Teoria Matemática de Gauge

matheus.coutinho9

September 2021

Aula 1 - Revisão Álgebra Linear

Mapas

Consideremos dois conjuntos X e Y. Um mapa é uma regra que associa um elemento $y \in Y$ a cada $x \in X$

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$
$$\varphi : x \mapsto \varphi(x)$$

O conjunto X é chamado de Domínio do mapa e Y de contradomínio do mapa. A imagem do mapa é o conjunto de elementos de Y, tais que $\varphi(x) = y$

Podemos definir também o mapa inverso φ^{-1}, que a associa um elemento de X a cada elemento de Y

Algumas definições

- Um mapa é dito ser injetivo se, quando $x \neq x' \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(x')$
- Um mapa é dito ser sobrejetivo se, para cada elemento de $y \in Y$ existe um $x \in X$, tal que $\varphi(x) = y$
- Um mapa é dito ser bijetivo quando ele é injetivo e sobrejetivo

Dados dois mapas $\varphi : X \longrightarrow Y$ e $\psi : Y \longrightarrow Z$, definimos a composição dos dois mapas como sendo um mapa $\psi \circ \varphi : X \longrightarrow Z, \; \psi \circ \varphi = \psi(\varphi(x))$

Mapa identidade: $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$, $\mathrm{id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X$

Se o mapa $\varphi : X \longrightarrow Y$ definido por $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$ é bijetivo, então exite o mapa inverso $\varphi^{-1} : Y \longrightarrow X$, definido por $\varphi^{-1} : \varphi(x) \mapsto x$, satisfazendo a propriedade

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_Y \;, \quad \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_X$$

É notável que as propriedades acima fazem com que seja possível definir um grupo. Um grupo é definido como um par $(G, \star)$ de um conjunto e uma operação fechada nesse conjunto, tal que, para todos $a, b, c \in G$ temos que

- $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$
- $\exists \; e \in G$ tal que $g \star e = g$
- $\forall g \in G \;, \; \exists \; g^{-1},$ tal que $g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$

É fácil ver que o conjunto de todos os mapas lineares $\varphi : X \longrightarrow Y$ com a operação de composição de mapas formam um grupo, onde o elemento neutro é o mapa identidade e o elemento inverso é o mapa inverso.

Espaço Vetorial

Um conjunto V com adição e multiplicação por escalar é dito ser um espaço vetorial se dados: $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades

$u + v = v + u$
$(u + v) + w = u + (v + w)$
$\exists\ 0, \quad v + 0 = v$
$\exists - v, \quad v + (-v) = 0$
$\exists 1, \quad 1v = v$
$a(u + v) = au + av$
$(a + b)u = au + bu$

Produto Interno

$u, v, w \in V \ \ , \ (u, v) \in \mathbb{R}$

$(u, w) \geqslant 0$
$(u, u) = 0 \leftrightarrow u = 0$
$(u, w) = (w, u)$
$(au + wb, v) = a(u, v) + b(w, v)$

Norma $\quad \|v\| = \sqrt{(v, v)}$

Base Ortonormal

Uma base $(e_1, ..., e_n)$ de V é ortonormal se $(e_j, e_k) = \delta_{jk}$
Dado $v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i$$

Mapas Lineares

Sejam V, W espaços vetoriais, $\varphi : V \to W$ é linear se

$$\varphi(au + bw) = a\varphi(u) + b\varphi(w)$$

Mapas lineares também formam espaços vetoriais

$\mathcal{L}(V, W)$ Espaço das transformações lineares
$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(V, W)$

$(\varphi_1 + \varphi_2) \in \mathcal{L}(V, W)$
$a\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

Adjunto

$$\varphi : V \to W$$
$$\varphi^* : W \to V$$
$$(\varphi u, w) = (u, \varphi^* w)$$

Espaço Dual

Um *Funcional Linear* em um espaço vetorial V é um mapa linear $V \to \mathbb{R}$

Exemplo:

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y, z) = 4x - 5y + 2z$$

O espaço dos funcionais lineares em V é o espaço dual V^*

V^* é um espaço vetorial

$$dim(V) = dim(V^*)$$

Se $(e_1, ..., e_n)$ é uma base de V , $(\varphi_1, ...\varphi_n) \subset V^*$ é base dual se

$$\varphi_j(e_k) = \delta_{jk}$$

Teorema de Representação de Riesz

Se V é um espaço vetorial com produto interno e $\varphi \in V^*$, $\exists\ u \in V$ tal que $\varphi(v) = (v, u), \forall\ v \in V$

Espaço Topológico

Dado um conjunto não-vazio X e τ uma coleção de subconjuntos de X. O par (X, τ) é dito ser um espaço topológico se as seguintes propriedades forem satisfeitas

- $\varnothing, X \in \tau$
- $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$
- Se Λ é um conjunto arbitrário de índices e $A_\lambda \in \tau$, $\forall \lambda \in \Lambda$ então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$

Aula 2 - Espaço Tangente

Dada uma curva qualquer, é fácil vizualizar o que é um vetor tangente a cada ponto da curva, ou um plano tangente a cada ponto de uma superfície. Mas essas noções podem ser generalizadas.

Derivada Direcional

Se $v, p \in \mathbb{R}^n$ parametrizam a reta $\gamma(t) := (p_1 + v_1 t, ..., p_n, v_n t)$. A derivada de direcional de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ em p na direção v é

$$D_v f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t))$$

$$D_v f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\gamma(t)}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

$$D_v(p) : \quad C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p, v \in \mathbb{R}^n \longrightarrow D_v(p)$$

Derivações

Def: Uma derivação em um ponto é um mapa linear $D : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a regra de Leibniz

$$D(f \cdot g)(p) = Df(p)g(p) + f(p)Dg(p)$$

O espaço das derivações é denotado por $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$

Derivadas parciais $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ são derivações pela regra da cadeia. Logo, somas

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

são derivações. Temos o mapa

$$\phi : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$$

$$v \longmapsto \sum v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

Teorema: ϕ acima é um isomorfismo. Portanto, identificamos vetores tangentes com derivações.

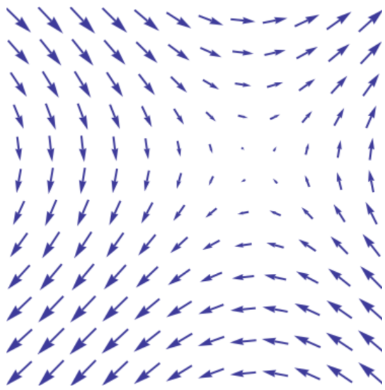
Além disso, se temos coordenadas $(x_1, ..., x_n)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p \right)$$

É a base de $T_p\mathbb{R}^n$

Campos Vetoriais

Intuitivamente, campos vetoriais são funções que associam um vetor a cada ponto do espaço, ou seja, funções da forma $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$



Um campo vetorial em $U \subset \mathbb{R}^n$ leva pontos $p \in U$ em vetores tangentes $x_p \in T_pU = T_p\mathbb{R}^n$

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \quad , \quad a_i(p) \in \mathbb{R}$$

Como mapa em U

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad a_i \in C^\infty(U)$$

Note agora que se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $Xf \in C^\infty(\mathbb{R})^n$

$$Xf(p) = \sum a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Vale ainda a regra de Leibniz

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$$

(k-) Covetores e produto wedge

Lembrando: se V é um espaço vetorial, seu dual é

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) \quad ,$$

espaço dos funcionais lineares. Chamaremos esses elementos de covetores

O que buscamos:

Vetores Tangentes $T_p\mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad$ campos vetoriais

Covetores $T_p^*\mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad$ 1-formas diferenciais

k-Vetores $\Lambda^k T_p^*\mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad$ k-formas diferenciais

O que são k-covetores?

Permutações

Seja $A = \{1, 2, ..., k\}$ um conjunto (de índices). Uma permutação é uma bijeção

$$\sigma : A \to A$$

ou seja, uma reordenação. Notação

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(3) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{bmatrix}$$

Uma transposição é uma permutação que troca dois elemetos e mantém os outros fixos,

Ex:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} =: (12)$$

Podemos decompor permutações como produtos de transposições

Ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (12)(14)(35)$$

$$12345 \longrightarrow 21345 \to 24315 \to 24513$$

Chamamos de S_k o grupo das permutações de $\{1, ..., k\}$, e definimos:

- $\sigma \in S_k$ é par se for produtos de uma quantidade par de transposições
- $\sigma \in S_k$ é ímpar se for produtos de uma quantidade ímpar de transposições

$$sgn(\sigma) := \begin{cases} 1 \text{ se } \sigma \text{ par} \\ -1 \text{ se } \sigma \text{ ímpar} \end{cases}$$

Note que $sgn(\sigma \cdot \tau) = sgn(\sigma) sgn(\tau)$

Funções Multilineares

Denote $V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ vezes}}$. Uma função $f : V^k \longrightarrow \mathbb{R}$ pe k-llinear se for linear em cada argumento

$$f(\cdots, av + bw, \cdots) = af(\cdots, v, \cdots) + bf(\cdots, w, \cdots)$$

Exemplos:

- Produto escalar é bilinear
- Se $A \in M^{n \times n}$, $A = (v_1, ..., v_n)$, $v_i \in \mathbb{R}^n$,
  $f(v_1, ..., v_n) = \det\ (v_1, ..., v_n) = \det\ A$ é n-linear

Def: Função k-linear $f : V^k \longrightarrow \mathbb{R}$ é

- Simétrica se $\forall \sigma \in S_k$,
  $f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) = f(v_1, ..., v_k)$
- Alternada se $\forall \sigma \in S_k$,
  $f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma) f(v_1, ..., v_k)$

Ex:

- Produto escalar é simétrico, $u \cdot v = v \cdot u$
- $\det(v_1, ..., v_n)$ é alternado

Def: O espaço das funções k-lineares alternadas em V é $\mathbb{A}_k(V)$. Os elementos são k-covetores

Dada uma função k-linear qualquer, podemos construir sua sumetrização:

$$Sf\,(v_1, \cdots, v_k) := \sum_{\sigma \in s_k} \sigma f$$

Definindo $\sigma f(v_1, ..., v_k) = f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)})$

Temos também sua versão alternante:

$$Af = \sum_{\sigma \in S_i} sgn(\sigma)\sigma f$$

Proposição: Se f é k-linear, Sf é simétrica e Af é alternante

Demonstração:

$\tau \in S_k$

$$\tau(Af) = \tau\left(\sum sgn(\sigma)\sigma f\right)$$

$$\tau(Af) = \sum sgn(\sigma)\tau(\sigma f)$$

$$\tau(Af) = sgn(\tau)\sum sgn(\tau)\ sgn(\sigma)(\tau\sigma)f$$

$$\tau(Af) = sgn(\tau)\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\tau\sigma)(\tau\sigma)f$$

$$\tau(Af) = sgn(\tau)Af$$

Proposição: Se $f \in \mathbb{A}_k(V)$, $\mathbb{A}f = (k!)f$

Demonstração:

$$Af = \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\sigma f = \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)^2 f = k!\ f$$

Produto Tensorial

No contexto de dimensão finita, podemos definir

$$V \otimes W = \operatorname{Hom}(v^\star, w)$$

Ou seja, se $v \in V$, $w \in W$, $f \in V^\star$

$$v \otimes w : V^\star \longrightarrow W$$

$$v \otimes w(f) = \underbrace{f(v)}_{\in \mathbb{R}} w \in W$$