Notas - Métodos da Física Teórica

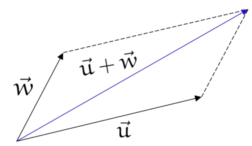
Matheus Pereira Coutinho
Instituto de Física da USP
matheus.coutinho9@usp.br

Vetores e operações com vetores

escalar = número
Vetor = norma (número), direção e sentido

1. Operações com vetores

(a) Soma



(b) Produto escalar
$\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{u}$

(c) elemento neutro 0
$\vec{u} + 0 = \vec{u}$

2. Coordenadas
$\{$ 0, 3 eixos$\}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}^{\mathsf{T}} = (v_1, v_2, v_3)$$

3. Operações usando coordenadas

(a) Soma

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

(b) Produto por escalar

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{pmatrix}$$

4. Versores
Um vetor unitário associado a cada direção

$$\vec{u} = u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2 + u_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{3} u_k \cdot \vec{e}_k$$

Transformações Lineares e Matrizes

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação

$$T : V \longrightarrow W$$

é dita ser linear se

$$T|\alpha v + \beta w\rangle = \alpha T|v\rangle + \beta T|w\rangle$$

Considerando as bases (ortonormais) dos espaços V e W como $\{|e_k\rangle\}$ e $\{|E_k\rangle\}$, respectivamente

$$|w\rangle = T|v\rangle$$

$$|w\rangle = T\left(\sum_k v_k|e_k\rangle\right) = \sum_k v_k T|e_k\rangle$$

$$T|e_k\rangle = \sum_j T_{jk}|E_j\rangle$$

$$\langle E_m|T|e_k\rangle = \sum_j T_{jk}\langle E_m|E_j\rangle = \sum_j T_{jk}\delta_{mj} = T_{mk}$$

$$|w\rangle = T|v\rangle$$

$$\sum_m w_m|E_m\rangle = \sum_n v_n T|e_n\rangle$$

$$\sum_m w_m|E_m\rangle = \sum_n v_n\left(\sum_m T_{mn}|E_m\rangle\right)$$

$$\sum_m w_m|E_m\rangle = \sum_m\left(\sum_n T_{mn}v_n\right)|E_m\rangle$$

$$w_m = \sum_n T_{mn}v_n$$

A equação acima pode ser escrita em forma matricial

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1M} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N1} & T_{N2} & \cdots & T_{NM} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix}$$

Operações com matrizes

Soma: $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

Produto por escalar: $\alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow (\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$

★ Com essas operações é possível identificar um espaço vetorial formado por matrizes

Produto = Composição:
$A : V_1 \longrightarrow V_2 \;\;, \;\; B : V_2 \longrightarrow V_3$

As base de V_1, v_2, V_3 são, respectivamente, $\{|a_i\rangle\}, \{|b_i\rangle\}, \{|c_i\rangle\}$ mM

$$A|a_i\rangle = \sum_n A_{ni}|b_n\rangle$$

$$B|b_i\rangle = \sum_m B_{mi}|c_m\rangle$$

$$|u\rangle \equiv B(A|v\rangle) \equiv BA|v\rangle$$

$$|u\rangle = B\left(\sum_m v_m A\,|a_m\rangle\right)$$

$$|u\rangle = B\left[\sum_m v_m \left(\sum_n A_{nm}|b_n\rangle\right)\right]$$

$$|u\rangle = \sum_m \sum_n A_{nm} v_m B|b_n\rangle$$

$$|u\rangle = \sum_m \sum_n A_{nm} v_m \left(\sum_k B_{kn}|c_k\rangle\right)$$

$$|u\rangle = \sum_m \sum_n \sum_k A_{nm} B_{kn} v_m |c_k\rangle$$

$$|u\rangle = \sum_k u_k |c_k\rangle$$

$$\sum_k u_k|c_k\rangle = \sum_k \left(\sum_m \sum_n A_{nm} B_{kn} v_m\right)|c_k\rangle$$

$$u_k = \sum_m \sum_n A_{nm} B_{kn} v_m$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1M} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix}$$

Produto direto entre vetores

$\{|e_i\rangle\}$ = base ortonormal = base canônica

$$|e_i\rangle\langle e_k| = \begin{cases} 1 \text{ no elemento } ik \\ 0 \text{ nos outros elementos} \end{cases}$$

Ex: $\mathbb{R}^3$

$$|e_1\rangle\langle e_1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|e_2\rangle\langle e_3| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \sum_i \sum_j A_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|$$

Quantidades importantes

1- Traço
$\text{tr}\, A = \sum_k A_{kk}$

2 - Determinante
$\det A = \sum_m \sum_n \sum_k \epsilon_{mnk} A_{1m} A_{2n} A_{3k}$

Aplicação do determinante - Sistemas Lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A|x\rangle = |b\rangle$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle$$

A^{-1} é a matriz inversa

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left[(-1)^{nm}\det\left(A_{\cancel{m}\cancel{n}}\right)\right]$$

★ quando $\det A = 0 \quad \Rightarrow \nexists A^{-1}$

Se

$$A|x\rangle = |0\rangle$$

$\exists A^{-1}$

$$A^{-1}A|x\rangle = A^{-1}|0\rangle = |0\rangle$$

$$|x\rangle = |0\rangle$$

Quando $\nexists A^{-1}$ posso ter soluções não-triviais $\det A = 0$

Autovalores e Autovetores

Problema de Sturm-Liouville

Operadores Diferenciais

Seja V um espaço vetorial de funções

então um operador diferencial de segunda ordem $L : V \longrightarrow V$ é escrito como

$$L = P(x)\frac{d^2}{dx} + R(x)\frac{d}{dx} + Q(x)$$