6.3 Exercícios

6.3.1 Exercícios de fixação

1. Prove que cada uma das linguagens a seguir não é regular usando o LB.

(a) $\{0^m 1^n \mid m < n\}$

$z = 0^k 1^{k+1}$

• Como $|uv| \leq k$ e $|0^k| = k$, logo, uv é formado por 0's

• Como $v \neq \lambda$, logo v possui pelo menos um zero, assim $|v| \geq 1$

$$\begin{cases} z = uvw \\ |uv| \leq k \\ v \neq \lambda \end{cases}$$

$\forall i. i \in \mathbb{N} \to uv^iw \in L$

$0^{k-|v|} 0^{|v|} 1^{k+1}$

Supondo $i = 2$

$0^{k-|v|} 0^{2|v|} 1^{k+1} \in L \leftrightarrow$

$0^{k+|v|} 1^{k+1} \in L \leftrightarrow$

$k + |v| < k+1 \leftrightarrow$

$|v| < 1 = |v| = 0 \leftrightarrow v = \lambda$

$u = 0^\alpha$

$v = 0^\beta \quad \beta \geq 1$

$w = 0^{k-\alpha-\beta} 1^{k+1}$

$uv^iw = 0^\alpha 0^{i\beta} 0^{k-\alpha-\beta} 1^{k+1}$

$= 0^{k+i\beta-\beta} 1^{k+1} \in L \leftrightarrow$

$k + i\beta - \beta < k+1 \leftrightarrow$

$\beta(i-1) < 1 \qquad \beta \geq 1$

$\beta = 1 : i - 1 < 1 \to i < 2$

logo, quando $i \geq 2$ a linguagem não será regular

Suponha que $L = \{0^m 1^n \mid m < n\}$ seja regular

Seja k a constante referida no L.B.

Seja $z = 0^k 1^{k+1}$. Como $|z| \leq k$, pelo L.B, as seguintes condições se verificam:

- $z = uvw$ $\quad$ - $|uv| \leq k$ $\quad$ - $v \neq \lambda$ $\quad$ - $\forall i. i \in \mathbb{N} \to uv^iw \in L$

Como $v \neq \lambda$, $|uv| \leq k$ e $|0^k| = k$, logo v possui pelo menos um 0.

Supondo $i = 2$, temos:

$0^{k-|v|}(0^{|v|})^2 1^{k+1} = 0^{k-|v|} 0^{2|v|} 1^{k+1} = 0^{k+|v|} 1^{k+1}$

Para mostrar que $0^{k+|v|} 1^{k+1} \in L$, temos que provar a seguinte desigualdade:

$k + |v| < k + 1 \leftrightarrow$

$|v| < 1 \to |v| = 0 \to v = \lambda$

Portanto $v = \lambda$ contradiz o L.B

Logo $L = \{0^m 1^n \mid m < n\}$ não é uma L.R

(b) $\{0^n 1^{2n} \mid n \geq 0\}$

$0^K 1^{2K}$

- A quantidade de 1 é o dobro da quantidade de 0
- Como $|uv| \leq K$ e $|0^K| \leq K$, logo uv é composto de 0's
- Como $v \neq \lambda$, logo v tem pelo menos um 0

$$\begin{cases} z = uvw \\ |uv| \leq K \\ v \neq \lambda \end{cases}$$

$u = 0^\alpha \quad v = 0^\beta$ com $\beta \geq 1 \quad w = 0^{K-\alpha-\beta} 1^{2K}$

$\forall_{i}, i \in \mathbb{N} \to uv^iw \in L$

$uv^iw = 0^\alpha 0^{i\beta} 0^{K-\alpha-\beta} 1^{2K}$

$= 0^{i\beta + K - \beta} 1^{2K} \in L \iff$

$0^{K-|v|} 0^{|v|} 1^{2K}$

$2(i\beta + K - \beta) = 2K \iff$

Supondo $i = 2$

$2i\beta + 2K - 2\beta = 2K \iff$

$0^{K-|v|} 0^{2|v|} 1^{2K}$

$2i\beta = 2\beta \iff$

$0^{K+|v|} 1^{2K} \in L \iff$

$i = 1$, logo com $i \neq 1$ $w \notin L$

$2(K + |v|) = 2K$

$2K + 2|v| = 2K$

$|v| = 0 \iff v = \lambda$

Suponha que $L = \{0^n 1^{2n} \mid n \geq 0\}$ seja uma LR.

Seja K a constante referida no LB.

Seja $z = 0^K 1^{2K}$. Como $|z| \leq K$, pelo LB as seguintes condições se verificam:

- $z = uvw$ $\quad$ - $|uv| \leq K$ $\quad$ - $v \neq \lambda$ $\quad$ $\forall i, i \in \mathbb{N} \to uv^iw \in L$

Como $v \neq \lambda$ e $|uv| \leq K$ e $|0^K| \leq K$, logo uv é composto de 0's e v possui pelo menos um 0.

Seja $i = 2$:

$$0^{K-|v|}(0^{|v|})^2 1^{2K} = 0^{K+|v|} 1^{2K}$$

Para mostrar que $0^{K+|v|} 1^{2K} \in L$, como a quantidade de 1's é o dobro da de 0's, devemos provar a seguinte igualdade

$$2(K + |v|) = 2K \iff 2K + 2|v| = 2K \iff |v| = 0 \iff v = \lambda$$

Portanto $v = \lambda$ contradiz o LB

Logo $L = \{0^n 1^{2n} \mid n \geq 0\}$ não é uma LR

(c) $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$

$z = uvw$

$|uv| \leq K$

$v \neq \lambda$

$\forall i : i \in \mathbb{N} \rightarrow uv^iw \in L$

Supor $w = \underbrace{0^K}_{uv} \underbrace{1 0^K 1}_{w}$

$|uv| \leq K$ $\quad |0^K| \leq K$, logo u é composto de 0's e v possui pelo menos um zero

Foi escolhido $w = 0^K 1 \in \{0,1\}^*$ pois há um separador entre os zeros que permite saber onde começa e termina cada w. Além disso, as duas palavras devem ter a mesma quantidade de zeros já que são iguais

Supondo $i = 2$

$0^{K-|v|}(0^{|v|})^2 1 0^K 1$

$0^{K+|v|} 1 0^K 1 \in L \iff$

$K + |v| = K \iff |v| = 0 \quad v = \lambda$

Suponha que $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ seja uma LR

Seja K a constante requerida no LB

Seja $w = 0^K 1$ e seja $z = 0^K 1 0^K 1$. Como $|z| \leq K$, pelo LB as seguintes condições se verificam:

$z = uvw \quad |uv| \leq K \quad v \neq \lambda \quad \forall i : i \in \mathbb{N} \rightarrow uv^iw \in L$

Como $|uv| \leq K$, $|0^K| \leq K$, logo u é composto de 0's e v possui pelo menos um 0.

Suponha $i = 2$:

$0^{K-|v|}(0^{|v|})^2 1 0^K 1 \Rightarrow 0^{K+|v|} 1 0^K 1$

Para mostrar que $0^{K+|v|} 1 0^K 1 \in L$ devemos provar a seguinte igualdade:

$K + |v| = K \iff |v| = 0 \iff v = \lambda$

Portanto $v = \lambda$ contradiz o LB

Portanto $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é uma LR

$\{0^m 1^n \mid n < m < 2n\}$

$0^K 1^{K-1}$ $\quad |uv| \leq K$ e $|0^K| = K$, logo u é composto de 0 e v possui pelo menos um 0

seja $i=0$ $\quad 0^{K-|v|}(0^{|v|})^0 1^{K-1}$

$0^{K-|v|} 1^{K-1} \in L \iff$

$K-1 < K-|v| < 2(K-1) \iff$

$K-1 < K-|v| < 2K-2 \iff$

$$\begin{cases} \cancel{K}-1 < \cancel{K}-|v| \Rightarrow -1 < -|v| \Rightarrow |v| < 1 \\ K-|v| < 2K-2 \Rightarrow -|v| < K-2 \end{cases}$$

$-|v|+2 < K$

$K > |v|+2$

$K \geq |v|+2$

$\{ w\bar{w} \mid w \in \{0,1\}^* $

$0^K 1^K$