Sistemas de Equações Lineares

BCC760 - Cálculo Numérico

Prof. Gustavo Peixoto Silva

Sistemas Lineares
Introdução

Introdução

Uma equação é dita linear quando ela é de primeiro grau e cada uma de suas parcelas contém apenas uma variável.

Exemplo:

- $3x + 2y - 5z = 10 \longrightarrow$ é linear
- $3xy + 2y - 5z = 10 \longrightarrow$ não é linear
- $3x + 2y^2 - 5z = 10 \longrightarrow$ não é linear

Forma geral: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$

x_i são as variáveis ou incógnitas;

a_i são os coeficientes das variáveis;

b é o termo independente.

Introdução

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares que devem ser satisfeitas simultaneamente.

Notação clássica:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

onde:

x_j são as variáveis (colunas);

a_{ij} é o coeficiente da variável x_j na equação i (linha);

b_i é o termo independente da equação i.

Introdução

Notação matricial: $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

onde:

A é a matriz dos coeficientes;

x é o vetor solução (variáveis);

b é o vetor dos termos independentes.

Introdução

Matriz aumentada ou matriz completa do sistema:

Para obter a matriz aumentada basta acrescentar à matriz dos coeficientes o vetor b dos termos independentes.

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Classificação dos sistemas

Uma solução de um sistema de equações lineares $Ax = b$, é um vetor x que satisfaz, simultaneamente, a todas as equações do sistema.

Classificação:

- **Possível (compatível) determinado:** admite uma única solução.
- **Possível (compatível) indeterminado:** admite um número infinito de soluções.
- **Impossível (incompatível):** não admite solução.

Classificação dos sistemas

Uma solução de um sistema de equações lineares $Ax = b$, é um vetor x que satisfaz, simultaneamente, a todas as equações do sistema.

Classificação:

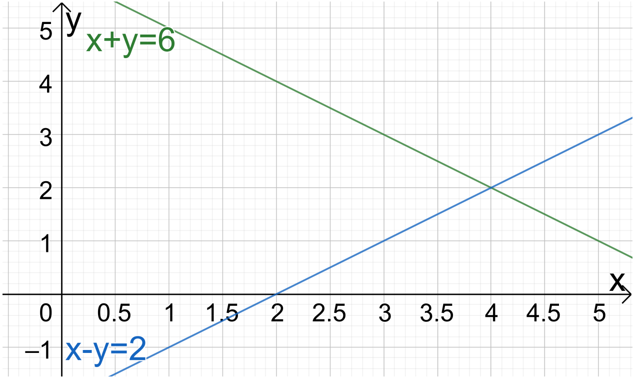
- **Possível (compatível) determinado:** admite uma única solução.
- **Possível (compatível) indeterminado:** admite um número infinito de soluções.
- **Impossível (incompatível):** não admite solução.

Resolver um sistema de equações lineares significa discutir a existência de soluções e obter uma solução quando for possível.

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível determinado

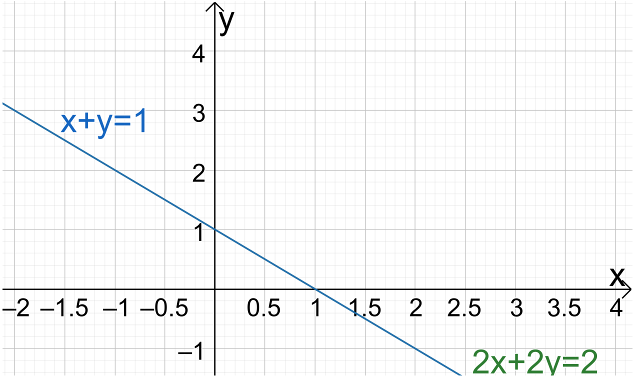
$$(I)\begin{cases} x + y &= 6 \\ x - y &= 2 \end{cases}$$



Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível indeterminado

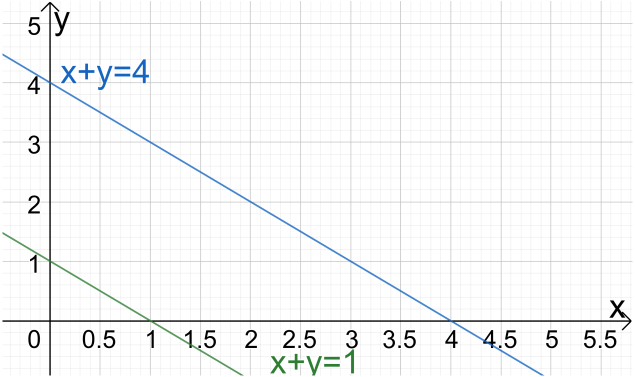
$$(II)\begin{cases} x + y & = 1 \\ 2x + 2y & = 2 \end{cases}$$



Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema impossível

$$(III)\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 4 \end{cases}$$



Classificação dos sistemas

Note que:

- Se $det(A) \neq 0$, então A é dita *matriz não singular* e temos um *sistema possível determinado* (solução única)
- Caso contrário, o sistema será *possível indeterminado* (infinitas soluções) ou *impossível* (não tem solução).

Além disso:

- Se $b = [0, 0, \cdots, 0]^t$, temos um *sistema homogêneo* e, portanto possível, pois admite ao menos a solução trivial $x = [0, 0 \cdots, 0]^t$

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível determinado

$$(I)\begin{cases} x + y &= 6 \\ x - y &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível determinado

$$(I)\begin{cases} x+y &= 6 \\ x-y &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível determinado

$$(I)\begin{cases} x + y &= 6 \\ x - y &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

Portanto, **sistema possível determinado**.

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível indeterminado

$$(II)\begin{cases} x + y & = 1 \\ 2x + 2y & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível indeterminado

$$(II)\begin{cases} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{det}(A) = \mathsf{det}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível indeterminado

$$(II)\begin{cases} x + y & = 1 \\ 2x + 2y & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Quando $\det(A) = 0$, não se sabe se o sistema é possível indeterminado ou se o sistema é impossível.

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível indeterminado

$$(II)\begin{cases} x+y &= 1 \\ 2x+2y &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Quando $\det(A) = 0$, não se sabe se o sistema é possível indeterminado ou se o sistema é impossível.

Reorganizando a primeira equação, temos: $x = 1 - y$.

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível indeterminado

$$(II)\begin{cases} x+y &= 1 \\ 2x+2y &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{det}(A) = \text{det} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Quando det$(A) = 0$, não se sabe se o sistema é possível indeterminado ou se o sistema é impossível.
Reorganizando a primeira equação, temos: $x = 1 - y$.
Substituindo na segunda equação: $2(1-y) + 2y = 2 \Rightarrow 2 - 2y + 2y = 2 \Rightarrow$ **2 = 2** que é sempre verdade independente dos valores de x e de y.

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema possível indeterminado

$$(II)\begin{cases} x+y & =1 \\ 2x+2y & =2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Quando $\det(A) = 0$, não se sabe se o sistema é possível indeterminado ou se o sistema é impossível.
Reorganizando a primeira equação, temos: $x = 1 - y$.
Substituindo na segunda equação: $2(1-y) + 2y = 2 \Rightarrow 2 - 2y + 2y = 2 \Rightarrow \mathbf{2 = 2}$ que é sempre verdade independente dos valores de x e de y.

O sistema é **possível e indeterminado** e admite infinitas soluções dadas por:

$$\forall y \in \mathbb{R}, x = 1 - y$$

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema impossível

$$(III)\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema impossível

$$(III) \begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{det}(A) = \text{det} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Quando $\text{det}(A) = 0$, não se sabe se o sistema é possível indeterminado ou impossível.

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema impossível

$$(III)\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Quando $\det(A) = 0$, não se sabe se o sistema é possível indeterminado ou impossível.
Reorganizando a primeira equação, temos: $x = 1 - y$.

Classificação dos sistemas

Exemplo de um sistema impossível

$$(III) \begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{det}(A) = \text{det} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Quando det$(A) = 0$, não se sabe se o sistema é possível indeterminado ou impossível. Reorganizando a primeira equação, temos: $x = 1 - y$. Substituindo na segunda equação: $(1 - y) + y = 4 \Rightarrow \mathbf{1 = 4}$.

Absurdo, portanto **sistema impossível**.

Métodos diretos

Métodos diretos

- São aqueles que, exceto por erros de arredondamento, fornecem a solução exata de um sistema de equações lineares, caso ela exista, por meio de um número finito de operações algébricas nas equações.

Métodos diretos

- São aqueles que, exceto por erros de arredondamento, fornecem a solução exata de um sistema de equações lineares, caso ela exista, por meio de um número finito de operações algébricas nas equações.
- Geralmente utilizados em sistemas densos e de pequeno porte.

Métodos diretos

- São aqueles que, exceto por erros de arredondamento, fornecem a solução exata de um sistema de equações lineares, caso ela exista, por meio de um número finito de operações algébricas nas equações.
- Geralmente utilizados em sistemas densos e de pequeno porte.
  - Sistema denso: coeficientes não nulos, em sua maioria.
  - Sistema de pequeno porte: poucas equações/variáveis.

Métodos diretos

Matrizes triangulares:

- **(i) Inferior:** É uma matriz quadrada na qual todos os elementos **acima da diagonal principal são nulos**.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Métodos diretos

Matrizes triangulares:

- **(i) Inferior:** É uma matriz quadrada na qual todos os elementos **acima da diagonal principal são nulos**.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

- **(ii) Superior:** É uma matriz quadrada na qual todos os elementos **abaixo da diagonal principal são nulos**.

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Métodos diretos - Sistema triangular inferior

$$
Lx = C \Rightarrow \begin{cases} l_{11}x_1 & = c_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 & = c_2 \\ & \vdots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{nn}x_n & = c_n \end{cases}
$$

tal que $L = [l_{ij}]$ é uma matriz triangular inferior, ou seja, $(L_{ij}) = 0$ para $i < j$.

Considerando que L tenha diagonal principal não nula ($l_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$), esse sistema é facilmente resolvido por meio de **substituições sucessivas**.

Métodos diretos - Sistema triangular inferior

Substituições sucessivas:

$$Lx = C \Rightarrow \begin{cases} l_{11}x_1 & = c_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 & = c_2 \\ & \vdots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{nn}x_n & = c_n \end{cases}$$

1. Cálculo de x_1: $l_{11}x_1 = c_1 \quad \longrightarrow \quad x_1 = \dfrac{c_1}{l_{11}}$
2. Cálculo de x_2: $l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = c_2 \quad \longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{c_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$
3. Cálculo de x_3: $l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = c_3 \quad \longrightarrow \quad x_3 = \dfrac{c_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}}$

$$\vdots$$

4. Cálculo de x_n:

   $l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{nn}x_n = c_n \quad \longrightarrow \quad x_n = \dfrac{c_n - l_{n1}x_1 - \cdots - l_{nn-1}x_{n-1}}{l_{nn}}$

Métodos diretos - Sistema triangular inferior

Substituições sucessivas:

De forma geral, a partir de uma linha genérica do sistema:

$$l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + l_{i3}x_3 \cdots + l_{ii}x_i = c_i$$

isolando x_i, temos:

$$x_i = \frac{c_i - (l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + l_{i3}x_3 + \cdots + l_{ii-1}x_{i-1})}{l_{ii}}$$

ou ainda: $x_i = \dfrac{c_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

Métodos diretos - Sistema triangular inferior

Substituições sucessivas:

De forma geral, a partir de uma linha genérica do sistema:

$$l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + l_{i3}x_3 \cdots + l_{ii}x_i = c_i$$

isolando x_i, temos:

$$x_i = \frac{c_i - (l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + l_{i3}x_3 + \cdots + l_{ii-1}x_{i-1})}{l_{ii}}$$

ou ainda: $x_i = \dfrac{c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

Algoritmo:

1: $x_1 = \dfrac{c_1}{l_{11}}$;
2: **for** $(i = 2)$ até n **do**
3: $\quad x_i = \dfrac{c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}$;
4: **end for**

Métodos diretos - Sistema triangular inferior

Exemplo:

Calcule $\begin{cases} 2x_1 & = 6 \\ x_1 + 4x_2 & = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \end{cases}$ utilizando o algoritmo de substituições sucessivas:

Solução:

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}} = \frac{7 - (1)(3)}{4} = 1$$

$$x_3 = \frac{b_3 - (l_{31}x_1 + l_{32}x_2)}{l_{33}} = \frac{2 - [(1)(3) + (-1)(1)]}{1} = 0$$

Métodos diretos - Sistema triangular inferior

Exemplo:

Calcule $\begin{cases} 2x_1 & = 6 \\ x_1 + 4x_2 & = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \end{cases}$ utilizando o algoritmo de substituições sucessivas:

Solução:

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}} = \frac{7 - (1)(3)}{4} = 1$$

$$x_3 = \frac{b_3 - (l_{31}x_1 + l_{32}x_2)}{l_{33}} = \frac{2 - [(1)(3) + (-1)(1)]}{1} = 0$$

Portanto, a solução do sistema é $x = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$.

Métodos diretos - Sistema triangular superior

$$Ux = D \Rightarrow \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n & = d_1 \\ u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n & = d_2 \\ & \vdots \\ u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n & = d_{n-1} \\ u_{nn}x_n & = d_n \end{cases}$$

Considerando que U tenha diagonal principal não nula ($u_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$), esse sistema é facilmente resolvido por meio de **substituições retroativas.**

Métodos diretos - Sistema triangular superior

Substituições retroativas:

1. Cálculo da variável x_n: $u_{nn}x_n = d_n \quad \longrightarrow \quad x_n = \dfrac{d_n}{u_{nn}}$
2. Cálculo da variável x_{n-1}:

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = d_{n-1} \quad \longrightarrow \quad x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

$$\vdots$$

3. Cálculo da variável x_2:

$$u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n = d_2 \quad \longrightarrow \quad x_2 = \frac{d_2 - u_{23}x_3 - \cdots - u_{2n}x_n}{u_{22}}$$

4. Cálculo da variável x_1:

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = d_1 \quad \longrightarrow \quad x_1 = \frac{d_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - \cdots - u_{1,n}x_n}{u_{11}}$$

Métodos diretos - Sistema triangular superior

Substituições retroativas:

De forma geral, a partir de uma linha genérica do sistema:

$$u_{ii}x_i + u_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + u_{in}x_n = d_i$$

isolando x_i, temos:

$$x_i = \frac{d_i - (u_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - u_{in}x_n)}{u_{ii}}$$

ou ainda,

$$x_i = \frac{d_i - \sum_{j=(i+1)}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Algoritmo:

1: $x_n = \dfrac{d_n}{u_{nn}}$;
2: **for** $(i = n-1)$ até 1 **do**
3: $\quad x_i = \dfrac{d_i - \sum_{j=(i+1)}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}$;
4: **end for**

Métodos diretos - Sistema triangular superior

Exemplo:

Calcule $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 & = 4 \\ \qquad 2x_2 - x_3 & = 2 \\ \qquad\qquad 3x_3 & = 0 \end{cases}$ utilizando o algoritmo de substituições retroativas:

Solução:

$$x_3 = \frac{d_3}{u_{33}} = \frac{0}{3} = 0$$

$$x_2 = \frac{d_2 - u_{23}x_3}{u_{22}} = \frac{2 - (-1)(0)}{2} = 1$$

$$x_1 = \frac{d_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3)}{u_{11}} = \frac{4 - [(1)(1) + (-5)(0)]}{3} = 1$$

Métodos diretos - Sistema triangular superior

Exemplo:

Calcule $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 & = 4 \\ \quad 2x_2 - x_3 & = 2 \\ \quad\quad 3x_3 & = 0 \end{cases}$ utilizando o algoritmo de substituições retroativas:

Solução:

$$x_3 = \frac{d_3}{u_{33}} = \frac{0}{3} = 0$$

$$x_2 = \frac{d_2 - u_{23}x_3}{u_{22}} = \frac{2 - (-1)(0)}{2} = 1$$

$$x_1 = \frac{d_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3)}{u_{11}} = \frac{4 - [(1)(1) + (-5)(0)]}{3} = 1$$

Portanto, a solução do sistema é $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$.

Métodos diretos - Sistemas triangulares

Pontos importantes:

- O determinante de toda matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.
- Portanto, toda matriz triangular, com diagonal não nula, possui determinante diferente de zero. Logo, está associada a um **Sistema possível determinado**, que admite uma única solução.

Métodos diretos - Sistemas triangulares

Esforço computacional:

Substituições sucessivas		Substituições retroativas	
Operações	Complexidade	Operações	Complexidade
Adições	$\frac{n^2+3n}{2} - 2$	Adições	$\frac{n^2+3n}{2} - 1$
Multiplicações	$\frac{n^2-n}{2}$	Multiplicações	$\frac{n^2-n}{2}$
Divisões	n	Divisões	n

O baixo esforço computacional para obter uma solução de um sistema triangular induz ao uso de métodos que se baseiam em transformar o sistema $Ax = b$ em um sistema equivalente triangular. **Assunto da próxima aula!**

Métodos diretos - Exercícios

1) **Classifique os sistemas lineares triangulares e encontre as soluções utilizando o método de substituição retroativa ou sucessiva:**

a)

$$\begin{cases} 4x_1 & & & = & 2 \\ -4x_1 & +5x_2 & & = & 3 \\ 1x_1 & 4x_2 & -3x_3 & = & -4 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & = & 1 \\ & +4x_2 & -1x_3 & = & 3 \\ & & 6x_3 & = & 12 \end{cases}$$

Métodos diretos - Exercícios

2) **Resolva os sistemas abaixo.**

a)

$$\begin{cases} 2x_1 & & & & = & 4 \\ 3x_1 & +5x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & -6x_2 & +8x_3 & & = & 48 \\ -x_1 & +4x_2 & -3x_3 & +9x_4 & = & 6 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 5x_1 & -2x_2 & +6x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & +3x_2 & +7x_3 & -4x_4 & = & -2 \\ & & +4x_3 & +5x_4 & = & 28 \\ & & & +2x_4 & = & 8 \end{cases}$$

Métodos diretos - Exercícios

3) Implementar, em qualquer linguagem de programação, os algoritmos de substituições sucessivas e retroativas.

Algoritmo (subst. sucessivas):

$x_1 = \dfrac{c_1}{l_{11}}$;

for $(i = 2)$ até n **do**

$\quad x_i = \dfrac{c_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}$;

end for

Algoritmo (subst. retroativas):

$x_n = \dfrac{d_n}{u_{nn}}$;

for $(i = n - 1)$ até 1 **do**

$\quad x_i = \dfrac{d_i - \displaystyle\sum_{j=(i+1)}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}$;

end for

Métodos diretos - Exercícios

4) Resolver os sistemas triangulares a seguir.

$$a)\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 6 \\ & 4x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & & x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$b)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 4 \\ & & +3x_3 & +x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 2 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 2 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$d)\left\{\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 5 \\ & & +3x_3 & +x_4 & = & 4 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 2 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$