Dinâmica de Sistemas Clássicos

matheus.coutinho9

September 2021

Sumário

1 Leis de Conservação e Sistemas de Partículas

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\mathbf{v}$$

$$\int_{x_0}^{x} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}'\right) \mathrm{d}\mathbf{x}' = \int_{v_0}^{v} m\mathbf{v}' \, \mathrm{d}\mathbf{v}'$$

$$\int_{x_0}^{x} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}'\right) \mathrm{d}\mathbf{x}' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2$$

$$W = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$$

2 Colisões

Essa seção sobre colisões consiste em uma aplicação básica dos conceitos desenvolvidos no capítulo anterior, pois os princípios físicos que nos guiarão ao longo do estudo de colisões são essencialmente as leis de conservaçao, da energia e do momento. Além disso, essa seção serve como uma leitura prévia aos estudos de colisões relativísticas.

2.1 Colisões Elásticas 1D

Consideraremos sempre sistemas composto por, uma partícula com velocidade v colidindo com uma partícula em repouso. Ou seja, uma colição de alvo fixo.

Dada a configuração

m_1 , $v_1 = v$
m_2 , $v_2 = 0$

Queremos determinar as velocidades das duas partículas (u_1 e u_2) após a colisão.

Sabemos, que o momento e a energia se conservam, logo temos

$$m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \tag{2}$$

Temos um basicamente um sistema de duas equações com duas variáveis, substiuimos u_2 em (2)

$$u_2 = \frac{m_1}{m_1}(v - u_1)$$

$$m_1 v^2 = m_1 u_1^2 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}(v - u_1)^2$$

$$m_1 v^2 = m_1 u_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2}(v - u_1)^2$$

$$m_1 u_1^2 - m_1 v^2 + \frac{m_1^2}{m_2} v^2 - 2\frac{m_1^2}{m_2} v u_1 + \frac{m_1^2}{m_2} u_1^2 = 0$$

$$\left(\frac{m_1^2}{m_2} + m_1\right) u_1^2 + \left(\frac{m_1^2}{m_2} - m_1\right) v^2 - 2\frac{m_1^2}{m_2} v u_1 = 0$$

$$(m_1 + m_1) u_1^2 + (m_1 - m_2) v^2 - m_1 v u_1 - m_1 v u_1 = 0$$

$$(u_1 - v)\left[u_1(m_1 + m_2) - v(m_1 - m_2)\right] = 0$$

Obtemos, portanto que

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v$$

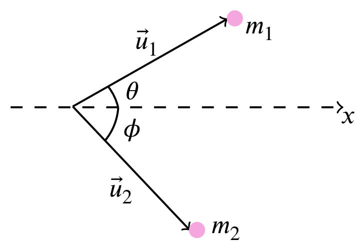
2.2 Colisões Elásticas 2D

Consideraremos agora uma configuração semelhante ao problema anterior, uma partícula com velocidade horizontal colidindo com uma partícula em repouso

Dada a configuração

m_1 , $v_1 = v\hat{\mathbf{x}}$
m_2 , $v_2 = 0$

Queremos determinar as velocidades das duas partículas (u_1 e u_2) após a colisão, e os ângulos de espalhamento θ e ϕ.



Escrevemos as conservações do momento nas direções x e y, e da energia

$$mv = m_1 u_1 \cos\theta + m_2 u_2 \cos\phi$$
$$0 = m_1 u_1 \sin\theta - m_2 u_2 \sin\phi$$
$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Encontramos uma dificuldade, possuímos 3 equações, mas gostaríamos de determinar 4 variáveis. Em ordem de contornar esse problema vamos analisá-lo no referencial do centro de massa.

3 Oscilações

O movimento oscilatório está presente em quase todas as área da física. O exemplo mais tradicional de oscilação talvez seja o de um sistema massa-mola, oscilando em torno de uma posição de equilíbrio, ou talvez o movimento de um pêndulo, mas as oscilações não estão restritas à esses simples sistemas, elas surgem também em circuitos elétricos e em sistemas atômicos, como móleculas e modelos para a matéria em estado sólido, que são sistemas mais complexos, em que os efeitos quânticos são necessários para entender suas dinâmicas. No entanto, a maior motivação para estudar em detalhe esse tipo de movimento é que podemos considerar sistemas acoplados formados por muitos corpos, e demonstrar que, quando o número de corpos é suficientemente grande, surge um movimento ondulatório. Ondas são objetos centrais na física, elas formam o som, tornando a comunicação possível, e formam a luz, tornando a visão possível. Além disso, as últimas tecnologias desenvolvidas, envolvendo principalmente a telecomunicação, são totalmente dependentes do nosso entendimento e capacidade de manipular ondas eletromagnéticas e mecânicas. Portanto, meu principal objetivo é mostrar como que o movimento ondulatório se origina do oscilatório, servindo como base para o seu entendimento.

3.1 Movimento Harmônico Simples

Como eu disse, um exemplo de movimento oscilatório é a posição de uma massa ligada a uma mola quando desloca de sua posição de equilíbrio. Utilizaremos esse sistema para entender como é a forma das equações desse movimento.

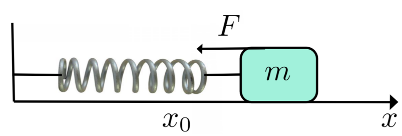


Figura 1: Sistema massa-mola

Ao deslocar a massa m de sua posição de equilíbrio a mola a puxa, fazendo uma força no sentido contrário, e quanto maior é o deslocalmento maior é a força com que a massa é puxada, ou seja, podemos expressar a uma relação do tipo

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$$

Ou seja, a força é proporcional ao deslocamento, mas com o sentido invertido. A expressão acima é denomonada *Lei de Hooke*, a qual forças com essa natureza, elástica, obedecem. Quando o deslocamento está à direita da posição de equilíbrio a mola está sendo esticada, e quando o deslocamento está à esquerda da posição de equilíbrio a mola está sendo comprimida, em ambos os casos a mola tende a reestabelecer a configuração de equilíbrio.

Uma vez que conhecemos a forma da força, podemos derivar o potencial

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x}$$

$$V(\mathbf{x}) = -\int_{\infty}^{x} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}'$$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Definindo

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

temos

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Agora o caminho natural é resolver a equação de movimento, isto é

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-kx = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem, cuja solução geral é

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

★ O cosseno de ωt e o seno de ωt são duas soluções independentes, como tráta-se de uma equação linear, podemos usar o que sabemos de álgebra linear para escrever a solução geral, pois o seno e o cosseno formam uma base para o subespaço vetorial formado pelas soluções da equação de movimento. Um elemento geral desse subespaço é escrito então como uma combinação dos elementos da base. Notamos que a base tem dimensão 2 em concordância com a ordem da equação.

Para determinarmos as duas constantes a e b, temos que dar duas condições, que podem $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$

$$x(0) = x_0 \ \Rightarrow a = x_0$$

$$\dot{x}(0) = -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t) = v_0 \ \Rightarrow b = \frac{v_0}{\omega}$$

Obtemos a solução

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Uma forma equivalente de escrever essa solução é

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Desde que

$$x_0 = A\cos\phi$$
$$v_0 = -A\omega\sin\phi$$

Essa solução é matematicamente igual, mas traz uma nova intuição física, pois temos dois novos parâmetros, que são, somando as duas equações acima

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

O parâmetro A pode ser interpretado como a amplitude do movimento, já que a função cosseno é limitada ao intervalo $[-1, 1]$, a função cosseno multiplicada por A é limitada agora ao intervalo $[-A, A]$.

Já o ϕ pode ser visto como uma fase

$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

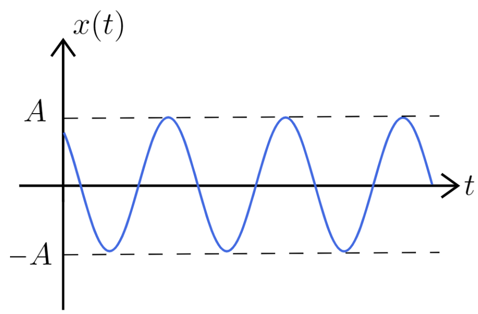


Figura 2: Gráfico $x \times t$

A fase ϕ apenas translada o gráfico $x \times t$ para a esquerda ou para a direita. Já o parâmetro ω é uma frequência angular, que diz quantas vezes o movimento de se repete em um dado intervalo de tempo.

Usamos o movimento de um sistema massa-mola apenas de base, porque as propriedades já discutidas são bem mais gerais, próprias de potenciais quadráticos. Podemos ver isso se considerarmos um movimento qualquer, caracterizado pelo potencial abaixo

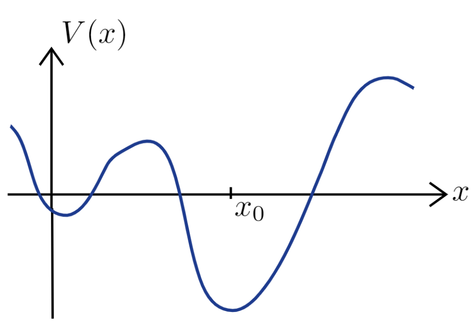


Figura 3: Potencial $V(x)$

Como vimos no gráfico, $V(x)$ tem um mínimo em x_0, podemos escrever o potencial $V(x)$ por meio de uma série de Taylor, assim

$$V(x) = V(x_0) + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\big(x_0\big)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\big(x_0\big)(x - x_0)^2 + \dots$$

Mas como trata-se de um ponto de equilíbrio, a primeira derivada é nula, então temos um potencial quadrático

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\big(x_0\big)(x - x_0)^2 + \dots$$

Concluímos que qualquer sistema física na vizinha de um ponto de equilíbrio estável tem a sua dinâmica descrito por um oscilador harmônico.

Podemos também expressar a energia do oscilador harmônico

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

A energia é proporcional ao quadrado da amplitude.

O considerado até agora é o conhecimento básico sobre o oscilador harmônico simples, nesse estágio creio que podemos avançar em direção à um problema um pouco mais complexo.

3.2 Osciladores Acoplados

Nessa seção vamos considerar inicalmente o movimento de oscilação de duas massas acopladas, isto é, suas posições não são independentes, depois podemos analisar o caso com 3 massas.

2 corpos

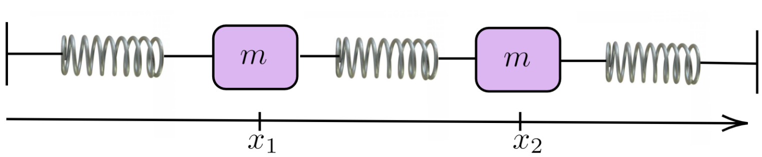


Figura 4: Osciladores acoplados

Escrevemos as equações de movimento de cada corpo

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - \ell) + k(x_2 - x_2 - \ell)$$
$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - \ell) - k(x_2 - x_2 - \ell)$$

ℓ é o comprimento natural de cada mola.

É útil nesse ponto redefinir as posições

$$x_1' = x_1 - \ell$$
$$x_2' = x_2 - 2\ell$$

As novas variáveis medem o deslocamente em relação às posições de equilíbrio, com isso as equações ficam masi simples

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x_1'}{\mathrm{d}t^2} &= -kx_1' + k\left(x_2' - x_1'\right) \\
m\frac{\mathrm{d}^2x_2'}{\mathrm{d}t^2} &= -kx_2' - k\left(x_2' - x_1'\right)
\end{aligned}
$$

Temos um sistema de equações diferenciais. Nesse caso específico, podemos resolver o sistema para $x_1(t) + x_2(t)$ e $x_1(t) - x_2(t)$, simplesmente por somar e subtrair as equações acima

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x_1' + x_2'\right) &= -k\left(x_1' + x_2'\right) \\
m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x_2' - x_1'\right) &= -3k\left(x_2' - x_1'\right)
\end{aligned}
$$

Agora a solução é conhecida

$$
\begin{aligned}
x_1(t) + x_2(t) &= 2A_+\cos\left(\omega_+ t + \phi_+\right) \\
x_1(t) - x_2(t) &= 2A_-\cos\left(\omega_- t + \phi_-\right)
\end{aligned}
$$

Com

$$
\begin{aligned}
\omega_+ &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
\omega_- &= \sqrt{\frac{3k}{m}}
\end{aligned}
$$

E obtemos as soluções dos movimentos individuas simplesmente somando e subtraindo as soluções encontradas

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= A_+\cos\left(\omega_+ t + \phi_+\right) + A_-\cos\left(\omega_- t + \phi_-\right) \\
x_2(t) &= A_+\cos\left(\omega_+ t + \phi_+\right) - A_-\cos\left(\omega_- t + \phi_-\right)
\end{aligned}
$$

Consiguimos encontrar a solução sem grandes problemas, mas essa tarefa pode se tornar extremamente difícil se tivermos sistemas com muitos corpos, então, antes de discutir os resultados físicos associados com a solução, vamos resolver o problema utilizando outra técnica, que a princípio pode parecer mais difícil mas que será muito facilitará a generalização para oscilação de N corpos.

O método consiste em "chutarmos"uma solução do tipo $x(t) = Ae^{i\omega t}$ e escrevermos as equações de movimento em forma matricial, no intuito de determinar A e ω

$$
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}
$$

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x_1'}{\mathrm{d}t^2} &= -kx_1' + k\left(x_2' - x_1'\right) = -2kx_1' + kx_2' \\
m\frac{\mathrm{d}^2x_2'}{\mathrm{d}t^2} &= -kx_2' - k\left(x_2' - x_1'\right) = kx_1' - 2kx_2'
\end{aligned}
$$

$$\frac{d^2x_1'}{dt^2} = -2\omega^2 x_1' + \omega^2 x_2'$$
$$\frac{d^2x_2'}{dt^2} = \omega^2 x_1' - 2\omega^2 x_2'$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Essa é uma equação de autovetores a autovalores para o vetor solução

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\vec{x}$$

"Chutamos"uma solução do tipo

$$\vec{x} = \vec{\mathbf{C}}e^{\alpha t}$$

com

$$\vec{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2\vec{x} = A\vec{x}$$

$$(\alpha^2 - A)\vec{x} = 0$$

$$\det\left(\alpha^2 - A\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} \alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \alpha^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix} = \left(\alpha^2 + 2\omega^2\right)^2 - \omega^4 = 0$$

$$\alpha = \pm i\omega \quad \text{ou} \quad \alpha = \pm i\sqrt{3}\omega$$

$$\Updownarrow$$

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow_z\rangle$$

4 Forças Centrais

4.1 Coordenadas Polares

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + r\sin\theta\hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{y}}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{y}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\theta}$$
$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

4.2 Lei de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{r}}$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{r}}$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{dV}{dr}$$

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

$$m\ddot{r} = -\frac{dV}{dr} + \frac{L^2}{mr^3}$$

$$m\ddot{r} = \frac{dV_{ef}}{dr}$$

$$V_{ef} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

4.3 Energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta})(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Método alternativo

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = ab\cos\theta$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = ab\sin\theta$$

$$(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) + (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = (ab)^2$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$L^2 = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (rp)^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2$$

$$p^2 = \frac{L^2}{r^2} + \frac{1}{r^2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2$$

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = r(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) = rp_r$$

$$p^2 = \frac{L^2}{r^2} + p_r^2$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

5 Movimento de Corpos Rígidos