MDI0001
Matemática Discreta
UDESC - Centro de Ciências Tecnológicas
Bacharelado em Ciência da Computação

Exercícios
Álgebras e Homomorfismos

---

1. Considere a álgebra $\langle \mathbb{R}, \odot \rangle$ sendo a operação $\odot$ definida por

$$x \odot y = x - y + 3.$$

Mostre que $\langle \mathbb{R}, \odot \rangle$ não é grupo.

2. Dado o conjunto $IR = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge a \leq b\}$ e a operação $\oplus : IR \times IR \to IR$ definida a seguir para $x = [a_1, b_1]$ e $y = [a_2, b_2]$:

$$x \oplus y = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$$

Mostre que $\langle IR, \oplus \rangle$ é monóide. Por que IR não é grupo?

3. O monóide apresentado na questão anterior é abeliano (comutativo)? Justifique.

4. Seja A um conjunto finito e S o conjunto de todas as funções totais $f : A \to A$. Prove que $\langle S, \circ, \iota_A \rangle$, onde $\circ$ é a composição de funções com $g \circ f(x) = g(f(x))$ e ι_A é a função identidade $\iota_A(x) = x$, é um monóide.

5. Mostre que o morfismo $f : \langle \mathbb{Z}, *, 1 \rangle \to \langle \mathbb{Z}, *, 1 \rangle$, onde $f(x) = x^2$ e $*$ é a operação de multiplicação de inteiros, é um homomorfismo de monóides.

6. Dado $h : \langle A, \oplus \rangle \to \langle B, \otimes \rangle$ um homomorfismo de álgebras, mostre que se $\langle A, \oplus \rangle$ for uma álgebra abeliana então h preserva comutatividade.

7. Dado $h : \langle A, \oplus \rangle \to \langle B, \otimes \rangle$ um homomorfismo de álgebras, mostre que se $\langle B, \otimes \rangle$ for uma álgebra abeliana então h preserva comutatividade.

8. A composição de homomorfismos de álgebras é dada pela composição das funções sobre os conjuntos suporte das álgebras. Ou seja, se $f : \langle A, \oplus \rangle \to \langle B, \otimes \rangle$ e $g : \langle B, \otimes \rangle \to \langle C, \nabla \rangle$ são homomorfismos de álgebras sendo $f : A \to B$ e $g : B \to C$ as funções sobre os conjuntos suportes, a função $g \circ f : A \to C$ define o homomorfismo de álgebras $g \circ f : \langle A, \oplus \rangle \to \langle C, \nabla \rangle$.

   Generalizando esta definição para homomorfismos de monóides, prove que a composição de homomorfismos de monóides também é um homomorfismo de monóide.