Notas - Física Matemática

Matheus Pereira Coutinho
Instituto de Física da USP
matheus.coutinho9@usp.br

Sumário

1 Séries de Fourier (i)

1.1 Funções Periódicas

As séries de Fourier são úteis na descrição funções periódicas, isto é, $f(x+L) = f(x)$, onde L é o período da função

★ A vantagens das funções periódicas é que não precisamos estudar seu comportamento ao longo de todo o seu domínio, mas somente em um certo intervalo

Exemplos diretos de funções periódicas são as funções seno e cosseno

$$f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Verifiquemos que essa função é periódica

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{L}(x+L)\right) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi L}{L}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi L}{L}\right)$$

$$\cos(2\pi n) = 1$$

$$\sin(2\pi n) = 0$$

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{L}(x+L)\right) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$f(x+L) = f(x)$$

1.2 Série de Fourier

A ideia da série de Fourier é que a combinação linear de funções periódicas é também periódicas

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right]$$

a_n e b_n são os coeficientes da série

★ "Qualquer"função $f(x)$ periódica, de período L, pode ser expandida em uma série de Fourier

1.3 Relações de Ortogonalidade e Coeficientes

Utilizaremos nessa seção as relações de ortogonalidade das funções seno e cosseno para determinar os coeficientes a_n e b_n

De início, integremos a série de fourier de uma função $f(x)$ qualquer, de 0 a L

$$\int_0^L f(x)dx = \int_0^L \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx + b_n \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx\right]$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx = \frac{L}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\Big|_0^L = \frac{L}{2\pi n}[\sin(2\pi n) - 0] = 0$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx = -\frac{L}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\Big|_0^L = \frac{L}{2\pi n}[\cos(2\pi n) - 1] = 0$$

$$\int_0^L f(x)dx = \int_0^L \frac{a_0}{2}dx = \frac{a_0}{2}L$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx$$

O coeficiente a_0 tem a interpretação de média da função no intervalo $[0, L]$

Para encontrar $f(x)$ vamos multiplicar a série de Fourier de uma função $f(x)$ qualquer pelo cosseno e depois integramos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right]$$

$$\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx = \int_0^L \frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx + \right.$$

$$\left. b_n \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx\right]$$

$$\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\sin(x+y) - \frac{1}{2}\sin(x-y)$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^L \text{sen}\left(\frac{2\pi(m+n)x}{L}\right)dx - \frac{1}{2}\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi(m-n)x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}(-1)\frac{L}{2\pi(m+n)}\cos\left(\frac{2\pi(m+n)x}{L}\right)\Big|_0^L - \frac{1}{2}(-1)\frac{L}{2\pi(m-n)}\cos\left(\frac{2\pi(m-n)x}{2}\right)\Big|_0^L$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{L}{2\pi(m+n)}[\cos(2\pi(m+n)) - 1] + \frac{1}{2}\frac{L}{2\pi(m-n)}[\cos(2\pi(m-n)) - 1]$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx = 0$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi}{L}(m+n)x\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi}{L}(m-n)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L}{2\pi(m+n)}[\text{sen}(2\pi(m+m)) - \sin(0)] + +\frac{1}{2}\frac{L}{2\pi(m-n)}[\text{sen}(2\pi(m-n)) - \text{sen}(0)] = 0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi mx}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L/2 & m = m \end{cases}$$

$$\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx = a_m\frac{L}{2}$$

$$a_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx$$

b_n é determinado de forma análoga

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx$$

2 Séries de Fourier (ii)

Ideia: Expandir funções periódicas ($f(x+L) = f(x)$) em termos de senos e cossenos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right]$$

Dada uma função $f(x)$ nós temos que calcular seus coeficientes a_n e b_n para determinar a série de Fourier da função

Os coeficientes são determinados com o uso das relações de ortogonalidade das funções seno e cosseno

$$\int_0^L dx \cos\left(\frac{2rmx}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi n x}{2}\right) = 0 \quad \forall n, m \text{ inteiros}$$

$$\int_0^L dx \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) = \frac{L}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) = \frac{L}{2}\delta_{nm}$$

Assim, determinamos a forma dos coeficientes

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx$$

$$b_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx$$

2.1 Álgebra Linear

2.2 Escolha do intervalo

Consideremos uma função $f(x)$ periódica, isto é $f(x+L) = f(x)$, e definimos uma nova função $g(x) = f(\alpha x)$, onde α é uma constante. Então $g(x)$ é periódica, mas com periódo $\tilde{L} = L/\alpha$

Prova:

$$g\left(x + \frac{L}{\alpha}\right) = f(\alpha x + L) = f(\alpha x) = g(x)$$

★ Seja a_n e b_n os coeficientes de Fourier da função $f(x)$, e $\tilde{a}_n$ e $\tilde{b}_n$ os coeficientes de Fourier da função $g(x)$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{\tilde{L}}\int_{-\tilde{L}/2}^{\tilde{L}/2} g(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{\tilde{L}}\right) dx$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2\alpha}{L}\int_{-\tilde{L}/2}^{\tilde{L}/2} f(\alpha x) \cos\left(\frac{2\pi n x \alpha}{L}\right) dx$$

Podemos fazer uma mudança de variável $y = \alpha x$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) \cos\left(\frac{2\pi n y}{L}\right) dy \equiv a_n$$

Com isso, vemos que os coeficientes de Fourier não dependem do período L

★ Período conveniente : $L = 2\pi$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \; f(x) \cos(nx)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \; f(x) \sin(nx)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Se $f(x)$ tem período $L \neq 2\pi$?

Basta definir $g(x) = f(\alpha x)$ tal que $g(x)$ tenha período 2π. E calculamos a_n e b_n para $g(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right]$$

★ Uma definição útil para compactar a notação

$$k_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)\}$$

2.3 Exemplos

2.3.1 Onda Quadrada

Definimos a função sinal:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Que não é periódica, mas podemos "copiar"e "colar"ela ao longo do domínio. Esse tipo de função é denominado *Piecewise Periodic*

Podemos ajustar o período da função como 2π, e calculamos os coeficientes

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \cos(nx) dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(nx) dx$$

$$a_n = -\,\frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}(mx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}(nx)}{n}\bigg|_{0}^{\pi}$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx$$

$$b_n = \left.\frac{1}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{1}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{0}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) - \frac{1}{\pi n}(\cos(n\pi)-1)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

cosseno de $n\pi$ é 1 se n é par e -1 se n é ímpar

$$b_n = \frac{4}{\pi(2n+1)}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left(\frac{2\pi(2n+1)x}{L}\right)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin(2\pi x/L) + \frac{1}{3}\sin(6\pi x/L) + \frac{1}{5}\sin(10\pi x/L) + \dots\right\}$$

Uma forma alternativa de encontrar b_n é considerar a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx\,\mathrm{sen}\,nx = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\left[\int_0^{\pi} dx e^{inx}\right] = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\left[\left.\frac{e^{inx}}{in}\right|_0^{\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\left[\frac{e^{in\pi}}{in} - \frac{1}{in}\right] = \frac{2}{\pi n}\,\mathrm{Im}\left[(-i)\left(e^{in\pi}-1\right)\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n}\,\mathrm{Re}\left[1-e^{in\pi}\right] = \frac{2}{\pi n}[1-\cos n\pi] = \frac{2}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = \text{ par} \\ 4/n\pi & \text{se } n = \text{ impar} \end{cases}$$

3 Séries de Fourier (iii)

3.1 Receita de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

3.2 Paridade

Dizemos que uma função $f(x)$ é par se

$$f(x) = f(-x)$$

Dizemos que uma função $f(x)$ é ímpar se

$$f(x) = -f(-x)$$

Ex:

- x, $\sin x$ ímpares
- x^2, $\cos x$ pares

Produto de funções:

- par $\times$ par $\longrightarrow$ par
- par $\times$ ímpar $\longrightarrow$ ímpar
- ímpar $\times$ ímpar $\longrightarrow$ par

★ Se $f(x)$ é par, então

$$\int_{-L}^{L} dx f(x) = 2 \int_{0}^{L} f(x) dx$$

★ Se $f(x)$ é ímpar

$$\int_{-L}^{L} dx f(x) = 0$$

Se a função for periódica, então a integral de 0 a L também dá zero, pois

$$\int_{0}^{L} dx f(x) = \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) = 0$$

Se $f(x)$ é par:

- $f(x)\cos(nx) = \text{par}$
- $f(x)\sin(nx) = \text{ímpar} \Rightarrow b_n = 0$

Se $f(x)$ é ímpar:

- $f(x)\cos(nx) = \text{ímpar} \Rightarrow a_n = 0$
- $f(x)\sin(nx) = \text{par}$

- $f(x)$ par $\longrightarrow$ série de $\cos(nx)$
- $f(x)$ ímpar $\longrightarrow$ série de $\sin(nx)$

3.3 Exemplos

(i) $f(x) = x^2$

$f(x)$ não é periódica, mas pode ser feita periódica por partes, *piecewise function*

Nesse caso a escolha do intervalo importa

Definimos $f(x) = x^2$, periódica por partes em $[-\pi, \pi]$, isto é, $f(x + 2\pi) = f(x)$

Como $f(x)$ é par, $b_n = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ x^2\cos(nx)$$

$$\cos(nx) = \frac{1}{n}\frac{d}{dx}\sin(nx)$$

$$a = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ x^2\frac{d}{dx}\sin(nx)$$

$$x^2\frac{d}{dx}\sin(nx) = \frac{d}{dx}\left[x^2\cdot\sin(nx)\right] - 2x\cdot\sin(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\left[x^2\cdot\sin(nx)\right]_{-\pi}^{-\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin(nx)dx$$

$$a_n = -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin(nx)dx$$

$$\sin(nx) = -\frac{1}{n}\frac{d}{dx}\cos(nx)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{d}{dx}\cos(nx)dx$$

$$x\frac{d}{dx}\cos(nx) = \frac{d}{dx}[x\cdot\cos(nx)] - \cos(nx)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[x \cdot \cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \cos(nx)dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[\pi\cos(n\pi) + \pi\cos(n\pi)\right]$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}\cos(n\pi)$$

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\; x^2 = \frac{2}{3}\pi^2$$

Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

(ii) $f(x) = x$

Definimos $f(x) = x$, periódica por partes em $[-\pi, \pi]$, isto é, $f(x + 2\pi) = f(x)$

A função $f(x)$ é ímpar, então $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\; x\sin(nx)$$

$$b_n = -\frac{2}{n}\cos(n\pi)$$

$$b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

3.4 Forma Complexa da Série de Fourier

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

De forma equivalente, podemos expandir funções periódica de período L em termos de exponenciais $e^{i2\pi nx/L}$, com n inteiro

★ Como a exponencial não tem paridade definida, temos que somar sobre $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi nx/L}$$

Coeficientes c_n e relação de ortogonalidade

Consideremos a integral

$$\int_0^L dx\ e^{2\pi nx/L} e^{-2\pi mx/L}$$

$$\int_0^L e^{i2\pi(n-m)x/L} dx = \left.\frac{e^{i2\pi(n-m)x/L}}{i2\pi(n-m)/L}\right|_0^L$$

$$\int_0^L e^{i2\pi(n-m)x/L} dx = \frac{L}{2\pi i(n-m)}\left[e^{2\pi i(n-m)} - 1\right] = L\delta_{nm}$$

$$\int_0^L e^{i2\pi(n-m)x/L} dx = \delta_{nm} L$$

Frequentemente usaremos períodos $L = 2\pi$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \delta_{nm}$$

Agora podemos determinar os coeficientes c_n

Basta multiplicar a série de $f(x)$ por $e^{-2\pi imx/L}$ e integral de 0 a L

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi nx/L}$$

$$\int_0^L f(x) e^{-2\pi imx/L} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_0^L e^{i2\pi(n-m)x/L} dx = L\sum_n c_n \delta_{nm} = Lc_m$$

Portanto

$$c_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx f(x) e^{-2\pi inx/L}$$

Se $L = 2\pi$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-inx}$$

3.5 Relação entre c_n e (a_n, b_n)

Utilizamos a fórmula de Euler, temos os coeficientes c_n em termos dos a_n e b_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\left[\cos(nx) - i\sin(nx)\right]$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\cos(nx) - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)\sin(nx)$$

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

Para n negativo $\longrightarrow a_{-n} = a_n$ e $b_{-n} = -b_n$

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_{-n} + ib_{-n}\right)$$

4 Séries de Fourier (iv)

Dada a forma complexa da Série de Fourier, tiramos algumas relações no caso de funções reais, isto é $f(x) = f^*(x)$. Consideremos o coeficiente complexo da série de uma função $f(x)$ real.

$$c_n^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = c_{-n}$$

Concluímos que, se $f(x)$ é real, temos que $c_{-n} = c_n^*$

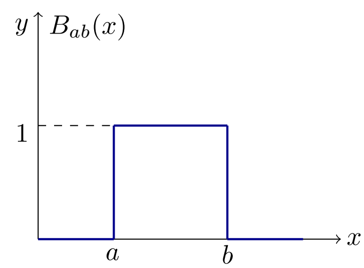
Agora vamos estudar o que acontecer se a função $f(x)$ tem paridade bem definida

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

- $f(x)$ par : $b_n = 0 \longrightarrow c_n = a_n/2 = \text{real}$
- $f(x)$ ímpar : $a_n = 0 \longrightarrow c_n = -ib_n/2 = \text{puramente imaginário}$

4.1 Função Delta de Dirac

Função "Boxcar": É uma função que é constante igual a zero em todo o domínio com excessão de um intervalo $[a, b]$ onde ela é constante igual a 1



Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 1/a & -\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Se tivermos uma função $g(x)$ arbitrária, escrevemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} g(x) dx$$

A função Delta de Dirac é definida simplesmente como

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} f(x)$$

Então a função Delta é como um Boxcar, infinitamente fino e infinitamente alto, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x)g(x) = g(0)$$

Série de Fourier de $\delta(x)$

Fazemos a função delta periódica por partes, com período 2π

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x)e^{-inx}dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}e^{-in0}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in z} e^{inx}$$

4.2 Função Theta de Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Podemos usar a função theta de Heaviside para construir a função boxcar

$$B_{ab}(x) = \theta(x-a)\theta(b-x)$$

Derivada da função theta

A derivada de theta certamente é zero quando $x > 0$ ou $x < 0$, pois nesses intervalos a função theta é constante. Mas em $x = 0$ a função tem um crescimento grande em um intervalo muito pequeno, intuivamente lembrando a função delta.

$$\theta'(x) = \alpha \cdot \delta(x)$$

Determinação de α

$$1 = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d\theta}{dx}dx = \frac{1}{\alpha}\theta(x)\Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} = \frac{1}{\alpha}[\theta(\epsilon) - \theta(-\epsilon)] = 1$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \theta'(x) = \delta(x)$$

5 Séries de Fourier (v)

5.1 Derivada de funções contínuas por partes

Consideraremos aqui que $f(x)$ é contínua quando

$$\lim_{\epsilon \to 0^-} f(x+\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x+\epsilon)$$

E se existe um ponto x_0 onde $f\left(x_0 + 0^-\right) \neq f\left(x_0 + 0^+\right)$, então esse é um ponto de descontinuidade

A ideia para derivar uma função contínuas por partes é multiplicar $f(x)$ por $1 = \theta(x - x_0) + \theta(x_0 - x)$

$$f(x) = f(x)\theta\left(x - x_0\right) + f(x)\theta\left(x_0 - x\right)$$

Agora podemos calcular a derivade de $f(x)$

$$f'(x) = f'(x)\theta\left(x - x_0\right) + f(x)\theta'\left(x - x_0\right) + f'(x)\theta\left(x_0 - x\right) - f(x)\theta'\left(x_0 - x\right)$$

$$f'(x) = f'(x)\theta\left(x - x_0\right) + f'(x)\theta\left(x_0 - x\right) + f(x)\left[\theta'\left(x - x_0\right) - \theta'\left(x_0 - x\right)\right]$$

$$f'(x) = f'(x)\theta\left(x - x_0\right) + f'(x)\theta\left(x_0 - x\right) + f(x)\delta\left(x - x_0\right) - f(x)\delta\left(x_0 - x\right)$$

$$f(x) = f'(x)\theta\left(x - x_0\right) + f'(x)\theta\left(x_0 - x\right) + \left[f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right)\right]\delta\left(x - x_0\right)$$

O termo $f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right) = \Delta f(x_0)$ está associado ao "pulo"da função em x_0

Generalizando para uma função com J descontinuidades em $x_1, x_2, \ldots, x_j$, temos a definição de derivada para funções descontínuas por partes

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{J} f'(x)\theta\left(x - x_{j-1}\right)\theta\left(x_j - x\right) + \sum_{j=1}^{J} \Delta f\left(x_j\right)\delta\left(x - x_j\right)$$

5.2 Identidade de Parseval

Consideremos duas funções $f(x)$ e $g(x)$, com período 2π, escritas em termos de suas séries de Fourier

$$f(x) = \sum_{n \in z} c_n e^{inx}$$

$$g(x) = \sum_{n \in z} d_n e^{inx}$$

Temos um produto interno entre f e g

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^* g(x) dx = \sum_{n \in z} c_n^* d_n$$

Se $f = g$, obtemos a chamada *identidade de Parseval*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n\in z}|c_n|^2$$

Exemplo: $f(x) = |x|$, periódica em $[-\pi, \pi]$

$$x_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}|x|dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}x\ dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}x\ dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{-inx}x\ dx = \left.\frac{xe^{-inx}}{-in}\right|_{x_0}^{x_1} - \frac{1}{-in}\int_{x_0}^{x_1} dxe^{-inx}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{-inx}x\ dx = \frac{xe^{-inx}}{-in} - \left.\frac{1}{(-in)^2}e^{-inx}\right|_{x_0}^{x_1}$$

$$c_n = -\frac{1}{2r}\left\{\frac{\pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{\left(1-e^{in\pi}\right)}{n^2}\right\} + \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} + \frac{\left(e^{in\pi}-1\right)}{n^2}\right\}$$

$$c_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\ dx$$

$$c_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\left(e^{ix} + e^{-ix} + \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{9} + \frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{25} + \cdots\right)$$

Identidade de Parseval:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2dx = \left.\frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3+\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{m<0}\frac{4}{\pi^2 n^4} + \sum_{n>0}\frac{4}{\pi^2 n^4}$$

$$\frac{\pi^2}{4} + 2\frac{4}{\pi^2}\sum_{n}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Com isso, obtemos o resultado

$$\sum_{n}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Identidade de Parseval para a Série de Fourier real

5.3 Convergência da Série de Fourier

Convergência de Séries

Dada uma Série numérica:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Dizemos que a série converge se A_n tende a um valor finito α quando $n \to \infty$. Mais formalmente, dizemos que a série converge se, dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe um inteiro N tal que

$$|A_n - \alpha| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

Exemplo de série numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

★ Fourier: estamos interessado em séries de funções, do tipo

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$$

Dizemos que $f_n(x)$ converge para $f(x)$, se dado um ϵ arbitrariamente pequeno, existe N tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ , \quad \forall \ n \geq N$$

Em geral:

- $N = N(\epsilon, x)$ (convergência pontual)
- Se $N = N(\epsilon)$ não depende de x, $f_n(x)$ converge uniformemente

Teste M de Weirstrass para convergência uniforme de uma série de função

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$$

Se $|u_n(x)| < M_n$ em algum intervalo I, para coeficientes M_n(independentes de x) e se $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, então $f_n(x)$ converge uniformemente em I

$$pV = nk_BT$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}\right) + \boldsymbol{\nabla} p - \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{f},$$

6 Séries de Fourier (vi)

7 Equações Diferenciais Ordinárias

7.1 Exemplos

Ex: Decaimente radioativo. Dada uma amostra de N átomos de Urânio, a taxa λ de decaimento é proporcional a N

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

★ O adjetivo ordinário da equação está associado ao fato da equação só envolver derivadas em relação a um único argumento

Ex: Oscilador Harmônico amortecido

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha\frac{dy}{dt} - ky$$

Essa equação é dita ser uma EDO de segunda ordem com coeficientes constantes(coeficientes não dependem de t), pois a derivada mais alta tem ordem 2

Ex: Circuitos RLC

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V(t)$$

Ex: Equação de Schrodinger em 1D

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\ \psi$$

Todos os exemplos acima são exemplos de equações não-lineares, pois y,y',y'' aparecem linearmente

Ex de EDO não linear:

$$y' + xy^2 = 1$$

7.2 Operadores Diferenciais

$$L = \sum_{j=0}^{m} u_j(x)\frac{d^j}{dx^j}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha\frac{dy}{dt} - ky$$

$$L = m\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\frac{d}{dt} + ky$$

$$Ly = 0$$

- $Ly = 0$: EDO homogênea
- $Ly = f(x)$: EDO inomogênia

7.3 Equações Separáveis

EDO:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x)dx$$

$$\int dy = \int f(x)dx$$

Integral indefinida:

$$y(x) = \int f(x)dx + C$$

Integral definida

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x')\, dx'$$

Exemplos

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$$\int \frac{dN}{N} = -\int \lambda dt$$

$$\ln N = -\lambda t + C$$

$$N(t) = e^{-\lambda t + C} = \tilde{C}e^{-}$$

$$\tilde{C} = e^{C}$$

Solução: $N(t) = Ce^{-\lambda t}$

C é determiado pela condição inicial: $N(t_0) = N_0$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Ex: $xy' = y$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$y = Cx$$