instante de tempo preferencial, por essas esperamos que a Lagrangeana não dependa explicitamente de $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{t}$, então a Lagrangeana deve depender somente da velocidade. Devido à isotropia do espaço, não deve existir nenhum direção privilegiada do espaço, portanto a Lagrangeana não deve depender da direção da velocidade e sim do seu módulo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$. Temos então que $L = L(v^2)$. Podemos agora usar as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$$

Mas como a Lagrangeana não depende explicitamente da posição, temos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \text{const.}$$

Segue-se disso que $\mathbf{v}$ é constante. Ora, isso é justamente a Lei da inércia! Mostramos que movimentos livres em sistemas referência inercias tem velocidade constante, onde consideremos como inercias os sistemas em que podemos assumir as propriedades de homogeneidade e isotropia apontadas acima.

Como apontado no incício da seção, a relatividade diz respeito à relação entre a física percebida por diferente sistemas de referência, o princípio da Relatividade de Galileu estabelece que as Leis físicas devem ser as mesmas para diferentes sistemas de referência (parece que um nome mais adequado para tal seria princípio da invariância), ou seja, esperamos que um outro referencial inercial também observe um movimento com velocidade constante. Consideremos um sistema $S'$ que se move em linha reta em relação $S$ com velocidade constante $\mathbf{V}$, sabemos que as posições medidas por esses dois sistemas de referência em dado instante $t$ são relacionadas por meio da expressão

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}t \tag{5.1}$$

A expressão acima é conhecida como transformação de Galileu. As leis físicas devem ser invariantes por transformações desse tipo.

Neste estágio é uma obviedade que o tempo medido em cada referência é o mesmo. No entanto, a concepção do tempo como uma entidade absoluta deverá ser repensada à luz da relatividade Einstein.

Dadas todas as considerações podemos agora inferir a Lagrangeana da partícula livre, por garantir que ela respeita as condições já discutidas. Já sabemos que a Lagrangeana depende somente da velocidade ao quadrado, mas derivando a expressão da transformação de Galileu temos o seguinte

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V} \tag{5.2}$$

Pelo princípio de Galileu, essa transformação no sistema deve manter as equações de movimento invariante, isto é, tais transformações são transformações de simetria, devidas por levarem a Lagrangeana a uma nova forma que difere da original por uma derivada total. Em termos matemáticos, a transformação genérica

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$$

é dita ser uma transformação de simetria se

$$L \rightarrow L' = L + \delta L$$

onde

$$\delta L = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

para alguma função $f$

No caso da transformação de Galileu a nova Lagrangeana é

$$L' = L\left(v'^2\right) = L\left(v^2 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} + V^2\right)$$

Suponhemos que a transformação de velocidade é infinitesimal, de sorte que podemos negligenciar termos quadráticos em $V$, de forma que

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

$$L\left(v^2 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right) = L(v^2) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \tag{5.3}$$

A derivada de $f$ pode ser expressa como

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla} f\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{5.4}$$

E podemos expandir a expressão da nova Lagrangeana em série de Taylor até primeira ordem

$$L\left(v'^2\right) = L\left(v^2 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right) = L\left(v^2\right) + \frac{\partial L}{\partial v^2}2\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} \tag{5.5}$$

Subsituindo (5.4) e (5.4) em (5.3)

$$\nabla f\cdot\mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t} = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\frac{\partial L}{\partial v^2} \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(2\frac{\partial L}{\partial v^2}\mathbf{V} - \boldsymbol{\nabla} f\right)\cdot\mathbf{v}$$

Agora derivamos em relação a $v_i$

$$2\frac{\partial L}{\partial v^2}V_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} + 2\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\partial L}{\partial v^2}\right)\mathbf{V}\cdot\mathbf{v} = 0$$

$$2\frac{\partial L}{\partial v^2}V_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} + 4v_i\frac{\partial^2 L}{\partial (v^2)^2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{v} = 0$$

$$\nabla f = 2\frac{\partial L}{\partial v^2}\mathbf{V} + 4\frac{\partial^2 L}{\partial (v^2)^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}$$

Dado que $\nabla f$ independe de $\mathbf{v}$, o segundo termo do lado direito deve ser nulo, já que ele contém o vetor $\mathbf{v}$, de forma que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial (v^2)^2} = 0$$

Agora basta integrarmos a equação acima duas vezes e obteremos a lagrangeana

$$\frac{\partial L}{\partial v^2} = \frac{m}{2}$$

O fator $m/2$ acima é simplesmente uma constante de integração escrita convenientemente. Por fim, obtemos a forma da Lagrangeana para uma partícula livre em um referencial inercial

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.7}$$

A constante $m$ a princípio é arbitrária mas sabemos da experiência que ela corresponde à massa da partícula.

Se desejamos expandir os nossos resultados e descrever um sistema de $N$ partículas, simplesmente somamos as Lagrangeanas individuas dos termos associados ao movimento livres (5.7) de cada partícula, e também devemos tomar o cuidade de levar em conta o fato de que de alguma forma não determinada em um sistema de partículas o movimento de uma afeta a outra, dizemos que elas interagem. Por isso devemos considerar uma nova função $V$ que contenha informação acerca dessas interações.

Na descrição da Lagrangeana da partícula livre a consideração de isotropia do espaço nos levou a conclusão de que $L$ depende da velocidade ao quadrado, e a simetria da Lagrangeana por transformação de Galileu, associada à invariância das Leis da fisica em diferentes referenciais inerciais, nos levou à forma definitiva da Lagrangeana. Ainda não consideremos o efeito da homogeneidade do espaço, associado com o fato de que nenhuma posição é privilegiada, por isso a origem dos sitemas de referência é arbitrária, temos de poder fazer translações da origem sem que tal transformação altere as leis físicas, então as posições das partículas $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ não são realmente importantes, o que realmente importa para a interação é a posição relativa entre os dois corpos $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x_1}|$. Com isso, temos que a Lagrangeana de um sistema de $N$ partículas é dada por

$$L = \sum_i^N \frac{1}{2}m_i v_i^2 - V\left(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, \ldots, |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|, \ldots, |\mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{x}_N|\right) \tag{5.8}$$

O sinal de menos foi utilizado por conveniência, de fato, ele é importante para que a mecânica de Newton seja reproduzida a partir do que desenvolvemos aqui. Ademais, assumindo as propriedades de homogeneidade e isotropia do espaço e do tempo somos levados a 3 leis de conservação associadas a tais transformações de simetria, a conservação do momento, do momento linear e da energia.

Para um tratamento mais profundo e preciso poderíamos investigar a estrutura matemática por trás das tranformações de simetria, que são os Grupos. Não abordaremos esse tópico simplesmente por uma questão de brevidade, mas indicamos como eles estão relacionados. A isotropia do espaço está associada a ideia de que não há uma direção preferencial no universo, bem então podemos rotacionar o nosso sistema de referência e toda a física do sistema permanecera inalterada, sabemos que a rotação de um vetor altera as suas componentes mas não a sua norma, em teoria de grupos nós investigamos qual o grupo que mantém a norma dos vetores invariantes, isto é, que propriedade as matrizes da transformação linear devem satisfazer para tal, e com isso chegamos ao grupo de rotações em 3 dimensões SO(3). Assim também fazemos para as translações, já que o espaço é homogêneo eu posso transladar a origem de modo que as equações de movimento não mudam, o grupo por trás dessa transformações é o grupo aditivo dos reais. Fazemos a mesma análise para as transformações de Galileu, das quais deriva o grupo de Galileu, e assim adiante.

O ponto a ser enfatizado é que um grupo de simetria está associado a uma transformação no sistema que mantém alguma propriedade invariante, e nós construimos modelos teóricos exigindo que as leis físicas sejam invariantes segundo as propriedades que requeremos do sistema, toda a física moderna é fortemente calcada nas ideias nessas ideias, de simetrias, por isso julgamos importante destacar seu papel na mecânica clássica, mostrando que ela também pode ser derivada a partir de princípios de simetria. Como disse o físico Phillip W. Anderson (Nobel da física 1977)

"*É apenas um pequeno exagero dizer que a Física é o estudo da simetria.*"

## 5.2 Interações na Relatividade Especial

Neste apêndice apresentaremos a forma pela qual as interações são implementadas em contextos relativísticos, em especial a interações eletromagnética e gravitacional, na verdade essas são duas das 4 forças fundamentais da natureza, sendo que só elas admitem uma formulação clássica, isto é, sem levar em conta efeitos da física quântica.

É claro esses dois assuntos são extremamente extensos e não objetivamos fazer uma análise completa de tais, na verdade esse apêndice terá um caráter puramente expositivo, pois acreditamos que por meio dele podemos desenvolver uma intuição de como as interação fundamentais operam na relatividade.

Ao falar de interações devemos considerar a dinâmica da geração dos campos, bem como a dinâmica de um sistema sujeito à influência do campo. Sabemos que a carga elétrica gera campo elétrico e também sabemos como se movimenta uma carga na presença de um campo elétrico. Toda essas relações são brilhantemente expressas por meio do formalismo de Lagrange.

### 5.2.1 Eletromagnetismo

No contexto não relativístico a dinâmica de uma carga em uma região de campo eletromagnético é dada pela força de Lorentz

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{5.9}$$

A descrição da geração dos campos é feita pelas equações de Maxwell, elas nos permitem calcular o campos dadas as fontes.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.12}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{5.13}$$

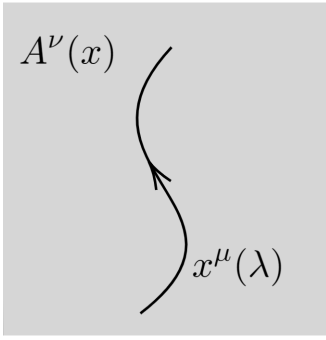
É claro que toda essa informação pode ser tratada dentro do nosso formalismo, para uma partícula imersa em um campo eletromagnético, a Lagrangeana do sistema

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + e(\mathbf{v} \cdot A - \phi) \tag{5.14}$$

A lagrangeana acima retorna a força de Lorentz se resolvidas as equações de Euler-Lagrange.

Não faremos as demonstrações aqui, pois como já mencionamos, este apêndice tem função meramente expositiva, sendo que um tratamento detalhado pode ser encontrado em um bom livro de Teoria Clássica de Campos.

Para o caso relativístico a ação que contém a interação de uma particula em um campo eletromagnético é




$$S = -mc\int \mathrm{d}s - e\int A^\mu \mathrm{d}x_\mu \tag{5.15}$$

Extremizando a ação chegamos na equação relativística de movimento

$$m\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} = eF^{\mu\nu}u^\nu \tag{5.16}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor eletromagnético. As transformações de Lorentz revelam que os campos elétrico e magnético dependem do referencial, e que eles portanto não são elementares mas são componentes de um objeto mais fundamental, o tensor eletromagnético, esse sim é invariante de Lorentz e as leis devem ser expressas em termos dele.

Com respeito à dinâmica do campo eletromagnético em si, tratando-o como um campo manifestamente relativístico, isto é, o eletromagnetismo é naturalmente relativístico, mas uma descrição em termos de campos elétrico e magnético como objetos distintos não torna esse aspecto evidente. A ação para o campo eletromagnético é conhecida como ação de Maxwell

$$S = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \tag{5.17}$$

Na expressão acima o primeiro termo diz respeito ao campo livre, ao passo que o segundo representa as fontes. As equações de Euler-Lagrange resultantes da extremização desta ação nos fornecem uma versão relativística e mais geral das equações de Maxwell.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{5.18}$$

Desta forma, podemos condesar toda formulação do eletromagnetismo em uma única expressão, a ação completa do eletromagnetismo

$$S = -m \int \sqrt{\mathrm{d}x_\alpha \, \mathrm{d}x^\alpha} - \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4x \; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e \int \mathrm{d}x^\mu \, A_\mu(x) \tag{5.19}$$

Este apêndice não contém nenhuma demonstração, mas ainda assim achamos indipensável sua apresentação, pois talvez demonstre de maneira mais expressiva o poder do formalismo Lagrangeano, nele uma única expressão pode conter um conteúdo físico enorme.

### 5.2.2 Gravitação

Se não considerarmos a relatividade restrita, a gravitação pode ser descrita em termos da equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \tag{5.20}$$

enquanto que a dinâmica de uma partícula em um campo gravitacional é dada por

$$\ddot{X}_i = -\partial_i \Phi \tag{5.21}$$

Mas a gravitação é uma interação muito especial, o princípio da equivalência proposto por Einstein afirma que a interação gravitacional é indistinguível de uma força inercial, o que levou-o a propor que a força gravitacional é na verdade um efeito do espaço-tempo, e que um campo gravitacional é a manifestação da deformação do espaço tempo. Com base nisso, se queremos descrever a dinâmica de uma partícula relativística imersa em um campo gravitacional devemos considerar o seu movimento em um espaço de curvatura arbitrária, isto é, fazemos uma promoção da ação da partícula livre para a partícula em um campo gravitacional por substituir a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por uma métrica geral $g_{\mu\nu}$, sendo que a métrica é objeto matemático que contém informação sobre o espaço-tempo em que a partícula se encontra.

Substituímos a ação abaixo

$$S = -m \int \mathrm{d}\lambda \sqrt{\eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} = -m \int \mathrm{d}\lambda \sqrt{\eta_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}} \tag{5.22}$$

pela ação mais geral

$$S = -m \int \mathrm{d}\lambda \sqrt{g_{\alpha\beta}(x) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} \tag{5.23}$$

A equação de movimento resultante da extremização da ação é conhecida como equação da Geodésica

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{5.24}$$

onde

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{g^{ck}}{2}\left(\partial_k g_{ab} + \partial_a g_{kb} - \partial_b g_{ka}\right) \tag{5.25}$$

A expressão o campo gravitacional em si, análoga às equações de Maxwell, e cuja correspondente não relativística é a equação de Poisson, é dada pela chamada ação de Einstein-Hilbert

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}R + \mathcal{L}_{matter} \tag{5.26}$$

Acima, $\mathcal{L}_{matter}$ tem um papel análogo a $J^\mu$ no eletromagnetismo, é um termo fonte. E o $R$ na ação é a contração do chamado tensor de curvatura de Riemann, que como o nome sugere fornece a curvatura do espaço, e é definido como

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{5.27}$$

A equação de movimento resultante da extremização dessa ação nos leva à famosa equação de Campos de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{5.28}$$

Sua interpressão física é bem clara, notemos que do lado direito temos o termo fonte do campo gravitacional, que é o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, ao passo que do lado esquerdo temos a métrica e o tensor de curvatura, isto é, esta equação relaciona um determinado conteúdo de matéria e energia à uma determinada deformação do espaço-tempo.

Tipicamente, os problemas em relatividade Geral consistem em dada um certa distribuição de matéria inferir qual vai ser o seu efeito no espaço-tempo, o que é análogo ao que fazemos em eletromagnetismo, onde temos uma determinada configuração de densidade de cargas e correntes e queremos com isso calcular o campo eletromagnético pos ela gerado. A matemática da gravitação é mais complicada do que a do eletromagnetismo, pois envolve tensores e as equações não são lineares, mas a diferença encontra-se unicamente nos detalhes técnicos operacionais, os princípios físicos que usamos para entender essas interações é bem semelhante, tanto é que Einstein dedicou vários anos de sua vida na tentativa de uma teoria de campo unificado, que seria capaz de descrever a gravitação e o eletromagnetismo em conjunto.

Assim como sintetizamos todo o eletromagnetismo na expressão (5.19), a Gravitação pode ser sintetizada na expressão

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} R - m \int \sqrt{g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \, \mathrm{d}x^\beta} \tag{5.29}$$

Em suma

| Campos | Partículas |
|---|---|
| $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ | $\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = e F^\mu_\nu u^\nu$ |
| Dinâmica dos Campos $\sim$ Fontes | Dinâmica das Partículas $\sim$ Campos |
| $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G T^{\mu\nu}$ | $\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\tau} = 0$ |

$$\begin{tikzcd}
\text{Campos} \arrow[r, bend right, "\text{definem o movimento}"'] & \text{Partículas} \arrow[l, bend right, "\text{geram}"']
\end{tikzcd}$$

Acreditamos que ações (5.19) e (5.29) representam o ápice do poder do formalismo Lagrangeano, pois essas duas ações contemplam praticamente toda a física clássica.

## Referências


[1] Banados, M. and Reyes, I. A short review on noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms. *International Journal of Modern Physics D*, 25(10), pp. 1630021, 2016.

[2] Barata, J. Notas de física-matemática http://denebola. if. usp. br/˜ jbarata. *Notas_ de_ aula/notas_ de_ aula. html*

[3] da Luz Cravo, M. Estudo preliminar à correspondência ads/cft: Teoria de cordas, relatividade geral e teorias de gauge

[4] Griffiths, D. J. Introduction to electrodynamics, 2005.

[5] Hermann, R. Ao barut, electrodynamics and classical theory of fields and particles. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70(5), pp. 658–660, 1964.

[6] Jackson, J. D. Classical electrodynamics, 1999.

[7] Landau, L. D. *The classical theory of fields*, volume 2. Elsevier, 2013.

[8] Lemos, N. A. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.

[9] Năstase, H. *Classical field theory*. Cambridge University Press, 2019.

[10] Neto, J. B. *Matemática para físicos com aplicações: Vetores, tensores e spinores*. Livraria da Física, 2010.

[11] Nussenzveig, H. M. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*, volume 2. Editora Blucher, 2018.

[12] Tong, D. Lectures on string theory. *arXiv preprint arXiv:0908.0333*, 2009.

[13] Tong, D. Dynamics and relativity, 2012.

[14] Wagner, G. and Guthrie, M. W. Demystifying the lagrangians of special relativity. *arXiv preprint arXiv:2108.07786*, 2021.

[15] Wald, R. *Advanced Classical Electromagnetism*. Princeton University Press, 2022.

[16] Zangwill, A. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013.

[17] Zee, A. *Einstein gravity in a nutshell*, volume 14. Princeton University Press, 2013.

[18] Zwiebach, B. *A first course in string theory*. Cambridge university press, 2004.