UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DMAT

Professora: Graciela Moro
Assuntos: Espaços vetoriais, subespaços vetoriais, combinação linear, independência linear, subespaço gerado, base e dimensão, mudança de base

Segunda Lista de Exercícios

1. Verifique se $\mathbb{R}^2$ com as operações definidas por:
   i. $(x, y) + (s, t) = (s, y + t)$, onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$
   ii. $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   é um espaço vetorial.
2. Moste que $\mathbb{R}^2$ com as operações definidas por:
   i. $(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t)$, onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$
   ii. $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$.
   é um espaço vetorial **.**
3. Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço do espaço vetorial V. Para os casos em que W é subespaço de V, exiba uma base para W.
   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$
   (b) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1\}$
   (c) $V = P_n$ e $W = \{p \in P_n : p(0) = p(1)\}$
   (d) $V = M(2, 2)$ e $S = \{X \in M_2 \ \ / det(X) = 0\}$ (S é o conjunto das matrizes singulares)
   (e) $V = M(2, 2)$ e $F = \{X \in M_2 \ \ / AX = XA\}$ (F é o conjunto das matrizes que comutam com a matriz A)
   (f) $V = P_1$ e $W = \left\{p(x) \in P_1 : \int_0^1 p(x)dx = 0\right\}$
   (g) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \right\}$
   (h) $V = M_{2\times 2}$ e $W = \left\{A \in M_{2\times 2} : A^2 = A\right\}$
4. **a)** Verifique se o conjunto $S = \{A \in M(3, 3); A \ \textit{é uma matriz anti} - \textit{simétrica}\}$ é um subespaço vetorial de $M(3, 3)$.
   b) Considere o subconjunto de M_2, dado por
   $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 \ / \ b = a \text{ e } d = -a \right\}$. Verifique se o subconjunto W é um espaço vetorial.
5. Sejam $U = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3 \ / \ a + b - c + 3d = 0\right\}$ e $W = \{p(x) \in P_3 \ / \ p'(-1) = 0\}$ dois subespaços vetoriais de P_3. Determine $U \cap W$.
6. Verifique se o conjunto $W = \{(1, 2, 3), (1, 3, 1), (0, 3, 1), (1, 4, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I ou L.D.
7. Dado o conjunto $W = \{(1, 1, 3), (1, 2, 1), (0, 1, 3), (1, 4, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$, extrair um subconjunto de vetores L.I.
8. Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto L.I. de vetores de um espaço vetorial V. Verifique se o conjunto $\{u + v - 3w, u + 3v - w, v + w\}$ é um conjunto L.I ou L.D.
9. **a)** Se o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto Linearmente Independente então o o conjunto $\alpha = \left\{v_1, \overrightarrow{0}, v_2, ..., v_n\right\}$ é LI ou LD? Justifique sua resposta.

b) Considere o subespaço $N = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$. Qual é a base e a dimensão de N.

10. Qual o subespaço gerado pelas matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

11. Sejam $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ a+b+c=0 \right\}$ e $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ b+2d=0 \right\}$ dois subespaços vetoriais de M_2. Determine os geradores de $U \cap W$.

12. Considere o espaço vetorial P_3 e o conjunto $W = \{p(x) \in P_3; \ p''(1) = 0\}$.
    (a) Verifique se W é um subespaço vetorial de P_3.
    (b) Obtenha os geradores de W.

13. **a)** Encontre as coordenadas do vetor $p = 1 + t + t^2 + t^3$ em relação base $\alpha = \left\{2, 1+t, t+t^2, t^2+t^3\right\}$ de P_3
    b) O conjunto $\beta = \left\{2, t^2, t+t^2\right\}$ é LI ou LD? Justifique sua resposta

14. Mostre com um exemplo que a união de dois subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial não precisa ser um subespaço vetorial desse espaço.

15. Considere o subespaço Sde $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 0)$.
    (a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in S = ger\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$? Justifique.
    (b) Exiba uma base para $S = ger\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Qual é a dimensão deste espaço?
    (c) $S = ger\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathbb{R}^4$? Por quê?

16. Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$.
    (a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c \text{ e } a = -b \right\}$
    (b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = d \right\}$
    Em caso afirmativo, determine:
    i) uma base para $W_1 \cap W_2$
    ii) $W_1 + W_2$ é soma direta?
    iii) $W_1 + W_2 = M(2, 2)$?

17. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^5$, $W_1 = \{(x, y, z, t, w) / x + z + w = 0, x + w = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z, t, w) / y + z + t$ e $W_3 = \{(x, y, z, t, w) / 2x + t + 2w = 0\}$.
    (a) Determine uma base para o subespaço $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.
    (b) Determine uma base e a dimensão de $W_1 + W_3$.
    (c) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.
    (d) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^5$?

18. Seja $B \in M(n, n)$ uma matriz fixada e considere $W = \{A \in M(n, n) / A^T + AB = 0\}$
    (a) Mostre que W é subespaço de $M(n, n)$
    (b) Considerando $n = 2$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ determine uma base e a dimensão de W.

19. Para que valores de k os vetores $\{(1, 2, 0, k), (0, -1, k, 1), (0, 2, 1, 0), (1, 0, 2, 3k)\}$ geram um subespaço de dimensão 3?

20. Considere os seguintes subespaços de P_3 :

$$U = \left\{ p \in P_3 : p''(1) = 0 \right\}$$
$$\text{e } W = \left\{ p \in P_3 : p'(1) = 0 \right\}$$

Determine $\dim(U+W)$ e $\dim(U\cap W)$.

21. Considere o subespaço W de P_3 que é gerado pelos polinômios $p_1(x)=1+2x+x^2$, $p_2(x)=-1+2x^2+3x^3$ e $p_3(x)=-1+4x+8x^2+9x^3$ e o subespaço de P_3, $U=\{p\in P_3 : p(0)=0\}$
    (a) Determine uma base e a dimensão de W.
    (b) Determine uma base para $U\cap W$.
    (c) Determine uma base para $U+W$.

22. Sejam $U=ger\{(1,0,0),(1,1,1)\}$ e $V=ger\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ subespaços gerados do $\mathbb{R}^3$. Determine:
    (a) uma base e a dimensão de $U\cap W$.
    (b) $U+W=\mathbb{R}^3$?

23. Considere o seguinte subespaço de $M(2,2)$

$$S=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in M(2,2) : a+b=c+d=0\right\}$$

    (a) Determine uma base e indique a dimensão de S.
    (b) Construa uma base de $M(2,2)$ que contenha a base de S obtida no ítem **a)**.

24. Determine a dimensão e encontre uma base do espaço-solução do sistema
$$\begin{cases} x-3y+z=0\\ 2x-6y+2z=0\\ 3x-9y+3z=0\end{cases}$$

25. Dê exemplos de dois subespaços do $\mathbb{R}^3$ tais que $V_1+V_2=\mathbb{R}^3$. A soma é direta? Justifique sua resposta.

26. Sejam U e W subespaços de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2 e 3, respectivamente. Mostre que a dimensão de $U\cap W$ é pelo menos 1. O que ocorre se a dimensão de $U\cap W$ for 2 ? Pode ser 3 ? Justifique sua resposta.

27. O conjunto $A=\{(1,0,2),(a^2,a,0),(1,0,a)\}$ é uma base para um subespaço do $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 se e somente se $a=2$?

28. Seja $S=\{X\in M_{3\times 1} : AX=0\}$ o espaço solução do sistema $\begin{cases} x+y+az=0\\ x+ay+z=0\\ ax+y+z=0\end{cases}$. Determine os valores de a para os quais S seja: a própria origem; uma reta que passa pela origem; e, um plano que passa pela origem.

29. Considere os conjuntos $U=\{A\in M(2,2)/tr(A)=0\}$ e $W=ger\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}\right\}$ subespaços do espaço vetorial V. Determine uma base e a dimensão de $U+W$ e $U\cap W$

30. Sejam $\beta=\{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_1=\{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_2=\{\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$ e $\beta_3=\{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.
    (a) Encontre a matrizes mudança de base:
        i. $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ **ii.** $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ **iii.** $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ **iv.** $[I]_{\beta_3}^{\beta}$.
    (b) Quais são as coordenadas do vetor $v=(3,-2)$ em relação à base
        i. β **ii.** β_1 **iii.** β_2 **iv.** β_3.
    (c) As coordenadas de um vetor **u** em relação à base β_1 são dadas por $[\mathbf{u}]_{\beta_1}=\begin{bmatrix} 4\\ 0\end{bmatrix}$
        Quais as coordenadas do vetor **u** em relação à base: **i.** β **ii.** β_2 **iii.** β_3

31. Sejam $P_4=\left\{p=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4\diagdown a_0,a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}\right\}$, $\alpha=\left\{1,x,x^2,x^3,x^4\right\}$ e $\beta=\left\{2,2x,4x^2,8x^3,16x^4\right\}$.
    (a) Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$ ..

(b) Se $[p]_\alpha = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$,determinar $[p]_\beta$

(c) Determine o polinômio p cujas coordenadas são dadas no item b) acima.

32. Considere o seguinte subespaço de $M_2 : W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \diagup d = 0 \right\}$. Sejam

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -11 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ \beta &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(a) Detemine $[I]^\alpha_\beta$

(b) Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} \pi \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$.

33. Sejam α e β bases de $\mathbb{R}^3$. Determine a base β sabendo que $\alpha = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,-1)\}$ e a matriz mudança de base de α para β é

$$[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

34. Seja $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ uma base para um subespaço de $M_{2\times 2}$ e $[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ onde β é também uma base para um subespaço de $M_{2\times 2}$

(a) Determine a base β.

(b) Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$.

35. Seja E um espaço vetorial qualquer e $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de E. Considere ainda os vetores $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = 2u_1 + u_2 - u_3$ e $v_3 = -u_2$.

(a) Determine a matriz S de mudança da base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ para a base $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$.

(b) Calcule as coordenadas do vetor $w = v_1 + v_2 - v_3$ na base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

36. Sejam α e β bases de um espaço vetorial V

(a) Mostre que det $\left([I]^\alpha_\beta \, [I]^\beta_\alpha\right) = 1$

(b) Determine $[I]^\alpha_\alpha$

37. Verifique se as afirmações abaixo são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**. Se forem verdadeiras, demonstre. Se forem falsas, dê um contra-exemplo.

(a) A interseção de dois subespaços vetoriais nunca é vazia.

(b) A matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ pertence ao subespaço $W = ger\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Se os vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI então os vetores $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$ são $LI's$.

(d) $W = ger\{(1,2,0),(2,4,0)\}$ é um plano no $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem.

(e) Se $\beta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ é uma base de um espaço vetorial V, então o conjunto $A = \{\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3\}$ é lineramente independente.

(f) O subespaço $W = \{p \in P_3 : p'(1) = 0 \text{ e } p''(-1) = 0\}$ é gerado pelos polinômios $p_1 = 1$ e $p_2 = -9x + 3x^2 + x^3$.

(g) O conjunto $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ é sempre uma base para o subespaço $ger\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$.

ALGUMAS RESPOSTAS:

1. Não é espaço vetorial.
2. É espaço vetorial
3. (a) Sim. Uma das bases é: $\beta = \{(1,0,2),(0,1,3)\}$
   (b) Não
   (c) Sim. Uma das bases é: $\beta = \{1, x - x^n, x^2 - x^n, ..., x^{n-1} - x^n\}$
   (d) Não
   (e) Sim. Aqui, para encontrar a base, tome um exemplo para uma matriz fixa A.
   (f) Sim. Uma das bases é: $\beta = \{1 - 2x\}$
   (g) Sim. Uma das bases é: $\beta = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$
   (h) Não.
4. a) Sim b) Sim
5. Uma possibilidade de expressar $U \cap W$ é $U \cap W = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3 \;/\; c = -a \;\text{ e } b = 2c - 3d\right\}$ ou $U \cap W = \left\{p(x) = a + (-2a - 3d)x - ax^2 + dx^3;\; a, d \in \mathbb{R}\right\}$.
6. É LD.
7. Um exemplo é $W_1 = \{(1,1,3),(1,2,1),(0,1,3)\}$
8. É L.D.
9.
10. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 : a + b - 2c + 2d = 0 \right\}$
11. Uma das possibilidades é: $U \cap W = \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$
12. a) Sim b) $W = ger\left\{1, x, x^3 - 3x^2\right\}$
13. a) $[p]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) Linearmente independente.
14.
15. b) $\beta = \{(1,-1,0,0),\ (0,0,1,1),(1,0,0,0)\}$ e $\dim W = 3$
16. i) $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ii) Não iii) Sim
17. a) Uma das bases é: $\beta = \{(1,0,0,0,-1)\}$

    b) Uma das bases é: $\beta = \{(1,0,0,0,-1),(0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(1,0,0,-2,0),(0,0,1,0,0)\}$
18. $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$
19. $k = 1$ ou $k = -\dfrac{3}{2}$
20. $\dim(U + W) = 4$ e $\dim(U \cap W) = 2$
21. a) Uma das bases é: $\beta = \left\{1 + 2x + x^2, -1 + 2x^2 + 3x^3\right\}$, $\dim W = 2$

b) Uma das bases é: $\beta = \left\{\frac{2}{3}x + x^2 + x^3\right\}$
c) Uma das bases é: $\beta = \left\{1 + 2x + x^2, -1 + 2x^2 + 3x^3, x, x^2\right\}$

22. a) Uma das bases é: $\beta = \{(0,1,1)\}, \dim(U \cap W) = 1$

23. a)Uma base é $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\dim S = 2$.

    b) Um exemplo é: $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

24. Uma base é $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ e $\dim W = 2$.

25.

26.

27. Falso. $a = 0$ ou $a = 2$

28. i) $a \neq 1, a \neq -2$ b) $a \neq 1, a = -2$ c) $a = 1$

29. Uma possibilidade é: $\beta_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\beta_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

30. a) i) $[I]_{\beta}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **ii.** $[I]_{\beta_1}^{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **iii.** $[I]_{\beta_2}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **iv.** $[I]_{\beta_3}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

    b) i) $[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **ii.** $[v]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **iii.** $[v]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix}$ **iv.** $[v]_{\beta_3} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

    c) i) $[u]_{\beta} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ **ii.** $[u]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 2 \end{pmatrix}$ iii) $[u]_{\beta_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

31. a) $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$ b) $[p]_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{16} \end{bmatrix}$ c) $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$

32. a) $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -11 \end{bmatrix}$ b) $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\pi + \frac{11}{12}e \\ \frac{1}{2}\pi \\ \frac{e}{12} \end{bmatrix}$

33. $\beta = \{(1,-2,-2), (0,1,1), (0,-1,-2)\}$

34. a) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\}$

    b) $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

35. a) $[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $[w]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

36. b) $[I]_{\alpha}^{\alpha} = I_n$

37. a) V b) V c) F d) F e) V f) V g) F