TEC0001 – Teoria da Computação
Aula 04
Variantes da Máquina de Turing (1)

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2016

Sumário

Variantes da Máquina de Turing

- Acréscimo do movimento estacionário
- Acréscimo de mais fitas
- Fita infinita para ambos os lados
- Não determinísmo
- Acréscimo de dispositivo de saída

Mudança no poder computacional?

Máquina de Turing com movimento estacionário

Definição (Máquina de Turing com movimento estacionário)

Uma máquina de Turing com movimento estacionário é uma estrutura algébrica $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita} \rangle$ onde Q, Σ, Γ são conjuntos finitos e

- Q é o conjunto de estados
- Σ é o alfabeto de entrada
- Γ é o alfabeto da fita sendo que $\sqcup \in \Gamma$, $\sqcup \notin \Sigma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D, \boldsymbol{P}\}$ é a função de transição
- q_0 é o estado inicial
- q_{aceita} é o estado de aceitação
- $q_{rejeita}$ é o estado de rejeição onde $q_{aceita} \neq q_{rejeita}$

Máquina de Turing com movimento estacionário

Seja $q_i, q_j \in Q$, $x, y \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$ e a configuração

$$u\, q_i\, xv$$

Caso $\delta(q_i, x) = (q_j, y.P)$, a configuração resultante será

$$u\, q_j\, yv$$

MT $\Leftrightarrow$ MT+P

Teorema: A classe de Máquinas de Turing com movimento estacionário é equivalente à classe das Máquinas de Turing.

Ou seja, dada uma MT M deve-se ter uma MT+P M_P que reconheça a mesma linguagem de M **e**, dada uma MT+P P deve-se ter uma MT P_M que reconheça a mesma linguagem de P.

`Prova:`
$\boxed{\Rightarrow}$ Óbvia.

MT $\Leftrightarrow$ MT+P

$\boxed{\Leftarrow}$ Dada uma MT+P $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta_P, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita} \rangle$ construiremos uma MT P_M que reconheça $L(P)$.

$$P_M = \langle Q_M, \Sigma, \Gamma, \delta_M, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita} \rangle$$

onde $\delta_M = (\delta_P \setminus \delta_{\{P\}}) \cup \delta_{DE}$
Sendo, para $q_i, q_j \in Q$, $x, y \in \Gamma$:
$\delta_{\{P\}} = \{\langle (q_i, x), (q_j, y, P) \rangle\} \subseteq \delta_P$
$\delta_{DE} = \{\langle (q_i, x), (q_{k_i}, y, D) \mid \langle (q_i, x), (q_j, y, P) \rangle \in \delta_P\} \cup$
$\{\langle (q_{k_i}, \gamma), (q_j, \gamma, E) \rangle \mid \langle (q_i, x), (q_j, y, P) \rangle \in \delta_P$ e $\forall \gamma \in \Gamma\}$
E $Q_M = Q \cup \{q_{k_i} \mid$ para cada $\langle (q_i, x), (q_j, y, P) \rangle \in \delta_P\}$

MT $\Leftrightarrow$ MT+P

Explicando...
Cada transição "fique parado"

$$\delta_P(q_i, x) = (q_j, y, P)$$

será substituída por $|\Gamma| + 1$ transições:

- uma para a direita

$$\delta_M(q_i, x) = (q_{k_i}, y, D)$$

  onde q_{k_i} é um novo estado de Q_M

- $|\Gamma|$ transições para a esquerda

$$\delta_M(q_{k_i}, \gamma) = (q_j, \gamma, E)$$

  uma para cada símbolo $\gamma \in \Gamma$.

Máquina de Turing Multifitas

- Número fixo e predefinido de fitas (denotaremos por MTk a MT com k fitas).
- Cada fita tem sua própria cabeça de leitura e escrita.
- Entrada é colocada na primeira fita, sendo as demais inicializadas somente com brancos.

Máquina de Turing Multifitas

Definição (Máquina de Turing Multifitas)

Uma máquina de Turing com k fitas é uma estrutura algébrica $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita} \rangle$ onde Q, Σ, Γ são conjuntos finitos e

- Q é o conjunto de estados
- Σ é o alfabeto de entrada
- Γ é o alfabeto da fita sendo que $\sqcup \in \Gamma$, $\sqcup \notin \Sigma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times \mathbf{\Gamma}^{\boldsymbol{k}} \rightarrow Q \times \mathbf{\Gamma}^{\boldsymbol{k}} \times \{E, D\}^{\boldsymbol{k}}$ é a função de transição
- q_0 é o estado inicial
- q_{aceita} é o estado de aceitação
- $q_{rejeita}$ é o estado de rejeição onde $q_{aceita} \neq q_{rejeita}$

Máquina de Turing Multifitas

A expressão

$$\delta(q_i, x_1, x_2, \ldots, x_k) = (q_j, y_1, y_2, \ldots, y_k, \underbrace{E, D, \ldots, E}_{k \text{ movimentos}})$$

significa

- se a máquina está
  - no estado q_i
  - a fita 1 lendo x_1
  - a fita 2 lendo x_2
  - ...
  - a fita k lendo x_k
- então a máquina
  - irá para o estado q_j
  - escreverá y_1 na fita 1 e moverá a cabeça 1 para a esquerda
  - escreverá y_2 na fita 2 e moverá a cabeça 2 para a direita
  - ...
  - escreverá y_k na fita k e moverá a cabeça k para a esquerda

MT $\Leftrightarrow$ MTk

Teorema: A classe de Máquinas de Turing Multifitas é equivalente à classe das Máquinas de Turing.

Ou seja, dada uma MT M deve-se ter uma MTk M_k que reconheça a mesma linguagem de M **e**, dada uma MTk K deve-se ter uma MT K_M que reconheça a mesma linguagem de K.

`Prova:`
$\boxed{\Rightarrow}$ Óbvia.

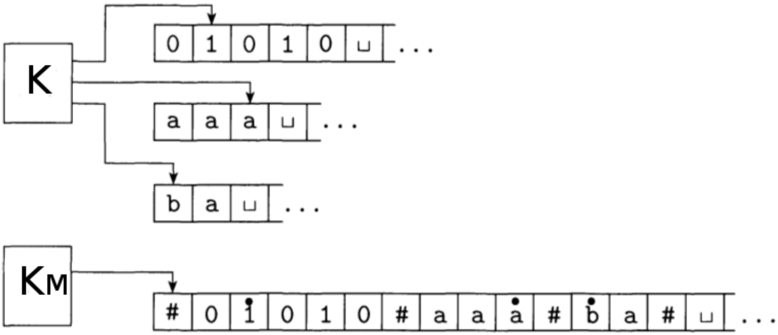
MT $\Leftrightarrow$ MTk

$\boxed{\Leftarrow}$ Dada uma MTk $K = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita} \rangle$ construiremos uma MT K_M que reconheça $L(K)$.

- O alfabeto da fita de K_M será $\Gamma \cup \{\#\} \cup \{\overset{\bullet}{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$, sendo $\# \notin \Gamma$.
- O símbolo $\#$ servirá como um delimitador entre as fitas de K.
- A marcação de ponto acima de um símbolo, $\overset{\bullet}{\gamma}$, indica que a cabeça da fita de K está posicionada sobre aquele símbolo.
- Tendo-se $w = w_1 w_2 \dots w_n$, K_M iniciará com o seguinte conteúdo na fita

$$\#\overset{\bullet}{w_1} w_2 \dots w_n \# \overset{\bullet}{\sqcup} \# \overset{\bullet}{\sqcup} \# \dots \#$$

MT ⇔ MTk



MT $\Leftrightarrow$ MTk

1. K_M inicia com a fita

$$\#\overset{\bullet}{w}_1 w_2 \ldots w_n \# \overset{\bullet}{\sqcup} \# \overset{\bullet}{\sqcup} \# \ldots \#$$

2. K_M varre a fita do primeiro ao $(k+1)$-ésimo $\#$ determinando quais símbolos estão marcados com o posicionamento das k cabeças de fita
3. K_M faz uma segunda passagem na fita, atualizando os símbolos conforme o estabelecido pela função de transição de K
4. Se K_M move uma das cabeças virtuais para um símbolo $\#$, isto significa que tal cabeça se moveu para um símbolo em branco da fita correspondente. Então K_M escreve um símbolo branco e desloca o conteúdo da fita a partir do $\#$ para uma posição à direita. Volta a posição do símbolo branco colocado e substitui por $\overset{\bullet}{\sqcup}$, continuando a simulação.

Exercício

Defina uma variante da Máquina de Turing que não permite a escrita do símbolo ␣ em sua função programa e prove que é equivalente à classe das Máquinas de Turing.