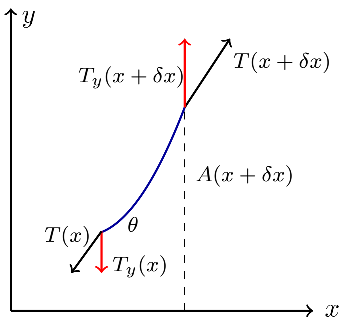
Ondas

matheus.coutinho9

September 2021

Ondas Transversais em uma Corda Livre

Consideremos o perfil de uma corda de densidade linear de massa μ e tensão T (A princípio constante)



Usando a Lei de Newton podemos chegar na equação de movimento

$$\vec{F}_R = m.\vec{a}$$

onde m denota a massa de um pequeno segmento da corda

A força resultante será a diferença nas componentes verticais da tensão

$$\vec{F}_R = T_y(x+\delta x) - T_y(x)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor até primeira ordem, temos

$$T_y(x+\delta x) \approx T_y(x) + \frac{\partial T_y(x)}{\partial x}\delta x$$

Dessa forma, a força resultante é dada por

$$\vec{F}_R = \frac{\partial T_y(x)}{\partial x}\delta x$$

$T_y(x)$ pode ser escrito como

$$T_y(x) = T.sin(\theta)$$

A função seno e tangente se confundem para ângulos pequenos, de sorte que podemos escrever

$$T_y = T.sin\theta \approx T.tan\theta \approx T\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}$$

$$\vec{F}_R = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial A}{\partial x}\right)\delta x \tag{1}$$

$$\vec{F}_R = T\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\delta x$$

$$\vec{F}_R = T\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\delta x = m.\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

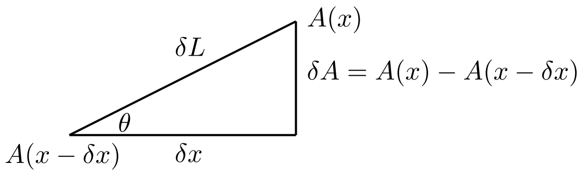
$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0}$$

Essa equação pode ser encontrada de forma alternativa e equivalente utilizando o formalismo Lagrangeano, nesse caso não será necessário pensar em forças.

A energia cinética de um segmento de massa é

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\mu\delta x\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$$

O termo de energia potencial será motivado pela diferença de amplitude entre dois pontos próximos



No limite de pontos próximos a energia potencial é o produto de força vezes a distância δL

$$\delta L = \sqrt{(\delta x)^2 + [A(x) - A(x - \delta x)]^2} - \delta x$$

$$\delta L = \delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)^2} - \delta x$$

$$\frac{\delta A}{\delta x} = \frac{\partial A}{\partial x} \ll 1$$

Realizando novamente uma expansão em série de Taylor, temos

$$\delta L = \delta x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^4 + \cdots\right) - \delta x$$

$$\delta L = \frac{1}{2}\delta x\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\delta x \tag{2}$$

$$L = \mathcal{K} - \mathcal{U}$$

$$L = \frac{1}{2}\mu\delta x\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\delta x$$

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 - \frac{T}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$$

Uma vez de posse da densidade lagrangeana as equação de movimento pode encontrada resolvendo as equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} = 0$$

Esse formalismo apresenta uma enorme vantagem em problemas envolvendo interações, porém nestes problemas a tensão não é constante, o que foi assumido ao longo das deduções até aqui apresentadas, para valer-se desta ferramenta será necessário reescrever as equações de forma mais geral. Considerando que a tensão é variável, temos, portanto, uma nova equação de ondas

$$\mu\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial A}{\partial x}\right) = 0$$

Para chegar nessa equação eu simplesmente deixei de assumir a tensão constante como fiz na equação 1

Com isso, temos que no formalismo newtoniano a equação de uma onda com interação pode ser obtida por analisarmos como as forças externas afetam a tração.

Para modificar a Lagrangeana, **suponho** que a energia potencial não é o simples produto da tensão pela distância e sim uma integral

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int T(x)\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 dx$$

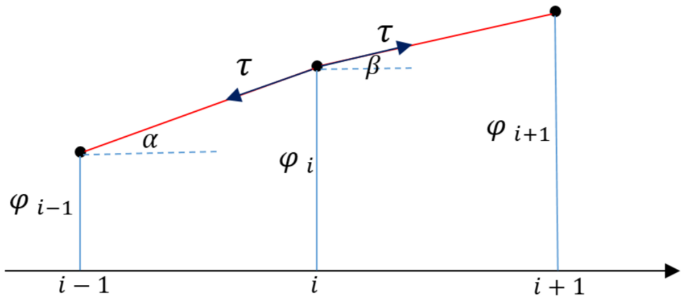
De sorte que a Lagrageana se torna

$$\mathcal{L} = \mu\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\int T(x)\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 dx$$

Uma corda sujeita a um potencial $V(x)$ qualquer tem a seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mu\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\int T(x)\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 dx - V(x)$$

Consideremos um sistema de massa acopladas e que oscilam verticalmente



Lei de Newton

$$m.\ddot{\varphi}_i = \tau \sin\beta - \tau \sin\alpha$$

Como os ângulos são pequenos:

$$\sin\beta = \tan\beta$$
$$\sin\alpha = \tan\alpha$$

$$m.\ddot{\varphi}_i = \frac{\tau}{a}[(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i - \varphi_{i-1})]$$

$$\frac{\tau}{a}[(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i - \varphi_{i-1})] = F_R$$

$$U(\varphi_i) = -\int F.d\varphi_i$$

$$U = \frac{\tau}{2a}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 + \frac{\tau}{2a}(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2$$

$$U = \sum_k \frac{\tau}{2a}(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2$$

$$T = \sum_k \frac{1}{2}m.\dot{\varphi}_k^2$$

$$L = \sum_k \frac{1}{2}m.\dot{\varphi}_k^2 - \sum_k \frac{\tau}{2a}(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2$$

$$a = \Delta x \to 0, \quad \varphi_i(t) \to \varphi(x,t)$$

$$L = \sum \Delta x \frac{1}{2}\frac{m}{\Delta x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \sum \Delta x^2 \frac{\tau}{2\Delta x}\left(\frac{\varphi(x+\Delta x,t) - \varphi(x,t)}{\Delta x}\right)^2$$

$$L = \lim_{\Delta x\to 0} \sum \Delta x \frac{1}{2}\frac{m}{\Delta x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \sum \Delta x \frac{\tau}{2}\left(\frac{\varphi(x+\Delta x,t) - \varphi(x,t)}{\Delta x}\right)^2$$

$$L = \int dx \left[\frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right]$$

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2$$

$$S = \int \int dt.dx \left[\frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Ondas IV

Ondas Planas

De fato as ondas, em geral, se propagam em 3D ... precisamos de uma versão de 3D da equação de onda

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right] A(x,y,z,t) = 0$$

Essa é uma generalização evidente da equação de ondas em 1D

Essa equação é invariante sob transformações de Lorentz

Existem várias soluções para essa equação, um dos tipos de solução é chamada onda plana

$$A(x,y,z,t) = A_0\ cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

$\mathbf{k}$ pode apontar em qualquer direção $\omega = v|\ \mathbf{k}|$

$$A(x,y,z,t) = A_0 \cdot e^{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi)}$$

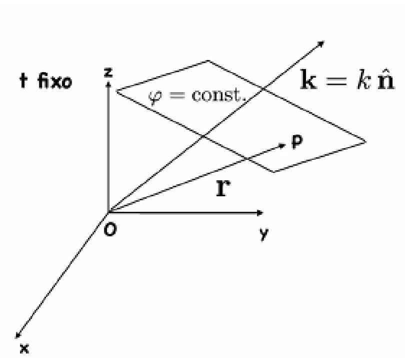
$$A(x,y,z,t) = A_0 \cdot exp(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

Chamamos de frente de onda o lugar geométrico dos pontos de fase constante num dado intante t

$$\varphi = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \text{ const}$$

As frentes de onda são planas



Direção em que $\mathbf{k}$ aponta é a direção de propagação da onda

Interferência

Um dos fenômenos mais importantes das ondas é o fenômeno da interferência.

Consideremos um autofalante emitindo som com frequência ω

Se o autofalante está em y=0 e estivermos à uma distância suficientemente longe da onde, o som vai aparecer como uma onda plana

$$A_1(y,t) = A_0\ cos\left(\omega t - ky + \phi_1\right)$$

Agora imagine que temos um outro alto-falante diretamente atrás do primeiro produzindo o mesmo som com o mesmo volume Nesse caso este autofalante também produzirá uma onda plana a uma distância suficientemente longe

$$A_2(y,t) = A_0\ cos\left(\omega t - ky + \phi_2\right)$$

O som que será percebido na posição do ouvinte será resultado da soma

$$A_T(y,t) = A_1(y,t) + A_2(y,t) = A_0\ cos\left(\omega t - ky + \phi_1\right) + A_0\ cos\left(\omega t - ky + \phi_2\right)$$

$$A_T(y,t) = A_0\,\mathrm{Re}\left[e^{i(\omega t - ky + \phi_1)} + e^{i(\omega t - ky + \phi_2)}\right]$$

$$A_T(y,t) = A_0\,\mathrm{Re}\left[e^{i(\omega t - ky)}\left(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}\right)\right]$$

$$A_T(y,t) = A_0\,\mathrm{Re}\left[e^{i(\omega t - ky)}\left(e^{i\left(\frac{\phi_1+\phi_1}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\phi_2+\phi_2}{2}\right)}\right)\right]$$

$$A_T(y,t) = A_0\,\mathrm{Re}\left[e^{i\left(\omega t - ky + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{-\phi_2+\phi_1}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{-\phi_1+\phi_2}{2}\right)}\right)\right]$$

$$A_T(y,t) = 2A_0\ cos\left(\omega t - ky + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\ cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$$

$$\psi\left(q_1 \ldots q_{3N}\right)=\sum_{a=1}^{\infty} c_a u_a\left(q_1 \ldots q_{3N}\right)$$

$$\int d q_1 \ldots d q_{3N} u_a^*\left(q_1 \ldots q_{3N}\right) u_{a^{\prime}}\left(q_1 \ldots q_{3N}\right) \equiv \int(d q) u_a^*(q) u_{a^{\prime}}(q)=\delta_{a a^{\prime}}$$

$$c_a=\int(d q) u_a^*(q) \psi(q)$$

$$\sum_a u_a(q) u_a^*\left(q^{\prime}\right)=\delta^{3N}\left(q-q^{\prime}\right)$$

$$\delta^{3N}\left(q-q^{\prime}\right) \equiv \prod_{j=1}^{3N} \delta\left(q_j-q_j^{\prime}\right)$$

$$f(x)=\int \delta\left(x-x^{\prime}\right) f\left(x^{\prime}\right) d x^{\prime}$$

$$|\zeta\rangle=\alpha|\xi\rangle+\beta|\eta\rangle$$

$$\langle\xi \mid \eta\rangle=\langle\eta \mid \xi\rangle^*$$

$$\langle\zeta|=\alpha^*\langle\xi|+\beta^*\langle\eta|$$

$$\langle\omega \mid \zeta\rangle=\alpha\langle\omega \mid \xi\rangle+\beta\langle\omega \mid \eta\rangle$$

$$\left\langle k \mid k^{\prime}\right\rangle=\delta_{k k^{\prime}}$$

$$|\omega\rangle=\sum_k c_k|k\rangle$$

$$c_k=\langle k \mid \omega\rangle$$

$$|\omega\rangle=\sum_k|k\rangle\langle k \mid \omega\rangle$$

$$\Box\psi(t,\vec{x}) = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(t,\vec{x}) = f(t,\vec{x})$$

$$\Box G\left(t,\vec{x};t',\vec{x}'\right) = \delta\left(t-t'\right)\delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)$$

$$\Box\psi(t,\vec{x}) = f(t,\vec{x})$$

$$\psi(t,\vec{x}) = \int dt' d^3x' G\left(t,\vec{x};t',\vec{x}'\right) f\left(t',\vec{x}'\right)$$

$$\psi(t,\vec{x}) = \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} e^{i\omega t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\ \tilde{\psi}(\omega,\vec{k})$$

$$\tilde{\psi}(\omega,\vec{k}) = \int dtd^3x\ e^{-i\omega t} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\ \psi(t,\vec{x})$$

$$\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\psi} = \tilde{f} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\psi} = -\frac{1}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\tilde{f}$$

$$\psi(t,\vec{x}) = \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} e^{i\omega t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{-1}{\vec{k}^2 - \omega^2/c^2}\tilde{f}(\omega,\vec{k})$$

$$= \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} e^{i\omega t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{-1}{\vec{k}^2 - \omega^2/c^2}, \int dt' d^3x' e^{-i\omega t'} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} f\left(t',\vec{x}'\right)$$

$$= \int dt' d^3x' f\left(t',\vec{x}'\right) \times \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} e^{i\omega(t-t')} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{-1}{\vec{k}^2 - \omega^2/c^2}.$$

$$G\left(t,\vec{x};t',\vec{x}'\right) = \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} e^{i\omega(t-t')} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{-1}{\vec{k}^2 - \omega^2/c^2}$$

$$G\left(t,\vec{x};t',\vec{x}'\right) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d\omega e^{i\omega\Delta t}\int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\frac{e^{ik\Delta x\cos\theta}}{k^2 - \omega^2/c^2}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d\omega e^{i\omega\Delta t} \times (2\pi)\int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 - \omega^2/c^2}\frac{1}{ik\Delta x}\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right)$$

$$G(\Delta t;\Delta x) = \frac{c^2}{4\pi^3}\frac{1}{\Delta x}\int_0^\infty dk k\,\mathrm{sen}(k\Delta x)\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega\Delta t}}{\omega^2 - k^2c^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(x,t) = X(x).T(t)$$

$$X(x)\frac{d^2u}{dt^2} + v^2 T(t)\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

$$\frac{1}{v^2T(t)}\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{X(x)}\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

$$\frac{1}{v^2T(t)}\frac{d^2u}{dt^2} = -k^2 \quad \frac{1}{X(x)}\frac{d^2u}{dx^2} = -k^2$$

$$\ddot{T}(t) + v^2k^2T = 0$$

$$X''(x) + k^2X = 0$$

$$T(t) = a \cdot e^{ivkt} + b \cdot e^{-ivkt}$$

$$X(x) = c \cdot e^{ikx} + d \cdot e^{-ikx}$$

$$u(x,t) = \left(a \cdot e^{ivkt} + b \cdot e^{-ivkt}\right) \cdot \left(c \cdot e^{ikx} + d \cdot e^{-ikx}\right)$$

$$u(x,t) = ac \cdot e^{i(vkt+kx)} + ad \cdot e^{i(vkt-kx)} + bc \cdot e^{-i(vkt+kx)} + bd \cdot e^{-i(vxt+kx)}$$

$$u(x,t) = ac \cdot e^{ik(x+vt)} + ad \cdot e^{-ik(x-vt)} + bc \cdot e^{ik(x-vt)} + bd \cdot e^{-ik(x+v\cdot t)}$$

$$u(x,t) = A \cdot e^{ik(x+vt)} + B \cdot e^{-ik(x-vt)} + C \cdot e^{ik(x-vt)} + D \cdot e^{-ik(x+v\cdot t)}$$

$$\mathbf{kv} = \omega$$

$$u(x,t) = A \cdot e^{i(kx+\omega t)} + B \cdot e^{-i(kx+\omega t)} + C \cdot e^{i(kx-\omega t)} + D \cdot e^{-i(kx-\omega t)} \tag{3}$$

$$u(x,t) = A \cdot e^{ikx}e^{i\omega t} + B \cdot e^{-ikx}e^{-i\omega t} + C \cdot e^{ikx}e^{-i\omega t} + D \cdot e^{-ikx}e^{i\omega t}$$

$$e^{\pm ikx} = \cos(kx) \pm i\sin(kx)$$
$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i\sin(\omega t)$$

Ou

$$\ddot{T}(t) + v^2k^2T = 0$$

$$X''(x) + k^2X = 0$$

$$T(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)$$

$$X(x) = c.\cos(kx) + d.\sin(kx)$$

$$u(x,t) = a_k\cos(\omega t)\cos(kx) + b_k\cos(\omega t)\sin(kx) + c_k\sin(\omega t)\cos(kx) + d_k\sin(\omega t)\sin(kx) \tag{4}$$

Exemplo - Extremidades fixas

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$u(0,t) = a_k \cos(\omega t) + c_k \sin(\omega t) = 0$$

$$a_k = c_k = 0$$

$$u(x,t) = b_k \cos(\omega t) \sin(kx) + d_k \sin(\omega t) \sin(kx)$$

$$u(x,t) = \sin(kx)(b_k \cos(\omega t) + d_k \sin(\omega t))$$

$$u(L,t) = \sin(kL)(b_k \cos(\omega t) + d_k \sin(\omega t)) = 0$$

$$\sin(kL) = 0 \to k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)(b_k \cos(\omega t) + d_k \sin(\omega t))$$

$$\omega = kv$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[b_k \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + d_k \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)\right]$$

Exemplo - Extremidades Livres

Extremidades livres implicam tensão nula nas mesmas

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ka_k \cos(\omega t)\sin(kx) + kb_k \cos(\omega t) cos(kx) - kc_k \sin(\omega t)\sin(kx) + kd_k \sin(\omega t)\cos(kx)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = kb_k \cos(\omega t) + kd_k \sin(\omega t) = 0 \rightarrow b_k = d_k = 0$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = -ka_k \cos(\omega t)\sin(kL) - kc_k \sin(\omega t)\sin(kL)$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = \sin(kL)(-ka_k \cos(\omega t) - kc_k \sin(\omega t)) = 0$$

$$\sin(kL) = 0 \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k \cos(\omega t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + c_k \sin(\omega t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)(a_k \cos(\omega t) + c_k \sin(\omega t))$$

$$\omega = kv$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_k \cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) + c_k \sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)\right]$$

(1) Equação de onda em duas dimensões

a)

$$\vec{F}_R = T\Delta y\ \hat{n}_1 + T\Delta y\ \hat{n}_2 + T\Delta x\ \hat{n}_3 + T\Delta x\ \hat{n}_4$$

$$\vec{F}_R = F_x\hat{e}_x + F_y\hat{e}_y + F_z\hat{e}_z$$

As componentes das forças podem ser melhor vizualizadas através das projeções nos planos xz e yz

2021-11-07 (2).png

$$\begin{aligned}
F_x &= T_x\left(x_0+\Delta x\right)\Delta y - T_x\left(x_0\right)\Delta y \\
F_y &= T_y\left(y_0+\Delta y\right)\Delta x - T_y\left(y_0\right)\Delta x \\
F_z &= T_z\left(x_0+\Delta x\right)\Delta y - T_z\left(x_0\right)\Delta y + T_z\left(y_0+\Delta y\right)\Delta x - T_z\left(y_0\right)\Delta x
\end{aligned}$$

b)

Mostrarei que não há força resultante na direção x mas o procedimento é exatamente o mesmo para a direção y

$$F_x = T\cdot\cos\theta(x_0+\Delta x)\Delta y - T\cdot\cos\theta(x_0)\Delta y$$

Para ângulos pequenos temos que $\cos\theta \simeq 1$

$$F_x = T\Delta y - T\Delta y = 0$$

c)

$$F_z = T_z\left(x_0+\Delta x\right)\Delta y - T_z\left(x_0\right)\Delta y + T_z\left(y_0+\Delta y\right)\Delta x - T_z\left(y_0\right)\Delta x$$

$$F_z = \left[T\sin\theta\left(x_0+\Delta x\right) - T\sin\left(x_0\right)\right]\Delta y + \left[T\sin\theta\left(y_0+\Delta y\right) - T\sin\theta(y_0)\right]\Delta x$$

$$\sin\theta \simeq \tan\theta$$

$$F_z = \left[\tan\theta\left(x_0+\Delta x\right) - \tan\theta\left(x_0\right)\right]T\Delta y + \left[\tan\theta\left(y_0+\Delta y\right) - \tan\theta\left(y_0\right)\right]T\Delta x$$

d)

$$\tan\theta\,(x_0) \simeq \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\tan\theta\,(x_0+\Delta x) = \tan\theta\,(x_0) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\tan\theta\,(x_0)\right]\Delta x$$

$$\tan\theta(x+\Delta x) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x$$

$$F_z = \left[\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x - \frac{\partial z}{\partial x}\right]T\Delta y + \left[\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Delta y - \frac{\partial z}{\partial y}\right]T\Delta x$$

$$F_z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)T\Delta x\Delta y$$

e)

Segunda Lei de Newton

$$F_z = \Delta m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\sigma = \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{\Delta m}{\Delta x\Delta y} \to F_z = \sigma\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)T = \sigma\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$v^2 = \frac{T}{\sigma}$$

(2) Soluções Estacionárias

a)

$$z(x,y,t) = C\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{ik_x x}\cdot e^{ik_y y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = i\omega C\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{ik_x x}\cdot e^{ik_y y} = i\omega z$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 C\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{ik_x x}\cdot e^{ik_y y} = -\omega^2 z$$

Analogamente: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -k_x^2 z \quad , \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k_y^2 z$

$$-\omega^2 z = v^2 \left(-k_x^2 z - k_y^2 z\right)$$

$$\omega^2 = \left(k_x^2 + k_y^2\right) v^2$$

$$k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2$$

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}$$

b)

A relação de dispersão encontrada no item anterior é uma natural generalização da relação de dispersão de ondas em 1-D, sendo que agora $\vec{k}$ é um vetor de onda com componentes k_x e k_y e módulo $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$

c)

$$z(0,0,t) = z(L,0,t) = z(0,L,t) = z(L,L,t) = 0$$

d)

$z(0,0,t) = 0$

$$a.\cos(\omega t) + e.\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow a = e = 0$$

$z(0,L,t) = 0$

$$b.\cos(\omega t).\sin(k_y L) + f.\sin(\omega t).\sin(k_y L) = 0$$

$$\sin(k_y L)\left[b.\cos(\omega t) + f.\sin(\omega t)\right] = 0$$

$$\sin(k_y L) = 0 \rightarrow k_y = \frac{n\pi}{2L}$$

$z(L,0,t) = 0$

$$c.\cos(\omega t).\sin(k_x L) + g.\sin(\omega t).\sin(k_x L) = 0$$

$$\sin(\omega t)\left[c.\cos(\omega t) + g.\sin(\omega t)\right] = 0$$

$$\sin(k_x L) = 0 \rightarrow k_x = \frac{n\pi}{2L}$$

O último contorno não determina nada, pois os termos que contém seno de k_x ou k_y são nulos e assim os únicos termos que sobram são os dos coeficientes a e e, que já sabíamos que são nulos.

$$\begin{aligned}
z(x, y, t) = & \, b_{k_x,k_y} \cos(wt) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\
& + c_{k_x,k_y} \cos(wt) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\
& + d_{k_x,k_y} \cos(wt) \sin(k_x x) \sin(k_y y) \\
& + f_{k_x,k_y} \sin(wt) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\
& + g_{k_x,k_y} \sin(wt) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\
& + h_{k_x,k_y} \sin(wt) \sin(k_x x) \sin(k_y y)
\end{aligned}$$

Com $k_x = k_y = \dfrac{n\pi}{2L}$

e)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t}(x, y, t) = & -b_{k_x,k_y} \omega \sin(wt) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\
& - c_{k_x,k_y} \omega \sin(wt) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\
& - d_{k_x,k_y} \omega \sin(wt) \sin(k_x x) \sin(k_y y) \\
& + f_{k_x,k_y} \omega \cos(wt) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\
& + g_{k_x,k_y} \omega \cos(wt) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\
& + h_{k_x,k_y} \omega \cos(wt) \sin(k_x x) \sin(k_y y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t}(x, y, t) = & \, f_{k_x,k_y} \omega \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\
& + g_{k_x,k_y} \omega \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\
& + h_{k_x,k_y} \omega \sin(k_x x) \sin(k_y y) = 0
\end{aligned}$$

$$f = g = h = 0$$

$$\begin{aligned}
z(x, y, t) = & \, b_{k_x,k_y} \cos(wt) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\
& + c_{k_x,k_y} \cos(wt) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\
& + d_{k_x,k_y} \cos(wt) \sin(k_x x) \sin(k_y y)
\end{aligned}$$

(3)

a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right) + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)$$

b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{r^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2}{r^3}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{2xy}{r^4}$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{r^4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\left(-\frac{y}{r^2}\right)\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y^2}{r^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{-y}{r^2}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{xy}{r^4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{x}{r^2}\frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x^2}{r^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{x}{r^2}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2}{r^4}\right)$$

$$y^2 + x^2 = r^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

c)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

$$u(r,t) = R(r) \cdot S(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = R(r) \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = S(t) \cdot \frac{\partial R}{\partial r} \quad , \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = S(t) \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2}$$

$$R(r) \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2 \left(S(t) \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{S(t)}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right)$$

$$\frac{1}{S} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{R(r)} \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right)$$

$$\frac{1}{S(t)} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{1}{R(r)} v^2 \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right)$$

d)

$$\frac{1}{s(t)} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{1}{R(r)} v^2 \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\omega^2$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \omega^2 S = 0$$

$$v^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{v^2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \omega^2 R = 0$$

$$S(t) = C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\omega^2}{v^2} R = 0$$

e)

$$J_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu}$$

$$J_0\,(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}$$

$$J_0 \left(\frac{\omega}{v} r \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+1)} \left(\frac{\omega}{2v} r \right)^{2m}$$

$$J_0 \left(\frac{\omega}{v} r \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot m!} \left(\frac{\omega}{2v} r \right)^{2m}$$

$$R(r) = A J_0 \left(\frac{\omega}{v} r \right)$$

Mudança de variável $\frac{\omega}{v}r = \rho$

Para $m \in \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma(m+1) = m!$

$$J_0(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}$$

$$\frac{dJ_0}{d\rho} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+1)} 2m \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-1} \frac{1}{2}$$

$$\frac{m}{m!} = \frac{1}{(m-1)!}$$

$$\frac{dJ_0}{d\rho} = \frac{2}{\rho} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)! \cdot \Gamma(m+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}$$

mudança de variável $m \rightarrow m = k+1$

$$\frac{dJ_0}{d\rho} = \frac{2}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k! \cdot \Gamma(k+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2(k+1)}$$

$$\frac{dJ_0}{d\rho} = -\frac{\rho}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}$$

$$\frac{dJ_0}{d\rho} = -\frac{\rho}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} = -J_1(\rho)$$

$$\frac{d^2J_0}{d\rho^2} = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} - \frac{\rho}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+2)} 2m \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m-1} \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2J_0}{d\rho^2} = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)! \cdot \Gamma(m+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}$$

mudança de variável $m \rightarrow m = k+1$

$$\frac{d^2J_0}{d\rho^2} = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k! \cdot \Gamma(k+3)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2(k+1)}$$

$$\frac{d^2J_0}{d\rho^2} = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} + \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m+3)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} = -\frac{1}{\rho}J_1(\rho) + J_2(\rho)$$

$$\frac{d^2J_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dJ_0}{d\rho} + J_0 = -\frac{1}{\rho}J_1(\rho) + J_2(\rho) - \frac{1}{\rho}J_1(\rho) + J_0(\rho)$$

$$\frac{d^2J_0}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dJ_0}{d\rho}+J_0=-\frac{2}{\rho}J_1(\rho)+J_2(\rho)+J_0(\rho)$$

Utilizando a relação de recorrência

$$J_{\nu+1}(\rho)+J_{\nu-1}(\rho)=\frac{2}{\rho}J_\nu(\rho)$$

$$J_2(\rho)+J_0(\rho)=\frac{2}{\rho}J_1(\rho)$$

$$\frac{d^2J_0}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dJ_0}{d\rho}+J_0=0$$

f)

Contorno: A membrana está com as extremidades (r=L) fixas $u(L,t)=0 \Rightarrow R(L)=A.J_0\left(\frac{\omega}{v}L\right)=0$

o argumento $\frac{\omega}{v}L$ tem de ser igual às raízes da Função de Bessel. Como há um conjunto infinito de raízes, cada raíz a_n está associada a uma frequência ω_n

$$\frac{\omega_n}{v}L=a_n$$

$$\omega_n=\frac{a_n}{L}v$$

$$v=\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

$$\omega_n=\frac{a_n}{L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

g)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(R,0)=0$$

$$u(r,t)=A\left[C_1\cdot\cos(\omega t)+C_2\cdot\sin(\omega t)\right]J_0\left(\frac{\omega}{v}r\right)$$