# Sistemas de Equações Lineares

## BCC760 - Cálculo Numérico

Prof. Gustavo Peixoto Silva

# Sistemas Lineares
# Método de Gauss

# Introdução

**Matrizes Equivalentes:**

Duas matrizes são ditas equivalentes quando é possível partir de uma delas e chegar a outra por meio de um número finito de transformações elementares.

# Introdução

**Matrizes Equivalentes:**

Duas matrizes são ditas equivalentes quando é possível partir de uma delas e chegar a outra por meio de um número finito de transformações elementares.

**Sistemas Equivalentes:**

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando admitem a mesma solução.

# Introdução

**Matrizes Equivalentes:**

Duas matrizes são ditas equivalentes quando é possível partir de uma delas e chegar a outra por meio de um número finito de transformações elementares.

**Sistemas Equivalentes:**

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando admitem a mesma solução.

Seja $[A|\ b]$ a matriz aumentada de um sistema de equações $Ax = b$, tal que o determinante de $A$ é não nulo, e $[U|\ d]$ uma matriz **equivalente** a $[A|\ b]$. Os sistemas $Ax = b$ e $Ux = d$ são **equivalentes** e, portanto, **possuem a mesma solução**.

# Introdução

**Transformações elementares:**

As transformações elementares constituem um conjunto de operações que podem ser efetuadas sobre as linhas ou colunas de uma matriz.

# Introdução

## Transformações elementares:

As transformações elementares constituem um conjunto de operações que podem ser efetuadas sobre as linhas ou colunas de uma matriz.

Três operações que serão aplicadas na matriz aumentada $[A|\ b]$, a fim de se obter $[U|\ d]$:

(i) multiplicação de uma linha por uma constante não-nula:

$$l_i \leftarrow \alpha \times l_i,\ \ \alpha \in \mathbb{R},\ \ \alpha \neq 0,\ \ i = 1, 2, ..., n$$

# Introdução

**Transformações elementares:**

As transformações elementares constituem um conjunto de operações que podem ser efetuadas sobre as linhas ou colunas de uma matriz.

Três operações que serão aplicadas na matriz aumentada $[A|\ b]$, a fim de se obter $[U|\ d]$:

(i) multiplicação de uma linha por uma constante não-nula:

$$l_i \leftarrow \alpha \times l_i,\ \ \alpha \in \mathbb{R},\ \ \alpha \neq 0,\ \ i = 1, 2, ..., n$$

(ii) troca de posição entre duas linhas:

$$l_i \leftrightarrows l_j;\ \ i, j = 1, 2, ..., n;\ \ i \neq j$$

# Introdução

## Transformações elementares:

As transformações elementares constituem um conjunto de operações que podem ser efetuadas sobre as linhas ou colunas de uma matriz.

Três operações que serão aplicadas na matriz aumentada $[A|\ b]$, a fim de se obter $[U|\ d]$:

(i) multiplicação de uma linha por uma constante não-nula:

$$l_i \leftarrow \alpha \times l_i,\ \ \alpha \in \mathbb{R},\ \ \alpha \neq 0,\ \ i = 1, 2, ..., n$$

(ii) troca de posição entre duas linhas:

$$l_i \leftrightarrows l_j;\ \ i, j = 1, 2, ..., n;\ \ i \neq j$$

(iii) adição de um múltiplo de uma linha a outra linha:

$$l_i \leftarrow l_i + \beta \times l_j,\ \ \beta \in \mathbb{R},\ \ \beta \neq 0,\ \ i, j = 1, 2, ..., n;\ \ i \neq j$$

# Exemplo

$$(I_0)\begin{cases} x + y & = 5 \\ 2x + 4y & = 16 \end{cases}$$

Resolvendo:

- Manter a primeira equação
$$L_1^1 \leftarrow L_1^0$$
- Substituir a segunda linha pelo resultado da transformação:
$$L_2^1 \leftarrow L_2^0 - 2 * L_1^0$$

Assim teremos o sistema:

# Exemplo

$$(I_0)\begin{cases} x+y &= 5 \\ 2x+4y &= 16 \end{cases}$$

Resolvendo:

- Manter a primeira equação

$$L_1^1 \leftarrow L_1^0$$

- Substituir a segunda linha pelo resultado da transformação:

$$L_2^1 \leftarrow L_2^0 - 2 * L_1^0$$

Assim teremos o sistema:

$$(I_1)\begin{cases} x+y &= 5 \\ 2y &= 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \qquad y &= 3 \\ \end{cases}$$

# Exemplo

$$(I_0)\begin{cases} x + y &= 5 \\ 2x + 4y &= 16 \end{cases}$$

Resolvendo:

- Manter a primeira equação
$$L_1^1 \leftarrow L_1^0$$
- Substituir a segunda linha pelo resultado da transformação:
$$L_2^1 \leftarrow L_2^0 - 2 * L_1^0$$

Assim teremos o sistema:

$$(I_1)\begin{cases} x + y &= 5 \\ 2y &= 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= 3 \\ x + 3 &= 5 \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é $x = [2, 3]$

# Eliminação de Gauss

(métodos diretos)

# Eliminação de Gauss

Ideia fundamental: transformar $Ax = b$ em $Ux = d$, um sistema **triangular superior**, e resolvê-lo via **substituições retroativas**.

# Eliminação de Gauss

Ideia fundamental: transformar $Ax = b$ em $Ux = d$, um sistema **triangular superior**, e resolvê-lo via **substituições retroativas**.

- **Fase de Eliminação:** transformações elementares sobre as linhas da matriz $[A|\ b]$ até que, depois de $(n-1)$ passos, se obtenha $Ux = d$.

# Eliminação de Gauss

Ideia fundamental: transformar $Ax = b$ em $Ux = d$, um sistema **triangular superior**, e resolvê-lo via **substituições retroativas**.

- **Fase de Eliminação:** transformações elementares sobre as linhas da matriz $[A|\ b]$ até que, depois de $(n-1)$ passos, se obtenha $Ux = d$.
- **Fase de Substituição:** resolver o sistema triangular superior, $Ux = d$, por meio do algoritmo de substituições retroativas.

# Eliminação de Gauss

Ideia fundamental: transformar $Ax = b$ em $Ux = d$, um sistema **triangular superior**, e resolvê-lo via **substituições retroativas**.

- **Fase de Eliminação:** transformações elementares sobre as linhas da matriz $[A|\ b]$ até que, depois de $(n-1)$ passos, se obtenha $Ux = d$.
- **Fase de Substituição:** resolver o sistema triangular superior, $Ux = d$, por meio do algoritmo de substituições retroativas.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]}_{[A\ |\ b]} \xrightarrow{\color{blue}Transf.\ Elemen.} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & d_1 \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} & d_n \end{array}\right]}_{[U\ |\ d]}$$

# Eliminação de Gauss

**Restrição:** Considere que as submatrizes principais de $A$ são não singulares, ou seja, $det(A_k) \neq 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n$.

**Algoritmo:**

A matriz aumentada do sistema, na primeira iteração, é representada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & | & b_3^{(1)} \\ & & & \cdots & & | & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{bmatrix}.$$

# Eliminação de Gauss

**Fase de eliminação:**

Passo 1 - Eliminação na primeira coluna: devem ser zerados todos os elementos da primeira coluna que estão abaixo da diagonal principal, ou seja, eliminação da incógnita $x_1$ das linhas $2, 3, \cdots, n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & | & b_3^{(1)} \\ & & & \cdots & & | & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{bmatrix}.$$

# Eliminação de Gauss

Passo 1 - Eliminação na primeira coluna:

- **Determinação do pivô:** "suponha" $a_{11}^{(1)} \neq 0$.
- **Cálculo do multiplicador de cada termo que será zerado (elementos abaixo do pivô):**

$$m_{i1}^{(1)} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad 2 \leq i \leq n$$

- **Eliminação da incógnita $x_1$ nas linhas $2, 3, \cdots, n$:** aplicam-se as operações elementares

$$L_i \leftarrow L_i - m_{i1}^{(1)} L_1, \quad 2 \leq i \leq n$$

- **Matriz aumentada resultante do Passo 1**:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
 & & & \ddots & & \\
0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}
\end{array}\right]$$

# Eliminação de Gauss

Passo 2 - Eliminação na segunda coluna:

- **Determinação do pivô:** "suponha" $a_{22}^{(2)} \neq 0$.
- **Cálculo de multiplicadores para cada termo que será zerado (elementos abaixo do pivô):**

$$m_{i2}^{(2)} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \quad 3 \leq i \leq n$$

- **Eliminação da incógnita $x_2$ nas linhas $3, \cdots, n$:** aplicam-se as operações elementares

$$L_i \leftarrow L_i - m_{i2}^{(2)} L_2, \quad 3 \leq i \leq n$$

- **Matriz aumentada resultante do Passo 2**:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & | & b_3^{(3)} \\ & & & \ddots & & | & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & | & b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

# Eliminação de Gauss

Passo n-1 - Eliminação na coluna n-1:

- **Determinação do pivô:** "suponha" $a^{(n-1)}_{n-1n-1} \neq 0$.
- **Cálculo do multiplicador para o termo abaixo do pivô:**

$$m^{(n-1)}_{nn-1} = \frac{a^{(n-1)}_{nn-1}}{a^{(n-1)}_{n-1n-1}}$$

- **Eliminação da incógnita $x_{n-1}$ na linha $n$:** aplica-se a seguinte operação elementar

$$L_n \leftarrow L_n - m^{(n-1)}_{nn-1} L_{n-1}$$

- **Matriz aumentada resultante do Passo (n-1)**:

$$\begin{bmatrix}
a^{(1)}_{11} & a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{13} & \cdots & a^{(1)}_{1n-1} & a^{(1)}_{1n} & | & b^{(1)}_{1} \\
0 & a^{(2)}_{22} & a^{(2)}_{23} & \cdots & a^{(2)}_{2n-1} & a^{(2)}_{2n} & | & b^{(2)}_{2} \\
0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3n-1} & a^{(3)}_{3n} & | & b^{(3)}_{3} \\
0 & & & \ddots & & & | & \\
0 & 0 & 0 & & a^{(n-1)}_{n-1\ n-1} & a^{(n-1)}_{n-1\ n} & | & b^{(n-1)}_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & & 0 & a^{(n)}_{nn} & | & b^{(n)}_{n}
\end{bmatrix}$$

# Eliminação de Gauss

Mais genericamente, o passo $k$ da fase de Eliminação é obtido por:

- **Determinação do Pivô:** "suponha" $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.
- **Cálculo de multiplicadores para cada termo que será zerado (elementos abaixo do pivô):**

$$m_{ik}^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

- **Eliminação da incógnita $x_k$ nas linhas $k+1, \cdots, n$:** aplicam-se as operações elementares

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ik}^{(k)} L_k, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

- **Obtenção da matriz aumentada resultante do Passo k.**

# Eliminação de Gauss

**Fase de substituição:**
O sistema triangular superior resultante:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} \\
 & & & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\ n-1}^{(n-1)} & a_{n-1\ n}^{(n-1)} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(n-1)} \\ b_n^{(n)}
\end{bmatrix}
$$

é equivalente ao sistema linear original e, portanto, os sistemas possuem a mesma solução. Basta, portanto, aplicar **substituições retroativas**.

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 1:**
Resolva o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 3 \\ 9x_1 & +8x_2 & -8x_3 & = 6 \\ -6x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

utilizando método de eliminação de Gauss. Efetue os cálculos retendo quatro casas decimais.

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 1:**

**Solução:** Seja a matriz aumentada do sistema linear é $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 3 \\ 9 & 8 & -8 & 6 \\ -6 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

**Passo 1 - Eliminação na primeira coluna:** dado que $a_{11}^{(1)} \neq 0$:

- **Pivô:** $a_{11}^{(1)} = 3$
- **Cálculo dos multiplicadores:**
$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{9}{3} = 3$$
$$m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{-6}{3} = -2$$
- **Eliminação da incógnita $x_1$ nas linhas 2 e 3:** operações elementares
$L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} - 3L_1^{(1)}$
$L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - (-2)L_1^{(1)}$
- **Matriz aumentada resultante:** $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -3 & 6 \end{array}\right]$

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 1:**

**Passo 2 - Eliminação na segunda coluna:** dado que $a_{22}^{(2)} \neq 0$,logo:

- **Pivô:** $a_{22}^{(2)} = 2$
- **Cálculo de multiplicadores:** $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \dfrac{8}{2} = 4$
- **Eliminação da incógnita $x_2$ na linha 3:** operação elementar $L_3^{(3)} \leftarrow L_3^{(2)} - 4L_2^{(2)}$
- **Matriz aumentada resultante:** $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 18 \end{array}\right]$

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 1:** Da etapa de eliminação, obtém-se o seguinte sistema triangular equivalente ao sistema linear original:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 3 \\ & 2x_2 & +x_3 & = -3 \\ & & -7x_3 & = 18 \end{array} \right.$$

que, resolvido por substituições retroativas, tem-se:

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 1:** Da etapa de eliminação, obtém-se o seguinte sistema triangular equivalente ao sistema linear original:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 3 \\ & 2x_2 & +x_3 & = -3 \\ & & -7x_3 & = 18 \end{cases}$$

que, resolvido por substituições retroativas, tem-se:

$$x_3 = \frac{d_3}{u_{33}} = \frac{18}{-7} = -2,5714$$

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 1:** Da etapa de eliminação, obtém-se o seguinte sistema triangular equivalente ao sistema linear original:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 3 \\ & 2x_2 & +x_3 & = -3 \\ & & -7x_3 & = 18 \end{cases}$$

que, resolvido por substituições retroativas, tem-se:

$$x_3 = \frac{d_3}{u_{33}} = \frac{18}{-7} = -2,5714$$

$$x_2 = \frac{d_2 - (u_{23}x_3)}{u_{22}} = \frac{-3 - [(1)(-2,5714)]}{2} = -0,2143$$

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 1:** Da etapa de eliminação, obtém-se o seguinte sistema triangular equivalente ao sistema linear original:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 3 \\ & 2x_2 & +x_3 & = -3 \\ & & -7x_3 & = 18 \end{cases}$$

que, resolvido por substituições retroativas, tem-se:

$$x_3 = \frac{d_3}{u_{33}} = \frac{18}{-7} = -2,5714$$

$$x_2 = \frac{d_2 - (u_{23}x_3)}{u_{22}} = \frac{-3 - [(1)(-2,5714)]}{2} = -0,2143$$

$$x_1 = \frac{d_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3)}{u_{11}} = \frac{3 - [(2)(-0,2143) + (-3)(-2,5714)]}{3} = -1,4285$$

Portanto, a solução do sistema linear é $x = [-1,4285 \quad -0,2143 \quad -2,5714]^t$.

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 2:**
Resolva o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 3 \\ 9x_1 & +8x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = 6 \\ -6x_1 & +4x_2 & -8x_3 & & = -16 \\ 3x_1 & -8x_2 & +3x_3 & -8x_4 & = 22 \end{array}\right.$$

utilizando o Método de Eliminação de Gauss. Efetue os cálculos retendo, quando for o caso, quatro casas decimais.

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 2 (solução com a tabela - dispositivo prático):**

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | pivô $(a_{11} \neq 0)$ | **3** | **2** | **0** | **1** | **3** | |
| $L_2^{(1)}$ | $m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{9}{3} = 3$ | 9 | 8 | -3 | 4 | 6 | |
| $L_3^{(1)}$ | $m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{-6}{3} = -2$ | -6 | 4 | -8 | 0 | -16 | |
| $L_4^{(1)}$ | $m_{41} = \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{3} = 1$ | 3 | -8 | 3 | -8 | 22 | |

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 2 (solução com a tabela - dispositivo prático):**

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | pivô $(a_{11} \neq 0)$ | $\underline{3}$ | $\underline{\mathbf{2}}$ | $\underline{\mathbf{0}}$ | $\underline{\mathbf{1}}$ | $\underline{\mathbf{3}}$ | |
| $L_2^{(1)}$ | $m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{9}{3} = 3$ | 9 | 8 | -3 | 4 | 6 | |
| $L_3^{(1)}$ | $m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{-6}{3} = -2$ | -6 | 4 | -8 | 0 | -16 | |
| $L_4^{(1)}$ | $m_{41} = \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{3} = 1$ | 3 | -8 | 3 | -8 | 22 | |
| $L_2^{(2)}$ | pivô $(a_{22} \neq 0)$ | $\underline{\mathbf{0}}$ | $\underline{2}$ | $\underline{\mathbf{-3}}$ | $\underline{\mathbf{1}}$ | $\underline{\mathbf{-3}}$ | $L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - 3L_1^{(1)}$ |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{8}{2} = 4$ | 0 | 8 | -8 | 2 | -10 | $L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + 2L_1^{(1)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{42} = \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-10}{2} = -5$ | 0 | -10 | 3 | -9 | 19 | $L_4^{(2)} = L_4^{(1)} - L_1^{(1)}$ |

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 2 (solução com a tabela - dispositivo prático):**

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | pivô $(a_{11} \neq 0)$ | <u>3</u> | **<u>2</u>** | **<u>0</u>** | **<u>1</u>** | **<u>3</u>** | |
| $L_2^{(1)}$ | $m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{9}{3} = 3$ | 9 | 8 | -3 | 4 | 6 | |
| $L_3^{(1)}$ | $m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{-6}{3} = -2$ | -6 | 4 | -8 | 0 | -16 | |
| $L_4^{(1)}$ | $m_{41} = \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{3} = 1$ | 3 | -8 | 3 | -8 | 22 | |
| $L_2^{(2)}$ | pivô $(a_{22} \neq 0)$ | **<u>0</u>** | <u>2</u> | **<u>-3</u>** | **<u>1</u>** | **<u>-3</u>** | $L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - 3L_1^{(1)}$ |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{8}{2} = 4$ | 0 | 8 | -8 | 2 | -10 | $L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + 2L_1^{(1)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{42} = \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-10}{2} = -5$ | 0 | -10 | 3 | -9 | 19 | $L_4^{(2)} = L_4^{(1)} - L_1^{(1)}$ |
| $L_3^{(3)}$ | pivô $(a_{33} \neq 0)$ | **<u>0</u>** | **<u>0</u>** | <u>4</u> | **<u>-2</u>** | **<u>2</u>** | $L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 4L_2^{(2)}$ |
| $L_4^{(3)}$ | $m_{43} = \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{-12}{4} = -3$ | 0 | 0 | -12 | -4 | 4 | $L_4^{(3)} = L_4^{(2)} + 5L_2^{(2)}$ |

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 2 (solução com a tabela - dispositivo prático):**

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | pivô $(a_{11} \neq 0)$ | 3 | **2** | **0** | **1** | **3** | |
| $L_2^{(1)}$ | $m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{9}{3} = 3$ | 9 | 8 | -3 | 4 | 6 | |
| $L_3^{(1)}$ | $m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{-6}{3} = -2$ | -6 | 4 | -8 | 0 | -16 | |
| $L_4^{(1)}$ | $m_{41} = \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{3} = 1$ | 3 | -8 | 3 | -8 | 22 | |
| $L_2^{(2)}$ | pivô $(a_{22} \neq 0)$ | **0** | 2 | **-3** | **1** | **-3** | $L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - 3L_1^{(1)}$ |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{8}{2} = 4$ | 0 | 8 | -8 | 2 | -10 | $L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + 2L_1^{(1)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{42} = \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-10}{2} = -5$ | 0 | -10 | 3 | -9 | 19 | $L_4^{(2)} = L_4^{(1)} - L_1^{(1)}$ |
| $L_3^{(3)}$ | pivô $(a_{33} \neq 0)$ | **0** | **0** | 4 | **-2** | **2** | $L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 4L_2^{(2)}$ |
| $L_4^{(3)}$ | $m_{43} = \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{-12}{4} = -3$ | 0 | 0 | -12 | -4 | 4 | $L_4^{(3)} = L_4^{(2)} + 5L_2^{(2)}$ |
| $L_4^{(4)}$ | | **0** | **0** | **0** | -10 | **10** | $L_4^{(4)} = L_4^{(3)} + 3L_3^{(3)}$ |

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 2:**

O sistema triangular resultante da etapa de eliminação, que encontra-se em destaque no dispositivo prático é:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ -10x_4 = 10 \end{cases}$$

# Eliminação de Gauss

**Exemplo 2:**
Aplicando o algoritmo de substituições retroativas, tem-se:

$$x_4 = \frac{d_4}{u_{44}} = \frac{10}{-10} = -1$$

$$x_3 = \frac{d_3 - u_{34}x_3}{u_{33}} = \frac{2 - (-2)(1)}{4} = 0$$

$$x_2 = \frac{d_2 - (u_{23}x_3 + u_{24}x_4)}{u_{22}} = \frac{-3 - [(-3)(0) + (1)(-1)]}{2} = -1$$

$$x_1 = \frac{d_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4)}{u_{11}} = \frac{3 - [(2)(-1) + (0)(0) + (1)(-1)]}{3} = 2$$

Portanto, a solução do sistema linear original é $x = [2 \quad -1 \quad 0 \quad -1]^t$.

# Eliminação de Gauss

**Exercício 1:**
Resolva o seguinte sistema linear, utilizando o Método de Eliminação de Gauss, retendo três casas decimais. Mostre os cálculos realizados e não apenas o resultado final.

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 6 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 9 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 11 \end{cases}$$

Solução: $x = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^t$.

# Eliminação de Gauss

Dispositivo prático:

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | pivô $a_{11} \neq 0$ | **1** 1 1 | 6 | |
| $L_2^{(1)}$ | $m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{1} = 1$ | 1 2 2 | 9 | |
| $L_3^{(1)}$ | $m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{2}{1} = 2$ | 2 1 3 | 11 | |
| $L_2^{(2)}$ | | | | |
| $L_3^{(2)}$ | | | | |
| $L_3^{(3)}$ | | | | |

# Eliminação de Gauss

**Exercício 3:**

Resolva o sistema linear, utilizando o Método de Eliminação de Gauss, retendo três casas decimais. Mostre os cálculos e a solução final.

**a)**

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 12 \\ 6x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 13 \\ 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 1 \end{cases}$$

**b)**

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 12 \\ 6x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 13 \\ 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 2 \end{cases}$$

# Avaliação do Resíduo

O resíduo (**erro**) produzido pela solução do sistema $Ax = b$ pode ser avaliado pela expressão:

$$\xi = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i|$$

onde $r_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ é a i-ésima componente do vetor resíduo $r$, calculado por:

$$r = b - Ax$$

# Avaliação do Resíduo

**Exemplo 3:**
Resolva o sistema linear utilizando o método de eliminação de Gauss, **retendo três casas decimais**, e compute o resíduo com quatro casas decimais.

$$\begin{cases} 4,5x_1 & + & 1,8x_2 & + & 2,4x_3 & = & 19,62 \\ 3x_1 & + & 5,2x_2 & + & 1,2x_3 & = & 12,36 \\ 0,8x_1 & + & 2,4x_2 & + & 3,6x_3 & = & 9,20 \end{cases}$$

# Avaliação do Resíduo

**Exemplo 3:**

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | | 4,5 | 1,8 | 2,4 | 19,62 | |
| $L_2^{(1)}$ | $m_{21} = \frac{3}{4{,}5} = 0,667$ | 3,0 | 5,2 | 1,2 | 12,36 | |
| $L_3^{(1)}$ | $m_{31} = \frac{0{,}8}{4{,}5} = 0,178$ | 0,8 | 2,4 | 3,6 | 9,2 | |
| $L_2^{(2)}$ | | 0 | 3,999 | -0,401 | -0,727 | $L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - 0,667L_1^{(1)}$ |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{32} = \frac{2{,}080}{3{,}999} = 0,52$ | 0 | 2,080 | 3,173 | 5,708 | $L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 0,178L_1^{(1)}$ |
| $L_3^{(3)}$ | | 0 | 0 | 3,382 | 6,086 | $L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 0,520L_2^{(2)}$ |

# Avaliação do Resíduo

**Exemplo 3:**
O sistema triangular superior resultante da etapa de eliminação é:

$$\begin{cases} 4,5x_1 + 1,8x_2 + 2,4x_3 = 19,620 \\ \qquad\quad 3,999x_2 - 0,401x_3 = -0,727 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 3,382x_3 = 6,086 \end{cases}$$

que, aplicando o algoritmo de substituições retroativas no sistema linear acima, resulta na seguinte solução $x = \begin{bmatrix} 3,400 & -0,001 & 1,800 \end{bmatrix}^t$.

# Avaliação do Resíduo

**Exemplo 3:**

O resíduo, calculado pela expressão $r = b - Ax$ e considerando quatro casas decimais é:

$$r = \begin{bmatrix} 19,62 \\ 12,36 \\ 9,20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,5 & 1,8 & 2,4 \\ 3,0 & 5,2 & 1,2 \\ 0,8 & 2,4 & 3,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3,400 \\ -0,001 \\ 1,800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0052 \\ 0,0024 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 19,62 \\ 12,36 \\ 9,20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19,6182 \\ 12,3548 \\ 9,1976 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0052 \\ 0,0024 \end{bmatrix}$$

e o erro cometido é:

$$\xi = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{|0,0018|, |0,0052|, |0,0024|\} = 0,0052.$$

Portanto, a solução do sistema linear é $x = \begin{bmatrix} 3,400 & -0,001 & 1,800 \end{bmatrix}^t$ com erro $\xi = 0,0052$.

# Considerações finais

- Sempre que o candidato a pivô for nulo, deve-se trocar a linha correspondente por alguma das linhas abaixo dele, a fim de se obter um pivô não nulo.
- Os valores abaixo do pivô, após as operações elementares, podem não ser exatamente zero, devido a erros de arredondamento. Entretanto, para que a matriz resultante seja triangular, eles serão considerados zero.
- Na avaliação do resíduo $r = b - Ax$, a matriz $A$ e o vetor $b$ são obtidas do **sistema original**, antes de realizar as operações elementares.

# Exercício para fazer em sala

**Exercício**

Resolva o sistema considerando duas casas decimais e calcule o erro considerando três casas decimais.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

Apresentar o sistema triangularizado e calcular o erro .

# Exercício para fazer em sala

**Resolução**

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

Sistema triangular resultante, retendo duas casas decimais, é o seguinte.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9 \\ \quad - 7x_2 - 1,5x_3 = 10,5 \\ \quad\quad 1,29x_3 = 4,97 \end{cases}$$

Solução $x = [-3,73; -2,33; 3,85]$

# Avaliação do Resíduo

**Resolução**

O resíduo, calculado pela expressão $r = B - Ax$, é:

$$R = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -8 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3,73 \\ -2,33 \\ 3,85 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,990 \\ 15,030 \\ 10,960 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,010 \\ -0,030 \\ 0,040 \end{bmatrix}$$

e o erro cometido é:

$$\xi = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{|0,01|, |-0,03|, |0,04|\} = 0,04.$$

Portanto, a solução do sistema linear é $x = \begin{bmatrix} -3,73 & -2,33 & 3,85 \end{bmatrix}^t$ com erro $\xi = 0,04$.

# Eliminação de Gauss com Pivotação

(métodos diretos)

# Ampliação dos erros de arredondamento

Ocorre quando se multiplica um número que contém um erro de arredondamento por um valor muito grande.

# Ampliação dos erros de arredondamento

Ocorre quando se multiplica um número que contém um erro de arredondamento por um valor muito grande.
Por exemplo, considere que um número $x'$ tenha erro de arredondamento $\xi$. Este número pode, então, ser escrito na forma:

$$x' = x + \xi.$$

# Ampliação dos erros de arredondamento

Ocorre quando se multiplica um número que contém um erro de arredondamento por um valor muito grande.
Por exemplo, considere que um número $x'$ tenha erro de arredondamento $\xi$. Este número pode, então, ser escrito na forma:

$$x' = x + \xi.$$

Se $x'$ é multiplicado por um valor $m$, tem-se que

$$mx' = mx + m\xi,$$

de forma que $m\xi$ representa o erro de arredondamento. Se $m$ for grande este erro pode ser muito maior que o erro original. Diz-se, então, que o erro $\xi$ foi amplificado.

# Ampliação dos erros de arredondamento

**Q:** Como garantir que o erro não será amplificado? Quais valores de $m$ evitariam isso?

# Ampliação dos erros de arredondamento

**Q:** Como garantir que o erro não será amplificado? Quais valores de $m$ evitariam isso?

**R:** Manter $m$ no intervalo $[-1, 1]$, de forma que os erros de arredondamento não sejam ampliados, isto é, $|m\xi| \leq |\xi|$

# Ampliação dos erros de arredondamento

**Q:** Como garantir que o erro não será amplificado? Quais valores de $m$ evitariam isso?

**R:** Manter $m$ no intervalo $[-1, 1]$, de forma que os erros de arredondamento não sejam ampliados, isto é, $|m\xi| \leq |\xi|$

Veja que as operações elementares para a etapa de eliminação são do tipo

$$l_i \leftarrow l_i - ml_j.$$

**Escolher um $m \in [-1, 1]$ é desejável, para evitar ampliação de erros.**

# Pivotação

**Ideia:** escolher como pivô o maior elemento em módulo da coluna, cujos elementos serão eliminados:

(i) no passo $k$ da fase de eliminação, o pivô será o elemento de maior valor absoluto dentre os coeficientes $a_{ik}^{(k)}$ da coluna em que está sendo aplicada a eliminação:

$$a_{rk}^{(k)} = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

$r$ **é a linha em que se encontra o elemento máximo.**

(ii) se necessário, efetuar a troca da linha $k$ pela linha $r$, ou seja $a_{kk}^{(k)} = a_{rk}^{(k)}$.

# Pivotação

**Exemplo 4:**
Resolva o sistema linear utilizando método de eliminação de Gauss com pivotação retendo nos cálculos quatro casas decimais:

$$\begin{cases} 2x_1 & -5x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 5 \\ 3x_1 & -7x_2 & +3x_3 & -x_4 & = -1 \\ 5x_1 & -9x_2 & +6x_3 & +2x_4 & = 7 \\ 4x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 8 \end{cases}$$

# Pivotação

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | |
| $L_2^{(1)}$ | | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(1)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | |
| $L_4^{(1)}$ | | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_1^{(2)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | $L_1^{(2)} = L_3^{(1)}$ |
| $L_2^{(2)}$ | $m_{21} = \frac{3}{5} = 0,6$ | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{31} = \frac{2}{5} = 0,4$ | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | $L_3^{(2)} = L_1^{(3)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{41} = \frac{4}{5} = 0,8$ | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |

# Pivotação

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | |
| $L_2^{(1)}$ | | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(1)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | |
| $L_4^{(1)}$ | | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_1^{(2)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | $L_1^{(2)} = L_3^{(1)}$ |
| $L_2^{(2)}$ | $m_{21} = \frac{3}{5} = 0,6$ | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{31} = \frac{2}{5} = 0,4$ | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | $L_3^{(2)} = L_1^{(3)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{41} = \frac{4}{5} = 0,8$ | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_2^{(3)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 0 | -1,6 | -0,6 | -2,2 | -5,2 | $L_2^{(3)} = L_2^{(2)} - 0,6L_1^{(2)}$ |

# Pivotação

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | |
| $L_2^{(1)}$ | | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(1)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | |
| $L_4^{(1)}$ | | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_1^{(2)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | $L_1^{(2)} = L_3^{(1)}$ |
| $L_2^{(2)}$ | $m_{21} = \frac{3}{5} = 0,6$ | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{31} = \frac{2}{5} = 0,4$ | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | $L_3^{(2)} = L_1^{(3)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{41} = \frac{4}{5} = 0,8$ | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_2^{(3)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 0 | -1,6 | -0,6 | -2,2 | -5,2 | $L_2^{(3)} = L_2^{(2)} - 0,6L_1^{(2)}$ |
| $L_3^{(3)}$ | $m_{32} = \frac{-1,4}{-1,6} = 0,875$ | 0 | -1,4 | 0,6 | 0,2 | 2,2 | $L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 0,4L_1^{(2)}$ |

# Pivotação

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | |
| $L_2^{(1)}$ | | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(1)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | |
| $L_4^{(1)}$ | | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_1^{(2)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | $L_1^{(2)} = L_3^{(1)}$ |
| $L_2^{(2)}$ | $m_{21} = \frac{3}{5} = 0,6$ | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{31} = \frac{2}{5} = 0,4$ | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | $L_3^{(2)} = L_1^{(3)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{41} = \frac{4}{5} = 0,8$ | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_2^{(3)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 0 | -1,6 | -0,6 | -2,2 | -5,2 | $L_2^{(3)} = L_2^{(2)} - 0,6L_1^{(2)}$ |
| $L_3^{(3)}$ | $m_{32} = \frac{-1,4}{-1,6} = 0,875$ | 0 | -1,4 | 0,6 | 0,2 | 2,2 | $L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 0,4L_1^{(2)}$ |
| $L_4^{(3)}$ | $m_{42} = \frac{1,2}{-1,6} = -0,75$ | 0 | 1,2 | -1,8 | -0,6 | 2,4 | $L_4^{(3)} = L_4^{(2)} - 0,8L_1^{(2)}$ |

# Pivotação

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | |
| $L_2^{(1)}$ | | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(1)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | |
| $L_4^{(1)}$ | | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_1^{(2)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | $L_1^{(2)} = L_3^{(1)}$ |
| $L_2^{(2)}$ | $m_{21} = \frac{3}{5} = 0,6$ | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{31} = \frac{2}{5} = 0,4$ | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | $L_3^{(2)} = L_1^{(3)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{41} = \frac{4}{5} = 0,8$ | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_2^{(3)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 0 | -1,6 | -0,6 | -2,2 | -5,2 | $L_2^{(3)} = L_2^{(2)} - 0,6L_1^{(2)}$ |
| $L_3^{(3)}$ | $m_{32} = \frac{-1,4}{-1,6} = 0,875$ | 0 | -1,4 | 0,6 | 0,2 | 2,2 | $L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 0,4L_1^{(2)}$ |
| $L_4^{(3)}$ | $m_{42} = \frac{1,2}{-1,6} = -0,75$ | 0 | 1,2 | -1,8 | -0,6 | 2,4 | $L_4^{(3)} = L_4^{(2)} - 0,8L_1^{(2)}$ |
| $L_3^{(4)}$ | | 0 | 0 | 1,125 | 2,125 | 6,75 | $L_3^{(4)} = L_3^{(3)} - 0,875L_2^{(3)}$ |

# Pivotação

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | |
| $L_2^{(1)}$ | | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(1)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | |
| $L_4^{(1)}$ | | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_1^{(2)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | $L_1^{(2)} = L_3^{(1)}$ |
| $L_2^{(2)}$ | $m_{21} = \frac{3}{5} = 0,6$ | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{31} = \frac{2}{5} = 0,4$ | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | $L_3^{(2)} = L_1^{(3)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{41} = \frac{4}{5} = 0,8$ | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_2^{(3)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 0 | -1,6 | -0,6 | -2,2 | -5,2 | $L_2^{(3)} = L_2^{(2)} - 0,6L_1^{(2)}$ |
| $L_3^{(3)}$ | $m_{32} = \frac{-1{,}4}{-1{,}6} = 0,875$ | 0 | -1,4 | 0,6 | 0,2 | 2,2 | $L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 0,4L_1^{(2)}$ |
| $L_4^{(3)}$ | $m_{42} = \frac{1{,}2}{-1{,}6} = -0,75$ | 0 | 1,2 | -1,8 | -0,6 | 2,4 | $L_4^{(3)} = L_4^{(2)} - 0,8L_1^{(2)}$ |
| $L_3^{(4)}$ | | 0 | 0 | 1,125 | 2,125 | 6,75 | $L_3^{(4)} = L_3^{(3)} - 0,875L_2^{(3)}$ |
| $L_4^{(4)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 0 | 0 | -2,25 | -2,25 | -1,5 | $L_4^{(3)} = L_4^{(3)} + 0,75L_2^{(3)}$ |

# Pivotação

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | |
| $L_2^{(1)}$ | | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(1)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | |
| $L_4^{(1)}$ | | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_1^{(2)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | $L_1^{(2)} = L_3^{(1)}$ |
| $L_2^{(2)}$ | $m_{21} = \frac{3}{5} = 0,6$ | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{31} = \frac{2}{5} = 0,4$ | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | $L_3^{(2)} = L_1^{(3)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{41} = \frac{4}{5} = 0,8$ | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_2^{(3)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 0 | -1,6 | -0,6 | -2,2 | -5,2 | $L_2^{(3)} = L_2^{(2)} - 0,6L_1^{(2)}$ |
| $L_3^{(3)}$ | $m_{32} = \frac{-1,4}{-1,6} = 0,875$ | 0 | -1,4 | 0,6 | 0,2 | 2,2 | $L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 0,4L_1^{(2)}$ |
| $L_4^{(3)}$ | $m_{42} = \frac{1,2}{-1,6} = -0,75$ | 0 | 1,2 | -1,8 | -0,6 | 2,4 | $L_4^{(3)} = L_4^{(2)} - 0,8L_1^{(2)}$ |
| $L_3^{(4)}$ | | 0 | 0 | 1,125 | 2,125 | 6,75 | $L_3^{(4)} = L_3^{(3)} - 0,875L_2^{(3)}$ |
| $L_4^{(4)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 0 | 0 | -2,25 | -2,25 | -1,5 | $L_4^{(3)} = L_4^{(3)} + 0,75L_2^{(3)}$ |
| $L_3^{(5)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 0 | 0 | -2,25 | -2,25 | -1,5 | $L_3^{(5)} = L_4^{(4)}$ |
| $L_4^{(5)}$ | $m_{43} = \frac{1,125}{-2,25} = -0,5$ | 0 | 0 | 1,125 | 2,125 | 6,75 | $L_4^{(5)} = L_3^{(4)}$ |

# Pivotação

| Linhas | Multiplicadores | Coeficientes | | | | T. indep. | Operações |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1^{(1)}$ | | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | |
| $L_2^{(1)}$ | | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(1)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | |
| $L_4^{(1)}$ | | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_1^{(2)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 5 | -9 | 6 | 2 | 7 | $L_1^{(2)} = L_3^{(1)}$ |
| $L_2^{(2)}$ | $m_{21} = \frac{3}{5} = 0,6$ | 3 | -7 | 3 | -1 | -1 | |
| $L_3^{(2)}$ | $m_{31} = \frac{2}{5} = 0,4$ | 2 | -5 | 3 | 1 | 5 | $L_3^{(2)} = L_1^{(3)}$ |
| $L_4^{(2)}$ | $m_{41} = \frac{4}{5} = 0,8$ | 4 | -6 | 3 | 1 | 8 | |
| $L_2^{(3)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 0 | -1,6 | -0,6 | -2,2 | -5,2 | $L_2^{(3)} = L_2^{(2)} - 0,6L_1^{(2)}$ |
| $L_3^{(3)}$ | $m_{32} = \frac{-1,4}{-1,6} = 0,875$ | 0 | -1,4 | 0,6 | 0,2 | 2,2 | $L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 0,4L_1^{(2)}$ |
| $L_4^{(3)}$ | $m_{42} = \frac{1,2}{-1,6} = -0,75$ | 0 | 1,2 | -1,8 | -0,6 | 2,4 | $L_4^{(3)} = L_4^{(2)} - 0,8L_1^{(2)}$ |
| $L_3^{(4)}$ | | 0 | 0 | 1,125 | 2,125 | 6,75 | $L_3^{(4)} = L_3^{(3)} - 0,875L_2^{(3)}$ |
| $L_4^{(4)}$ | Maior valor absoluto $\Rightarrow$ | 0 | 0 | -2,25 | -2,25 | -1,5 | $L_4^{(3)} = L_4^{(3)} + 0,75L_2^{(3)}$ |
| $L_3^{(5)}$ | pivô $\Rightarrow$ | 0 | 0 | -2,25 | -2,25 | -1,5 | $L_3^{(5)} = L_4^{(4)}$ |
| $L_4^{(5)}$ | $m_{43} = \frac{1,125}{-2,25} = -0,5$ | 0 | 0 | 1,125 | 2,125 | 6,75 | $L_4^{(5)} = L_3^{(4)}$ |
| $L_4^{(6)}$ | | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | $L_4^{(4)} = L_4^{(3)} + 0,5L_3^{(3)}$ |

# Pivotação

**Exemplo 4:**
O sistema triangular resultante da etapa de eliminação é:

$$\begin{cases} 5x_1 & -9x_2 & +6x_3 & +2x_4 & = 7 \\ & -1,6x_2 & -0,6x_3 & -2,2x_4 & = -5,2 \\ & & -2,25x_3 & -2,25x_4 & = -1,5 \\ & & & x_4 & = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema triangular por substituições retroativas, temos:

$$x_4 = \frac{d_4}{u_{44}} = \frac{6}{1} = 6$$

$$x_3 = \frac{d_3 - u_{34}x_3}{u_{33}} = \frac{-1,5 - (-2,25)(6)}{-2,25} = -5,333$$

$$x_2 = \frac{d_2 - (u_{23}x_3 + u_{24}x_4)}{u_{22}} = \frac{-5,2 - [(-0,6)(-5,333) + (-2,2)(6)]}{-1,6} = -3$$

$$x_1 = \frac{d_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4)}{u_{11}} = \frac{7 - [(-9)(-3) + (6)(-5,333) + (2)(6)]}{5} = -0,0004$$

Logo, a solução é $x = [-0,0004 \quad -3 \quad -5,3333 \quad 6]^t$.

# Pivotação

**Na prática, a pivotação dá mesmo um ganho muito grande em termos do resíduo/erro da solução?**

**Vamos conferir rodando código!**

A diferença pode ser grande quando os maiores elementos da matriz estão fora da diagonal principal, o que causa uma grande ampliação dos erros de arredondamento.

# Pivotação

**Exemplo 5** (retendo 4 casas decimais):

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 9 & 8 & -8 \\ -6 & 4 & -3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Saída do código:
$det(A) : -42.00000000000001$
**Metodo sem Pivotação:**

- Solução do sistema: [ -1.4280 -0.2140 -2.5710 ]
- Resíduo: [-0.001 -0.004 0.001] Erro = 0.004000000000001336

**Metodo com Pivotação:**

- Solução do sistema: [ -1.4220 -0.2120 -2.5620 ]
- Resíduo: [ 0.004 -0.002 0.002] Erro = 0.004000000000000448

# Pivotação

**Exemplo 6** (retendo 4 casas decimais):

$$\begin{bmatrix} 0,007 & 61,20 & 0,093 \\ 4,810 & -5,92 & 1,110 \\ 81,40 & 1,120 & 1,180 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 61,3 \\ 0 \\ 83,7 \end{bmatrix}$$

Saída do código:
$det(A) : 5227.564831999998$

**Metodo sem Pivotação:**

- Solução do sistema: [ 2.8570 1.0010 0.2030 ]
- Resíduo: [-7.8000000e-05 -8.0415800e+00 -1.5022046e+02] Erro = 150.22046

**Metodo com Pivotação:**

- Solução do sistema: [ 1.0000 1.0000 1.0190 ]
- Resíduo: [-0.001767 -0.02109 -0.02242 ] Erro = 0.022420000000010987

# Pivotação

**Exemplo 7** (retendo 4 casas decimais):

$$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 100000 \\ 250000 & 30 & 10 \\ 10 & 540000 & 30 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Saída do código:
$det(A) : 1.3499999658029e + 16$

**Metodo sem Pivotação:**

- Solução do sistema: [ 0.0000 1.9500 0.0000 ]
- Resíduo: [ 0.000000e+00 -2.450000e+01 -1.052974e+06] Erro = 1052974.0

**Metodo com Pivotação:**

- Solução do sistema: [ 0.0000 0.0000 0.0000 ]
- Resíduo: [39. 34. 26.] Erro = 39.0