1

a) $T(x) . \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x) = Ax + b$

Sejam u e v duas retas paralelas:

$u: \ p + \lambda d$

$v: \ q + \alpha d$

$\to T(u) = Ap + \lambda A d + b$

$\to T(v) = Aq + \alpha A d + b$ $\to$ continuam paralelas

Verdadeiro!

b) $H(x) = H.x$

seja l uma reta . $l = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

A condição para pertencer a reta é $l^T x = 0$

Retas paralelas se encontram no infinito, ou seja, num ponto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aplicando H no ponto. $x' = H\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, nota-se que a terceira coordenada não necessariamente será igual a 0.

Ou seja uma transformação projetiva pode deixar duas retas paralelas concorrentes (Basta aplicar H^{-1} em x'.)

Falso!

c) seja R uma isometria em $\mathbb{R}^2$. Então

$R(x) = \{Ax + b \mid A^T A = I\}$

Como $R(x_0) = x_0 \to Ax_0 + b = x_0 \to A.\vec{0} + b = \vec{0} \to b = \vec{0}$

ou seja, não há translação $. \to R(x) = Ax$

$\cos(\theta_1) = \dfrac{x^T . y}{\|x\| . \|y\|}$

$\cos(\theta_2) = \dfrac{(Ax)^T (Ay)}{\|Ax\| . \|Ay\|} = \dfrac{x^T A^T A y}{\|x\| . \|y\|} = \dfrac{x^T y}{\|x\| \|y\|} = \cos(\theta_1)$

ou seja, o ângulo se manteve.

Verdadeiro!

d) Agora fazendo para uma isometria qualquer.

$R(x) = \{Ax + b \mid A^T A = I\}$

$\cos(\theta_1) = \dfrac{x^T y}{\|x\| \|y\|}$,

Como b somente desloca os pontos em uma mesma direção, o único fator que altera os ângulos é a própria matriz A. $\to \cos(\theta_2) = \dfrac{(Ax)^T . Ay}{\|Ax\| . \|Ay\|} \overset{c)}{=} \cos(\theta_1)$

Verdadeiro!

e) Seja $H(x) = Hx$. Seja $x, y \in \mathbb{R}^3 \mid x^T y = 0$

$\to K = (Hx)^T (Hy) = x^T H^T H y$, onde H não necessariamente é ortogonal, logo K não é necessariamente igual a zero, implicando que Hx e Hy podem não ser ortogonais mais.

Falso!

f) $H(x) = H.x$; . Uma cônica pode ser expressa como

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

ou seja $x^T C x = 0$. Uma circunferência . $C = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & F \end{bmatrix}$

Uma transformação em x faz com que

$x' = Hx \ \to \ x = H^{-1} x'$

$\Rightarrow x^T C x = (H^{-1} x')^T C H^{-1} x' = (x')^T (H^{-1})^T . C . H^{-1} . x' = 0$

$\to (x')^T . C' . x' = 0 \Rightarrow x'$ representa o ponto de uma cônica, com $C' = (H^{-1})^T . C . H^{-1}$.

$((H^{-1})^T C H^{-1})^T = (H^{-1})^T . C^T . (H^{-1}) = (H^{-1})^T . C . (H^{-1}) \Rightarrow C'$ é simétrica.

Verdadeiro!

g) Já foi provado o caso geral em f)

Verdadeiro!

2

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ $\qquad H\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$

$\to 3g + 1 = 0 \to \boxed{g = -1/3}$

$H . \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} -3a + c \\ -3d + f \\ +1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + c \\ -3d + f \\ 2 \end{pmatrix} \to \boxed{\lambda = 2}$

$-3d = -f \to \boxed{f = 3d}$

$\boxed{-3a + c = -6}$

$\to H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ serve como matriz projetiva.

$H\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \\ 1 - \frac{x}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x/(1 - x/3) \\ y/(1 - x/3) \\ 1 \end{bmatrix}$

$y' = \dfrac{y}{1 - \frac{x}{3}}$, $x' = \dfrac{2x}{1 - \frac{x}{3}}$ $\to \begin{cases} y' - \dfrac{x y'}{3} = y \ \to y = \left[1 - \dfrac{x'}{6 + x'}\right] y' = \dfrac{6}{6 + x'} y' \\ x' - x' \dfrac{x}{3} = 2x \ \to x = \dfrac{x'}{2 + \frac{x'}{3}} = \dfrac{3x'}{6 + x'} \end{cases}$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \Big| \quad x=\frac{3x'}{6+x'}, \quad y=\frac{6y'}{6+x'}$$

$$\rightarrow \frac{9x'^2}{9(6+x')^2}+\frac{36\cdot y'^2}{4(6+x')^2}=1$$

$$\rightarrow x'^2+9y'^2=(6+x')^2 \rightarrow \cancel{x'^2}+9y'^2=36+12x'+\cancel{x'^2} \rightarrow 3y'^2=12+4x'$$

$$\rightarrow x'=\frac{3}{4}y'^2-3$$ // EQUAÇÃO DA PARÁBOLA

③ Seja H uma homografia em forma matricial:

$$H=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{bmatrix},$$

como cada ponto transformado por H produzirá 2 equações em função dos elementos de H, 4 pontos determinarão as 8 variáveis de H.

Portanto, 4 pontos determinam uma homografia.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

i) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\f\\1\end{bmatrix}\rightarrow \begin{cases} c=0 \\ f=0 \end{cases}$

ii) $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b\\d+e\\g+h+1\end{bmatrix}\rightarrow \begin{cases} a=2-b \\ d=2-e \\ g=-h \end{cases}$

iii) $\begin{bmatrix} 2-b & b & 0 \\ 2-e & e & 0 \\ -h & h & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\e\\h+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\rightarrow \begin{cases} b=0 \\ e=2 \\ h=0 \end{cases} \rightarrow H=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$