UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Departamento de Eletrônica e Sistemas

Sistemas de Controle

Sistema de Otimização de Recursos Humanos

Turma de Sistemas de Controle 2019.1

Maio, 2019

Sumário

1 Motivação

A consumação de qualquer projeto real exige diversas etapas fundamentais para seu cumprimento, que transitam desde o planejamento, até a execução e o fechamento do mesmo. Sendo assim, os projetos são caracterizados por um tempo finito de envolvimento de profissionais responsáveis por diferentes funções em cada uma das etapas de desenvolvimento. O gerenciamento eficiente desses recursos humanos, são essenciais para garantir o correto andamento de projetos de maior complexidade, o que muitas vezes demanda uma abordagem matemática para garantir um bom processo gerencial.

O presente projeto tem como objetivo permitir a visualização e análise de possíveis projeções sob condições reais da aplicação do método de otimização de recursos humanos, se utilizando da linguagem de programação Python. **A abordagem foi baseada no trabalho de conclusão de curso de Guilherme Cerqueira**. Tal metódo permite uma melhor e mais eficiente organização do potencial humano para o desenvolvimento de um trabalho em uma empresa.

O princípio do máximo de Pontryagin (PMP), princípio importantíssimo no estudo de sistemas de controle dinâmicos, é uma ferramenta para resolver problemas de maximização de funções sujeita a restrições:

$$\text{Max} \int_{x_1}^{x_2} I(x,u,t)dt$$

sujeito a:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t)$$

Tomando a condição dada, o PMP é resolvido utilizando uma função chamada função Hamiltoniana, definida como:

$$H(x,u,t,y) = I(x,u,t) + y^T f(x,u,t)$$

Sendo assim, para encontrar a força de controle u ótima, chamada de $u^\star$, segue-se o procedimento:

$$\frac{\partial H}{\partial u^\star} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u^\star} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u^\star} = -\frac{dy}{dt}$$

A força de controle ótima, $u*$, deste estudo se baseia na política de contratação e demissão de profissionais em cada momento do projeto de forma a minimizar os custos. Matematicamente, o problema de minimização de uma função objetivo qualquer em nada se diferencia do problema de maximizar o negativo da mesma. A completa modelagem do problema será discutida na seção Modelagem, enquanto os resultados obtidos serão avaliados na seção Simulação.

2 Modelagem

O objetivo deste trabalho, como adiantado anteriormente, é verificar a validade do modelo proposto de maneira teórica, expondo o Princípio de Máximo de Pontryangin ao escrutínio. Usou-se, portanto, o gerenciamento de funcionários responsáveis por um determinado projeto de uma companhia de grande porte qualquer como meio de estudo. Note-se, entretanto, que a demanda por funcionários é para um projeto específico, o que denota a sazonalidade da própria demanda. Devido às incertezas associadas ao gerenciamento de pessoas, a rotação de funcionarios é constante, ou seja, os números de funcionários demitidos e contratados seguem uma tendência a serem constantes. Por conta disso, a empresa deve controlar este problema, contratando novos funcionários e treinando-os ao longo do projeto. Assim, o modelo empregado neste trabalho leva em consideração que existem momentos de contratação e momentos de demissão, quando as respectivas práticas predominam, dependendo da fase em que o projeto se encontra. Ainda, é importante destacar que as variáveis detectam valores reais ao longo do tempo, o que as torna contínuas.

As variáveis utilizadas estão organizadas da seguinte maneira: $\mathbf{u}$ (variável de controle) como sendo a política de contratação/demissão, expressa em número de funcionários; $\mathbf{x_1}$ (variável de estados) como o número de trabalhadores no projeto e $\mathbf{x_2}$ (variável de estado) como o progresso do projeto de maneira percentual (de 0% concluído até 100% concluído). É importante que se tenha conhecimento acerca das limitações de cada variável, de maneira que resultados absurdos sejam eliminados do conjunto de soluções candidatas a soluções ótimas. Desta maneira, coloca-se as seguites restrições: a variável de controle $\mathbf{u}$ não possui quaisquer restrições, já que representa a quantidade de profissionais a serem contratados ou demitidos em determinada etapa do projeto; a variável de estado $\mathbf{x_1}$ está restrita ao subconjunto [0,1] por representar uma porcentagem; e, por último, a variável de estado $\mathbf{x_2}$ está limitada ao subconjunto dos reais positivos, inlcuindo o zero, já que é logicamente impossível ter um número negativo de funcionários trabalhando em um projeto.

O custo total durante o tempo de execução do projeto será obtido a partir do custo com os funcionários presentes durante cada momento, e dos custos com contratação e demissão de outros profissionais ao longo do tempo. O que pode ser representado a partir da função objetivo:

$$J(\eta, \xi) = \int_{\xi}^{\eta} \left[\beta x_1 + \theta u^2\right] dt$$

Na qual o parâmetro β foi considerado como o custo com pagamentos e encargos, enquanto o parâmetro θ

representa o custo com contratações e demissões de funcionários. Deseja-se minimizar, portanto, o funcional objetivo $J(\eta, \xi)$ desde o início do projeto (tempo 0), até o tempo de término τ. Levando-se em consideração também as equações dinâmicas das restrições, o modelo geral a ser resolvido será:

$$\text{Min} - J(\eta, \xi) = -\int_{\xi}^{\eta} \left[\beta x_1 + \theta u^2\right] dt$$

sujeito a:

$$\dot{x}_1 = u - \mu x_1$$
$$\dot{x}_2 = \gamma x_1 - \alpha x_2$$

Para garantir a coerência do modelo com o caso real outros parâmetros foram introduzidos nas equações dinâmicas de restrição, dentre eles o μ, γ e α. O primeiro deles, μ, é a taxa de rotatividade de funcionários no projeto, ou seja, indica a taxa com que os funcionários deixam o projeto ou são substituídos, seja por renúncia, acidentes de trabalho ou doenças. Portanto, a primeira equação dinâmica, $\dot{x}_1$, ilustra que a variação da equipe de trabalho em qualquer momento do projeto está relacionada com o quantitativo de funcionários contratados ou demitidos e o total de funcionários que abandonam o projeto. Para determinar μ um estudo detalhado das causas de abandono devem ser levados em consideração. O segundo parâmetro, γ, está relaciona relacionado com a produtividade da equipe, considerando uma performance homogênea dos membros. O terceiro parâmetro, α, está relacionado com a dificuldade de finalização do projeto a medida que o mesmo é completado, i.e., a quantidade de retrabalho e dificuldades que podem surgir no andamento do projeto. Assim, a segunda equação dinâmica, $\dot{x}_2$, ilustra que a variação do andamento do projeto leva em cosideração a performance da equipe e as dificuldades inerentes à execução do projeto, bem como fatores externos que solicitam mudanças.

Para resolver o problema de otimização proposto, usa-se a função chamada de Hamiltoniano, de onde as condições de otimalidade podem ser derivadas quando se aplica o Princípio de Máximo de Pontryagin. O Hamiltoniano segue:

$$H(x_1, x_2, u, y_1, y_2) = -\left[\beta x_1 + \theta u^2\right] + y_1\left[u - \mu x_1\right] + y_2\left[\gamma x_1 - \alpha x_2\right]$$

Ainda, as equações propostas pelo Princípio de Máximo de Pontryagin seguem abaixo:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2\theta u + y_1 = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\dot{x}_1 = -\beta - \mu y_1 + \gamma y_2$$
$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\dot{y}_2 = -\alpha y_2$$
$$\frac{\partial H}{\partial y_1} = \dot{x}_1 = u - \mu x_1$$
$$\frac{\partial H}{\partial y_2} = \dot{x}_2 = \gamma x_1 - \alpha x_2$$

As soluções das equações acima são dadas abaixo:

$$u = -\frac{\beta}{2\theta\mu} - \frac{\gamma A e^{\alpha t}}{2\theta(\alpha-\mu)} + \frac{B e^{\mu t}}{2\theta}$$
$$x_1 = -\frac{\beta}{2\theta\mu^2} - \frac{\gamma A e^{\alpha t}}{2\theta(\alpha^2-\mu^2)} + \frac{B e^{\mu t}}{4\theta\mu} - C e^{-\mu t}$$
$$x_2 = -\frac{\gamma\beta}{2\theta\alpha\mu^2} - \frac{\gamma^2 A e^{\alpha t}}{4\theta\alpha(\alpha^2-\mu^2)} + \frac{\gamma B e^{\mu t}}{4\theta\mu(\alpha+\mu)} \frac{-\gamma C e^{-\mu t}}{(\alpha-\mu)} + D e^{-\alpha t}$$

Para as condições iniciais, levar-se-á em conta que

$$\dot{x_2} \geq 0 \implies \gamma x_1(t) - \alpha x_2(t) = 0$$

Esta relação impede a evolução negativa de um projeto, dada uma sequência de atividades até sua conclusão. Portanto, para quaisquer condições iniciais e finais, ter-se-á certeza acerca do cumprimento do projeto. Por exemplo, a empresa pode iniciar o projeto sem funcionários e, ainda assim, completá-lo de maneira ótima.

3 Simulação

O código realizado em *python* resolve as variáveis de integrações levando em conta a arbitração dos parâmetros: $\alpha, \mu, \gamma, \beta, \theta$ e τ. Os valores considerados levaram em conta o custo total da obra, o número de funcionários e tempo de execução.

A partir desses parâmetros foram calculados os valores para u, x_1 e x_2 para em seguida serem plotados os gráficos. Os dados utilizados foram retirados de duas empresas de *desing* e uma de construção civil. Alguns pontos devem ser considerados para esses dados e os valores dos parâmetros, primeiramente, o número de funcionários de uma empresa de *design* é muito menor que o de uma construção civil, além disso, eles tem um maior impacto na produto final, ou seja, a sua produtividade é maior, por isso o γ de uma empresa desse tipo é maior que o de uma construção.

Os gráficos das Figuras **??**, **??** e **??** mostram o número de contratações/demissões de funcionários e observando seu formato nota-se que está de acordo com a teoria estudada, pois no início de um projeto precisa-se contratar os trabalhadores, enquanto que no final é necessário demití-los devido ao fim da obra.

As Figuras **??**, **??** e **??** são os gráficos trapezoidais, que mostram a quantidade de pessoas no projeto de acordo com o tempo. No início, há uma crescente, pois precisa-se contratar trabalhadores, em seguida há uma estagnação que significa que a obra está em andamento e ,perto do fm, começa-se a demitir funcionários devido ao fim da obra.

Note-se, contudo, que, mesmo quando o término do projeto se aproxima, a quantidade de trabalhadores não fica abaixo de uma quantidade mínima em nenhum dos casos apresentados nas figuras abaixo. Isso ocorre porque existe uma possibilidade do projeto retornar a uma etapa indesejada e, portanto, necessitar-se-ia de mão-de-obra de emergência.

Por fim, as Figuras **??**, **??** e **??** representam o andamento da obra em percentagem. Como pode-se observar, todas elas estão em "formato de s"significando que a produtividade está no máximo.

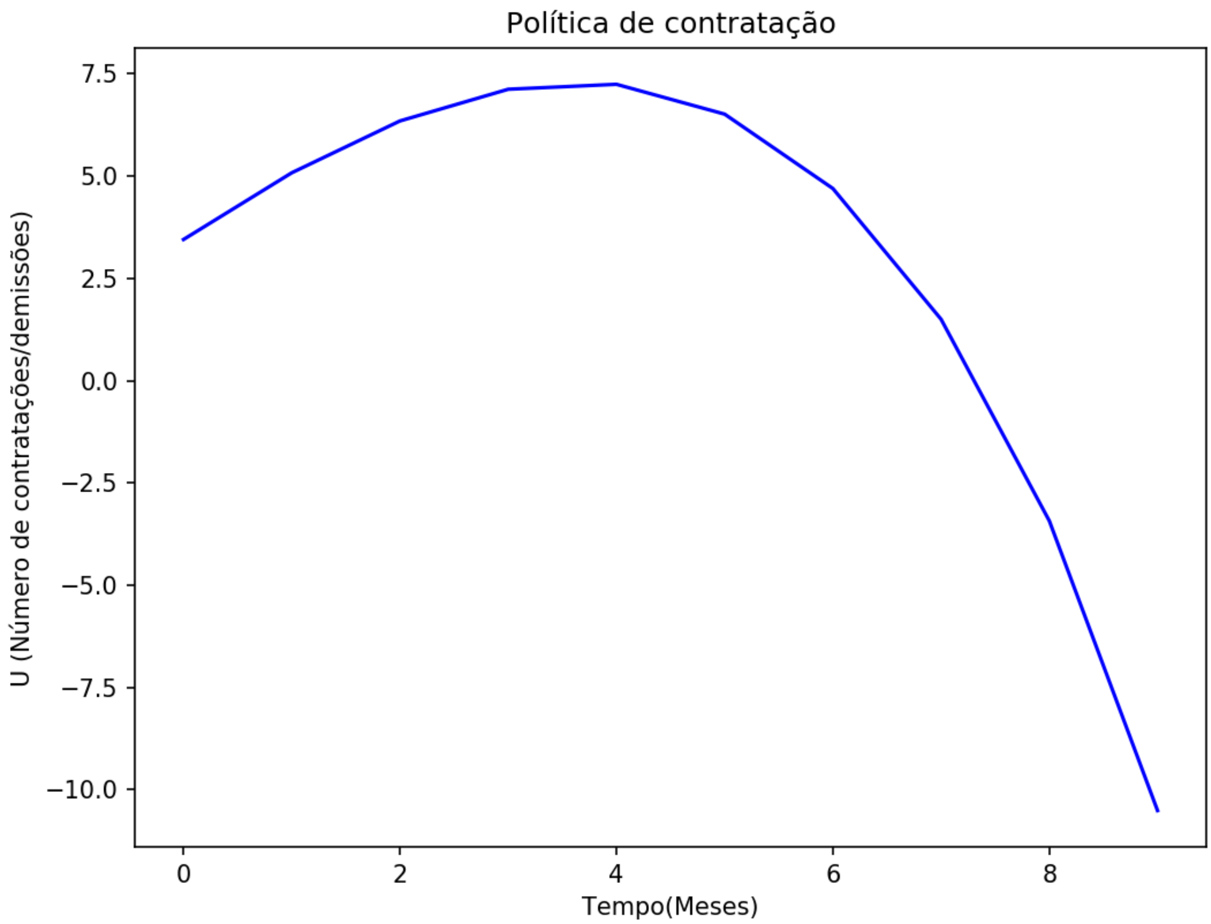

Figura 3.1: Número de Contratações do Projeto 1

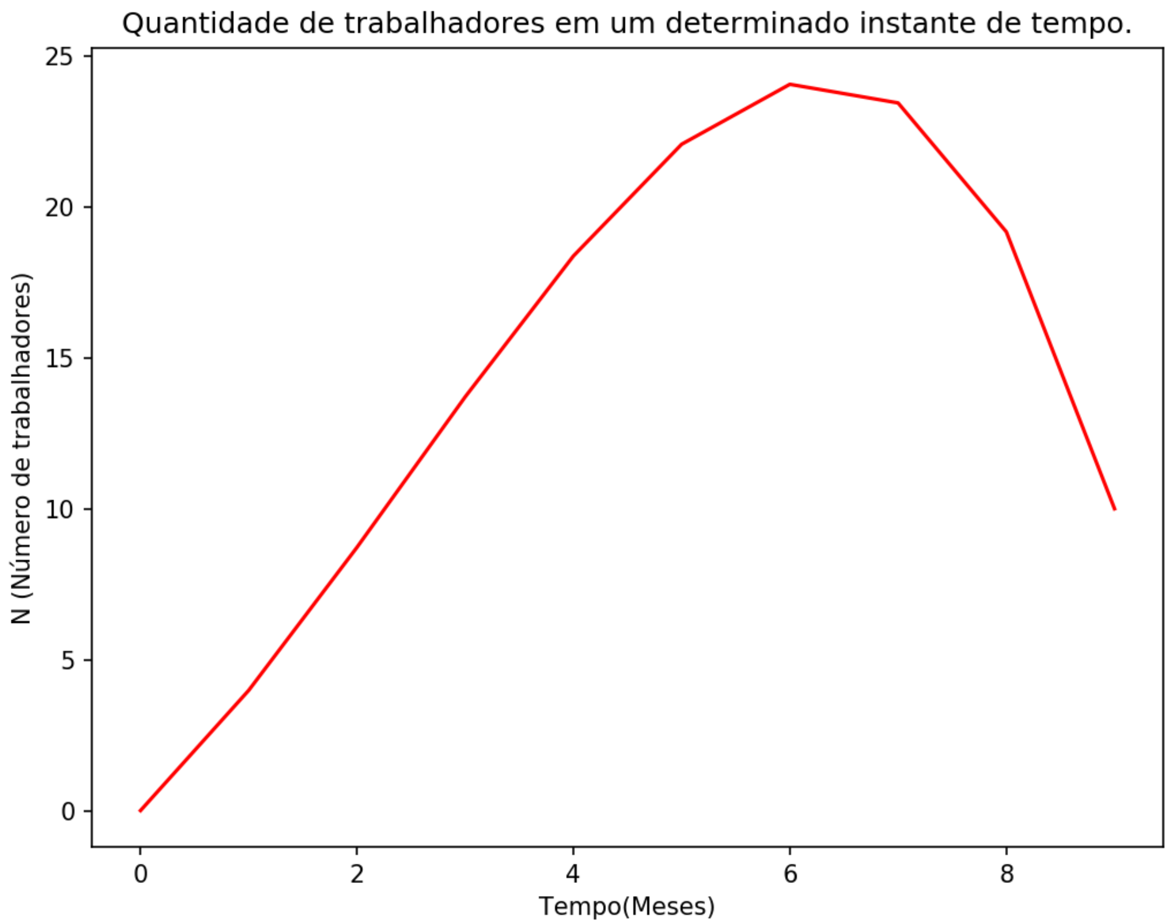

Figura 3.2: Número de Funcionários do Projeto 1

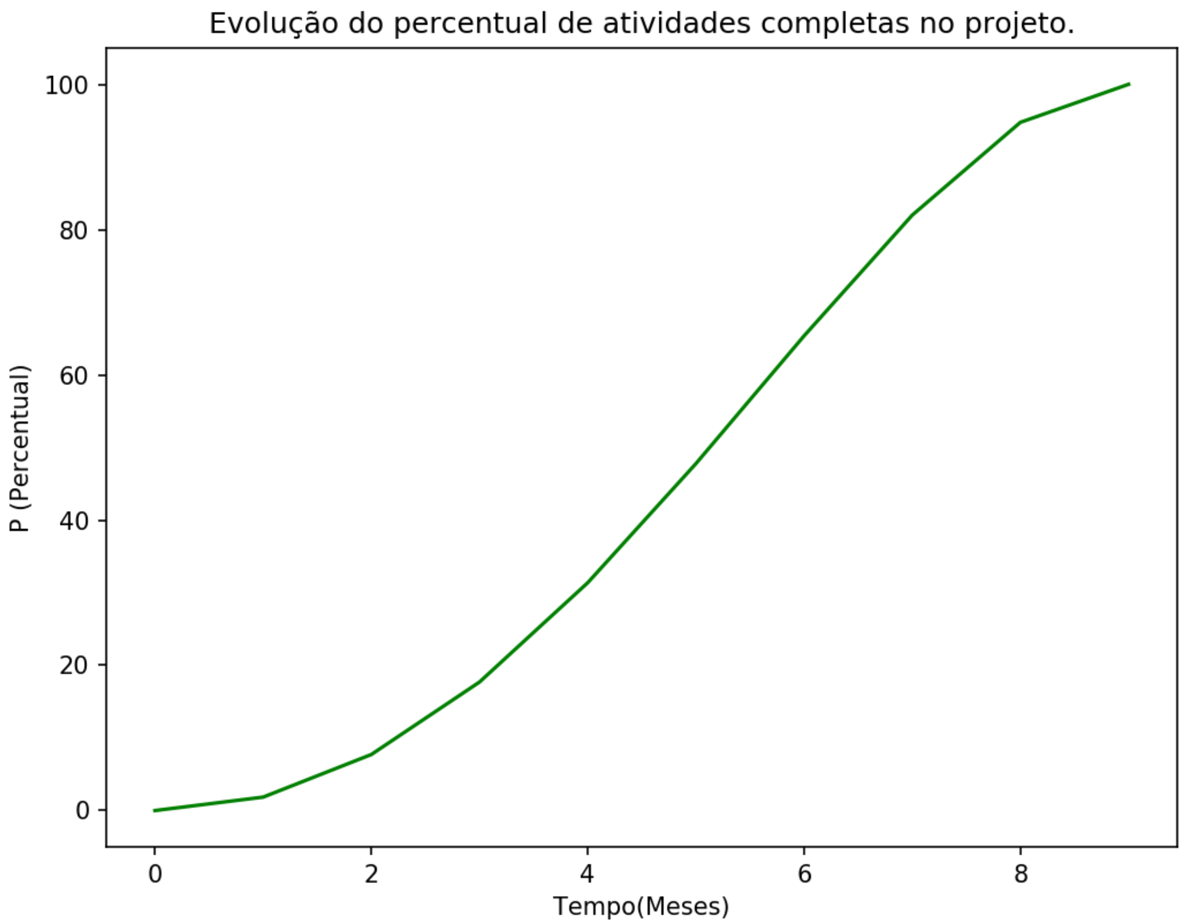

Figura 3.3: Percentual da Atividade do Projeto 1

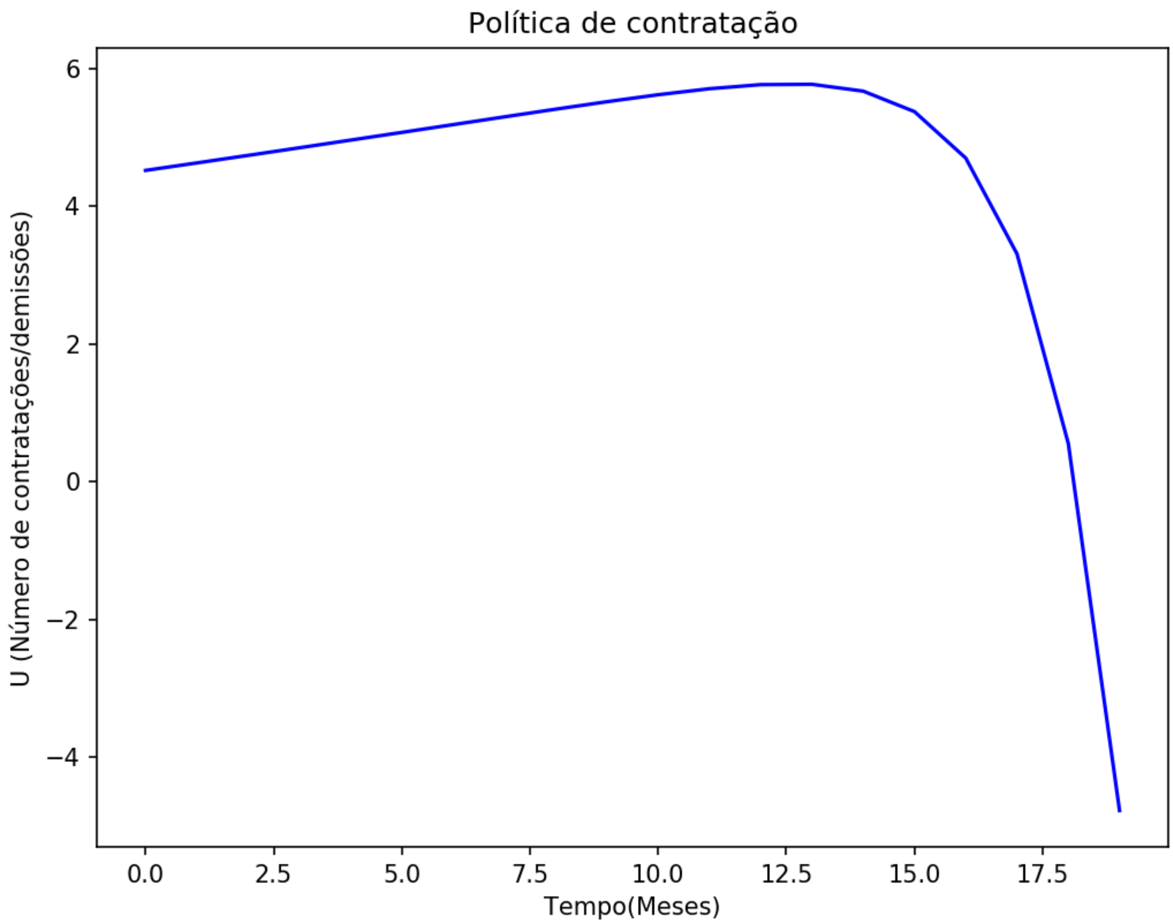

Figura 3.4: Número de Contratações do Projeto 2

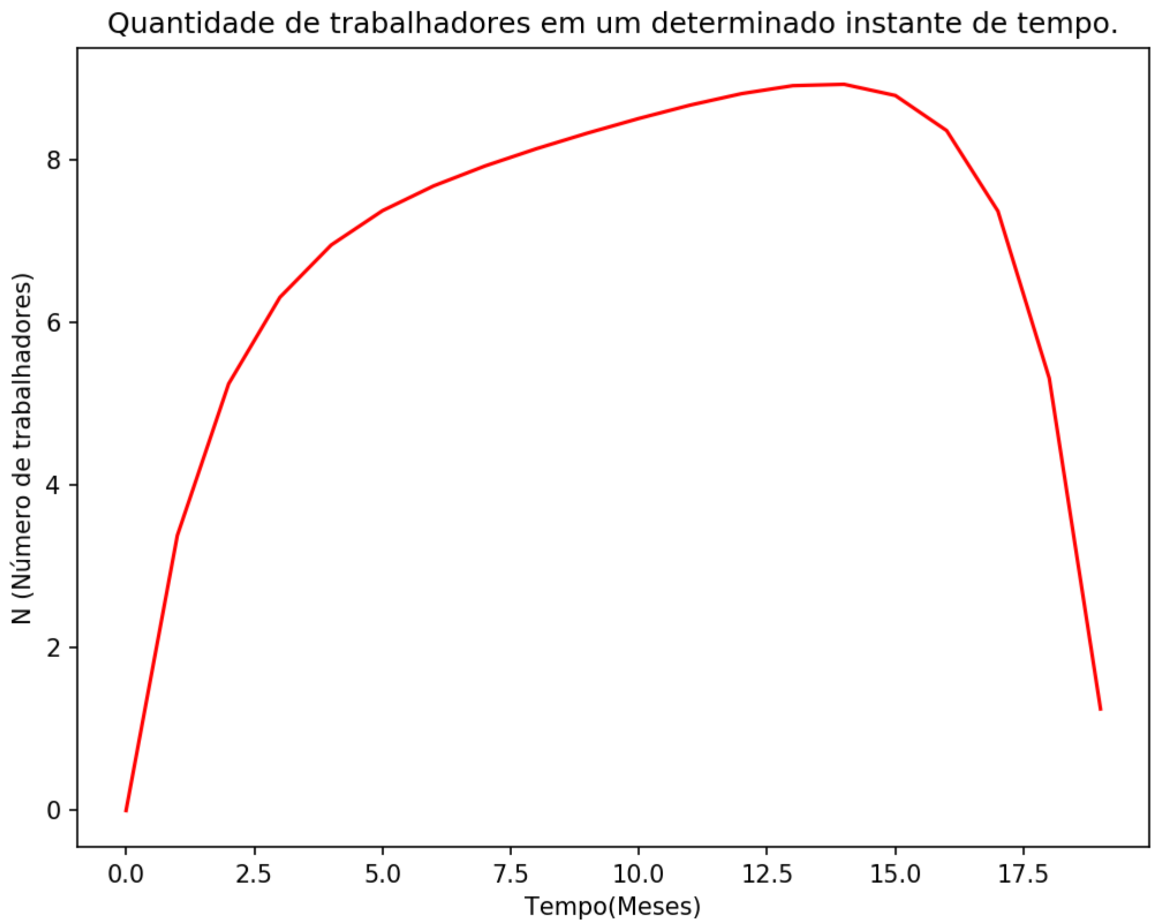

Figura 3.5: Número de Funcionários do Projeto 2

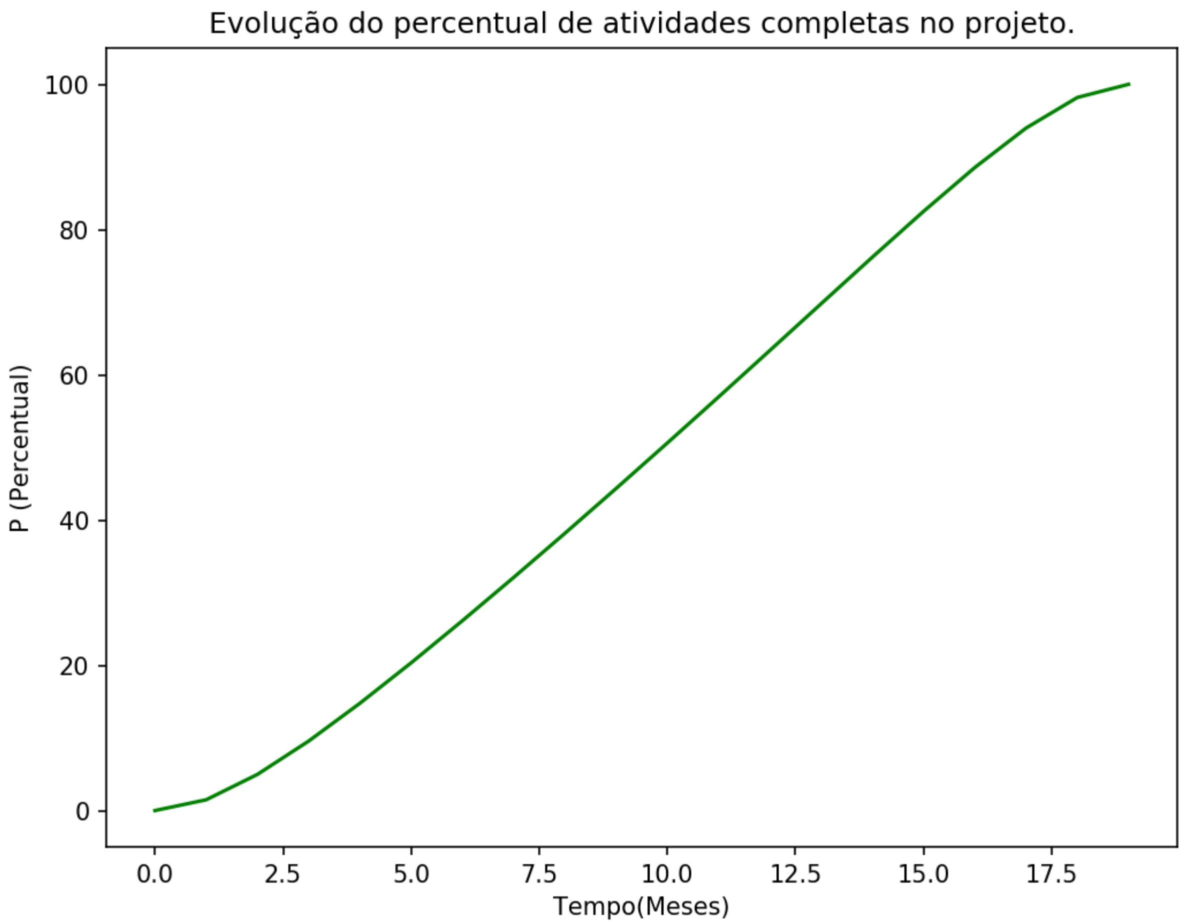

Figura 3.6: Percentual da Atividade do Projeto 2

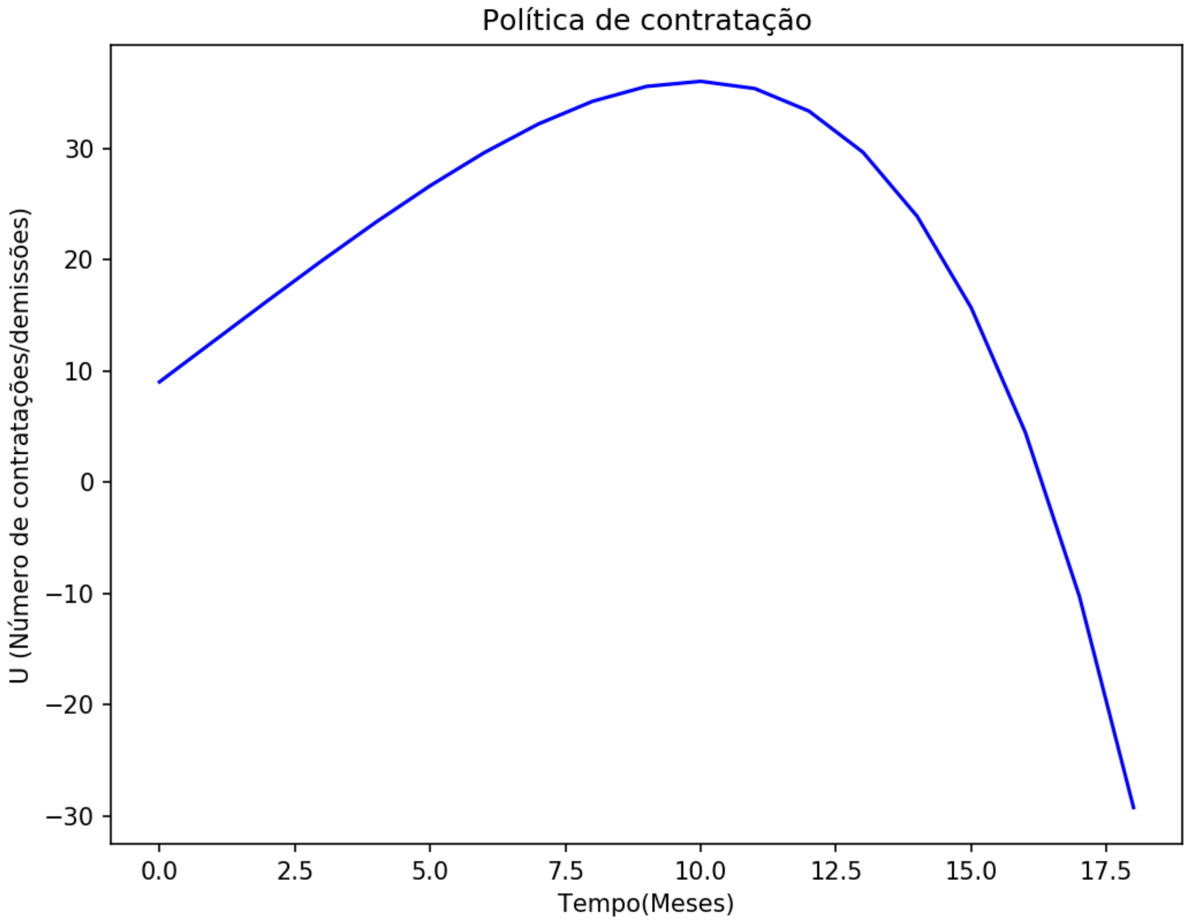

Figura 3.7: Número de Contratações do Projeto 3

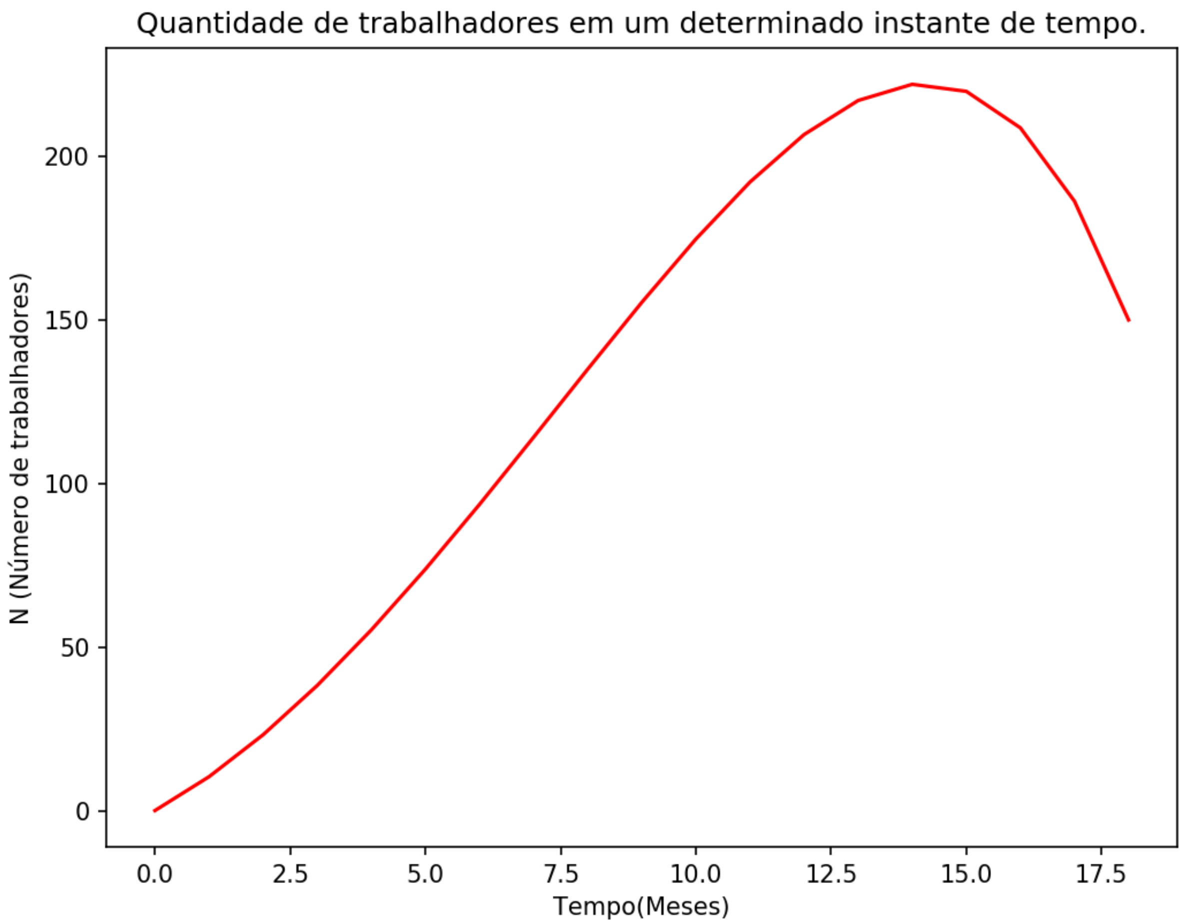

Figura 3.8: Número de Funcionários do Projeto 3

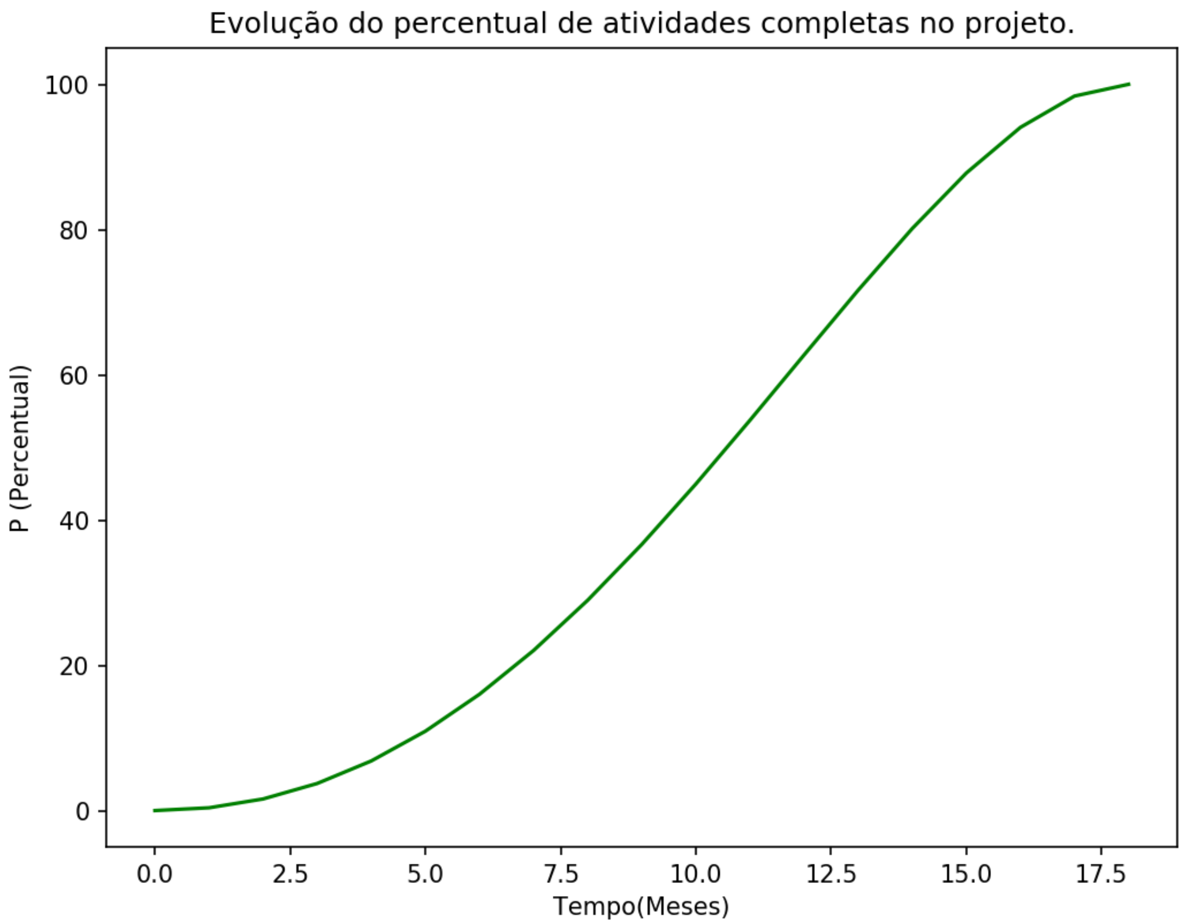

Figura 3.9: Percentual da Atividade do Projeto 3

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import numpy as np


#Valores utilizados para as constantes alfa,mi,gama,beta,teta,tau .

'''PARAMETERS
   Change requests Increasing of project
   Resignment Fair dismissal Labor accident Diseases
   Productivity
   Cost with remunerations (wages, bonuses, etc.).Cost with social charges.
   Cost with hiring/firing Cost with training/adaptation/transfer
   Ending time
'''
alpha,mi,gama,beta,teta,tau=0.02,0.5,0.01,1500,550,30
tempo=tau + 1


#achando os valores das contantes de integra  o

a=1/(4*teta*mi)
b= -gama/((2*teta)*(alpha**2-mi**2))
c = gama/((4*teta*mi)*(alpha+mi))
d=gama/(alpha-mi)
f=-(gama**2)/(4*teta*alpha*(alpha**2-mi**2))
g= math.exp(mi*tau)/(4*teta*mi)
h=math.exp(-mi*tau)
i=-gama*math.exp(alpha*tau)/(2*teta*(alpha**2-mi**2))
j= gama*math.exp(mi*tau)/(4*teta*mi*(alpha+mi))
l= gama*math.exp(-mi*tau)/(alpha-mi)
m= math.exp(-alpha*tau)
n= -gama**2*math.exp(alpha*tau)/(4*teta*alpha*(alpha**2-mi**2))
u=beta/(2*teta*mi**2)
v=gama*beta/(2*teta*alpha*mi**2)
x=(alpha/gama) + beta/(2*teta*mi**2)
z= 1 + gama*beta/(2*teta*alpha*mi**2)




A=((m*v -z)*(a*h - g) + (u*g - x*a)*(d*m - l) + (u*h - x)*(j-c*m))/((m*f - n
)*(a*h - g) + (b*g - i*a)*(d*m-l) +(b*h-i)*(j-c*m))
B=(i-b*h)*A/(a*h-g) -(x-u*h)/(a*h-g)
C=u-b*A -a*B
D=(v-u*d) -(f - b*d)*A -(c- a*d)*B
```

```
U,N,P=[],[],[]
for t in range(tempo):
    U.append(-beta/(2*teta*mi)-(gama*A*math.exp(alpha*t)/(2*teta*(alpha-mi)))+(B*math.exp(mi
                                                   *t))/(2*teta))
    N.append(-beta/(2*teta*(mi**2))-(gama*A*math.exp(alpha*t))/(2*teta*((alpha**2)-(mi**2)))
                                                   +(B*math.exp(mi*t)/(4*teta*mi))+C*math.exp
                                                   (-mi*t))
    P.append(-gama*beta/(2*teta*alpha*mi**2)-(gama**2*A*math.exp(alpha*t))/(4*teta*alpha*(
                                                   alpha**2-mi**2))+
        (gama*B*math.exp(mi*t))/(4*teta*mi*(alpha + mi))+(gama*C*math.exp(-mi*t))/(alpha-mi)
                                                       +D*math.exp(-alpha*t))



plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=150)
plt.plot(list(range(tempo)), N,'r')
plt.title("Quantidade de trabalhadores em um determinado instante de tempo.")
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("N (N mero de trabalhadores)")
plt.savefig("grafico_n.png")

plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=150)
plt.plot(list(range(tempo)), U,'b')
plt.title("Pol tica de contrata  o")
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("U (N mero de contrata  es/demiss es)")
plt.savefig("grafico_u.png")

plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=150)
plt.plot(list(range(tempo)), [i*100 for i in P],'g')
plt.title("Evolu  o do percentual de atividades completas no projeto.")
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("P (Percentual)")
plt.savefig("grafico_p.png")
```

4 Conclusão

Em suma, pode-se perceber que ao utilizar a modelagem matemática do método de otimização de recursos humanos, o comportamento do percentual de atividades são similares aos três casos simulados, **o que indica...** . Para garantir a confiabilidade da projeção obtida pelo método, é necessário que um estudo minucioso do histórico da empresa seja feito, para que cada parâmetro que informe o comportamento da equação realmente reflita o funcionamento da empresa.

5 Referências Bibliográficas

[1] C, Guilherme. *Optimum Measurement of Human Resources in Projects.* Recife