2º Exercício Escolar de Sistemas de Controle - 2019.1

Turma de Sistemas de Controle de 2019.1

1 Questão 1

Resolva o seguinte problema de programação não linear:

$$MaxF(x_1, x_2) = -\left(x_1 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(x_2 + 4)^2$$

sujeito a:

$$g_1(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 1$$

$$g_2(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0$$

1.1 Resposta:

Inicialmente, verifica-se o ponto de gradiente nulo de $F(x_1, x_2)$ sem restrições. Isto é, $\nabla F = 0$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2,5 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Em seguida, verifica-se o domínio das restrições g_1 e g_2.

Observa-se as curvas de nível de g_1, g_2 e ∇F na Figura **??**.

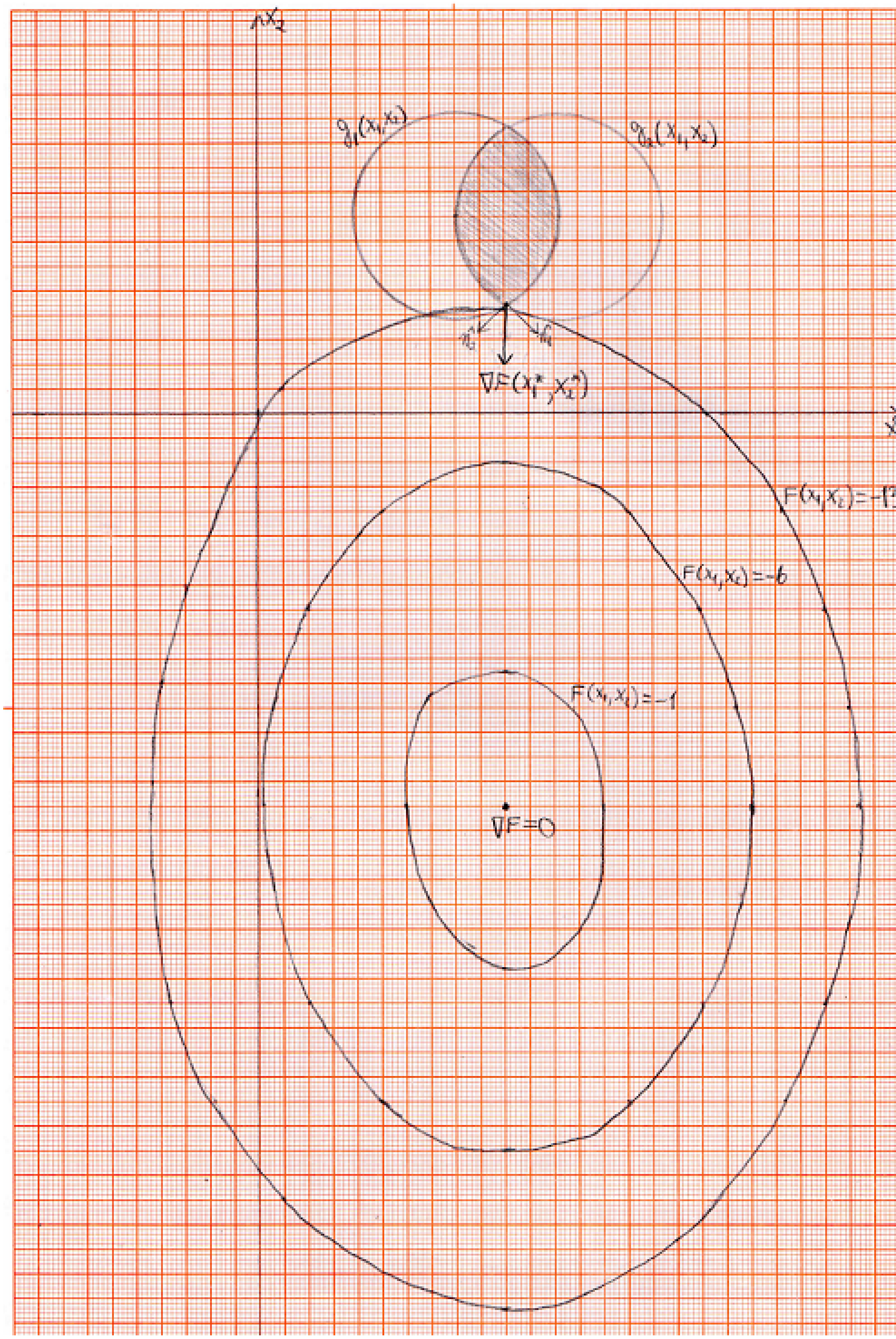

Figura 1: Domínio das restrições e ∇F.

Percebe-se que o ponto de máximo de $F(x_1, x_2)$ está fora do domínio de de $g_1 \cap g_2$. Assim, a solução ótima encontra-se na fronteira do domínio das restrições.

A partir da análise geométrica, percebe-se que o ponto de interseção inferior entre as curvas g_1 e g_2 é um forte candidato à ponto de máximo. Isto é, o ponto $(x_1,\, x_2) = (2.5; 1,134)$

Além disso, percebe-se que:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = -2 < 0 \\ \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -1 < 0 \end{cases}$$

Isso implica que a função $F(x_1, x_2)$ é côncava. Da mesma maneira verifica-se que as restrições $g_i(x_1, x_2)$ são convexas.

Dessa forma, podemos verificar as condições de Karush-Kuhn-Tucker no ponto desejado e verificar se o mesmo é ponto de máximo.

Para isso, escreve-se o Lagrangeano:

$$L(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\left(x_1 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x_2 + 4\right)^2 + y_1\left(1 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2\right) + y_2\left(1 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 2)^2\right)$$

Daí, temos as condições de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -2\left(x_1 - \frac{5}{2}\right) - 2y_1(x_1 - 2) - 2y_2(x_1 - 3) \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\left(x_2 + 4\right) - 2y_1(x_2 - 2) - 2y_2(x_2 - 2) \leq 0 \\ x_1\left(-2\left(x_1 - \frac{5}{2}\right) - 2y_1(x_1 - 2) - 2y_2(x_1 - 3)\right) = 0 \\ x_2\left(-\left(x_2 + 4\right) - 2y_1(x_2 - 2) - 2y_2(x_2 - 2)\right) = 0 \\ y_1\left(1 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2\right) = 0 \\ y_2\left(1 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 2)^2\right) = 0 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; y_1 \geq 0, \;\; y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Aplica-se o ponto candidato a máximo nas condições 3 e 4. Tem-se que:

$$\begin{cases} 2.5\left(-2\left(2.5 - \frac{5}{2}\right) - 2y_1(2.5 - 2) - 2y_2(2.5 - 3)\right) = 0 \\ 1,134\left(-\left(1,134 + 4\right) - 2y_1(1,134 - 2) - 2y_2(1,134 - 2)\right) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -y_1 + y_2 = 0 \\ -5,134 + 1,732y_1 + 1,732y_2 = 0 \end{cases}$$

Isso resulta em $y_1 = y_2 = 1,48$.

A partir dos valores de y_1 e y_2 encontrados e dos valores de x_1 e x_2 do ponto candidato, verifica-se que todas as condições de Karush-Kuhn-Tucker são satisfeitas.

Logo, sabendo que $F(x_1, x_2)$ é côncava, as restrições $g_i(x_1, x_2)$ são convexas e que as condições de Karush-Kuhn-Tucker são todas satisfeitas no ponto $(x_1,\, x_2) = (2.5; 1,134)$, pode-se afirmar que o máximo da função $F(x_1, x_2)$ sujeita as condições g_1 e g_2 é $F(2,5,\; 1,134) = -13,178$

2 Questão 2

Resolva o seguinte problema de programação não linear:

$$MaxF(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

sujeito a:

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 - \frac{16}{25}(x_2 - 1)^2 - 4 \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_1 - (x_2 - 2)^2 - 4 \leq 0$$

$$g_3(x_1, x_2) = -x_1 + 8x_2 - 28 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0$$

2.1 Resposta

Inicialmente, verifica-se os pontos críticos de $F(x_1, x_2)$ sem restrições. Isto é, $\nabla F = 0$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Em seguida, verifica-se o domínio das restrições g_1, g_2 e g_3.

Observa-se o domínio das restrições e ∇F na Figura ??.

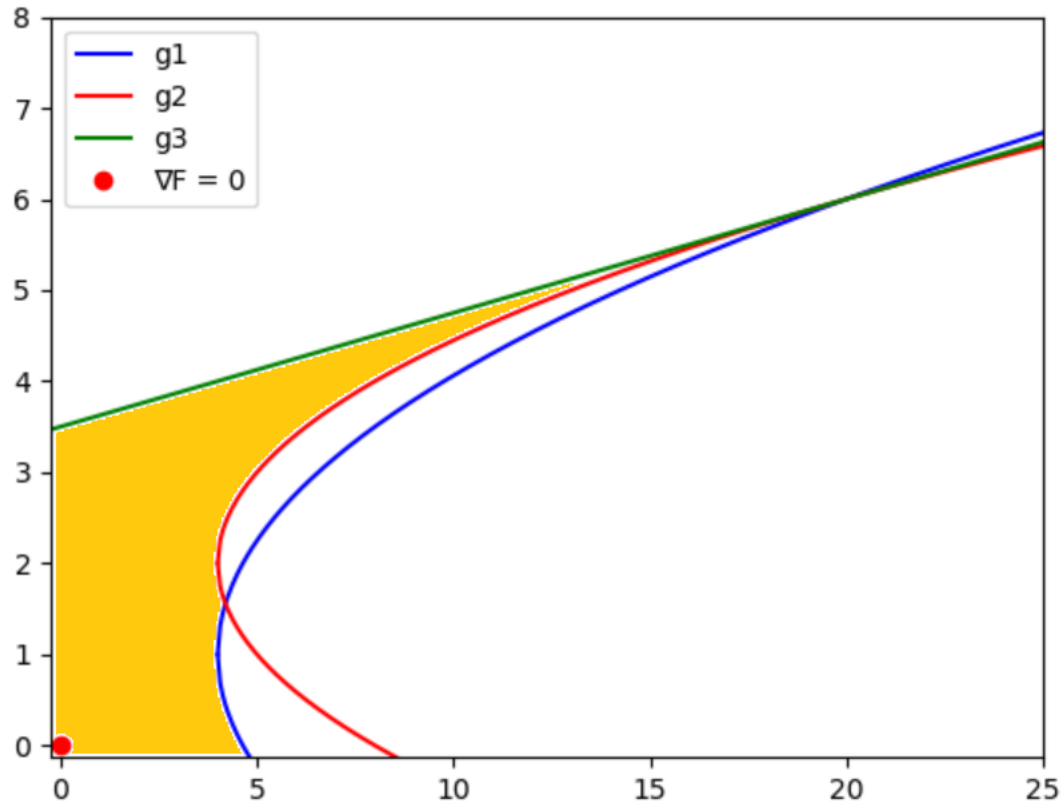

Figura 2: Domínio das restrições e $\nabla F = 0$.

Nota-se que uma das diferenças essenciais entre esse problema e o da 1ª questão é que o ponto $\nabla F = 0$ está no domínio das restrições. Outra diferença crucial é que esse ponto não é um ponto de máximo, mas sim um ponto de sela. Isso se deve ao fato de que a função a ser maximizada é um paraboloide hiperbólico.

Uma consequência importante dessa geometria é que a função $F(x_1, x_2)$ não é côncava. Assim, as condições de Karush-Kuhn-Tucker tornam-se condições necessárias, mas não suficientes. Dessa forma, necessita-se verificar a natureza da função a ser otimizada.

A partir de $F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, percebe-se que, no ponto de máximo, deve-se encontrar um valor que maximiza x_1 e minimiza x_2. Desse modo, o ponto de máximo de $F(x_1, x_2)$ se encontra na extremidade direita da região do domínio das restrições.

Sendo assim, toma-se o ponto de encontro entre g_1 e o eixo $x_2 = 0$ ($x_1 = 4,64$ e $x_2 = 0$) como um possível candidato a ponto de máximo. Ao analisar o domínio das restrições, com auxílio dos gráficos da Figura **??**, percebe-se que existe um conjunto de curvas na extremidade direita do domínio das restrições em que os pontos contidos nessas curvas possuem a coordenada x_1 menor do que $4,64$ e coordenada x_2 maior de que 0. Logo, $F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ avaliada em qualquer um desses pontos é menor do que $F(x_1, x_2)$ avaliada no atual candidato a máximo.

Ainda assim, existe um um intervalo que necessita uma investigação aprofundada. Esse é o intervalo da extremidade do domínio que coincide com a restrição g_2 a partir do ponto $(x_1, x_2) = (4,64,\ 2,8)$ até se encontrar com as restrições g_1 e g_3 ($x_1 = 20$ e $x_2 = 6$). Nesse segmento, percebe-se que os valores de x_1 crescem mais rapidamente que os valores de x_2. Por conseguinte, $F(x_1, x_2)$ é crescente a medida que se "caminha" na curva em direção ao ponto na extrema direita.

Portanto, tem-se dois ponto candidatos a máximo. O ponto $(x_1, x_2) = (4,64,\ 0)$ e o ponto $(x_1, x_2) = (20,\ 6)$.

Analisa-se as codições de Karush-Kuhn-Tucker nos pontos.

Para isso, escreve-se o Lagrangeano:

$$L(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1^2 - x_2^2 + y_1 \left(4 - x_1 + \frac{16}{25} (x_2 - 1)^2\right) + y_2 \left(4 - x_1 + (x_2 - 2)^2\right) + y_3 (28 + x_1 - 8x_2)$$

Daí, tem-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - y_1 - y_2 + y_3 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + \frac{32}{25} y_1(x_2 - 1) + 2y_2(x_2 - 2) - 8y_3 \leq 0 \\ x_1 (2x_1 - y_1 - y_2 + y_3) = 0 \\ x_2 \left(-2x_2 + \frac{32}{25} y_1(x_2 - 1) + 2y_2(x_2 - 2) - 8y_3\right) = 0 \\ y_1 \left(4 - x_1 + \frac{16}{25} (x_2 - 1)^2\right) = 0 \\ y_2 \left(4 - x_1 + (x_2 - 2)^2\right) = 0 \\ y_3 (28 + x_1 - 8x_2) = 0 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; y_1 \geq 0, \;\; y_2 \geq 0, \;\; y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Aplica-se o ponto candidato a máximo, $(x_1, x_2) = (4,64,\ 0)$ nas condições 6 e 7. Tem-se que, $y_2 = y_3 = 0$. A partir disso, a condição 3 fica:

$$x_1 (2x_1 - y_1 - 0 + 0) = 0$$

Isso resulta em $y_1 = 2x_1 = 9,28$.

Isso implica que esse ponto é válido como candidato, mas ainda necessita-se verificar o outro ponto.

Aplica-se o ponto candidato a máximo, $(x_1, x_2) = (20,\ 6)$ nas condições 3 e 4. Tem-se que:

$$\begin{cases} 20 (2 \times 20 - y_1 - y_2 + y_3) = 0 \\ 6 \left(-2 \times 6 + \frac{32}{25} y_1(6 - 1) + 2y_2(6 - 2) - 8y_3\right) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = 192,5 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 = 0,5(2y_2 + 305) = 0 \end{cases}$$

Nota-se que as condições de KKT também são satisfeitas e este pondo também é válido como candidato.

Portanto, resta avaliar $F(x_1, x_2)$ nos pontos. Tem-se que $F(4,64,\ 0) = 21,53$ e $F(20,\ 6) = 364$.

Finalmente, afirma-se que o ponto que maximiza $F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ sujeito as restrições exigidas é o ponto $(x_1, x_2) = (20,\ 6)$ e $F_{Max} = 364$.

3 Questão 3

A Babel S.A. acha que sua rede interna de comunicações telefônicas está falhando em satisfazer às necessidades na hora de pico por causa da capacidade limitada de transmissão e pediu conselho a um consultor de comunicações, Cantu Chammas. Duas estações originam chamadas e três estações recebem as chamadas; mais de uma chamada pode ser enviada ou recebida por qualquer estação. As chamadas são transmitidas através de enlaces e dois nós de comutação. A Figura **??** ilustra a situação.

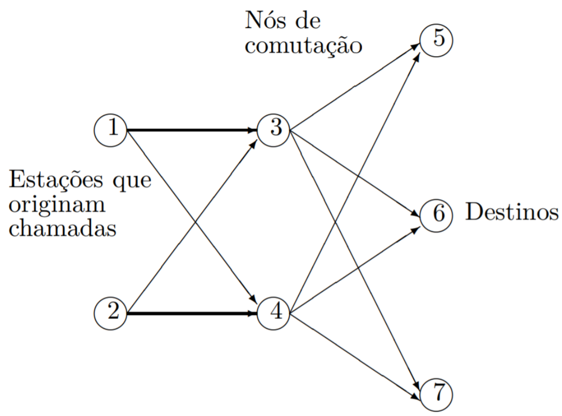

Figura 3: Arquitetura do sistema de comunicações.

O problema de decisão com que se defronta o Sr. Chammas é aumentar a capacidade de transmissão da rede de maneira econômica. Aumentar a capacidade para enfrentar todas as necessidades nas horas de pico pode ser caro demais, mas alguma melhoria no serviço é necessária.

Seja a_{ij} as necessidades diárias nas horas de pico de mensagens originadas na Estação i e destinadas à Estação j, onde $i = 1$ e 2 e $j = 5, 6$ e 7. Seja C_{kj} a capacidade atual de transmissão de enlace entre o Nó de Comutação k e o destino j, onde $k = 3$ e 4, e $j = 5, 6$ e 7. Seja S_k a capacidade de transmissão atual para mensagens fluindo através do Nó de Comutação k. Defina:

$x_{ijk} \equiv$ o número de chamadas originadas na Estação i, destinadas à Estação j e passando através do Nó de Comutação k.

$c_{jk} \equiv$ nova capacidade de transmissão ao longo do enlace entre o Nó de Comutação k e o destino j.

$s_k \equiv$ nova capacidade de transmissão através do Nó de Comutação k.

As restrições a serem satisfeitas são:

(i) O número total de chamadas de cada estação de origem a cada destino não pode exceder as necessidades nas horas de pico para tais chamadas.

(ii) O número total de chamadas passando ao longo do enlace entre um nó de comutação e um destino não pode exceder a correspondente capacidade de transmissão do enlace.

(iii) O número total de chamadas passando através de qualquer nó de comutação não pode exceder a correspondente capacidade de transmissão.

(iv) As novas capacidades de enlaces e nós devem ser pelo menos tão grandes quanto as atuais.

A exigência de nível de serviço é especificada como segue. A rota das chamadas deve satisfazer à restrição de que a relação do número *total* de chamadas que são realmente transmitidas pela soma de todas as necessidades nas horas de pico deve ser pelo menos f (onde $f < 1$).

O custo de aumentar de uma unidade a capacidade de transmissão de enlace entre o Nó de Comutação k e o Destino j é d_{kj}, e o de aumentar de uma unidade a capacidade de transmissão do Nó de Comutação k em uma unidade é d_k.

Mostre como uma formulação de programação linear pode ser usada para achar um plano de mínimo-custo para aumentar as capacidades de enlaces e nós, respeitadas as restrições mencionadas acima.

3.1 Resposta:

Deseja-se encontrar um plano de mínimo-custo para aumentar as capacidades de enlaces e nós; isto é, encontrar quantas unidades de capacidades de enlaces e nós devem ser aumentadas de forma a minimizar seu custo. Dessa forma, as variáveis do problema podem ser definidas como:

$U_{kj} \equiv$ Número de unidades aumentadas da capacidade de transmissão de enlace entre o Nó de Comutação k e o Destino j.

$U_k \equiv$ Número de unidades aumentadas da capacidade de transmissão do Nó de Comutação k.

De maneira que a capacidade atual de transmissão de enlace entre o Nó de Comutação e o destino, adicionada ao número de unidades aumentadas dessa capacidade de transmissão, seja igual a nova capacidade de transmissão ao longo do enlace entre o Nó de Comutação e o destino. Portanto:

$$C_{kj} + U_{kj} = c_{kj}$$

$$\begin{cases} C_{35} + U_{35} = c_{35} \\ C_{36} + U_{36} = c_{36} \\ C_{37} + U_{37} = c_{37} \\ C_{45} + U_{45} = c_{45} \\ C_{46} + U_{46} = c_{46} \\ C_{47} + U_{47} = c_{47} \end{cases}$$

Analogamente, a capacidade de transmissão atual para mensagens fluindo através do Nó de Comutação, adicionada ao número de unidades aumentadas da capacidade de transmissão do Nó, é igual a nova capacidade de transmissão através do Nó de Comutação:

$$S_k + U_k = s_k$$

$$\begin{cases} S_3 + U_3 = s_3 \\ S_4 + U_4 = s_4 \end{cases}$$

Quanto às restrições:

(i) O número total de chamadas de cada estação de origem a cada destino não pode exceder as necessidades nas horas de pico para tais chamadas.

Para obter o número total de chamadas de cada estação de origem a cada destino é preciso adicionar, para cada estação de origem e destino, as chamadas que passam por cada um dos nós intermediários:

$$\sum_{k=3}^{4}(x_{ijk}) \leq a_{ij} \qquad \therefore \qquad x_{ij3} + x_{ij4} \leq a_{ij}$$

$$\begin{cases} x_{153} + x_{154} \leq a_{15} \\ x_{163} + x_{164} \leq a_{16} \\ x_{173} + x_{174} \leq a_{17} \\ x_{253} + x_{254} \leq a_{25} \\ x_{263} + x_{264} \leq a_{26} \\ x_{273} + x_{274} \leq a_{27} \end{cases}$$

(ii) O número total de chamadas passando ao longo do enlace entre um nó de comutação e um destino não pode exceder a correspondente capacidade de transmissão do enlace.

O número total de chamadas passando ao longo do enlace entre um nó de comutação e um destino é a soma de todas as chamadas que passam pelo nó de comutação e destino de cada uma das estações de origem:

$$\sum_{i=1}^{2}(x_{ijk}) \leq c_{kj} \quad \therefore \quad x_{1jk} + x_{2jk} \leq c_{kj}$$

$$\begin{cases} x_{153} + x_{253} \leq c_{35} \\ x_{154} + x_{254} \leq c_{45} \\ x_{163} + x_{263} \leq c_{36} \\ x_{164} + x_{264} \leq c_{46} \\ x_{173} + x_{273} \leq c_{37} \\ x_{174} + x_{274} \leq c_{47} \end{cases}$$

(iii) O número total de chamadas passando através de qualquer nó de comutação não pode exceder a correspondente capacidade de transmissão.

Pode-se obter o número total de chamadas passando através de qualquer nó realizando o somatório de todas as possíveis estações de origem e de destino de cada nó:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=5}^{7}(x_{ijk}) \leq s_k \quad \therefore \quad x_{15k} + x_{16k} + x_{17k} + x_{25k} + x_{26k} + x_{27k} \leq s_k$$

$$\begin{cases} x_{153} + x_{163} + x_{173} + x_{253} + x_{263} + x_{273} \leq s_3 \\ x_{154} + x_{164} + x_{174} + x_{254} + x_{264} + x_{274} \leq s_4 \end{cases}$$

(iv) As novas capacidades de enlaces e nós devem ser pelo menos tão grandes quanto as atuais.

Como as variáveis são o número de unidades aumentadas para cada capacidade, esta restrição implica que estas variáveis devem ser maiores ou iguais a zero:

$$U_{kj} \geq 0 \quad ; \quad U_k \geq 0$$

Quanto à restrição à nível de serviço, a relação do número total de chamadas que são realmente transmitidas pela soma de todas as necessidades nas horas de pico deve ser pelo menos f:

$$\frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=5}^{7}\sum_{k=3}^{4}(x_{ijk})}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=5}^{7}(a_{ij})} \geq f$$

$$\frac{x_{153} + x_{154} + x_{163} + x_{164} + x_{173} + x_{174} + x_{253} + x_{254} + x_{263} + x_{264} + x_{273} + x_{274}}{a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{25} + a_{26} + a_{27}} \geq f$$

O custo K para aumentar as capacidades de enlaces e nós é o custo de aumentar cada unidade d as capacidades de transmissão de enlace e nócvezes a quantidade de unidades aumentadas para cada enlace e nó:

$$K = \sum_{k=3}^{4} \sum_{j=5}^{7} d_{kj} \cdot U_{kj} + \sum_{k=3}^{4} d_k \cdot U_k$$

$$K = d_{35} \cdot U_{35} + d_{36} \cdot U_{36} + d_{37} \cdot U_{37} + d_{45} \cdot U_{45} + d_{46} \cdot U_{46} + d_{47} \cdot U_{47} + d_3 \cdot U_3 + d_4 \cdot U_4$$

Objetiva-se minimizar este custo, isto é, maximizar o negativo do custo:

$$MaxF = -\sum_{j=5}^{7} \sum_{k=3}^{4} d_{kj} \cdot U_{kj} - \sum_{k=3}^{4} d_k \cdot U_k$$

$$MaxF = -d_{35} \cdot U_{35} - d_{36} \cdot U_{36} - d_{37} \cdot U_{37} - d_{45} \cdot U_{45} - d_{46} \cdot U_{46} - d_{47} \cdot U_{47} - d_3 \cdot U_3 - d_4 \cdot U_4$$

4 Questão 4

Um problema clássico de sistemas de controle é aquele de transferir um sistema dinâmico de um estado inicial especificado para um estado final especificado em tempo mínimo, sendo a força de controle limitada, cotada, superiormente e inferiormente. A solução para este tipo de problema envolve o princípio do bang-bang, pois a força de controle assume apenas o valor máximo ou o valor mínimo (ou seja, $u = 1$ ou $u = -1$), o que torna a solução muito menos dispendiosa. Considere o sistema definido por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \text{ , onde } -1 \leq u \leq 1$$

Trata-se de levar o sistema de uma condição inicial qualquer $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ até a origem (0, 0), num tempo mínimo.

a) Formule o problema de controle ótimo correspondente.

b) Resolva o problema de controle ótimo formulado no item a).

c) Identifique, no plano de fase (x_1, x_2), o lugar geométrico dos pontos de condições iniciais onde não será necessário nenhum chaveamento da força de controle para se atingir a origem em tempo mínimo. Esboce as trajetórias no plano de fase e explique.

d) Qual é o número mínimo de chaveamentos necessários para que o sistema evolua de qualquer condição inicial para qualquer condição final em tempo mínimo?

4.1 Resposta:

4.1.1 Letra a)

O problema do controle ótimo é expresso por:

$$MaxJ = \int_{t_0}^{t_1} I(x, u, t)dt$$

sujeito a:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t)$$

Este problema consiste em encontrar uma função de controle ótima (u) que maximize o funcional objetivo (J), respeitando as restrições impostas. Para solucionar tais problemas é utilizado o Princípio do Máximo de Pontryagin.

Para o problema de interesse, temos a seguinte formulação:

$$MaxJ = \int_{t_0}^{t_1} -1dt$$

sujeito a:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u$$

$$-1 \leq u \leq 1$$

$$x_1(t_1) = 0, x_2(t_1) = 0$$

4.1.2 Letra b)

Define-se o Hamiltoniano como:

$$H(x,u,t,y) = I(x,u,t) + y^T f(x,u,t)$$

Pelo Princípio do Máximo de Pontryagin, a função ótima (u^*) é aquela que maximiza o Hamiltoniano satisfazendo as condições:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$

No problema de interesse temos:

$$H(x,u,t,y) = -1 + y_1 x_2 + y_2 u$$

Assim,

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -y_1 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 - c_1 t \end{cases} \text{, em que } c_1, c_2 \text{ são constantes.}$$

Note que o Hamiltoniano é linear com relação a u, portanto seu máximo será nos limites do intervalo de u, portanto:.

$$u^* = \begin{cases} 1, & \text{se } y_2 > 0 \\ -1, & \text{se } y_2 < 0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$u^*(t) = sinal(c_2 - c_1 t)$$

4.1.3 Letra c)

Substituindo a força de controle encontrada no item b) na equação do sistema dinâmico, temos:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \pm 1 \end{cases} \implies \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\pm 1}{x_2}$$

As trajetórias no plano de fase são descritas pela seguinte equação:

$$x_1 = \frac{\pm x_2^2}{2} + k \text{ , em que k é uma constante}$$

Note que para cada valor de k existe um par de parábolas simétricas que correspondem a $u = 1$ e $u = -1$, o chaveamento ocorre na interseção entre essas parábolas, porém quando k = 0 as parábolas se intersectam na origem, que é justamente o estado final, portanto não ocorre chaveamento para este caso. É possível observar o lugar geométrico dos pontos de condições iniciais em que não é necessário chaveamento na Figura **??**.

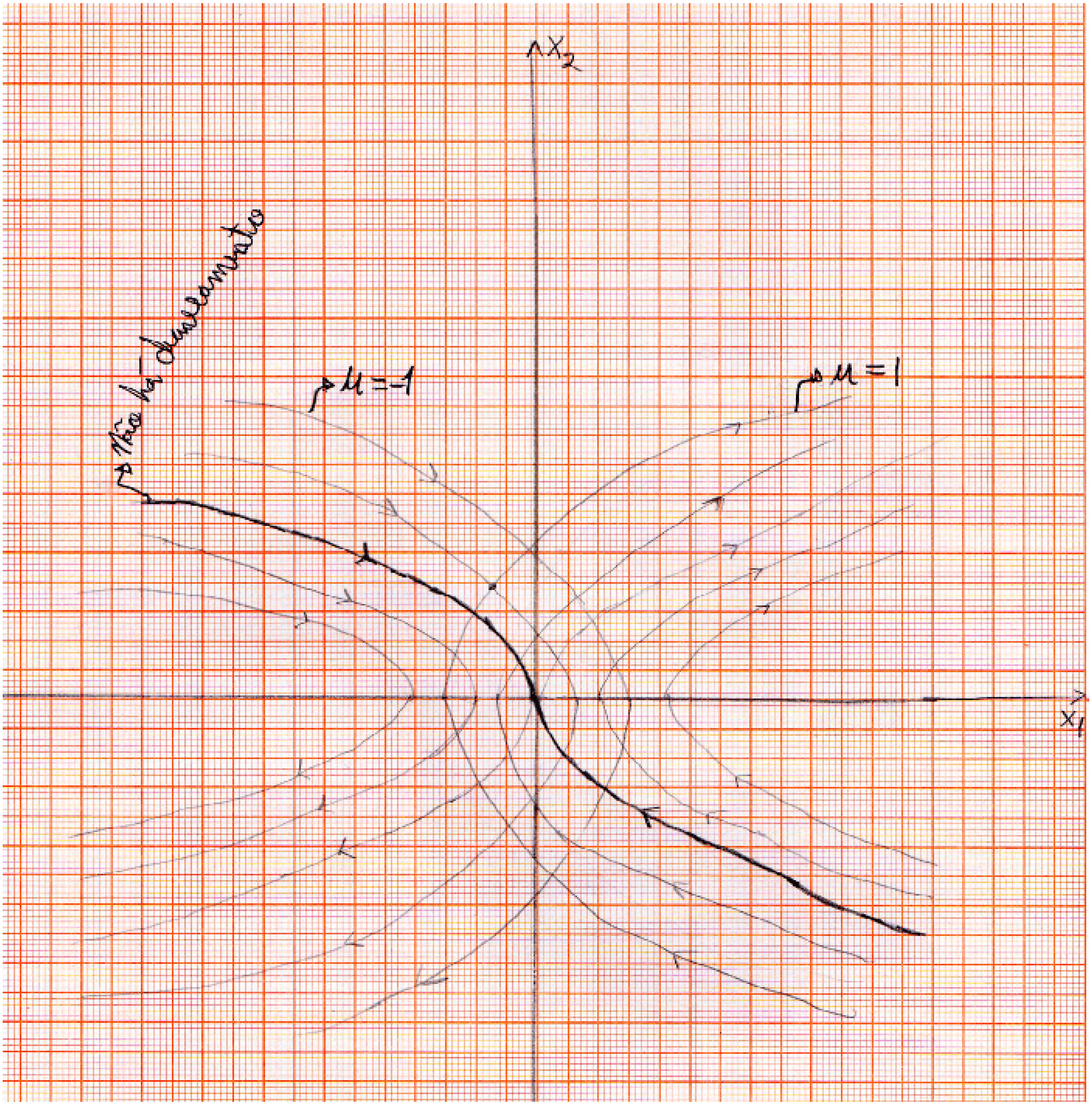

Figura 4: Trajetórias no Plano de Fase do sistema dinâmico.

4.1.4 Letra d)

A partir da função de controle ótima encontrada no item b) é possível observar que o chaveamento ocorre quando quando $c_2 - c_1 t = 0$. Para qualquer intervalo $[t_0, t_1]$ existe no máximo uma raíz para esta equação.

Logo, conclui-se que para o sistema evoluir do estado inicial ao estado final em tempo mínimo é necessário no máximo um chaveamento.