Lista 3 de Matemática Discreta II

1. Considere a relação de recorrência homogênea de segunda ordem $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, com condições iniciais $a_0 = 2$, $a_1 = 7$. (**a**) Encontre os próximos três termos da sequência; (**b**) Encontre a solução geral; (**c**) Encontre a solução única, com as condições iniciais dadas.

2. Considere a relação de recorrência homogênea de terceira ordem $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$, com condições iniciais $a_0 = 2$, $a_1 = 7$. (**a**) Encontre a solução geral; (**b**) Encontre a solução única, com as condições iniciais $a_0 = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 12$.

3. Para cada relação de recorrência e conjunto de condições iniciais, encontre: (i) solução geral; (ii) a solução única, com as condições iniciais dadas.
(**a**) $a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}$; $a_0 = 5$, $a_1 = 11$
(**b**) $a_n = 4a_{n-1} + 21a_{n-2}$; $a_0 = 9$, $a_1 = 13$
(**c**) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$; $a_0 = 5$, $a_1 = 8$
(**d**) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; $a_0 = 2$, $a_1 = 8$
(**e**) $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$
(**f**) $a_n = 5a_{n-1} - 3a_{n-2}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

4. Para cada relação de recorrência e conjunto de condições iniciais, encontre: (i) solução geral; (ii) a solução única, com as condições iniciais dadas.
(**a**) $a_n = 6a_{n-1}$; $a_0 = 5$
(**b**) $a_n = 7a_{n-1}$; $a_0 = 5$
(**c**) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$; $a_0 = 1$, $a_1 = 8$
(**d**) $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$; $a_0 = 2$, $a_1 = 15$

5. Encontre a solução única para cada relação de recorrência, com as condições iniciais dadas:

(**a**) $a_n = 10a_{n-1} - 32a_{n-2} + 32a_{n-3}$; $a_0 = 5$, $a_1 = 18$, $a_2 = 76$.

(**b**) $a_n = 9a_{n-1} - 27a_{n-2} + 27a_{n-3}$; $a_0 = 5$, $a_1 = 24$, $a_2 = 117$.

6. Considere a seguinte relação de recorrência de segunda ordem e seu polinômio característico $\Delta(x)$:
$a_n = sa_{n-1} + ta_{n-2}$ e $\Delta(x) = x^2 - sx - t$
(**a**) Suponha que r é uma raiz de $\Delta(x)$. Mostre que $a_n = r^n$ é uma solução da relação de recorrência.
(**b**) Suponha que r é uma raiz dupla de $\Delta(x)$. Mostre que: (i) $s = 2r$ e $t = -r^2$; (ii) $a_n = nr^n$ também é uma raiz da relação de recorrência.

********** (: Gabarito :)**********

1a. 11, 25, 46; **1b.** $a_n = c_1(2^n) + c_2(-1)^n$; **1c.** $a_n = 3(2^n) - 1(-1)^n$.
2a. $a_n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2)2^n$; **2b.** $a_n = (3 - 2n + n^2)2^n$;
3a. $a_n = c_1(5^n) + c_2(-2)^n$; $c_1 = 3$, $c_2 = 2$.
3b. $a_n = c_1(7^n) + c_2(-3)^n$; $c_1 = 4$, $c_2 = 5$.
3c. $a_n = c_1 + c_2(2)^n$; $c_1 = 2$, $c_2 = 3$.
3d. $a_n = c_1(2^n) + c_2(3)^n$; $c_1 = -2$, $c_2 = 4$.
3e. $a_n = c_1[(3+t)/2]^n + c_2[(3-t)/2]^n$; $c_1 = 1/t$, $c_2 = -1/t$, onde $t = \sqrt{5}$
3f. $a_n = c_1[(5+s)/2]^n + c_2[(5-s)/2]^n$; $c_1 = 1/s$, $c_2 = -1/s$, onde $s = \sqrt{13}$
4a. $a_n = c_1(6^n)$; $c_1 = 5$;
4b. $a_n = c_1(7^n)$; $c_1 = 5$;
4c. $a_n = c_1(2^n) + c_2 n(2)^n$; $c_1 = 1$, $c_2 = 3$.
4d. $a_n = c_1(5^n) + c_2 n(5)^n$; $c_1 = 2$, $c_2 = 1$.
5a. $a_n = 2(4^n) + n(4)^n + 3(2^n)$;
5b. $a_n = 5(3^n) + 2n(3)^n + n^2(3^n) = (5 + 2n + n^2)3^n$;