1)
$$\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 10 & 9 \\ 4 & 5 & 11 & 7 \\ 8 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -7 \\ -4 \\ -5 \end{array} \end{array}$$

Subtrair o menor valor de cada linha

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & -3 & \end{array} \end{array}$$

Subtrair o menor valor de cada coluna

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Foram feitos somente 3 linhas para cobrir todos os zeros ∴ passo 3b

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Subtrair o menor valor (1) de todos os números não riscados

Adicionar o valor nos números que recebem duas linhas

Agora foram feitas 4 linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 10 & 9 \\ 4 & 5 & 11 & 7 \\ 8 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Custo total de $1 + 5 + 10 + 5 = 21$

2)
$$\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 10\,000 & 37000 & 15000 & 18000 & 11000 \\ 8\,000 & 30000 & 119000 & 21000 & 9000 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -10\,000 \\ -8\,000 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 12000 & 32000 & 14000 & 20000 & 9000 \\ 15000 & 35000 & 4000 & 22000 & 10000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -9000 \\ -4000 \\ \; \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 27000 & 5000 & 8000 & 1000 \\ 0 & 22000 & 111000 & 13000 & 1000 \\ 3000 & 23000 & 5000 & 11000 & 0 \\ 11000 & 31000 & 0 & 18000 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

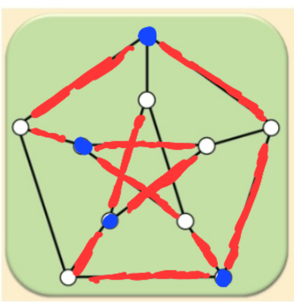
menor valor: 8000

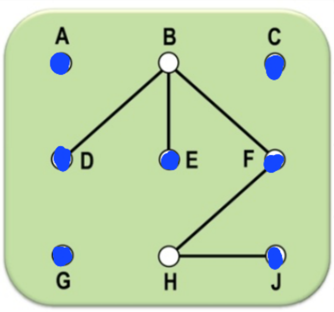
$$\begin{bmatrix} 0 & 19000 & 5000 & 0 & 1000 \\ 0 & 14000 & 111000 & 5000 & 1000 \\ 3000 & 15000 & 5000 & 3000 & 0 \\ 11000 & 23000 & 0 & 10000 & 6000 \\ 8000 & 0 & 8000 & 0 & 8000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10000 & 37000 & 15000 & 18000 & 11000 \\ 8000 & 30000 & 119000 & 21000 & 9000 \\ 12000 & 32000 & 14000 & 20000 & 9000 \\ 15000 & 35000 & 4000 & 22000 & 10000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Custo total de $8000 + 0 + 4000 + 18000 + 9000 = 39000$

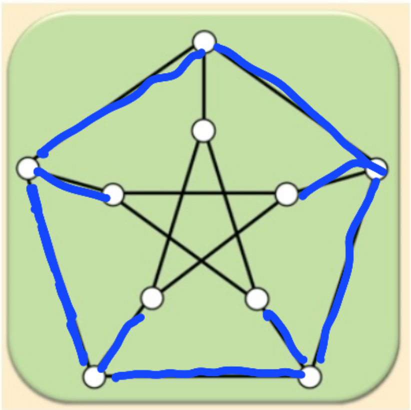
3)

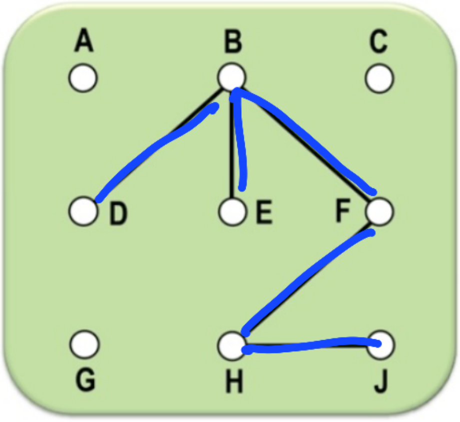




$\alpha(G) = 4$ $\qquad$ $\alpha(G) = 7$

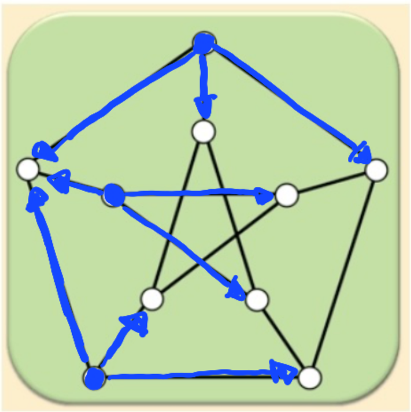
4)

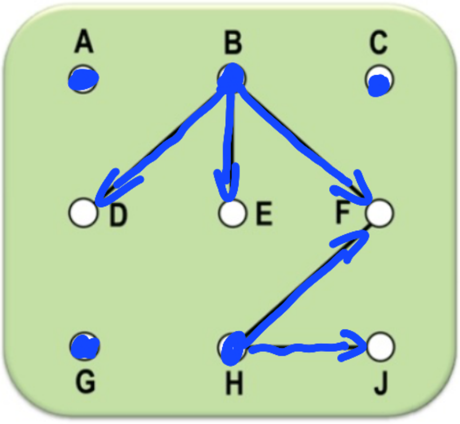




$\omega(G) = 2$ $\omega(G) = 2$

5)





$\gamma(G) = 3$ $\gamma(G) = 5$

6) O Rio de Janeiro está preparando uma campanha de vacinação. O mapa abaixo mostra uma suposta localização de postos de vacinação. Cada posto de vacinação pode ser transformado em um posto de coordenação e distribuição de vacinas. Para facilitar a logística, um ponto de coordenação não deve atender mais do que quatro postos de vacinação. Modele o problema utilizando a teoria dos grafos e determine a quantidade mínima de postos de coordenação necessários para que todos os postos de vacina sejam apoiados por pelo menos um posto de coordenação.

Vertices: Postos

Conjunto dominante, evitando que um vértice domine mais que quatro vértices

Arestas: Conexões

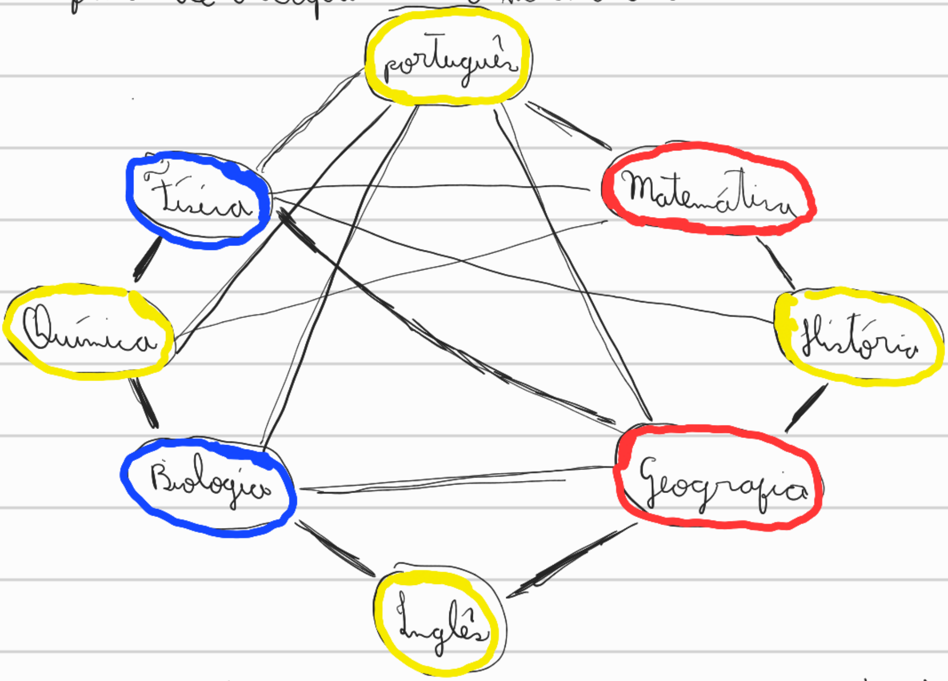
7)

7. Uma escola deve programar a distribuição dos exames especiais de forma que os alunos não tenham que fazer mais do que um exame por dia. Existem oito disciplinas no curso e a secretaria organizou um quadro que marca com um asterisco as disciplinas que possuem alunos em comum. Utilizando a teoria dos grafos, responda quantos dias de exame serão necessários.

	Português	Matemática	História	Geografia	Inglês	Biologia	Química	Física
Português	-	*	-	*	-	*	*	*
Matemática		-	*	-	-	-	*	*
História			-	*	-	-	-	*
Geografia				-	*	*	-	*
Inglês					-	*	-	-
Biologia						-	*	-
Química							-	*
Física								-

Vértices: Disciplinas

Arestas: Conflito de disciplinas no mesmo dia



Deve-se separar em diferentes conjuntos de dias e verificar quantos dias foram necessários para que não houvesse alunos em comum em um dia. Dessa forma, a coloração é usada para retornar a quantidade de dias sem alunos repetidos no mesmo dia.

Dessa forma, obtemos o número de dias pelo valor do número cromático que é $\chi(G) = 3$

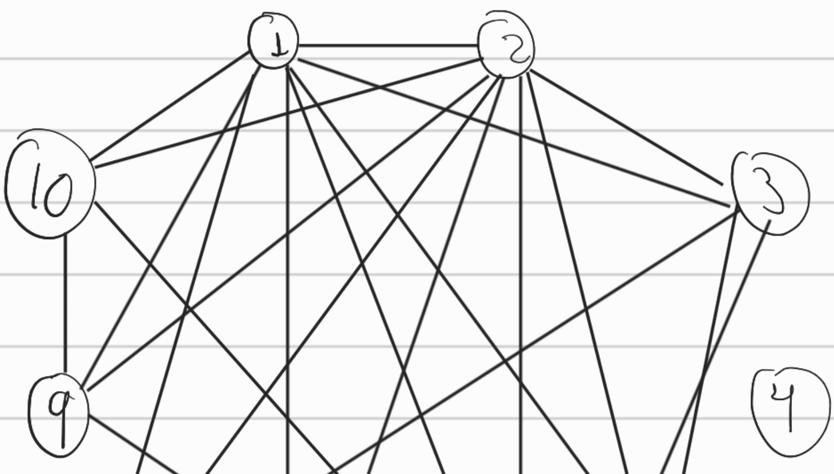
8)

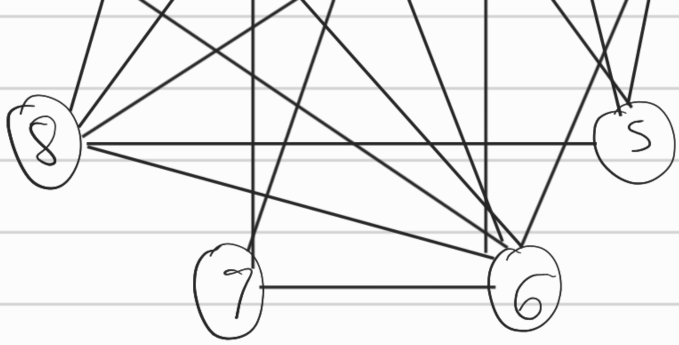
8. Em uma creche há 10 crianças matriculadas, porém, nunca estão todas ao mesmo tempo na creche. É necessário planejar os escaninhos em que os pais deixam as refeições das crianças. A tabela abaixo apresenta a permanência de cada criança (enumeradas de 1 a 10) na creche nos horários entre 7:00 e 12:00 – o horário em que a creche funciona. Um asterisco indica que uma determinada criança está na creche no horário indicado, e deve ter um escaninho reservado para sua refeição. Modele o problema utilizando a teoria de grafos e determine o número mínimo de escaninhos necessários para que cada criança tenha um escaninho individual.

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
07:00	*	-	-	-	*	-	-	*	-	-
08:00	*	*	*	-	*	-	-	*	-	-
09:00	*	*	*	-	-	*	-	*	-	*
10:00	*	*	-	-	-	*	*	-	*	*

Vertices: Alunos

Arestas: Colisão de horários entre os alunos



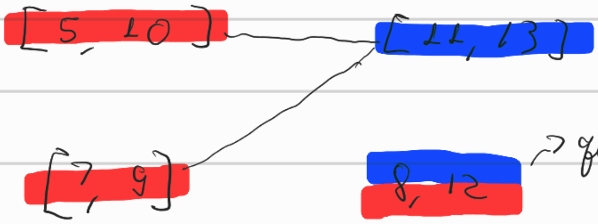


Será um problema de click, pois procurando a maior quantidade de alunos ao mesmo instante na creche, estamos procurando a maior conexão entre os alunos, dessa forma, o maior subgrafo completo é o que determina esse número.

9)

9. Existem n experimentos biológicos sendo processados $e1$, $e2$,..., ei em determinado laboratório. Cada um desses experimentos possui várias lâminas de ensaio que devem ser mantidas refrigeradas segundo uma temperatura constante em um intervalo de temperatura [li, hi] . A temperatura pode ser fixada livremente dentro do intervalo, contudo, uma vez fixada, não mais poderá ser alterada, sob pena de destruir os elementos biológicos. Dados os intervalos e sabendo-se que cada refrigerador é grande o suficiente para preservar todas as lâminas de todos os experimentos, cada refrigerador deverá funcionar em apenas uma temperatura. Modele o problema utilizando a teoria de grafos e determine o menor número possível de refrigeradores capazes de atender ao laboratório.

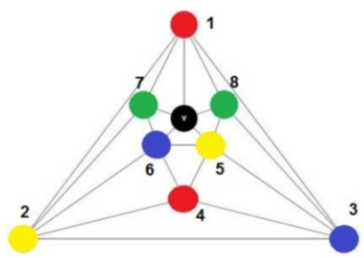
Vértices: lâminas
Arestas: laminas que possuam um intervalo de temperatura que não intersede
Problema: Coloração
Colorindo o grafo, experimentos que possuem a mesma faixa não serão adjacentes, portanto poderão ser coloridos. Então o número cromático será a quantidade de refrigeradores necessários

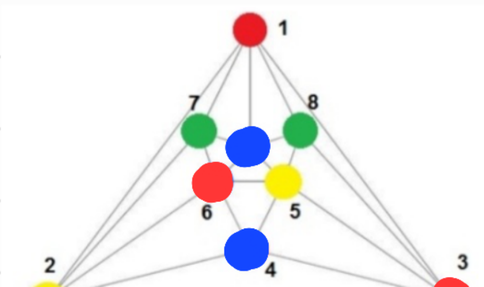


→ qualquer uma das cores

10)

10. Determine a cor do vértice v no grafo abaixo dentre verde, vermelho, amarelo e azul, utilizando operações de troca em cadeias Kempe.

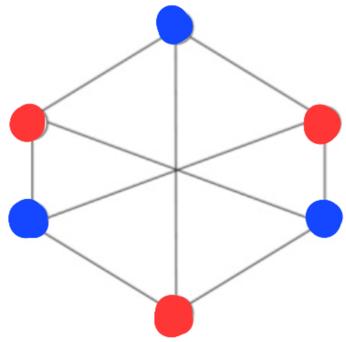




O vértice V possuirá a cor azul

11)

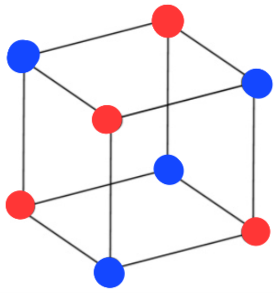
11. Determine o número cromático do grafo abaixo.



$\chi(G) = 2$

12)

12. Determine o número cromático do grafo abaixo.

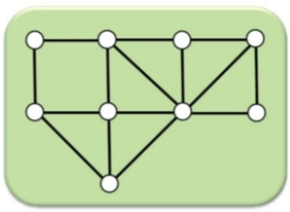


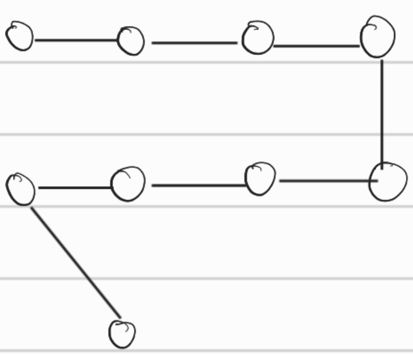
$\chi(G) = 2$

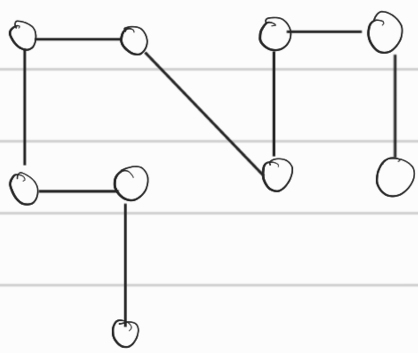
13) Um grafo isomorfo é simplesmente um grafo G modelado de uma outra maneira, porém os números de vértices e arestas, além da forma como estão conectados devem permanecer o mesmo. Assim, sem mudanças nas adjacências, não há mudanças no número cromático.

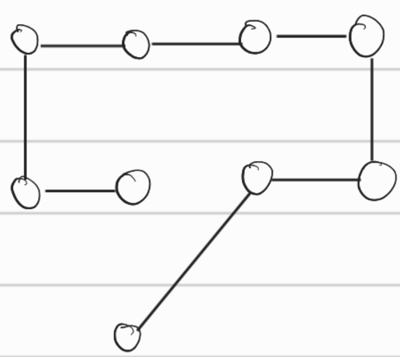
14)

14. Identifique 3 das árvores geradoras do grafo abaixo.

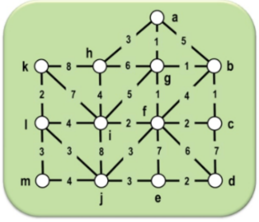


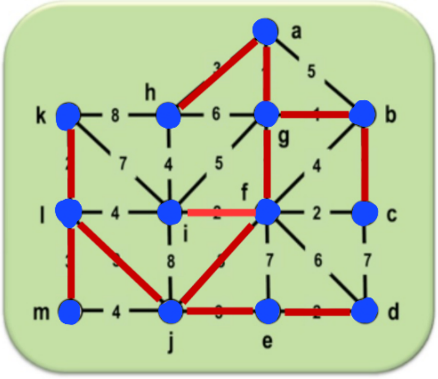






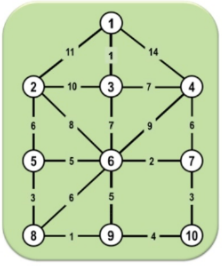
15) 15. Execute o algoritmo de Prim para o grafo abaixo.

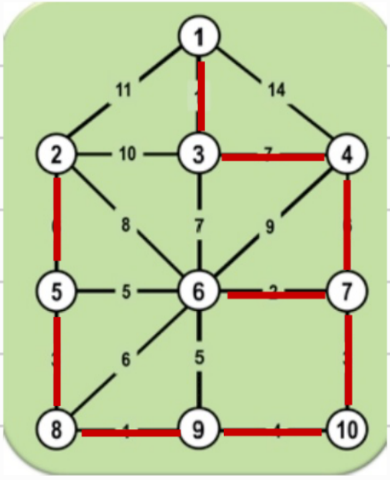




T = { a, g, b, f, c, i, h, j, e, d, l, m, k }

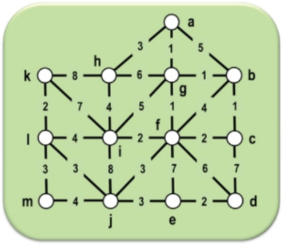
16) 16. Execute o algoritmo de Prim para o grafo abaixo.

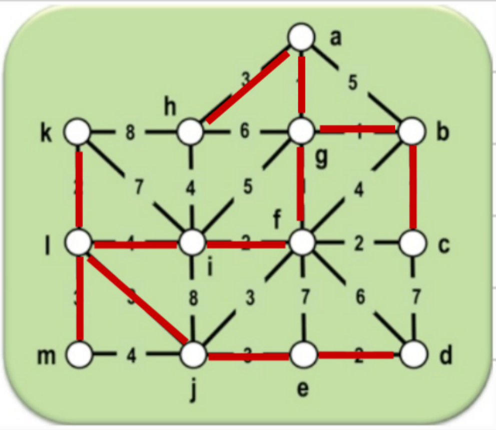




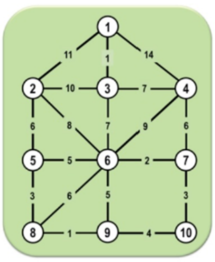
T = { 1, 3, 4, 7, 6, 10, 9, 8, 5, 2 }

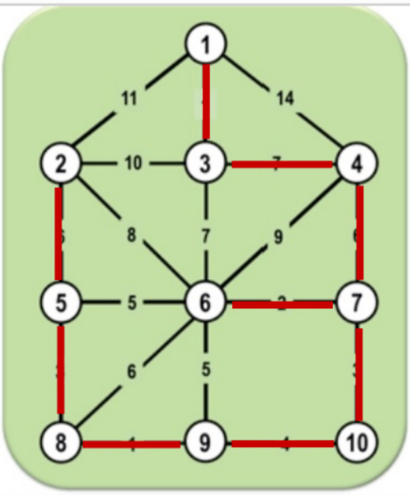
17) 17. Execute o algoritmo de Kruskal para o grafo abaixo.





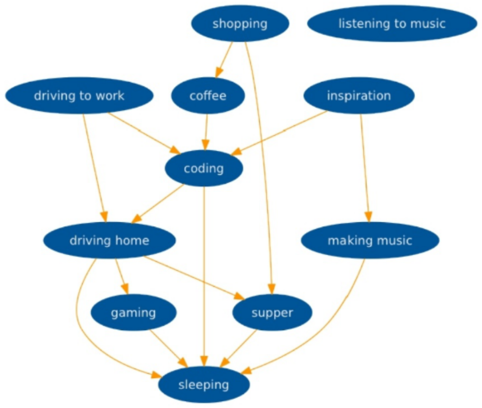
18) 18. Execute o algoritmo de Kruskal para o grafo abaixo.

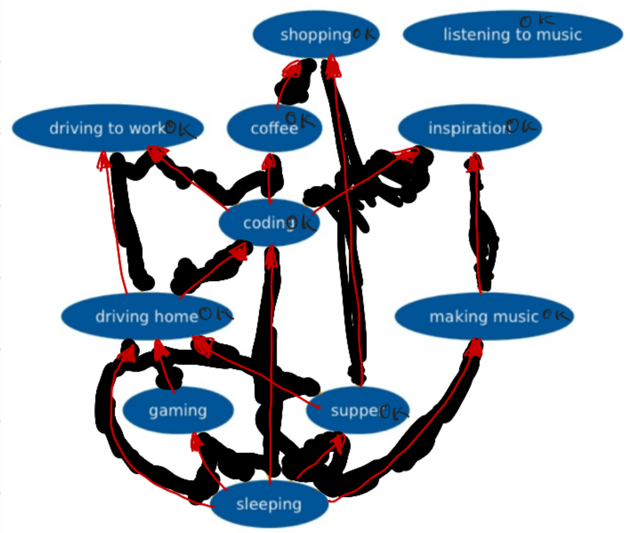




19)

19. Execute o algoritmo baseado em DFS para obtenção de ordenações topológicas para o grafo abaixo.





L = { listening to music, inspiration, making music, shopping, supper, coffe, driving to work, coding, driving home, gaming, sleeping }

P = { listening to music }

P = { sleeping, making music, inspiration }

P = { sleeping, supper, shopping }

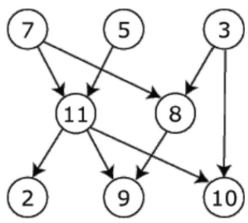
P = { sleeping, coding, coffe }

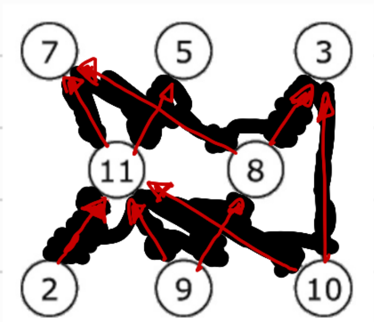
P = { sleeping, coding, driving to work }

P = { sleeping, gaming, driving home

20)

20. Execute o algoritmo baseado em DFS para obtenção de ordenações topológicas para o grafo abaixo.





L = { 5, 7, 11, 2, 3, 8, 9, 10 }

P = { 2, 11, 5 }

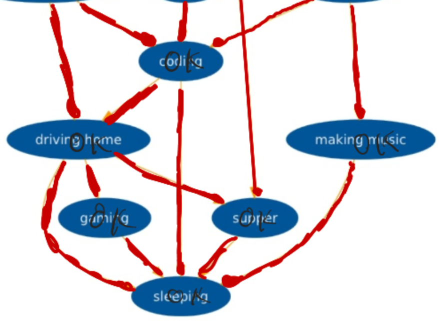
P = { 2, 11, 7 }

P = { 9, 8, 3 }

P = { 10 }

21)

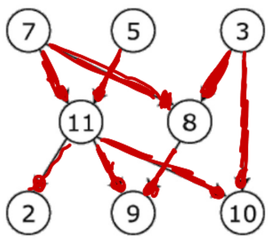
21. Execute o algoritmo de *Kahn* para obtenção de ordenações topológicas para o grafo abaixo.



L = [listening to music, inspiration, making music, shopping, driving to work, coffe, coding, driving home, gaming, supper, sleeping]

S = [listening to music, inspiration, shopping, driving to work]
S = [inspiration, shopping, driving to work]
S = [shopping, driving to work, making music]
S = [shopping, driving to work]
S = [driving to work, coffe]
S = [coffe]
S = [coding]
S = [driving home]
S = [gaming, supper]
S = [sleeping]
S = []

22) 22. Execute o algoritmo de *Kahn* para obtenção de ordenações topológicas para o grafo abaixo.



L = [3, 5, 7, 8, 11, 2, 9, 11]
S = [3, 5, 7]
S = [5, 7]
S = [7]
S = [8, 11]
S = [11]
S = [2, 9, 10]

$S = [\ ]$

23) 23. O grafo de Petersen é planar? Prove utilizando a versão correta da fórmula derivada da fórmula de Euler.

$n = 10 \qquad m = 15$

$2m \geq 5f$

$f \leq \frac{2}{5} m$

$\underbrace{2 + m - n}_{f} \leq \frac{2}{5} m \quad (5)$

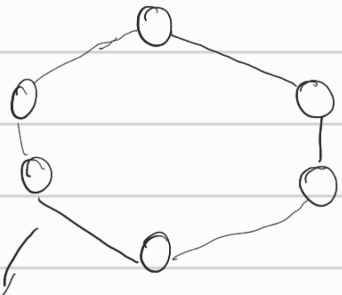
$10 + 5m - 5n \leq 2m$

$3m \leq 5n - 10$

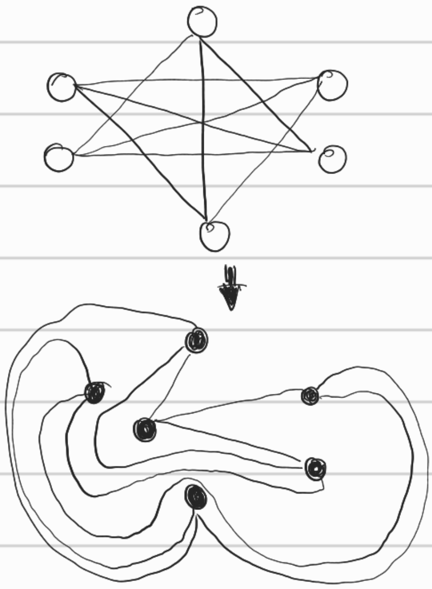
$3 \cdot 15 \leq 5 \cdot 10 - 10$

$45 \leq 40$ falso $\therefore$ o grafo não é planar

24) 24. Prove que o complemento de um circuito de comprimento 6 é planar.



por inspeção, é planar



$n = 6$

$m = 9$

$9 \leq 3 \cdot 6 - 6$

$9 \leq 12$ verdade

São grafos isomorfos e foi possível representá-lo sem cruzar arestas, logo ele é planar

25) 25. Prove que toda árvore é planar.

Em todo tipo de árvore, há somente um caminho para qualquer par de vértices e possuímos $n - 1$ arestas, logo, usando a fórmula de euler temos que:

$n - m + f = 2$

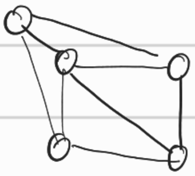
$n - (n - 1) + 1 = 2$

$n - n + 1 + 1 = 2$

Toda árvore possui somente uma face, que é a externa, logo é possível representá-la sem cruzar arestas

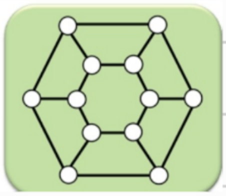
$2 = 2$

26) 26. Mostre que se um grafo *G* não é 2-conexo, então *G* não é hamiltoniano.

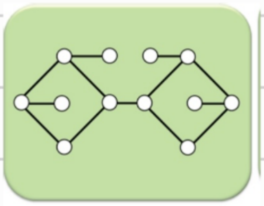


O grafo ao lado é 3-conexo e hamiltoniano

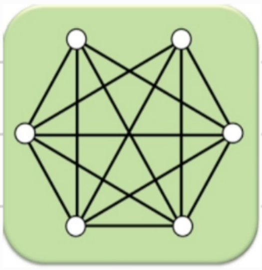
27) Verificar se são eulerianos



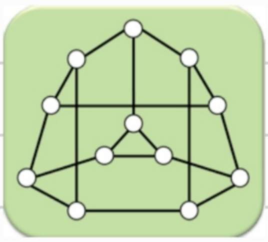
Possui vértices de grau ímpar, logo não é euleriano



Possui vértices de grau ímpar, logo não é euleriano



Possui vértices de grau ímpar, logo não é euleriano

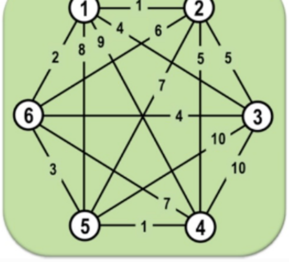


Possui vértices de grau ímpar, logo não é euleriano

$1,3 = 4$

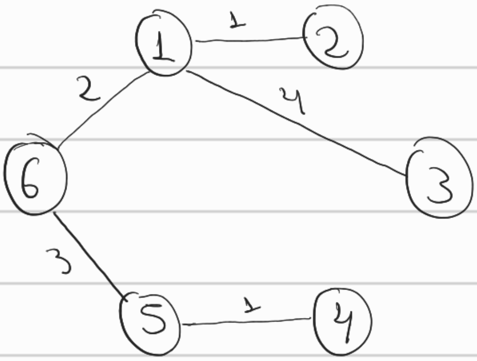
28) 28. Para o grafo abaixo, determine a solução do problema do caixeiro viajante utilizando o algoritmo visto em aula.

1 $\qquad$ $2,4 = 5$

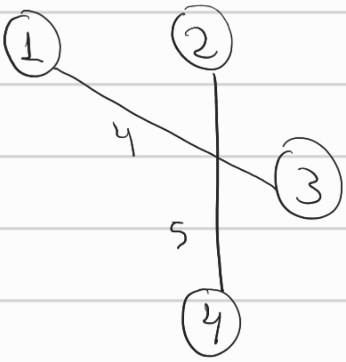


2
3
4

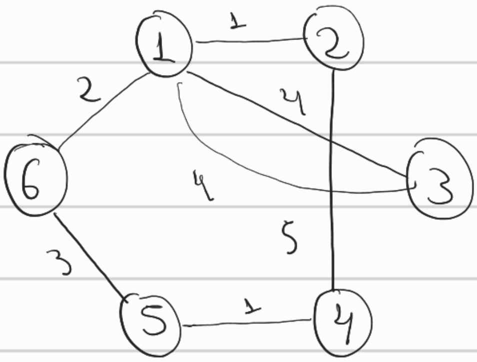
1) Determinando a árvore geradora mínima pelo algoritmo de Kruskal



2) Casamento perfeito de custo mínimo entre os vértices de grau ímpar



3) União das arestas da árvore geradora mínima e do casamento



4) Determinando um ciclo euleriano

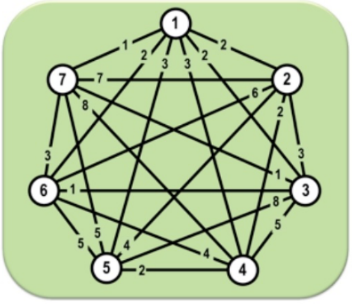
L = 1, 3, 1, 2, 4, 5, 6, 1

5) twice-around gerando o ciclo hamiltoniano

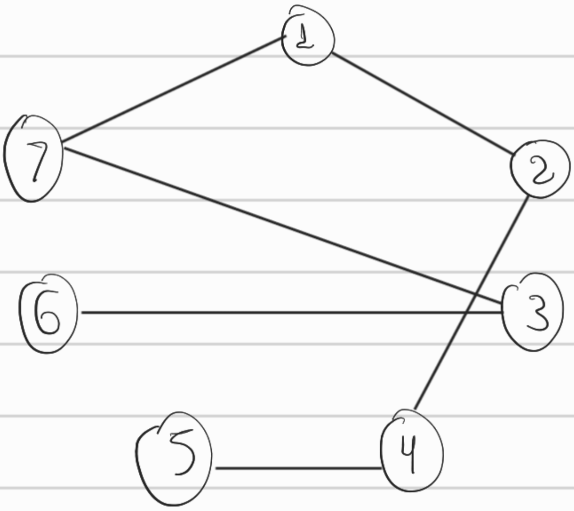
H = 1, 3, 2, 4, 5, 6, 1

29)

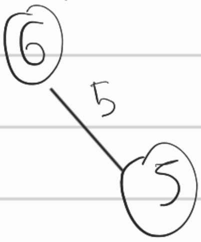
29. Para o grafo abaixo, determine a solução do problema do caixeiro viajante utilizando o algoritmo visto em aula.



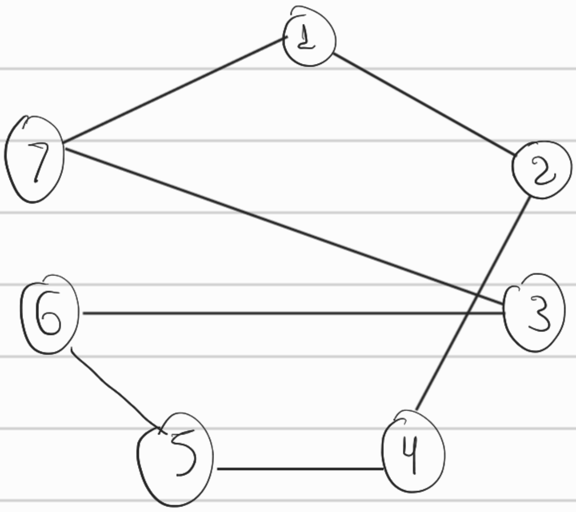
1) Árvore geradora mínima pelo algoritmo de Kruskal



2) Casamento perfeito para os vértices de grau ímpar da árvore



3) União das arestas



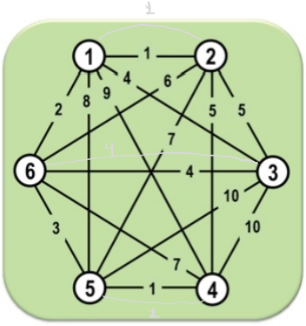
4) Ciclo euleriano começando em 1:

L = 1, 2, 4, 5, 6, 3, 7, 1

5) Ciclo hamiltoniano obtido a partir do twice around

H = 1, 2, 4, 5, 6, 3, 7, 1

30) 30. Para o grafo abaixo, determine a solução do problema do carteiro chinês utilizando o algoritmo visto em aula.



32) 32. Modele detalhadamente o problema abaixo como o problema do caixeiro viajante ou o problema do carteiro chinês, o que melhor se adequar. Indique o que são os vértices, as arestas e porque o seu modelo é adequado ao problema.

"Um veículo deve atender a uma determinada região, fazendo entregas pré-definidas. É necessário determinar a rota de menor comprimento para tanto."

Vértices: Pontos de entrega

Arestas: Custo de deslocamento entre cada ponto

Caixeiro viajante: todos os pontos de entrega deverão ser visitados fazendo a menor rota possível, logo buscamos um ciclo hamiltoniano

33) 33. Modele detalhadamente o problema abaixo como o problema do caixeiro viajante ou o problema do carteiro chinês, o que melhor se adequar. Indique o que são os vértices, as arestas e porque o seu modelo é adequado ao problema.

"A prefeitura de uma cidade está recadastrando todos os imóveis de uma cidade para o cálculo do IPTU. Os funcionários fazem este serviço a pé, já que precisam visitar todas as casas de todas as ruas. É necessário determinar a rota que os funcionários caminharão, havendo preferência pelas rotas mais curtas."

Vértices: Cruzamento de ruas

Arestas: Casas presentes entre um vértice e outro (rua)

Carteiro chinês: Passando por cada uma das casas presentes em uma rua, chegaremos a uma esquina e não será necessário voltar naquela rua, portanto podemos removê-la das ruas que ainda faltam, assim estamos fazendo um ciclo euleriano

34) 34. Modele detalhadamente o problema abaixo como o problema do caixeiro viajante ou o problema do carteiro chinês, o que melhor se adequar. Indique o que são os vértices, as arestas e porque o

seu modelo é adequado ao problema.

"Durante o projeto de um chip, você deve minimizar o uso do material utilizado para fazer as conexões entre os componentes, dado que a localização dos componentes é pré-definida."

Vertices : Componentes

Arestas : Possíveis conexões

Caixeiro viajante : Os componentes serão conectados somente uma vez e não precisarão de mais conexões, logo há uma procura por um ciclo hamiltoniano

35)

35. Modele detalhadamente o problema abaixo como o problema do caixeiro viajante ou o problema do carteiro chinês, o que melhor se adequar. Indique o que são os vértices, as arestas e porque o seu modelo é adequado ao problema.

"Voluntários de um órgão de proteção à natureza planejam limpar as margens de todos rios de uma região. No entanto, há vários cruzamentos entre diferentes rios. Como os voluntários farão o serviço a pé, eles estão interessados em obter a menor rota única para que o serviço seja realizado. Considere que as duas margens de cada rio são limpas ao mesmo tempo."

Vértices : Cruzamento dos rios

Arestas : Rio

Carteiro chinês

Como as duas margens serão limpas ao mesmo tempo e os rios se encontram, então uma aresta já será removida, assim estamos executando o algoritmo para encontrar um ciclo euleriano, que é a realização de um caminho entre os rios