Correção A1 - ALN

Beatriz Lúcia

April 2025

1

1.1

(V).

$$\|x\|_2 = \|x\|_3 \implies x = e_i \quad \text{ou} \quad x = 0$$

Em ambos os casos, teremos

$$\|x\|_p = \|x\|_2 = \|x\|_3, \quad \forall p \in N$$

1.2

(F)

$$I = Q^t Q$$

e portanto, os valores singulares de Q são todos 1. Assim, $\Sigma = I$. Seja

$$Q = U\Sigma V^t = UV^t$$

uma decomposição SVD de Q. Tome, por exemplo, $Q = I$. Podemos escolher

$$U = I, V = I$$

. Também podemos tomar:

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = I, \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e verificar que:

$$\begin{aligned} U\Sigma V^T &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

1.3

(F)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_J = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. Portanto, o método de Jacobi diverge.

1.4

(F)

$$\kappa(f,x) = |\frac{xf'(x)}{f(x)}| = |\frac{x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}}| = |\frac{x}{2(1+x)}|$$

quando $x \to -1$, $\kappa(f,x) \to \infty$

2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2.1

$$M_J = D^{-1}(-L-U) = -\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_J = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{a} \\ \frac{c}{d} & 0 \end{bmatrix}$$

Cujos autovalores sejam $\lambda_1 = (\frac{bc}{ad})^{\frac{1}{2}}$ e $\lambda_2 = -(\frac{bc}{ad})^{\frac{1}{2}}$

2.2

A matriz de iteração de Gauss-Seidel M_{GS} é dada por:

$$M_{GS} = -(D+L)^{-1}U$$

O inverso de $D + L = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ é:

$$(D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{ad} & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$$

Multiplicando $-(D+L)^{-1}$ por U, obtemos:

$$M_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{bc}{ad} \end{bmatrix}$$

Os autovalores de M_{GS} são as raízes da equação:

$$\det(M_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{bc}{ad} - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\left(\frac{bc}{ad} - \lambda\right)$$

Portanto, os autovalores de M_{GS} são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \frac{bc}{ad}$.

2.3

Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz não é diagonalmente dominante e note que $\frac{bc}{ad} < 1$ e portanto, todos os autovalores de M_J são menores que 1. Concluímos que o método de Jacobi converge

3

Seja P uma matriz de projeção oblíqua em R^m, isto é, $P^2 = P$.

3.1

Para $x \in R^m$, defina $s(x) = \dfrac{\|Px\|_2}{\|x\|_2}$. Quais os valores máximo e mínimo de $s(x)$?

$$\max s(x) = \max \frac{\|Px\|_2}{\|x\|_2} = \|P\|_2 = \sqrt{\rho(P^T P)} = \sigma_{max}$$

onde $\rho(P^T P)$ é o raio espectral da matriz $P^T P$, σ_{max} = maior valor singular de P.

$$\min s(x) = \min \frac{\|Px\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_{min}(P)$$

se P não tem posto completo, corresponde a $x \in Ker(P)$, $Px = 0$.

3.2

Dê um exemplo de uma matriz P e dois vetores x_1 e x_2 tais que $s(x_1) > 1$ e $s(x_2) < 1$.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = P$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Px_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \implies \frac{\|Px_1\|}{\|x_1\|} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{1}} = \sqrt{8} > 1$$

$$Px_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \frac{\|Px_2\|}{\|x_2\|} = 0 < 1$$

3.3

Calcule o número de condicionamento absoluto da função $f : x \mapsto Px$, com relação à norma euclidiana.

$$k_{abs}(f) = \sup \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2} = \sup s(x) = \sqrt{\rho(P^T P)}$$

3.4

Qual o número de condicionamento relativo de f? Compare as respostas com o número de condicionamento da matriz P.

$$k_{rel}(f) = \sup \frac{\|D(f(x))\|_2 \|x\|_2}{\|Px\|_2} = \|P\|_2 sup \frac{\|x\|_2}{\|Px\|_2} = \|P\|_2 \frac{1}{\inf s(x)} = \frac{\max s(x)}{\min s(x)} = \frac{\sigma_{max}(P)}{\sigma_{min}(P)}$$

Condicionamento da matriz P:

$$\kappa(P) = \frac{\sigma_{\max}(P)}{\sigma_{\min}(P)}$$

$$k_{\text{rel}}(f) = \kappa(P)$$

quando P é invertível. No caso de projeção oblíqua, P não é invertível, e portanto $\sigma_{\min}(P) = 0$, levando a $k_{\text{rel}}(f) = \infty$.

3.5

O que muda se a projeção for ortogonal? (Isso não quer dizer que a matriz P é ortogonal!)

$$P^T = P$$

e como antes

$$P^2 = P$$

.

Neste caso, os autovalores da matriz são 0 ou 1. Mudamos o máximo da função $s(x)$ para 1, e o mínimo para 0. Ainda temos

$$k_{\text{rel}}(f) = \kappa(P)$$

e

$$k_{abs} = 1$$

exemplo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4

Vimos em aula que podemos usar a fatoração QR para resolver problemas de mínimos quadrados, com sistemas sobredeterminados. Esta questão é o caso "complementar", onde temos menos equações do que incógnitas. Para fixar uma solução, também vamos usar um critério de otimização: queremos minimizar a norma euclidiana da solução.

Seja A uma matriz $m \times n$ com $m \leq n$, de posto completo, e seja $b \in R^m$.

4.1

Calcule a dimensão de $S_b = \{x \in R^n \mid Ax = b\}$

Tome $x_0 \in S_b$. Podemos escrever $S_b = x_0 + k$, onde $k \in Ker(A)$. Portanto, $dim(S_b) = dim(Ker(A))$. Sabemos que

$$dim(Ker(A)) + dim(Im(A)) = n$$

onde n é o número de colunas. Como A é full rank, temos $dim(Im(A)) = m$. Consequentemente, $dim(S_b) = n - m$.

4.2

S_b é paralelo a um dos 4 espaços fundamentais de A. Qual?

Pela questão annterior, é evidente que S_b é paralelo ao $Ker(A)$

4.3

Seja z o vetor com a menor norma euclidiana em S_b. Mostre que $z \perp \ker(A)$.

Podemos escrever $z = x_0 + k$, onde $k \in Ker(A)$

$$\min \|z\|^2$$

restrito a

$$k \in Ker(A)$$

Forma complicada:

$$L(k, \lambda) = \|x_0\|^2 + 2 < x_0, k > + \|k\|^2 + < \lambda, Ak - 0 >$$

$$\frac{dL}{dk} = 2x_0 + 2k + A^T\lambda = 0 \implies k = -x_0 - 0.5A^T\lambda$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = Ak = 0 = A(-x_0 - 0.5A^T\lambda) \implies \lambda = -2((AA^T)^{-1})Ax_0 = -2((AA^T)^{-1})b$$

Então,

$$k^* = -x_0 + A^T(AA^T)^{-1})b \implies z^* = A^T(AA^T)^{-1})b$$

para qualquer $w \in Ker(A)$, temos:

$$< z^*, w >= b^T((AA^T)^{-1})^T Aw = 0$$

Portanto, z^* é ortogonal ao $Ker(A)$

Forma mais simples:

$$dist(0, S_b) = dist(Ker(A), S_b) = V$$

$$\|x\|^2 = \|V + k\|^2 = \|V\|^2 + \|k\|^2$$

$\|x\|$ será minimizada quando $\|k\| = 0$, ou seja, quando x for perpendicular ao $Ker(A)$

4.4

conclua que $z \in \text{im}(A^*)$

$$z^* \in (Ker(A))^\perp = Im(A^T)$$

4.5

Seja então $A^* = QR$ uma fatoração QR reduzida de A^*. Quais as dimensões das matrizes Q e R?

A^* tem dimensão $n \times m$ Dimensão de Q $= n \times m$, não geramos o restante dos vetores para formar uma base em $\mathcal{R}^n$. Dimensão de R é $m \times m$.

4.6

Explique por que existe y tal que $z = Qy$. Qy gera uma combinação das colunas de Q, onde as colunas de Q são a base para A^T .

Como $z \in Im(A^T)$ temos que z é uma combinação linear das colunas de A^T é portanto, uma combinação linear das colunas de Q.

4.7

Dê o sistema linear que permite calcular y, e deduza uma fórmula para a solução z.

$$z = Qy$$

e

$$Az = b$$

onde $A^T = QR$

então,

$$Az = b \implies R^T Q^T Qy = R^T y = b$$

Portanto,

$$y = (R^T)^{-1} b, z = Q(R^T)^{-1} b$$

---

usando o resultado da minimização, podemos fazer:

$$z = A^T(AA^T)^{-1})b = QR(R^T R)^{-1} b = Q(R^T)^{-1} b \implies y = Q^T z = (R^T)^{-1} b$$

(não necessário!)

4.8

Compare esta fórmula com a da solução do problema de mínimos quadrados.

Solução do problema de mínimos quadrados de $A^T x = w$ nos dá $x = (AA^T)^{-1} Aw. = (R^T R)^{-1} R^T Q^T w = R^{-1} Q^T w$