INF1608 – Análise Numérica

# Lab 7: Derivação e Integração Numéricas

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

1. Escreva um módulo com as seguintes funções de derivação e integração:

   (a) A fórmula do método de segunda ordem para avaliação numérica da derivada de uma função $f(x)$ é dada por:

   $$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

   Implemente uma função que retorne o valor da derivada numérica de segunda ordem de uma função no ponto $x$. O protótipo deve ser:

   ```
   double derivada (double (*f) (double x), double x, double h);
   ```

   (b) O erro numérico acrescido do erro de arredondamento deste método é dado por:

   $$E(h) = \frac{h^2}{6} f'''(c) + \frac{\epsilon_{maq}}{h}$$

   Portanto, para $h < 1$, o erro decresce em ordem quadrática mas cresce em ordem linear em relação a $h$. Existe portanto um valor de $h$ ótimo para cada situação. Implemente uma função que recebe uma função (a ser derivada numericamente usando a implementação do item anterior), uma função que representa a derivada analítica da primeira (usada para avaliação do erro) e um ponto $x$. Variando os valores de $h$ em $10^{-1}, 10^{-2}, \cdots, 10^{-12}$ para avaliação da derivada numérica, retorne o valor de $h$ que apresenta o menor erro, comparando o valor da derivada numérica com o valor da derivada analítica.

   ```
   double h_otimo (double (*f) (double x), double (*fl) (double x), double x);
   ```

   (c) Usando extrapolação de Richardson:

   $$Q \approx \frac{2^n F_n(h/2) - F_n(h)}{2^n - 1}$$

   Implemente uma função que retorne o valor da derivada numérica de terceira ordem de uma função no ponto $x$, com base na derivada numérica de segunda ordem. O protótipo deve ser:

   ```
   double richardson (double (*f) (double x), double x, double h);
   ```

(d) A integração com a regra de Simpson no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ pode ser expressa por:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f(x_{i+0.5}) + f(x_{i+1})\right]$$

onde:

$$h = x_{i+1} - x_i$$

Implemente uma função que calcule a **integral composta** do intervalo de $a$ a $b$ considerando $n$ passos de integração, isto é, considerando $h = (b-a)/n$. O protótipo da função deve ser:

```
double simpson (double (*f) (double), double a, double b, int n);
```

(e) A integração com a regra do ponto médio, no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, é dada por:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx hf(w_i)$$

onde $h$ $(= x_{i+1} - x_i)$ é o passo e $w_i$ $(= \frac{x_i + x_{i+1}}{2})$ é o ponto médio do intervalo. Implemente uma função que calcule a **integral composta** de $a$ a $b$ com $n$ passos de integração, isto é, considerando $h = (b-a)/n$. O protótipo da função deve ser:

```
double pontomedio (double (*f) (double), double a, double b, int n);
```

2. Escreva um módulo de testes com as seguintes implementações:

(a) Para avaliar o $h$ ótimo da derivação numérica, considere a função $f(x) = \cos x - 2\sin x$, cuja derivada analítica é $f'(x) = -\sin x - 2\cos x$. Qual valor de $h$ minimiza o erro? Qual o valor de $h$ teórico que minimiza o erro? Os valores conferem?

(b) Usando a derivada com método de terceira ordem, via extrapolação de Richardson, diminui o erro, considerando um mesmo passo de integração?

(c) Escreva um teste que use a regra de Simpson ($S$) e a regra do ponto médio ($M$) compostas com $n = 16$ e $n = 32$ para achar uma solução das integrais abaixo. Para cada integral, exiba os valores encontrados: $S_{n=16}$, $S_{n=32}$, $M_{n=16}$ e $M_{n=32}$.

$$\int_0^4 \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+9}} \qquad \int_1^3 x^2 \ln x\ dx \qquad \int_0^\pi x^2 \sin x\ dx$$

Para verificação, os valores destas integrais são, respectivamente, 2.0, 6.9986217091241 e 5.8696044010894. Qual método apresenta melhor precisão? O número de passos influencia na precisão do resultado?

Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo "integral.h" e as implementações em um módulo "integral.c". Escreva o teste em outro módulo "main.c".

**Entrega:** O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos "integral.c", "integral.h" e "main.c") devem ser enviados via página da disciplina no EAD. O prazo final para envio é **sexta-feira, dia 11 de outubro**.