Matheus Peixoto Ribeiro Vieira - 22.1.4104

1) $T(n) = \begin{cases} T(1) = O(1) \\ T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n) \end{cases}$

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n)$

$T(n) = 4(4T(\frac{n}{2^2}) + O(\frac{n}{2})) + O(n) = 4^2 T(\frac{n}{2^2}) + 4O(\frac{n}{2}) + O(n) =$
$4^2 T(\frac{n}{2^2}) + 2O(n) + O(n)$

$T(n) = 4^2(4T(\frac{n}{2^3}) + O(\frac{n}{2^2})) + 2 \cdot O(n) + O(n) = 4^3 T(\frac{n}{2^3}) + 2^2 \cdot O(n) + 2^1 O(n) + O(n)$

$\vdots$

$T(n) = 4^K T(\frac{n}{2^K}) + 2^{K-1} \cdot O(n) + 2^{K-2} \cdot O(n) + \ldots + 2^1 \cdot O(n) + 2^0 \cdot O(n)$

$T(n) = 4^K T(\frac{n}{2^K}) + \sum_{i=0}^{K-1} 2^i \cdot O(n)$

$= 4^K T(\frac{n}{2^K}) + O(n) \sum_{i=0}^{K-1} 2^i$

A recursão para quando $\frac{n}{2^K} = 1 \to n = 2^K \to K = \lg n$

$T(n) = 4^{\lg n} T(1) + O(n) \left[\frac{1(2^{\lg n} - 1)}{2 - 1} \right]$

$= n^{\lg 4} \cdot O(1) + O(n)(2^{\lg n} - 1)$

$= n^2 \cdot O(1) + O(n)(n^{\lg 2} - 1)$

$= n^2 \cdot O(1) + O(n)[n - 1]$

$= O(n^2) + O(n^2 - n)$

$T(n) = O(n^2)$

2) $T(n) = \begin{cases} O(1) & T(1) \\ 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) & T(n) \end{cases}$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$= 3\left[3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + O\left(\frac{n}{2}\right)\right] + O(n) = 3^2\, T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 3O\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$= 3^2\left[3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + O\left(\frac{n}{2^2}\right)\right] + 3O\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) =$$

$$= 3^3\, T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3^2 O\left(\frac{n}{2^2}\right) + 3 \cdot O\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) =$$

$$= 3^3\, T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{3^2}{2^2} O(n) + \frac{3}{2} \cdot O(n) + O(n)$$

$$= 3^3\left[3T\left(\frac{n}{2^4}\right) + O\left(\frac{n}{2^3}\right)\right] + \left(\frac{3}{2}\right)^2 O(n) + \frac{3}{2} O(n) + O(n) =$$

$$= 3^4\, T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^3 O(n) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 O(n) + \left(\frac{3}{2}\right)^1 O(n) + \left(\frac{3}{2}\right)^0 O(n)$$

$\vdots$

$$= 3^k\, T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} O(n) + \dots \left(\frac{3}{2}\right)^1 O(n) + O(n) =$$

$$= 3^k\, T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i O(n) =$$

$$= 3^k\, T\left(\frac{n}{2^k}\right) + O(n) \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i$$

Repete até que $\frac{n}{2^k} = 1 \Rightarrow n = 2^k \Rightarrow \lg n = \lg 2^k \Rightarrow k = \lg n$

$$T(n) = 3^{\lg n}\, T(1) + O(n) \left[\frac{1 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1}\right]$$

$$= 3^{\lg n}\, O(1) + O(n) \left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= O(n^{\lg 3}) + O(n) \left[2\left(n^{\lg 3/2} - 1\right)\right]$$

$$= O(n^{\lg 3}) + O(n)\left[2\left(n^{\lg 3 - \lg 2} - 1\right)\right]$$

$$= O(n^{\lg 3}) + O(n)\left[2\left(\frac{n^{\lg 3}}{n^{\lg 2}} - 1\right)\right]$$

$$= O(n^{\lg 3}) + O(n)\left[2 \cdot \left(\frac{n^{\lg 3}}{n} - 1\right)\right]$$

$$= O(n^{\lg 3}) + 2 \cdot O\left(n \cdot \frac{n^{\lg 3}}{n} - 1 \cdot n\right)$$

$$= O(n^{\lg 3}) + O(n^{\lg 3} - n)$$

$$T(n) = O(n^{\lg 3})$$