



## Notas - Física 3

---

**Matheus Pereira Coutinho**

*Instituto de Física da USP*

[matheus.coutinho9@usp.br](mailto:matheus.coutinho9@usp.br)

---

## Sumário

<b>1</b>	<b>Eletrostática</b>	<b>3</b>
1.1	Conceitos Prévios	4
1.2	Lei de Coulomb e o Princípio da Superposição	4
1.3	Distribuições Contínuas de carga	4
1.4	Força gerada por um anel carregado	5
1.5	Força gerada por um aro semicircular	6
1.6	Campo Elétrico	6
1.7	Eletrostática em termos do campo elétrico	6
1.8	Adaptação do princípio da superposição	6
1.9	Disco Carregado	6
1.10	Plano infinito e Plano Vazado	7
1.11	Fio finito carregado	9
1.12	Continuação do exemplo do Fio finito carregado	9
1.13	Superfície esférica carregada	10
1.14	Linhas de Campo	12
1.15	Fluxo e a sua interpretação física	13
1.16	Motivação para o cálculo do fluxo do campo elétrico	14
1.17	Obtenção da lei de Gauss	14
1.18	Quando utilizar a lei de Gauss	17
1.19	Campo elétrico de esferas carregadas com lei de Gauss	17
1.20	Campo elétrico de um fio infinito com lei de Gauss	18
1.21	Campo elétrico de cilindros infinitos com lei de Gauss	19
1.22	Campo elétrico de um plano infinito com lei de Gauss	19
1.23	Teorema de Earnshaw	19
1.24	Motivação para o potencial eletrostático	20
1.25	Potencial eletrostático, parte 1	20
1.26	Potencial eletrostático, parte 2	21
1.27	Potencial de um anel carregado	22
1.28	Potencial de um disco carregado	22
1.29	Potencial eletrostático do plano e fio infinitos	22
1.30	Potencial eletrostático de um dipolo elétrico	22
1.31	Força e torque em um dipolo elétrico	23
1.32	Condutores na eletrostática, parte 1	23
1.33	Condutores na eletrostática, parte 2	23
1.34	Condutores na eletrostática, parte 3	23
1.35	Energia eletrostática	23
1.36	Energia eletrostática de uma esfera uniformemente carregada	23
1.37	Forma diferencial da eletrostática	23
1.38	Energia eletrostática em termos do campo elétrico	23
1.39	Condições de contorno na eletrostática	23

---

## **1 Eletrostática**

---

## 1.1 Conceitos Prévios

### Carga Elétrica

Para o seguimento do curso, é requisitado do leitor, ter uma noção do que é a carga elétrica. A carga é o atributo fundamental que permite com que um objeto sinta a força elétrica. Além disso, a elementar lei de Du Fay, a qual estabelece que cargas de sinais opostos se atraem e cargas de sinais iguais se repelem.

### Tipos de Materiais

Para este curso, adotaremos uma divisão dos materiais em condutores e isolantes. A diferença básica entre eles é que em um condutor as cargas possuem mobilidade, ao passo que no isolantes, não.

## 1.2 Lei de Coulomb e o Princípio da Superposição

Duas ressalvas iniciais: primeiramente, a lei de Coulomb é uma lei da Eletrostática, ou seja, ela funciona, essencialmente, para cargas em movimento. A segunda é que a Lei de Coulomb não é, a princípio, deduzível, ela é totalmente baseada em verificações experimentais e o objetivo aqui não é prová-la.

### Lei de Coulomb

Dadas duas cargas  $Q_1$  e  $Q_2$ , com  $Q_1$  na posição  $\vec{r}'$  e  $Q_2$  na posição  $\vec{r}$ . A força que a carga  $Q_2$  irá fazer na  $Q_1$  é

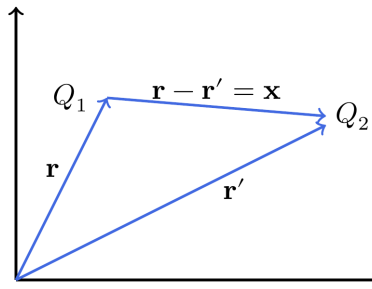


Figura 1: Interação Coulombiana entre duas cargas

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (1)$$

Um comentário à respeito dessa lei é que ela respeita a terceira lei de Newton, o que não é, necessariamente, uma obviedade.

### Princípio da Superposição

A força que uma carga  $q$  sente devido a um conjunto de  $n$  cargas  $Q_i$  é a soma das forças que a carga sente de cada uma do conjunto, individualmente

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad (2)$$

## 1.3 Distribuições Contínuas de carga

O princípio da superposição nos permite expressar a força sentido por uma carga devido não somente a um conjunto discreto de cargas, mas também devido a distribuições contínuas de cargas, objetos carregados.

É útil expressar a carga de uma distribuição através da densidade de cargas

$$Q = \int d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \quad (3)$$

Com isso, a força sentida por uma carga  $q$  devido a uma distribuição contínua é escrita como uma integral

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}' \quad (4)$$

## 1.4 Força gerada por um anel carregado

Consideremos um anel carregado e com densidade de carga  $\lambda$ , qual é a força que uma carga  $q$  a uma distância  $z$  sente devido ao anel?

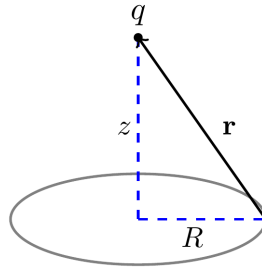


Figura 2: Anel circular carregado

A força devido a um elemento de carga  $dq$  é

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x^2} \hat{x}$$

Um elemento do anel  $dl$  possui uma carga  $dq$

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{x^2} \hat{x}$$

Basta integral sobre o fio, que tem comprimento  $2\pi R$

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{x^2} \hat{x}$$

É notável que a força resultante aponta na direção  $z$ , pois se um elemento de carga tem produz uma força com componente horizontal, sempre vai ter um elemento de carga diametralmente oposto que vai gerar uma força igual na direção contrária, de forma que só precisamos tomar a componente vertical a força

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{x^2} \sin \theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{x^2} \frac{z}{x}$$

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi R \frac{\lambda z}{x^3}$$

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi R \frac{\lambda z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

---


$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

$$\mathbf{F}(z) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \quad (5)$$

### Regimes Assintóticos

$\lim_{R \rightarrow 0}$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{z^3} \hat{\mathbf{z}}$$

No limite em que  $R$  vai a zero nós recuperamos a expressão da força para uma partícula pontual, se tomarmos  $z$  indo ao infinito obtemos o mesmo resultado

## 1.5 Força gerada por um aro semicircular

## 1.6 Campo Elétrico

Campo elétrico devido a uma carga  $q_1$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = kq_1 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}$$

Campo elétrico devido a uma distribuição

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (6)$$

## 1.7 Eletrostática em termos do campo elétrico

## 1.8 Adaptação do princípio da superposição

## 1.9 Disco Carregado

Consideremos um disco carregado e com densidade superficial de carga  $\sigma$ , qual é o campo elétrico gerado pelo disco em um ponto  $p$ , situado a uma distância  $z$  ?

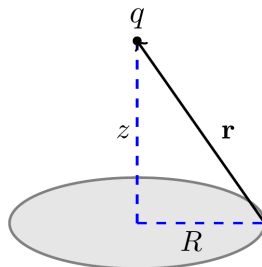


Figura 3: Disco carregado

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$dq = \sigma da = \sigma r dr d\theta$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_z \cos \theta = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{z}{r} = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{z}{r^2 + z^2}$$

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma r z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \frac{1}{r^2 + z^2} dr d\theta$$

A integral em  $d\theta$  vai de 0 a  $2\pi$  e a integral em  $dr$  vai de zero até o raio do disco

$$E(z) = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr$$

$$E(z) = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr$$

Podemos utilizar uma substituição de variável para resolver a integral em  $dr$

$$r^2 + z^2 = u \Rightarrow du = 2r dr$$

$$E(z) = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^R \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} 2 \left[ \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_0^R$$

$$E(z) = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R$$

$$E(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

Obtemos, enfim, a expressão para o campo elétrico gerado por um disco carregado de raio  $R$  a uma distância  $z$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

## 1.10 Plano infinito e Plano Vazado

Vamos analisar os limites assintóticos do exemplo anterior, deste forma obteremos dois resultados importantes.

Lembramos que o campo elétrico gerado por um disco de raio  $R$  é

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

Consideremos o limite em que o raio vai a infinito, isto é  $R \rightarrow \infty$

A carga total do disco é  $Q$

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R^2}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{|R|} \right)$$

Como  $R$  vai a infinito

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{E} = 0$$

Uma outra forma de fazer esse limite é mantendo a densidade  $\sigma$  constante. Assim a carga aumenta à medida que o raio do disco aumenta. Ou seja, a carga também vai a infinito. Neste caso, temos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}$$

O  $z$  sobre módulo de  $z$  sugere que o campo é positivo quando  $z$  é positivo e negativo quando  $z$  é negativo, mas o seu módulo é constante

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Essa é simplesmente a expressão do campo gerado por um plano infinito de densidade constante  $\sigma$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_z$$

Agora, analisemos como que a expressão do disco pode ser interpretada usando o princípio da superposição.

Sabemos que, dados dois objetos carregados  $A$  e  $B$ , o campo gerado pelos dois é simplesmente  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B$ . Pensando nisso, consideremos a expressão do campo elétrico gerado pelo disco no caso  $z > 0$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

A expressão do campo gerado pelo disco contém duas parcelas, portanto pode ser pensada com a soma do campo gerado por dois objetos diferentes, mas uma delas nós conhecemos, que é o campo do plano infinito

$$\mathbf{E}_{disco} = \mathbf{E}_{plano} - \frac{\sigma}{2\epsilon} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\mathbf{E}_{plano} - \mathbf{E}_{disco} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

A expressão do campo do plano menos o plano do disco corresponde justamente ao campo de um plano vazado, conforme se tem na figura abaixo

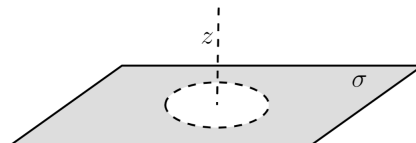


Figura 4: Plano vazado



---

### 1.11 Fio finito carregado

Utilizaremos as mesmas técnicas já desenvolvidas para calcular o campo elétrico gerado por um fio finito carregado, como se vê na figura abaixo

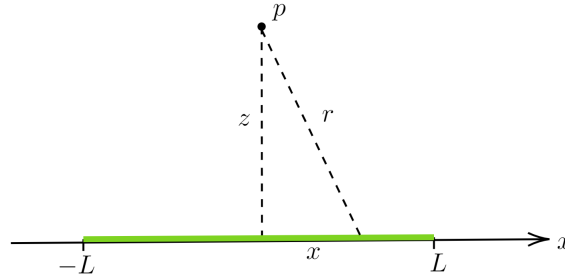


Figura 5: Fio finito carregado

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$dq = \lambda d\ell$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_z \cos \theta = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{z}{r} = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\lambda}{x^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} d\ell$$

$$E(z) = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{d\ell}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

### 1.12 Continuação do exemplo do Fio finito carregado

---

### 1.13 Superfície esférica carregada

Consideremos agora o campo elétrico gerado por uma esfera eletrizada na sua superfície avaliado em um ponto de altura  $z$ , conforme se tem na figura abaixo

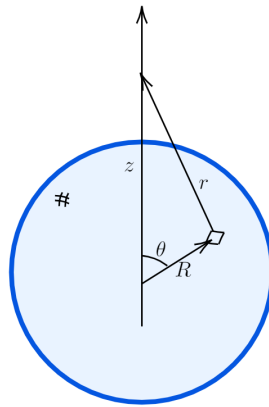


Figura 6: Casca esférica carregada

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$dq = \sigma da$$

$$dq = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Podemos expressar a distância  $r^2$  por meio da Lei dos Cossenos

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma R^2 \sin \theta}{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta} d\theta d\phi \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_z \cos \Theta$$

Para melhor visualizar quem é o ângulo  $\Theta$  e expressar o seu cosseno, olhemos para o triângulo abaixo

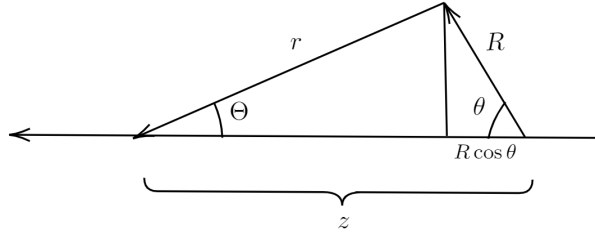


Figura 7: Casca esférica carregada

$$\cos \Theta = \frac{z - R \cos \theta}{r} = \frac{z - R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma R^2 \sin \theta}{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta} \frac{(z - R \cos \theta)}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta}} d\theta d\phi \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta (z - R \cos \theta)}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta)^{3/2}}$$

$$E(z) = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \sigma R^2 \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta (z - R \cos \theta)}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta)^{3/2}}$$

Podemos resolver a integral em  $\theta$  fazendo uma substituição de variável

$$\cos \theta = u \rightarrow du = -\sin \theta d\theta$$

$$E(z) = -\frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \sigma R^2 \int_{-1}^1 du \frac{(z - Ru)}{(R^2 + z^2 - 2Rzu)^{3/2}}$$

Novamente mudamos a variável

$$R^2 + z^2 - 2Rzu = x \rightarrow dx = -2Rz du$$

$$Ru = \frac{R^2 + z^2 - x}{2z}$$

$$E(z) = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \sigma R^2 \frac{1}{2Rz} \int_{-1}^1 dx \frac{(z - Ru)}{(R^2 + z^2 - 2Rzu)^{3/2}}$$

$$E(z) = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \sigma R^2 \frac{1}{2Rz} \left[ \int_{-1}^1 dx \frac{z}{x^{3/2}} - \int_{-1}^1 dx \frac{Ru}{x^{3/2}} \right]$$

---


$$E(z) = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \sigma R^2 \frac{1}{2Rz} \left[ \int_{-1}^1 dx \frac{z}{x^{3/2}} - \int_{-1}^1 dx \frac{R^2 + z^2 - x}{2zx^{3/2}} \right]$$

$$E(z) = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \sigma R^2 \frac{1}{2Rz} \left[ \int_{-1}^1 dx \frac{z}{x^{3/2}} - \int_{-1}^1 dx \frac{R^2 + z^2}{2zx^{3/2}} + \int_{-1}^1 dx \frac{x}{2zx^{3/2}} \right]$$

## 1.14 Linhas de Campo

As linhas de campo são as linhas nas quais o campo é sempre tangente

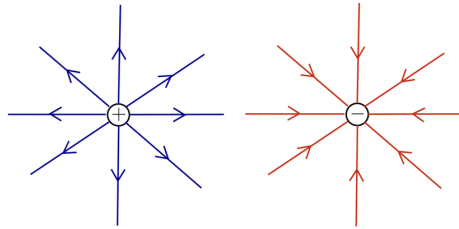


Figura 8: Linhas de campo de cargas pontuais

Notemos que quanto mais linhas de campo em uma região mais intenso é o campo nela, vemos na figura que a densidade de linhas é maior nas proximidades das cargas

Uma outra situação de interesse é a das linhas de campo formadas por dipolo de cargas

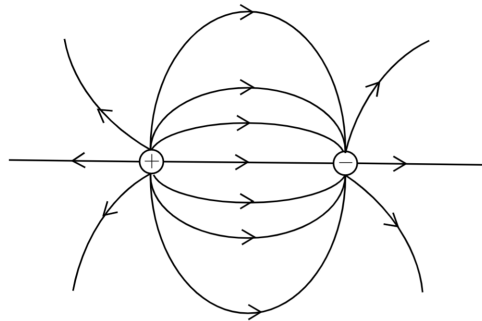


Figura 9: Linhas de campo de um dipolo de cargas

---

## 1.15 Fluxo e a sua interpretação física

O fluxo aparece de duas formas diferentes na literatura. Em geral, podemos pensar no fluxo de um campo  $\mathbf{v}$  como o campo por unidade de área ou o campo vezes a área

$$\frac{\mathbf{v}}{\text{Área}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} \cdot \text{Área}$$

Acontece que esse é meramente um problema linguística, pois em inglês o primeiro termo é "Flux" e o segundo é "Flow", porém ambos são traduzidos como fluxo e daí a confusão. Quando falarmos do fluxo de um campo em eletromagnetismo estaremos nos referindo ao "flow".

Para ganhar uma intuição física do fluxo, consideremos o fluxo de um campo de velocidade, associado ao escoamento de água, frequentemente chamado de vazão. A vazão é definida como o volume de água escoado por unidade de tempo

$$\text{Vazão} = \frac{\Delta V_{\text{vol}}}{\Delta t}$$

Mas o volume deslocado por ser escrito como a distância deslocada (A distância percorrida é a velocidade vezes o tempo) vezes a área da seção pela qual a água passa, isto é

$$\text{Vazão} = \frac{\mathbf{v} \Delta t A}{\Delta t}$$

$$\text{Vazão} = \mathbf{v} \cdot A$$

A área também pode estar inclinada em relação ao campo de velocidade e isso levará à aparição de um cosseno de ângulo de inclinação, por isso a expressão mais geral é um produto escalar com o vetor área, um vetor com módulo igual a área e com direção normal à área

$$\text{Vazão} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

Além disso, a área pode não ser plana, o que nos leva a considerar elementos de área infinitesimais e somá-los, portanto a expressão mais geral para o fluxo nesse caso é

$$\text{Vazão} = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

Não devemos cair no engano de que o campo elétrico é igual ao caso do fluxo de água, o campo elétrico não existe é um fluido real se movendo. Apenas usaremos do mesmo aparato matemático na descrição do campo elétrico, a expressão matemática para o fluxo de um campo é geral, e pode ser usada no estudo de objetos de natureza física distinta. No caso do campo elétrico, a interpretação é que o fluxo através de uma superfície fornece a contribuição do campo na direção perpendicular a ela.

---

## 1.16 Motivação para o cálculo do fluxo do campo elétrico

De acordo com o teorema de Helmholtz, se temos o divergente e o rotacional de um campo  $\mathbf{F}$  qualquer,  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  e  $\nabla \times \mathbf{F}$ , mais suas condições de contorno, então podemos o campo é univocamente determinado. Isto é, o campo pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}$$

onde

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \hat{\mathbf{n}}' \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'\end{aligned}$$

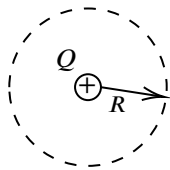
Por isso é fundamental determinar o o divergente e o rotacional de um campo. E além do teorema de Helmholtz o teorema de Gauss relaciona o divergente de um campo com o seu fluxo

$$\int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

Daí a importância de calcularmos o fluxo do campo, pois com ele ganhamos informação sobre o seu divergente. Com isso ganharemos uma intuição mais completa e geral do campo elétrico.

## 1.17 Obtenção da lei de Gauss

Consideremos o fluxo do campo gerado por uma carga pontual  $Q$  através de uma superfície esférica de raio  $R$



O campo é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

Então o fluxo é

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

onde  $d\mathbf{S}$  denota o elemento de superfície

O elemento de superfície pode ser expresso em coordenadas esféricas como

$$d\mathbf{S} = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{e}}_r$$

---

Como o campo e o vetor elemento de superfície são paralelos o produto escalar fica simplesmente igual aos módulos dos vetores e o fluxo fica

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi$$

Por fim, obtemos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Essa expressão é absolutamente geral, note que, pelo princípio da superposição, eu poderia colocar uma configuração de cargas (conjunto discreto ou uma distribuição contínua) dentro da superfície e o fluxo seria simplesmente a carga total sobre a permissividade elétrica. Além disso, a expressão do fluxo não depende da área da superfície, o que sugere um fato ainda mais impressionante, que o fluxo do campo gerado por uma carga através de uma superfície independe da escolha ou da forma da superfície considerada, poderíamos ter feito a conta com qualquer outra superfície mas obviamente escolhemos a esfera por simplicidade.

A expressão do fluxo como demonstrada acima é conhecida como forma integral da Lei de Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Utilizando o teorema da divergência (de Gauss), escrevemos

$$\int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

A carga total da configuração de cargas pode ser expressar em termos da densidade

$$Q = \int_V dV \rho$$

De forma que

$$\int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho$$

E obtemos a Forma diferencial da Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Com a forma diferencial da lei de Gauss nós podemos testar novamente a validade da expressão simplesmente por calcular o divergente do campo elétrico e conferir o resultado.

---

Consideremos o campo elétrico gerado por uma distribuição qualquer de densidade  $\rho$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left[ d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} \right]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} \right)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r}) = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

E por fim recuperamos a lei de Gauss em sua forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}$$



---

## 1.18 Quando utilizar a lei de Gauss

## 1.19 Campo elétrico de esferas carregadas com lei de Gauss

Já resolvemos o problema de determinar o campo gerado por uma superfície esférica na seção 13, mas vamos resolvê-lo novamente, mas agora usando a Lei de Gauss, dessa forma a resolução será incrivelmente mais simples.

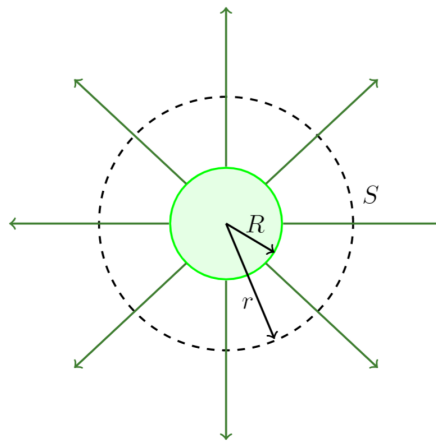


Figura 10: Casca esférica carregada e superfície gaussiana

A carga total  $Q$  na superfície esférica é

$$Q = \frac{\sigma}{4\pi R^2}$$

Pela Lei de Gauss

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

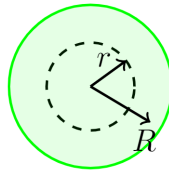
$$d\mathbf{A} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$Er^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

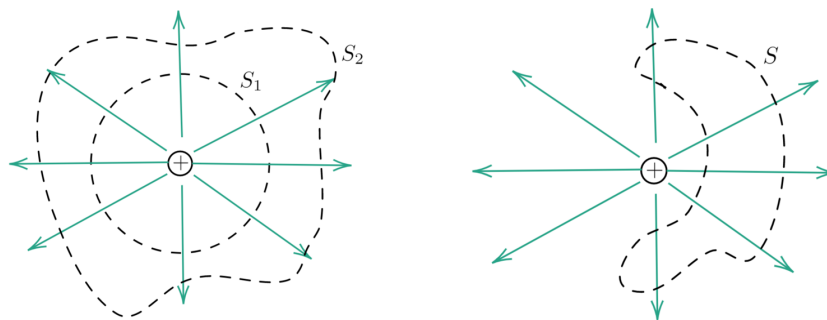
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

Nós obtivemos a mesmo resultado mas de uma forma muito mais prática. Agora podemos em como é o campo no interior da esfera, isto é, quando  $r < R$



Nesse caso o campo é zero! simplesmente porque a Lei de Gauss diz respeito às cargas dentro da superfície gaussiana, nesse caso a cara está toda contida na superfície da esfera e a carga dentro da superfície gaussiana é zero.

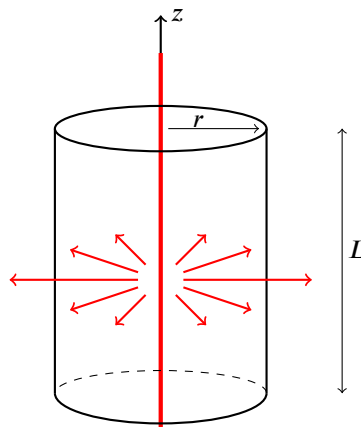
Essa é uma sutileza da Lei de Gauss que pode não ser óbvia a princípio. Consideremos as figuras abaixo



Na figura da esquerda vemos que o campo dentro da superfície  $S_1$  e  $S_2$  é igual, já que ambas contém a mesma carga em seus interiores. Na figura da direita vemos que o campo dentro da superfície  $S$  é zero, porque ela não contém nenhuma carga elétrica em seu interior.

## 1.20 Campo elétrico de um fio infinito com lei de Gauss

Consideremos o problema do campo gerado por um fio finito de densidade  $\lambda$



$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_r$$

Lei de Gauss

---


$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

A carga total é dada por

$$Q = \lambda L$$

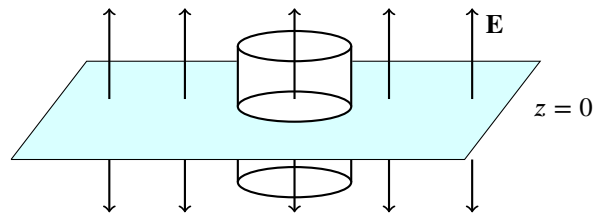
$$E \int_S dS = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{e}}_r$$

### 1.21 Campo elétrico de cilindros infinitos com lei de Gauss

### 1.22 Campo elétrico de um plano infinito com lei de Gauss



### 1.23 Teorema de Earnshaw

---

## 1.24 Motivação para o potencial eletrostático

Ao estudarmos o fluxo do campo elétrico ganhamos informação sobre a divergência do campo, e o campo pode ser determinado a partir do seu divergente e do seu rotacional. A introdução agora do potencial elétrico será útil na obtenção de informação acerca do rotacional do campo elétrico.

A divergência é relacionada a uma integral do tipo

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

O rotacional é relacionada a uma integral do tipo

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

A última integral é muita semelhante a uma integral que define o trabalho de uma força ao longo de um caminho

$$W = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

É uma integral de linha ao longo de uma curva fechada.

Isso nos sugere que o rotacional deve estar associado a um tipo de trabalho. A força sentida por uma carga  $q$  em um campo  $\mathbf{E}$  é

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

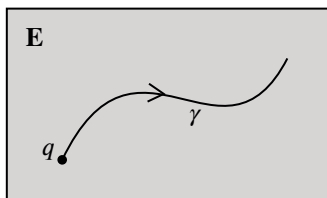
Então a expressão

$$\oint_\gamma (q\mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = q \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

se assemelha à do trabalho, com a diferença de que aqui a curva precisa ser fechada.

## 1.25 Potencial eletrostático, parte 1

Consideremos uma partícula carregada com carga  $q$  imersa em uma região de campo elétrico, ela sente uma força devido à esse campo e realiza uma certa trajetória. Vamos avaliar qual é o trabalho fornecido à ela.



O trabalho realizado pela força elétrica ao longo da curva  $\gamma$  é dado por

$$W = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

que pode ser escrito como

---


$$W = q \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell$$

Consideremos que o campo  $\mathbf{E}$  seja gerado por uma carga pontual

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\ell = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\ell = \int_{\gamma} \frac{1}{r^2} d\mathbf{r}$$

A integral acima independe do caminho  $\gamma$ , ela só depende dos extremos de integração, ou seja, as posições inicial e final da carga. Por essa razão dizemos que o campo  $\mathbf{E}$  é conservativo.

$$\int_{\gamma} \frac{1}{r^2} d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{1}{r^2} d\mathbf{r}$$

Se que um campo  $\mathbf{A}$  for conservativo, então ele sempre pode ser escrito como o gradiente de um campo escalar  $\mathbf{A} = \nabla\phi$ , a partir daí temos que

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\ell = \int_{\gamma} \nabla\phi \cdot d\ell = \phi(b) - \phi(a)$$

Sendo  $a$  e  $b$  os pontos inicial e final da curva  $\gamma$

No caso do campo elétrico, o nosso candidato a gradiente é

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

E o campo  $\mathbf{E}$  é

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

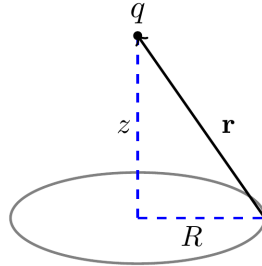
## 1.26 Potencial eletrostático, parte 2

Agora podemos pensar em como é o potencial elétrico produzido por uma distribuição qualquer de cargas

---

### 1.27 Potencial de um anel carregado

Consideremos um anel circular de densidade de cargas  $\lambda$ , qual o potencial gerado à uma altura  $z$ ?



$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

$$dq = \lambda d\ell$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d\ell$$

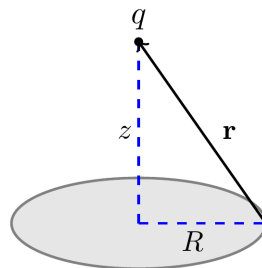
$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} 2\pi R$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

### 1.28 Potencial de um disco carregado

Consideremos um disco de densidade de cargas  $\sigma$ , qual o potencial gerado à uma altura  $z$ ?



### 1.29 Potencial eletrostático do plano e fio infinitos

### 1.30 Potencial eletrostático de um dipolo elétrico

---

**1.31 Força e torque em um dipolo elétrico**

**1.32 Condutores na eletrostática, parte 1**

**1.33 Condutores na eletrostática, parte 2**

**1.34 Condutores na eletrostática, parte 3**

**1.35 Energia eletrostática**

**1.36 Energia eletrostática de uma esfera uniformemente carregad**

**1.37 Forma diferencial da eletrostática**

**1.38 Energia eletrostática em termos do campo elétrico**

**1.39 Condições de contorno na eletrostática**