# PESQUISA OPERACIONAL

Prof. Carlos Norberto Vetorazzi Jr.

Departamento de Ciência da COMPUTAÇÃO

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CCT
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

# 1. INTRODUÇÃO

**Definições :**

"Método científico de tomada de decisão"

"Conjunto de técnicas e ferramentas de apoio à decisão, através da modelagem matemática de fenômenos estáticos (determinísticos) ou dinâmicos (estocásticos)"

**Origem (sistematização):**

Grupos multidisciplinares de cientistas, envolvidos na solução de problemas táticos e estratégicos durante a II Guerra Mundial. Posteriormente tornou-se popular nas empresas.

**Aplicação:**

Processos de seleção de alternativas e decisão que sejam estruturados (produção, fluxo)

Algumas áreas de PO:

- Programação Matemática
  - Linear
  - Não Linear
  - Inteira

- Modelos de rede
  - Transportes
  - Designação
  - Redes

- Teoria das Filas
- Modelos de Simulação
- Modelos de Estoques
- Programação Dinâmica

**Fases de um estudo de P.O .:**

1.Formulação do problema
2.Modelagem do sistema
3.Obtenção da solução
4.Teste do modelo e da solução
5.Estabelecer controles sobre a solução
6.Implantação

Aqui nos preocuparemos somente com as fases de 1 a 3.

**Formulação :**

A formulação é de suma importância em qualquer estudo de P.O .

- identificação do objetivo
- identificação de alternativas de ação
- identificação das restrições do problema

"É impossível obter a resposta certa a partir do problema errado."

**Modelagem**

Construção de um modelo que represente o sistema em estudo, geralmente um modelo matemático (linear, por exemplo).

O modelo é um conjunto de equações que descreve o sistema:

- função objetivo (finalidade do estudo)
- restrições

"O modelo sempre é uma aproximação do problema"

A formulação e a modelagem estão intimamente relacionadas, e constituem geralmente a parte mais difícil de um estudo de P. O..

**Solução**

A solução de um problema de PO pode ser obtida basicamente de 3 maneiras:

- aplicando algoritmos matemáticos
- aplicando fórmulas analíticas
- aplicando técnicas de simulação

Em nosso estudo, veremos o uso de cada uma das técnicas acima em pelo menos uma área da PO.

# 2. PROGRAMAÇÃO LINEAR

Problemas de programação são modelados tal que o melhor uso de recursos escassos possa ser determinado, conhecidos os objetivos e necessidades do problema em questão. Problemas de programação linear compõem uma sub-classe de problemas nos quais a modelagem é inteiramente expressa em termos de equações lineares.

A construção de um modelo de programação linear segue três passos básicos

**Passo I.** Identificar as variáveis  de decisão, ou seja, aquilo sobre o qual temos controle, e cujos valores ou níveis devemos determinar para solução do problema.

**Passo II.** Identificar as restrições do problema, e expressando-as como equações ou inequações lineares em termos das variáveis de decisão definidas anteriormente. Aqui identificamos os parâmetros do problema que temos que respeitar, tais como disponibilidade de matéria prima, especificações técnicas de um produto, quantidades (máximas ou mínimas) a serem respeitadas.

**Passo III.** Identifique o objetivo ou critério de otimização do problema, representando-o como uma função linear das variáveis de decisão. O objetivo pode ser do tipo *maximizar* ou *minimiza*r, por exemplo, maximizar o lucro total, ou minimizar o custo.

Assim, todas as equações do modelo que descreve o problema são lineares, ou seja o modelo matemático é linear. Considere o exemplo abaixo

**Exemplo 2-1.** Um fabricante produz duas ligas metálicas, e quer maximizar o lucro obtido com sua venda. A tabela mostra as composições das ligas, os lucros e as disponibilidades de matéria prima para fabricação dessas ligas.

| | liga A | liga B | disponibilidade |
|---|---|---|---|
| cobre | 2 | 1 | 16 |
| zinco | 1 | 2 | 11 |
| chumbo | 1 | 3 | 15 |
| lucro/ unidade | 30 | 50 | |

## 2.1. MODELAGEM / FORMULAÇÃO

O objetivo aqui é determinar quanto fabricar de cada liga, de modo que o lucro obtido seja o maior possível, dada uma certa disponibilidade de matéria prima. Assim, devemos:

- determinar as quantidades da liga A e da liga B ➔ **variáveis**
- usar no máximo a matéria prima disponível ➔ **restrições**
- maximizar o lucro obtido ➔ **objetivo**

**variáveis de decisão**

$x_1$= quantidade de A a ser produzida
$x_2$ = quantidade de B a ser produzida

**restrições**

Devemos representar as restrições do problema usando as variáveis de decisão escolhidas. As disponibilidades de matéria prima são as restrições nesse caso, e descreveríamos a primeira restrição como:

"o total de cobre utilizado para fabricação da liga A e da liga B não pode ser superior a 16 unidades"

Cada unidade fabricada da liga A consome duas unidades de cobre, e cada unidade fabricada da liga B consome uma unidade de cobre (ver tabela). O total de cobre consumido é dado por $2.x_1 + x_2$, que não pode ser superior a 16 unidades. A primeira restrição ficaria então:

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

Analogamente, as outras restrições são:

$$x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$

Não devemos nos esquecer também que não podemos fabricar quantidades negativas, o que também é uma restrição, assim

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Como regra geral, as variáveis de decisão nunca podem ser negativas.

**objetivo**

Dado que o objetivo é maximizar o lucro,devemos representar o lucro total utilizando as variáveis de decisão escolhidas. De acordo com os dados do problema, o lucro é dado por $30x_1 + 50x_2$, o qual representaremos por **z**, que será chamado de função-objetivo:

$$z = 30x_1 + 50x_2$$

Como queremos maximizar o lucro (nesse caso), devemos escrever

$$(\max)\ z = 30x_1 + 50x_2$$

## 2.2. SOLUÇÃO GRÁFICA

Os problemas de programação linear com duas variáveis podem facilmente ser resolvidos graficamente. Posteriormente, para problemas com mais de duas variáveis, aplicaremos algoritmos matemáticos para solução, mas os conceitos envolvidos são os mesmos apresentados aqui.

As inequações de restrição constituem semi-planos no espaço, ou seja, definem uma região (semi-plano), onde os pontos atendem à inequação. Se substituirmos os valores das coordenadas de qualquer ponto dessa região na inequação, a desigualdade se verifica.

Para a primeira restrição, vamos considerar a equação $2x_1 + x_2 = 16$, cujo gráfico está representado na Figura 2.1.

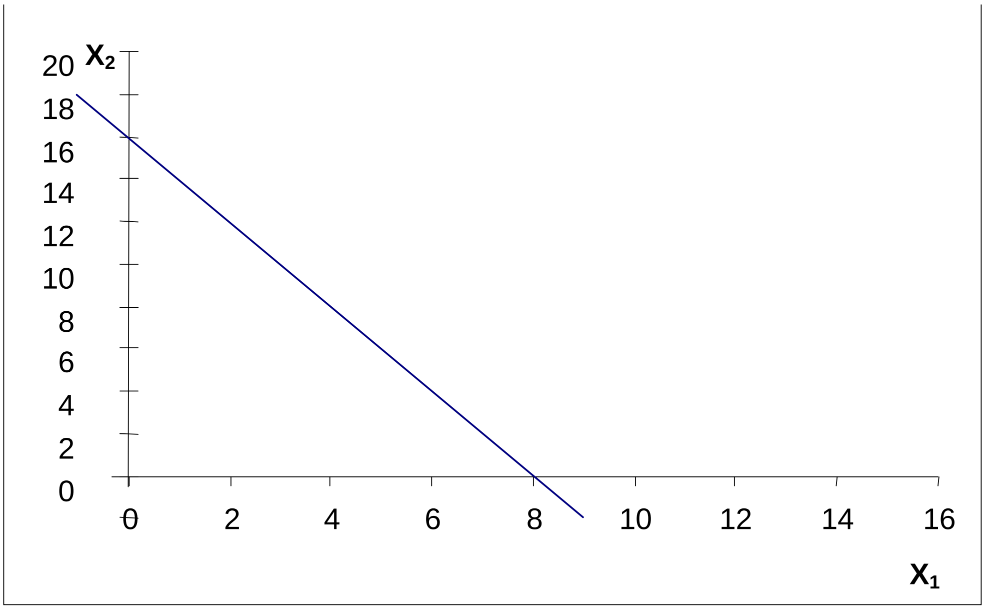


**Figura 2.1.**

Como a restrição é uma inequação, temos um semi-plano, e não uma reta. A desigualdade é do tipo menor ou igual ( ≤ ), e o semi-plano é fechado, isto é, a reta faz parte deste. Se fosse apenas menor ( <), seria um semi-plano aberto. Na Figura 2.2., o semi-plano corresponde à área assinalada.

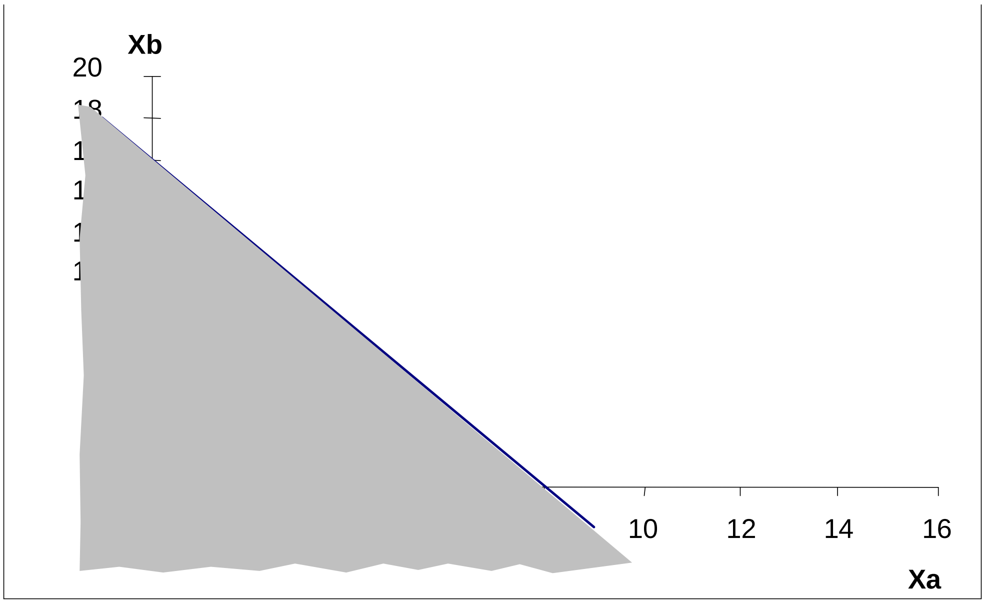


**Figura 2.2.**

Como temos que atender a todas as restrições simultaneamente, temos que identificar a intersecção de todos esses semi-planos. Essa intersecção (se houver), é um poliedro convexo, chamado de espaço de solução. Qualquer ponto deste espaço atende a todas as restrições simultaneamente, portanto é uma solução para o problema. Nos resta agora identificar qual destes pontos nos da a melhor solução (máximo ou mínimo da função objetivo).

Na Figura 2.3., representamos todas as restrições, numeradas de I a III; as setas indicam qual semiplano estas definem. A área assinalada corresponde à sua intersecção, chamada de espaço de solução.

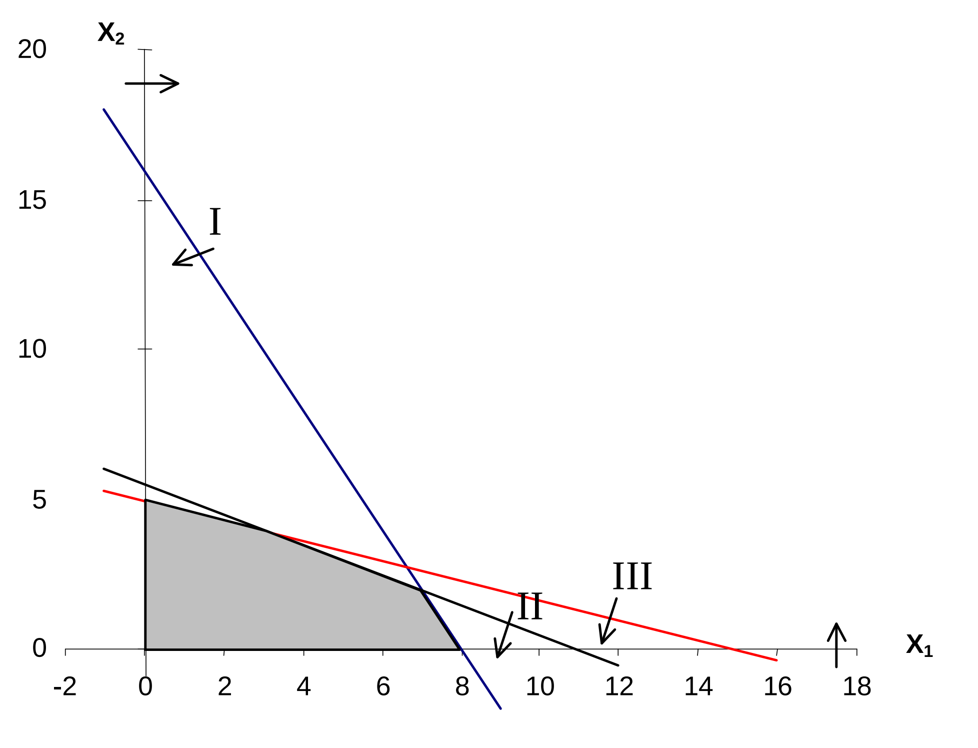


**Figura 2.3.**

A função-objetivo constitui uma família de retas paralelas; para um dado valor de z, podemos definir uma equação de reta. Para cada valor diferente de z, teremos uma reta diferente, porém sempre paralela às demais. Devemos encontrar aquela que tenha pelo menos um ponto em comum com o espaço de solução, e que nos de o melhor valor para a função-objetivo.

Arbitrando um valor de 150 para z, teremos a reta $150 = 30x_A + 50x_B$ ,que corresponde à linha pontilhada no gráfico a seguir. Podemos identificar facilmente a direção do crescimento de z, atribuindo um valor maior para a função-objetivo, e colocando a reta obtida no gráfico (linha tracejada). Podemos observar que estas são paralelas, como serão quaisquer outras retas obtidas arbitrando valores para z. Uma vez identificada a direção de crescimento da função objetivo, devemos encontrar qual dessas paralelas pode ser deslocada ao máximo nessa direção (no caso de maximização) e que tenha ao menos um ponto em comum com o espaço de solução.

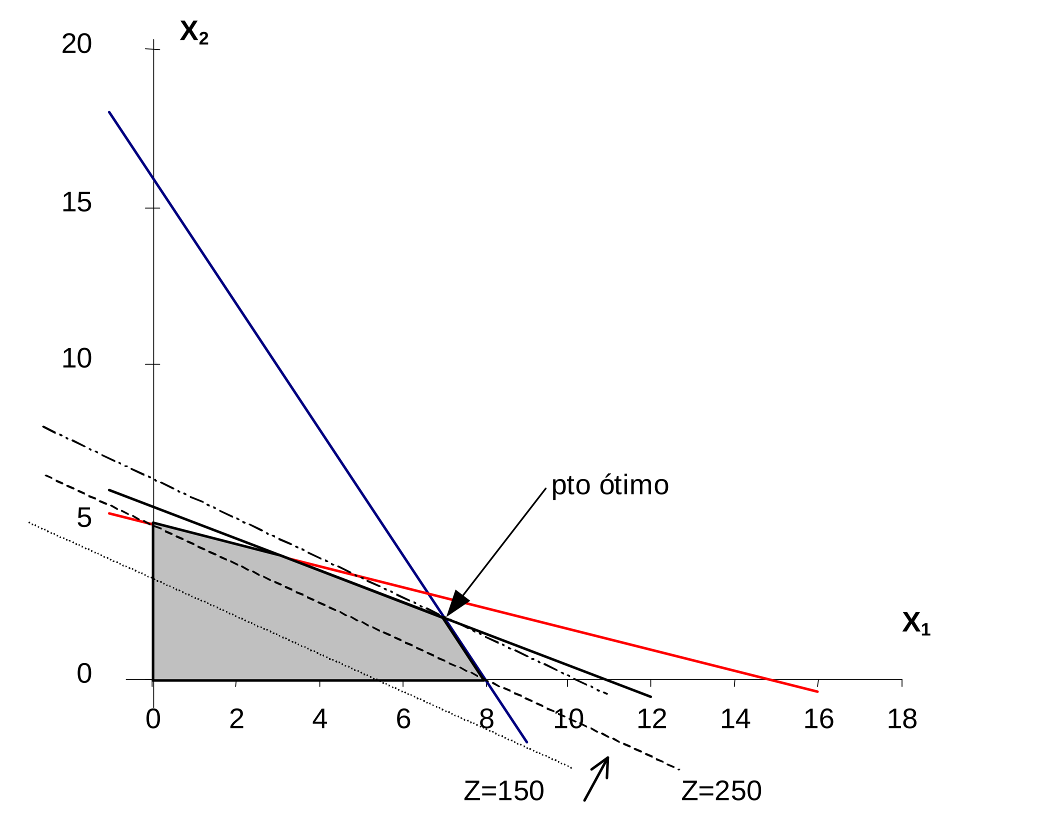


**Figura 2.4.**

Como mostra o gráfico da Figura 2.4., podemos "deslocar" a função objetivo até o ponto identificado como "ponto ótimo", que corresponde à intersecção das retas correspondentes à primeira e segunda restrições. Resolvendo o sistema formado por essas equações, verificamos que as coordenadas do ponto são $x_A = 7$e $x_B = 2$. Substituindo esses valores na função objetivo, obtemos z=310, que é o valor ótimo (máximo). Assim, a resposta é

$x_1 = 7$
$x_2 = 2$
z=310

**Casos especiais:**

1. não há solução viável – quando não é possível definir uma área que atenda todas as restrições simultaneamente, isto é, não há intersecção possível.

2. solução ótima ilimitada – quando a função objetivo pode crescer indefinidamente, isto é, não há nenhuma restrição que limite seu crescimento.

3. múltiplas soluções – quando a função objetivo recai sobre uma aresta do espaço de solução, isto é, é paralela com uma restrição limitante.

## 2.3. MÉTODO SIMPLEX

Pudemos observar que a formulação de um problema de programação linear sempre segue o padrão abaixo:

(min ou max) $z=c_1x_1 + c_2x_2 + .... + c_nx_n \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} C_jX_j$

$$\text{S.A.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b_m \end{cases}$$

$b_i \geq 0$ (i=1...m)
$x_j \geq 0$ (j=1...n)

onde

n - atividades que competem entre si, $x_1...x_n$ são os níveis dessas atividades
$c_j$ - aumento em $z$ por unidade da atividade $j$
m - recursos disponíveis, cujos níveis são $b_1$-$b_m$
$a_{ij}$ - quanto é consumido do recurso $i$ pela atividade $j$, ou coeficientes tecnológicos.

Maximizar uma função objetivo equivale a minimizar o seu negativo, e vice-versa (formulação equivalente):

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \max \sum_{j=1}^{n} -(c_j) x_j$$

**Forma padrão**

Para que um problema de P.L. possa ser resolvido algebricamente, as inequações devem ser transformadas em igualdades. Isto é feito adicionando-se variáveis de folga, também não negativas, conforme abaixo.

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\text{S. A.} \quad \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & \geq & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

As restrições tornam-se então

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - x_5 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Para restrições $\leq$ , adicionamos uma variável de folga, para restrições $\geq$ , subtraímos uma variável de folga. Em termos de significado físico, poderíamos dizer que uma variável de folga representa quanto sobrou de um determinado recurso, por exemplo. No nosso primeiro exemplo (fabricação das ligas metálicas), a primeira restrição (para o cobre) é:

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

Ao adicionarmos a variável de folga, teríamos

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 16$$

e a variável $x_3$ nos daria o valor da sobra de cobre.

**Analogia geometria-álgebra**

As equações do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

são equações lineares, e dividem o espaço $R^n$ em tres conjuntos:

- um hiperplano
- dois semi-espaços abertos ( **<** e **>** )

Para duas dimensões, um hiperplano corresponde a uma reta; em três dimensões, representa um plano; e a partir daí tem o nome genérico de hiperplano. Esse hiperplano divide então o espaço em dois semi-espaços.

Semi-espaços são conjuntos convexos, e a intersecção de um número finito de semi-espaços fechados em $\mathbf{R^n}$ é um conjunto poliédrico convexo. Um ponto situado na intersecção de **n** hiperplanos que delimitam esse poliedro chame-se ponto extremo. Dada uma função linear (função objetivo) definida em um conjunto poliédrico convexo fechado, essa função assume o seu máximo em um ponto extremo, ou ao longo de um hiperplano. Portanto, para resolver um problema de P.L., basta encontrarmos os pontos extremos do poliedro convexo e avaliar a função objetivo em cada um.

Já vimos na técnica de solução gráfica: o ponto ótimo sempre estava em um vértice (ponto extremo) do espaço de solução, ou ao longo de uma aresta. Em duas dimensões (**$R^2$**), um vértice (ponto extremo) é definido pela intersecção de duas retas, em três dimensões (**$R^3$**), pela intersecção de 3 planos, em quatro, pela intersecção de 4 hiperplanos, em **n** dimensões (**$R^n$**), pela intersecção de **n** hiperplanos. Encontrar essas intersecções implica em resolver um sistema de equações lineares **n** x **n.**

Dado um sistema de equações lineares (**n** x **n**)

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_n + a_{n2}x_n + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

através de sucessivas operações de linha entre as equações podemos chegar ao resultado abaixo

$$
\begin{array}{llll}
x_1 & & & = \bar{b}_1 \\
& x_2 & & = \bar{b}_2 \\
& & \ddots & \vdots \\
& & x_n & = \bar{b}_n
\end{array}
$$

que equivale ao sistema original, mas fornece diretamente a solução. Este método é conhecido como Gauss-Jordan.

O sistema só tem solução única se No. de equações = No. de incógnitas. Quando temos mais variáveis, o sistema é sub-determinado. Dado um sistema com m equações e n incógnitas (n > m), podemos arbitrar n-m variáveis = 0 , obtendo um novo sistema com m equações e m variáveis que pode então ser resolvido.

A forma padrão nesse caso é

$$
\underbrace{\begin{array}{llll}
x_1 & & & \\
& x_2 & & \\
& & \ddots & \\
& & & x_m
\end{array}}_{\text{variáveis dependentes}}
\quad
\underbrace{\begin{array}{l}
+ a_{1\,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1\,n}x_n \\
+ a_{2\,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2\,n}x_n \\
\vdots \\
+ a_{m\,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m\,n}x_n
\end{array}}_{\text{variáveis independentes}}
\begin{array}{l}
= \bar{b}_1 \\
= \bar{b}_2 \\
\\
= \bar{b}_m
\end{array}
$$

É chamada de solução básica aquela onde as variáveis independentes são 0. As variáveis dependentes, também chamadas de variáveis básicas, tem seus valores mostrados diretamente, como podemos ver. Uma solução básica viável (o conjunto de valores das variáveis dependentes) corresponde a um ponto extremo de um poliedro convexo, ou seja, define as coordenadas da intersecção entre os hiperplanos (inequações de restrição), que é o que queremos encontrar.

O SIMPLEX é uma maneira sistemática de pesquisar os vértices de um poliedro convexo, de modo a em um número finito de iterações fornecer a solução, ou indicar que esta não existe. A cada iteração uma variável passa a fazer parte da solução básica ( $\neq 0$) e outra deixa de fazer parte da solução básica ( $= 0$), ou seja, uma variável independente (não básica) passa a ser dependente (básica), e uma outra dependente passa a ser independente.

**Procedimento para restrições do tipo $\leq$**

- colocar na forma padrão, adicionando as variáveis de folga
- montar o quadro do SIMPLEX, conforme o esquema abaixo

atividades folga

| x | x | |
|---|---|---|
| A | I | b |
| - c | 0 | 0 |

**Exemplo 2.2.**

max $z = 30\, x_1 + 50\, x_2$

$$\text{S.A.} \quad \begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 &\leq 16 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ x_1 ,\, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

forma padrão :

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 16 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 11 \\ x_1 + 3x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 15 \end{aligned}$$

Observe que a forma obtida é identica à forma padrão mostrada anteriormente. Podemos dizer que as variáveis $x_1$ e $x_2$ são não básicas e portanto iguais a **0**, e as variáveis $x_3$ ,$x_4$ e $x_5$ são básicas, cujos valores são 16,11 e 15, respectivamente.

Quadro SIMPLEX:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 11 |
| 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 15 |
| -30 | -50 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Essa mesma interpretação pode ser obtida a partir do quadro simplex; aquelas variáveis cujas colunas definem um matriz identidade ($x_3$ ,$x_4$ e $x_5$), são as variáveis básicas, e as outras ($x_1$ e $x_2$) são as não básicas. Assim, $x_1$ =0 e $x_2$ =0, e os valores das variáveis básicas são determinados pelos elementos da matriz identidade: $x_3$ =16,$x_4$ =11 e $x_5$ =15. O valor da função objetivo z é mostrado no canto inferior direito: z=0.

**Algoritmo**

Escolha do pivô:

- na última linha (linha z), escolha o coeficiente mais negativo (escolha da coluna)
- para a coluna selecionada, escolher a menor relação $b_j$ / $a_{ij}$ ( para $a_{ij}$ **>** 0) (escolha da linha)

Escolhido o pivô, fazemos as operações de linha para que este seja 1 e os outros elementos da coluna sejam 0.

Os passos são repetidos até que não existam elementos negativos na última linha (linha z), o que significa que a função objetivo não pode ser melhorada.

No nosso exemplo, o menor elemento da última linha (linha z) é –50. Dividimos então os elementos da coluna b pelos elementos da coluna $x_2$ (que corresponde ao valor escolhido, –50): 16/1 = 16 ,11/2 = 5.5 ,15/3 = 5, e escolhemos como pivô o elemento da coluna $x_2$ cuja divisão resulta no menor valor, no caso o elemento 3, marcado com um círculo no quadro a seguir:

Quadro I

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 11 |
| 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 15 |
| -30 | -50 | 0 | 0 | 0 | 0 |

O pivô deve ter valor 1: dividimos toda a linha pelo valor do pivô e colocamos o resultado em um novo quadro

Quadro II

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 1/3 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 5 |
| | | | | | |

A partir dessa nova linha, calcularemos as outras, da seguinte forma: os outros elementos da coluna do pivô devem ser 0, o que é obtido multiplicando a nova linha do pivô pelo valor apropriado, somando com a linha em questão no quadro anterior e colocando o resultado no novo quadro. Para a primeira linha, cujo elemento da coluna $x_2$ é 1, devemos multiplicar a nova linha do pivô por –1 (de forma que ao somarmos as duas linha o resultado nessa coluna seja 0). Então, multiplicamos cada elemento da nova linha do pivô por –1, somamos com cada elemento da primeira linha, colocando o resultado no novo quadro:

Quadro II

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| 5/3 | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 11 |
| 1/3 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 5 |
| | | | | | |

Repetindo o procedimento para as outras linha, chegamos ao seguinte resultado final para o quadro II

Quadro II

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| 5/3 | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 11 |
| 1/3 | 0 | 0 | 1 | -2/3 | 1 |
| 1/3 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 5 |
| -40/3 | 0 | 0 | 0 | 50/3 | 250 |

Nesse momento, o quadro simplex nos dá as seguintes informações:

variáveis não básicas (=0) :

$x_1$ e $x_5$.

variáveis básicas:
$x_2 = 5$
$x_3 = 11$
$x_4 = 1$

valor da função objetivo:
$z = 250$

Cada iteração do simplex corresponde à um vértice do espaço de solução; observe que os valores das variáveis $x_1$ e $x_2$ correspondem à uma das intersecções na solução gráfica desse exemplo (feita anteriormente), e naquele ponto, o valor de z é 250.

Ao final de cada iteração, se ainda houver elementos negativos na linha z, devemos repetir todo o procedimento: encontrar um novo pivô, e executar as operações de linha. Como ainda temos valores negativos na linha z (-40/3 na coluna $x_1$), o problema não está otimizado, e os passos devem ser repetidos. No quadro II abaixo está a indicação do pivo:

Quadro II

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| 5/3 | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 11 |
| 1/3 | 0 | 0 | 1 | -2/3 | 1 |
| 1/3 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 5 |
| -40/3 | 0 | 0 | 0 | 50/3 | 250 |

O resultado da nova iteração está abaixo. Como ainda temos valores negativos na linha z, faremos mais uma iteração (o novo pivo já está assinalado):

Quadro III

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | -5 | 3 | 6 |
| 1 | 0 | 0 | 3 | -2 | 3 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 40 | -10 | 290 |

Resultado da 3ª iteração:

Quadro IV

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/3 | -5/3 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 2/3 | -1/3 | 0 | 7 |
| 0 | 1 | -1/3 | 7/3 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 10/3 | 70/3 | 0 | 310 |

Esta é a solução ótima para o problema, e os valores obtidos são:

$x_1 = 7$,
$x_2 = 2$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$x_5 = 2$
$z = 310$

Lembremos que este é o problema da produção das ligas metálicas, cuja solução deve ser interpretada como:

- fabricar 7 unidades da liga 1
- fabricar 2 unidades da liga 2
- não houve sobra de cobre ($x_3$– variável de folga relativa à 1ª restrição)
- não houve sobra de zinco ($x_4$ – variável de folga relativa à 2ª restrição)
- sobraram 2 unidades de chumbo ($x_5$ – variável de folga relativa à 3ª restrição)

**Restrições $\geq$ ou =**

Para estes tipos de restrição, deve-se empregar o SIMPLEX em duas fases. Restrições do tipo $\geq$ ou = excluem a origem do sistema de coordenadas da solução viável, e este não pode mais ser a base inicial. Observe que nos casos vistos até agora (restrições do tipo $\leq$), a solução inicial do quadro simplex sempre corresponde à origem do sistema de coordenadas. Isso agora não é mais possível, portanto devemos encontrar uma outra solução inicial que possa ser usada.

Assim:

Objetivo da fase I: encontrar uma solução factível inicial

Objetivo da fase II : Otimizar função objetivo z

**Fase I**

Além das variáveis de folga, adicionar as variáveis artificiais ( $y_1$, $y_2$, ...) para as restriçoes do tipo $\geq$ ou =.

Adicionar uma nova linha de decisão (w), onde,nas colunas das variáveis admissíveis (atividades e folga) temos **-Σ aij** , nas colunas da variáveis artificiais temos 0, e em b temos **-Σbj**, considerando nas somatórias apenas as linhas onde existam variáveis artificiais.

Aplicar o método de otimização visto anteriormente, usando a linha w como linha de decisão. Se ao final da otimização (final da fase I) $w \neq 0$, o problema não tem solução; se $w = 0$, desprezamos a linha w e as colunas das variáveis artificiais, e damos início à fase II.

**Fase II**

Continuar resolvendo normalmente.

**Exemplo 2.3:**

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.A.} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ -x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Forma padrão :

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + y_1 = 8 \\ -x_1 + x_2 + y_2 = 2 \end{array}$$

Observe que:

- na 1ª restrição ( ≤ ), adicinamos uma variável de folga normalmente ($x_3$)
- na 2ª restrição ( ≥ ), além de subtrairmos uma variável de folga ($x_4$), adicionamos uma variável artificial($y_1$)
- na 3ª restrição ( = ), não há folga, mas devemos acrescentar uma outra variável artificial ($y_2$).

O quadro simplex ficará da seguinte forma:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $y_1$ | $y_2$ | b | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 10 | |
| 1 | 2 | 0 | -1 | 1 | 0 | 8 | |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |
| -2 | - 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | z |
| 0 | - 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | -10 | w |

A linha w é obtida somando-se as linhas que tem variáveis artificiais (linhas 2 e 3) e colocando-se o negativo da somatória na coluna correspondente, exceto nas colunas das variáveis artificiais, onde sempre temos 0. Nessa fase, a otimização é feita usando-se essa linha como critério. Podemos ver que temos um número negativo (-3), executamos os procedimentos já vistos: ecolha do pivo e operações entre as linhas:

Quadro I

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 1 | 2 | 0 | -1 | 1 | 0 | 8 |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| -2 | - 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 z |
| 0 | - 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | -10 w |

Quadro II

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 8 |
| 3 | 0 | 0 | -1 | 1 | -2 | 4 |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| -4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 z |
| -3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | - 4 w |

Quadro III

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -2/3 | 1/3 | 16/3 |
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | 1/3 | -2/3 | 4/3 |
| 0 | 1 | 0 | -1/3 | 1/3 | 1/3 | 10/3 |
| 0 | 0 | 0 | -4/3 | 4/3 | -2/3 | 28/3 z |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 w |

Podemos ver que o problema está otimizado (final da fase I) e que w = 0. Desprezamos a linha w e as colunas das variáveis artificiais e montamos um novo quadro simplex (abaixo), onde podemos observar que a solução inicial encontrada na fase I é $x_1$ = 4/3 e $x_2$ = 10/3. Damos início à fase II, resolvendo normalmente:

Quadro IV

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | 16/3 |
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | 4/3 |
| 0 | 1 | 0 | -1/3 | 10/3 |
| 0 | 0 | 0 | -4/3 | 28/3 z |

Quadro V

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3/2 | 1 | 8 | |
| 1 | 0 | 1/2 | 0 | 4 | |
| 0 | 1 | 1/2 | 0 | 6 | |
| 0 | 0 | 2 | 0 | 20 | z |

Como não há mais negativos na linha z, o problema está otimizado, e a solução é

$x_1 = 4$
$x_2 = 6$
$x_3 = 0$
$x_4 = 8$
$z = 20$

**Dificuldades e casos especiais**

- pode haver empate para entrar ou sair da base (escolha da linha ou coluna), a escolha é arbitrária

- pode ocorrer uma solução degenerada, quando uma variável básica tem valor 0

- soluções múltiplas : após a otimização,quando uma variável não básica tem coeficiente 0 na última linha

- solução ilimitada : quando uma variável não básica só tem coeficientes negativos e 0 na coluna

- não há solução, quando após a otimização da fase I, $w \neq 0$