edusp

Probabilidade: Um Curso Introdutório

Carlos A. B. Dantas

1

Noções Básicas de Probabilidade

1.1 EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS

Hoje em dia grande quantidade de jogos são oferecidos, entre os quais citamos, por exemplo: a loteria federal, a sena e a loteria esportiva. É natural que se pense nas chances de ganhar um prêmio antes de decidir em qual deles jogar.

Um torcedor de futebol procura avaliar as chances de vitória de seu clube antes de cada jogo de que ele participa. A loteria esportiva foi criada em função do interesse do brasileiro pelo futebol e de sua paixão por jogos. Na loteria esportiva em cada rodada são escolhidos treze jogos e uma aposta consiste da escolha em cada jogo de um dos possíveis resultados, ou seja, vitória de um dos dois clubes ou o empate.

Muitas vezes ao acordar nos perguntamos: será que vai chover? De um modo ou de outro atribuímos um valor à chance de chover e então decidimos o tipo de roupa que usaremos e se levaremos ou não um guarda-chuva conosco.

Pode-se facilmente imaginar uma série de outras situações em que nos deparamos com a incerteza quanto à ocorrência de uma das possíveis alternativas na situação que se está vivenciando. Por exemplo, ao chegar a uma bifurcação em que haja duas opções de trajeto para se dirigir ao local desejado, procura-se avaliar as condições de trânsito nos dois caminhos para decidir-se por um deles.

Um analista de sistemas atribui chances aos possíveis números de usuários que estarão ligados a uma rede durante um certo período. Um engenheiro industrial avalia as chances de um determinado processo encontrar-se em equilíbrio, ou atribui chances para as possíveis proporções de peças defeituosas por ele produzidas. Um médico defronta-se com a incerteza em relação ao efeito provocado pela administração de um novo remédio a um determinado paciente.

Há uma grande classe de experimentos que, ao serem repetidos nas mesmas condições, produzem resultados diferentes. Ou, em outros termos, experimentos que, quando realizados, não apresentam resultados previsíveis de antemão.

DEFINIÇÃO 1.1.1 *Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado são denominados experimentos aleatórios.*

Damos a seguir alguns exemplos de experimentos aleatórios:

EXEMPLO 1.1.1 Quando retiramos um lote de peças num processo de produção, observamos que o número de peças defeituosas varia de lote para lote.

EXEMPLO 1.1.2 O número de chamadas telefônicas que chegam a uma central em um determinado intervalo de tempo não pode ser determinado de antemão.

EXEMPLO 1.1.3 Se escolhermos uma lâmpada do processo de fabricação e observarmos o seu tempo de duração, verificaremos que esse tempo varia de lâmpada para lâmpada.

EXEMPLO 1.1.4 Se lançarmos um dado sobre uma superfície plana e observarmos o número que aparece na face superior, não poderemos determinar *a priori* qual será esse número.

EXEMPLO 1.1.5 Se selecionarmos um casal de um conjunto de casais e observarmos o sexo do primogênito, não poderemos determiná-lo *a priori*, e o mesmo variará de casal para casal.

DEFINIÇÃO 1.1.2 *Os experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições conduzem ao mesmo resultado são denominados determinísticos.*

Eis alguns exemplos de experimentos determinísticos: Se deixarmos uma pedra cair de uma certa altura, podemos determinar sua posição e velocidade para qualquer instante de tempo posterior à queda. Se aquecermos a água a 100 graus centígrados, ela entrará em ebulição.

Nosso objetivo será construir um modelo matemático para representar experimentos aleatórios. Isto será feito em duas etapas: na primeira descreveremos para cada experimento aleatório o conjunto de seus resultados possíveis, e na segunda procuraremos atribuir pesos a cada resultado que reflitam a sua maior ou menor chance de ocorrer quando o experimento é realizado.

1.2 ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS

DEFINIÇÃO 1.2.1 *Denominaremos espaço amostral associado a um experimento o conjunto de seus resultados possíveis.*

O espaço amostral será representado por um conjunto S, cujos elementos serão denominados eventos simples ou pontos amostrais. Sempre que o experimento for realizado, suporemos que ocorrerá um e apenas um evento simples.

EXEMPLO 1.2.1 No exemplo 1.1.4, que corresponde ao lançamento de um dado, o espaço amostral é o conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

EXEMPLO 1.2.2 Uma moeda é lançada duas vezes sobre uma supefície plana. Em cada um dos dois lançamentos pode ocorrer cara (C) ou coroa ($\overline{C}$). O espaço amostral é o conjunto:

$$S = \{C\,C, C\,\overline{C}, \overline{C}\,C, \overline{C}\,\overline{C}\}.$$

EXEMPLO 1.2.3 Três peças são retiradas de uma linha de produção. Cada peça é classificada em boa (B) ou defeituosa (D). O espaço amostral associado a esse experimento é:

$$S = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB, DDD\}.$$

Nos exemplos 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3 o espaço amostral é finito. Apresentaremos a seguir exemplos de experimentos aleatórios cujos espaços amostrais não são finitos.

EXEMPLO 1.2.4 Uma moeda é lançada sucessivamente até que apareça cara pela primeira vez. Se ocorrer cara no primeiro lançamento o experimento termina. Se ocorrer coroa no primeiro lançamento, faz-se um segundo lançamento e se então ocorrer cara o experimento termina. Se não ocorrer cara nos dois primeiros lançamentos, faz-se um terceiro lançamento e caso não ocorra cara, faz-se um quarto lançamento e assim por diante até que ocorra a primeira cara, quando o experimento termina. O espaço amostral é o conjunto:

$$S = \{C, \overline{C}\,C, \overline{C}\,\overline{C}\,C, \ldots\}.$$

Note que os pontos desse espaço amostral podem ser postos em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais e portanto ele é infinito, porém enumerável.

EXEMPLO 1.2.5 Considere o exemplo 1.1.2 em que observamos o número de chamadas telefônicas que chegam a uma central durante um determinado intervalo de tempo. O espaço amostral é o conjunto: $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

EXEMPLO 1.2.6 Considere a situação do exemplo 1.1.3 em que observamos o tempo de vida de uma lâmpada. O espaço amostral é o conjunto dos números reais não negativos. Ou seja:

$$S = \{x : x\, real\,, x \geq 0\}.$$

EXEMPLO 1.2.7 A umidade do ar pode ser registrada por meio de um higrômetro. Um higrômetro pode ser acoplado a um dispositivo que possui um ponteiro que desliza sobre papel milimetrado e registra em cada instante a umidade do ar. Se as leituras são feitas no intervalo de tempo $[0, T]$ então o resultado é uma curva que a cada $t \in [0, T]$ associa $x(t)$ que designa a umidade do ar no instante t. É razoável supor-se que $x(t)$ é uma função contínua de t, no intervalo $[0, T]$. O espaço amostral nesse caso é o conjunto:

$$S = \{x : x \text{ é uma função contínua em } [0, T]\}.$$

Nos exemplos 1.2.4 e 1.2.5 o espaço amostral é infinito porém enumerável, isto é, pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais. Nos exemplos 1.2.6 e 1.2.7 o espaço amostral é infinito não enumerável.

Seja S o espaço amostral associado a um experimento aleatório.

DEFINIÇÃO 1.2.2 *Denominaremos de evento a todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento.*

Os eventos serão representados por subconjuntos do espaço amostral. Os eventos representados por um conjunto unitário, isto é, contendo somente um ponto do espaço amostral são denominados eventos simples. Diremos que o evento A ocorre quando o resultado do experimento é um evento simples pertencente a A.

EXEMPLO 1.2.8 No exemplo 1.2.3 consideremos o evento A: duas peças são boas. Tem-se :

$$A = \{BBD, BDB, DBB\}.$$

Então A ocorre se ocorrer um dos três eventos simples BBD, BDB, ou DBB.

EXEMPLO 1.2.9 No exemplo 1.2.4 consideramos o evento A: a primeira cara ocorre em um lançamento que é um múltiplo de 3. Temos então:

$$A = \{\overline{C}\,\overline{C}C,\ \overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C}\,C...\}.$$

Os eventos simples de A têm $3n-1$ coroas que precedem a ocorrência da primeira cara na posição $3n$, para $n = 1, 2, \ldots$

EXEMPLO 1.2.10 No exemplo 1.2.2 considere o evento B: o número de caras é igual ao número de coroas,

$$B = \{C\overline{C}, \overline{C}C\}.$$

1.3 OPERAÇÕES ENTRE EVENTOS

DEFINIÇÃO 1.3.1 *A reunião de dois eventos A e B, denotada $A \cup B$, é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorre.*

DEFINIÇÃO 1.3.2 *A interseção de dois eventos A e B, denotada $A \cap B$, é o evento que ocorre se ambos ocorrem.*

DEFINIÇÃO 1.3.3 *O complementar do evento A, denotado A^c, é o evento que ocorre quando A não ocorre.*

Como os eventos são subconjuntos do espaço amostral, podemos representar a reunião, a interseção de dois eventos e o complementar de um evento pelos diagramas utilizados para representar subconjuntos de um dado conjunto.

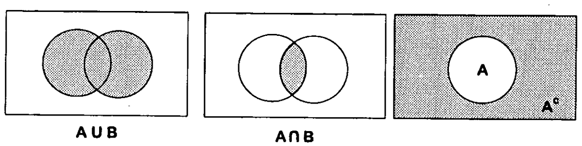


Figura 1.1: União, interseção e complementar de eventos.

EXEMPLO 1.3.1 Uma urna contém bolas numeradas de um a quinze. Uma bola é retirada da urna e seu número anotado. Sejam A e B os

seguintes eventos: A: o número da bola retirada é par, B: o número da bola retirada é múltiplo de 3. Determinemos os eventos $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c.

O espaço amostral S associado a esse experimento é o conjunto:

$$S = \{1, 2, \ldots, 15\}.$$

Para A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c temos:

$$A = \{2,4,6,8,10,12,14\} \quad B = \{3,6,9,12,15\}$$

$$A \cup B = \{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15\}$$

$$A \cap B = \{6,12\} \quad A^c = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}.$$

Dizemos que o evento A implica o evento B, que denotamos $A \subset B$, se para todo $\omega \in A$ tivermos $\omega \in B$. Isto corresponde à situação em que a ocorrência de A garante inevitavelmente a ocorrência de B.

Os eventos A e B são iguais se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Os eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos, se eles não podem ocorrer simultaneamente. Isto equivale a $A \cap B = \emptyset$.

Apresentamos no próximo lema algumas propriedades dessas operações entre eventos.

LEMA 1.3.1 *Sejam A, B e C eventos do espaço amostral S, temos:*

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Vamos demonstrar a e d e deixar b e c a cargo do leitor.

Para demonstrar a igualdade em a precisamos mostrar que todo elemento pertencente ao lado esquerdo pertence ao lado direito e vice-versa.

Se $\omega \in (A \cup B) \cap C$ então $\omega \in (A \cup B)$ e $\omega \in C$. Daí decorre que ($\omega \in A$ ou $\omega \in B$) e $\omega \in C$ e portanto ($\omega \in A$ e $\omega \in C$) ou ($\omega \in B$ e $\omega \in C$), ou seja, ($\omega \in (A \cap C)$) ou ($\omega \in (B \cap C)$), que implica $\omega \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Podemos percorrer estas implicações de trás para frente e verificar que são verdadeiras, donde decorre a igualdade dos conjuntos.

d) Seja $\omega \in (A \cap B)^c$, então $\omega \notin (A \cap B)$, que implica que $\omega \notin A$ ou $\omega \notin B$, que por sua vez implica que $\omega \in A^c$ ou $\omega \in B^c$, isto é, $\omega \in (A^c \cup B^c)$. Partindo de $\omega \in (A^c \cup B^c)$ e fazendo o percurso inverso nós obtemos a igualdade.

Vamos concluir esta seção definindo as operações de uma reunião e de uma interseção enumerável de eventos.

DEFINIÇÃO 1.3.4 *O evento* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ *é o evento que ocorre quando pelo menos um dos eventos* A_i*, para* $i = 1, 2, \ldots$ *ocorre.*

DEFINIÇÃO 1.3.5 *O evento* $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ *é o evento que ocorre quando todos os eventos* A_i*,* $i = 1, 2, \ldots$ *ocorrerem.*

1.4 DEFINIÇÕES: CLÁSSICA, FREQÜENTISTA E SUBJETIVA DE PROBABILIDADE

As primeiras tentativas de se atribuir probabilidades a eventos aleatórios surgem na Idade Média. Os jogos de dados já eram praticados desde vários milênios antes da era cristã, mas não há menção sobre cálculos associados a chances de ocorrência de resultados dos lançamentos. É na Idade Média, com Galileu, que encontramos a primeira vez o conceito de eventos "igualmente possíveis".

A definição que denominaremos de clássica baseia-se no conceito primitivo de eventos igualmente possíveis.

Consideremos um experimento com número *finito* de eventos simples. Vamos supor que podemos, por alguma razão, uma razão de simetria, por exemplo, atribuir a mesma chance de ocorrência a cada um dos eventos simples desse experimento. Nessas condições adotaremos a seguinte definição de probabilidade.

DEFINIÇÃO 1.4.1 *Consideremos um espaço amostral* S *com* N *eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja* A *um evento de* S *composto de* m *eventos simples. A probabilidade de* A*, que denotaremos* $P(A)$*, é definida por:*

$$P(A) = \frac{m}{N}. \tag{1.1}$$

Observemos que assim definida, a probabilidade é uma função definida na classe dos eventos ou, o que é equivalente, na classe dos subconjuntos do espaço amostral e satisfaz as propriedades estabelecidas no seguinte lema:

LEMA 1.4.1 *Seja* S *um espaço amostral finito satisfazendo as condições da definição 1.4.1. A probabilidade definida por (1.1) satisfaz:*

i) $P(A) \geq 0$*, para todo* $A \subset S$*;*

ii) Se A *e* B *são eventos mutuamente exclusivos, então:*

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

iii) $P(S) = 1$.

DEMONSTRAÇÃO i) Como $N > 0$ e $m \geq 0$ segue que $P(A) \geq 0$.

Suponha que A tem m_1 eventos simples e que B tem m_2 eventos simples. Como A e B são mutuamente exclusivos segue-se que eles não têm eventos simples comuns, logo o número de eventos simples de $A \cup B$ é $m_1 + m_2$. Usando a definição obtemos ii).

Como o número de eventos simples de S é N, segue da definição que $P(S) = 1$.

EXEMPLO 1.4.1 No experimento que consiste em lançar-se um dado, supondo-se o mesmo balanceado, pode-se atribuir probabilidade $\frac{1}{6}$ a cada um dos eventos simples 1, 2, 3, 4, 5, e 6. O evento "o número obtido quando se lança o dado é par" tem probabilidade 0,5.

Nas situações em que a definição clássica se aplica, para calcular a probabilidade de um evento A precisamos contar o número de eventos simples do espaço amostral e de A. Para facilitar essa tarefa exporemos na próxima seção alguns métodos de contagem.

1.4.1 Definição Freqüentista de Probabilidade

Ao concluirmos que um evento é aleatório, desejamos poder atribuir ao mesmo um número que reflita suas chances de ocorrência quando o experimento é realizado. Vimos acima que em determinadas circunstâncias podemos atribuir a mesma chance a todos os eventos simples associados ao experimento. Quando o número de eventos simples do espaço amostral não for finito, esta possibilidade fica afastada.

Uma outra maneira de determinar a probabilidade de um evento consiste em repetir-se o experimento aleatório, digamos n vezes, e anotar quantas vezes o evento A associado a esse experimento ocorre. Seja $n(A)$ o número de vezes em que evento A ocorreu nas n repetições do experimento. A razão

$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n} \tag{1.2}$$

é denominada freqüência relativa de A nas n repetições do experimento.

Repetindo-se o experimento um grande número de vezes, nas mesmas condições, e de modo que as repetições sucessivas não dependam dos resultados anteriores, observa-se que a freqüência relativa de ocorrências do evento A tende a uma constante p.

A estabilidade da freqüência relativa, para um grande número de observações, foi inicialmente notada em dados demográficos e em resultados de lançamentos de dados.

Buffon, no século XVIII, realizou 4 040 lançamentos de uma moeda e observou a ocorrência de 2 048 caras. A freqüência relativa observada foi 0,5064. Karl Pearson fez 24 000 lançamentos de uma moeda, tendo obtido freqüência relativa de 0,5005 para caras.

Os dados seguintes referem-se ao número de nascimentos durante um ano classificados quanto ao sexo.

Meses	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.
Masc.	3743	3550	4017	4173	4117	3944
Fem.	3537	3407	3866	3711	3775	3665
Total	7280	6957	7883	7884	7892	7609

Meses	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
Masc.	3964	3797	3712	3512	3392	3761
Fem.	3621	3596	3491	3391	3160	3371
Total	7585	7393	7203	6903	6552	7132

Para os dados do ano todo, a freqüência relativa de masculino foi $\frac{45682}{88273} = 0,5175$.

Seja S o espaço amostral associado a um experimento aleatório. Considerando-se n repetições desse experimento nas mesmas condições, observemos que a freqüência relativa está definida na classe dos eventos de S e suas propriedades são dadas no seguinte lema:

LEMA 1.4.2 *A freqüência relativa $f_{n,A}$ definida na classe dos eventos do espaço amostral S satisfaz as seguintes condições:*

a) Para todo evento A, $0 \leq f_{n,A} \leq 1$;

b) Se A e B são dois eventos de S mutuamente exclusivos, temos: $f_{n,A\cup B} = f_{n,A} + f_{n,B}$;

c) $f_{n,S} = 1$.

DEMONSTRAÇÃO A parte *a* decorre do fato que $n(A) \geq 0$. Como os eventos A e B são mutuamente exclusivos, toda vez que um deles ocorre o outro não ocorre e portanto o número de ocorrências de $A \cup B$ é igual a soma do número de ocorrências de A com o número de ocorrências de B, isto é: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Dividindo-se por n obtemos *b*. Como em toda realização do experimento algum ponto de S ocorre, segue-se que *c* é verdadeira.

Houve tentativas de se definir a probabilidade como limite da freqüência relativa, já que se observava que, como foi mencionado, a freqüência relativa $f_{n,A}$ se aproxima de uma constante quando n tende a infinito. Estes esforços não foram bem-sucedidos. Voltaremos a tratar deste assunto quando, no capítulo de teoremas limites, apresentarmos a lei dos grandes números. Por hora nos contentaremos em mencionar que as propriedades que a definição clássica satisfaz (lema 1.4.1) são também satisfeitas pela freqüência relativa (lema 1.4.2) e servem de base intuitiva para a definição axiomática que apresentaremos a seguir, após apresentarmos a definição subjetiva.

1.4.2 *Definição Subjetiva de Probabilidade*

A fundamentação freqüentista da probabilidade baseia-se na hipótese de que existe uma realidade física e que as probabilidades descrevem aspectos dessa realidade de modo análogo ao que as leis da mecânica fazem no caso de um modelo determinístico. A probabilidade de um evento associado a um experimento independe, portanto, do observador, sendo obtida como o valor do qual se aproxima a freqüência relativa de ocorrências desse evento em um grande número de repetições do experimento. Há no entanto situações em que a repetição do experimento não pode ser realizada e outras em que não pode ser realizada em idênticas condições. Eis alguns exemplos dessas situações:

a) Um paciente é submetido a um novo tipo de cirurgia e desejamos saber se ele ficará bom.

b) Desejamos saber se haverá um tremor de terra no Rio Grande do Norte no próximo ano.

c) Desejamos saber quem vencerá o próximo jogo entre São Paulo e Palmeiras.

No primeiro exemplo não se pode falar em repetição do experimento, pois, trata-se de uma nova técnica cirúrgica que estará sendo empregada. No segundo, temos notícia de raras ocorrências de tremores de terra no Rio Grande do Norte. No caso do jogo entre São Paulo e Palmeiras, sabemos que há estatísticas de um grande número de jogos entre São Paulo e Palmeiras, mas que as condições entre um jogo e outro variam bastante. Uma corrente de probabilistas considera a probabilidade de um evento como sendo a medida da crença que o observador possui na ocorrência do evento. Desse modo, a probabilidade será em geral diferente para distintas pessoas em decorrência das diferentes opiniões que elas têm sobre a ocorrência do evento. Em uma outra descrição equivalente, a probabilidade de um evento é o valor que cada observador estaria inclinado a apostar na realização do evento.

O leitor que toma contato com esta matéria pela primeira vez pode estranhar essa colocação e preocupar-se com a consistência da teoria que se constrói com essa formulação. Para lidar com essa questão são estabelecidas regras de comportamento racional para o observador. Desta forma, para que ele seja racional, suas opiniões precisam necessariamente obedecer certas regras, que são justamente os axiomas de probabilidade, apresentados logo a seguir.

Quanto à efetiva aferição das probabilidades subjetivas, utiliza-se em geral um padrão, ou seja, uma unidade de incerteza. Um especialista em sismologia, por exemplo, compara sua "opinião" sobre a ocorrência de um terremoto com a ocorrência de bola branca na retirada de uma bola de uma urna contendo m bolas brancas e n bolas pretas. Sua probabilidade para a ocorrência do terremoto seria então $\frac{m}{n+m}$. A probabilidade assim entendida é denominada subjetiva ou pessoal. Sugerimos ao leitor interessado consultar a bibliografia indicada no final do livro.

1.4.3 *Definição Axiomática de Probabilidade*

A probabilidade será definida numa classe de eventos do espaço amostral que satisfaz certas propriedades. Todas as operações que definimos entre os eventos conduzem a novos eventos que pertencem a essa classe. Para indicações de uma abordagem rigorosa sugerimos ao leitor consultar a bibliografia.

DEFINIÇÃO 1.4.2 *Probabilidade é uma função definida numa classe $\mathcal{F}$ de eventos de S que satisfaz as seguintes condições:*

a) $P(A) \geq 0$ *para todo* $A \in \mathcal{F}$;

b) Se $(A_n)_{n\geq 1}$ *é uma seqüência de eventos de* $\mathcal{F}$, *que são mutuamente exclusivos, então:*

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n); \tag{1.3}$$

c) $P(S) = 1$.

Observe que a propriedade (ii) do lema 1.4.1 foi substituída pela condição b desta definição.

No que segue vamos considerar espaços amostrais enumeráveis ou que são intervalos ou reunião de intervalos da reta. Em algumas situações consideraremos subconjuntos do R^n que são generalizações de intervalos.

Se o espaço amostral S é enumerável, podemos definir a probabilidade na classe de todos os subconjuntos de S que é denominado também conjunto das partes de S e denotado por $\mathcal{P}(S)$. Representemos nesse caso o espaço amostral S da seguinte forma $S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Associemos a cada ω_n, $n = 1, 2, \ldots$, um número $P(\omega_n)$, tal que $P(\omega_n) \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_n) = 1$.

Denominaremos $P(\omega_n)$ de probabilidade do evento simples ω_n, $n = 1, 2, \ldots$.

DEFINIÇÃO 1.4.3 *Seja S um espaço amostral enumerável e seja A um subconjunto de S. A probabilidade de A é definida da seguinte maneira:*

$$P(A) = \sum_{n:\omega_n \in A} P(\omega_n). \tag{1.4}$$

Podemos verificar que a probabilidade definida dessa maneira satisfaz os axiomas da definição 1.4.2. Sugerimos ao leitor que verifique esses axiomas quando o espaço amostral é finito.

1.5 MÉTODOS DE CONTAGEM

A definição clássica atribuiu a um evento A, composto de M eventos simples, probabilidade $\frac{M}{N}$, onde N é o número de eventos simples do espaço amostral. Para calcularmos a probabilidade de um evento qualquer precisamos portanto contar o número de eventos simples desse evento. Veremos nesta seção alguns métodos de contagem que nos auxiliarão nessa tarefa.

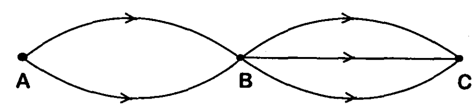
Um procedimento muito elementar de contagem tem sido apresentado sob o título de princípio fundamental da contagem. Nós seguiremos essa tradição e iniciaremos pela apresentação desse princípio.

1.5.1 Princípio Fundamental da Contagem

Suponhamos que uma tarefa pode ser executada em duas etapas. Se a primeira etapa pode ser realizada de n maneiras e a segunda

etapa de m maneiras então a tarefa completa pode ser executada de $n.m$ maneiras.

EXEMPLO 1.5.1 Desejamos ir da cidade A à cidade C. Os caminhos de A a C passam pela cidade B. Se há dois caminhos que ligam A a B e três caminhos que ligam B a C, de quantas maneiras podemos ir de A a C ? O número de caminhos que ligam A a C é seis. Se designarmos por 1 e 2 os caminhos que ligam A a B e por 3, 4 e 5 os caminhos que ligam B a C, então os seis caminhos que ligam A a C são: 13, 14, 15, 23, 24, 25.



DEFINIÇÃO 1.5.1 *Uma amostra de tamanho n de um conjunto C que tem N elementos é um subconjunto de n elementos retirados de C.*

As amostras podem ser retiradas de um conjunto de duas maneiras: com reposição ou sem reposição. Nas amostras retiradas com reposição cada elemento selecionado é reposto no conjunto antes da próxima retirada. No caso de amostras sem reposição, como o nome diz, os elementos não são repostos após cada retirada.

Os elementos da amostra poderão ainda ser ordenados ou não.

DEFINIÇÃO 1.5.2 *Uma amostra é dita ordenada se os seus elementos forem ordenados, isto é, se duas amostras com os mesmos elementos, porém em ordens distintas, forem consideradas diferentes.*

EXEMPLO 1.5.2 Considere uma classe com vinte estudantes. O conselho de classe é formado por três estudantes: um presidente, um secretário e um tesoureiro. Ao escolhermos uma amostra de três estudantes para formarem o conselho, deveremos considerar as amostras ordenadas, pois ainda que duas amostras sejam formadas pelas mesmas pessoas, se elas executam tarefas distintas, devem ser consideradas como diferentes.

As amostras não ordenadas sem reposição, de tamanho n de um conjunto com N elementos, são denominadas na maioria dos textos elementares de probabilidade ou de combinatória de combinações de N elementos tomados n a n. Quando não for estabelecida nenhuma qualificação, estaremos admitindo que os elementos são todos distintos e que a amostra é não ordenada. As amostras ordenadas sem reposição são denominadas arranjos. Utilizaremos tanto um nome como outro.

Vamos agora determinar o número de amostras de cada tipo.

LEMA 1.5.1 *O número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho n, de um conjunto com N elementos, que será denotado por $(N)_n$, é dado por:*

$$(N)_n = N(N-1)...(N-n+1). \tag{1.5}$$

DEMONSTRAÇÃO As amostras são retiradas sem reposição, portanto o primeiro elemento da amostra pode ser retirado de N maneiras, o segundo de $(N-1)$ maneiras, e assim por diante até o n-ésimo que pode ser retirado de $(N-(n-1))$ maneiras. Pelo princípio fundamental da contagem, o número de maneiras de retirar uma amostra de tamanho n é dado pelo produto desses números.

EXEMPLO 1.5.3 No exemplo 1.5.2 o número de maneiras que o conselho de classe pode ser formado é igual ao número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho 3 de um conjunto com 20 elementos. Pelo lema temos:

$$(20)_3 = 20.19.18 = 6\,840\,.$$

EXEMPLO 1.5.4 Considere o conjunto das quatro primeiras letras do alfabeto $\{a, b, c, d\}$. O número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho 3 é igual a $(4)_3 = 4.3.2 = 24$. Para referência futura nós aproveitamos para listar essas 24 amostras:

$$\begin{array}{cccc} abc & abd & acd & bcd \\ acb & adb & adc & bdc \\ bac & bad & cad & cbd \\ bca & bda & cda & cdb \\ cab & dab & dac & dbc \\ cba & dba & dca & dcb. \end{array}$$

LEMA 1.5.2 *O número de amostras ordenadas com reposição de tamanho n, de um conjunto com N elementos é igual a N^n.*

DEMONSTRAÇÃO De fato, como após cada retirada o elemento retirado é reposto, então em cada uma das n retiradas temos N escolhas possíveis. Pelo princípio fundamental da contagem o número dessas amostras é N^n.

EXEMPLO 1.5.5 No exemplo 1.5.4 determinamos o número de amostras ordenadas sem reposição, de tamanho 3 do conjunto $\{a, b, c, d\}$. Vamos agora determinar o número de amostras ordenadas com reposição.

O número de amostras de tamanho 3 retiradas com reposição é pelo lema 1.5.2 igual a 4^3. A título de ilustração vamos obter esse número exibindo o conjunto dessas amostras.

As amostras ordenadas de tamanho 3, com reposição, do conjunto $\{a, b, c, d\}$ incluem:

(i) as amostras sem reposição, que coincidem com as amostras com reposição em que não há repetição. O número dessas é 24 e estão listadas no exemplo 1.5.4.

(ii) as amostras onde há pelo menos uma repetição. Vamos listar as amostras em que o elemento "a" aparece repetido pelo menos uma vez

$$\begin{array}{cccc} aaa & aab & aac & aad \\ aba & aca & ada & \\ baa & caa & daa & \end{array}$$

O leitor poderá completar o conjunto dessas amostras notando que falta listar as amostras em que aparecem repetidos os elementos

b, c ou d. Nós obtivemos 24 amostras ordenadas sem reposição e dez amostras ordenadas em que aparece repetido o elemento a. O leitor obterá trinta amostras em que aparecem repetidos os elementos b, c, e d. Assim o número de amostras ordenadas com reposição é 64, que coincide com o valor dado pelo lema.

EXEMPLO 1.5.6 Suponha que a data de nascimento de qualquer pessoa pode ser considerada igualmente distribuída entre os 365 dias de um ano. Se em uma sala existem n pessoas, qual é a probabilidade de que todas tenham nascido em dias diferentes?

Denotemos por A esse evento. O número de conjuntos de n dias em que nasceram as n pessoas é igual ao número de amostras ordenadas com reposição de tamanho n de um conjunto com 365 elementos, que é igual a 365^n. Datas distintas de nascimento das n pessoas correspondem a amostras ordenadas sem reposição de tamanho n de um conjunto com 365 elementos, cujo número é $(365)_n$. Assim,

$$P(A) = \frac{(365)_n}{365^n} = (1 - \frac{1}{365})(1 - \frac{2}{365}) \cdots (1 - \frac{n-1}{365})$$

Pode-se mostrar que para $n = 23, P(A) < \frac{1}{2}$, e portanto a probabilidade do complementar de A, que é o evento "pelo menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia", é maior que $\frac{1}{2}$. Observemos que o problema que resolvemos é um caso particular do seguinte: Se de um conjunto de N elementos retirarmos amostras ordenadas com reposição de tamanho n, qual é a probabilidade de que a amostra não tenha nenhum elemento repetido? De fato, as amostras em que não há elemento repetido são as amostras ordenadas sem reposição. Se p denota essa probabilidade, então:

$$p = \frac{(N)_n}{N^n}. \tag{1.6}$$

EXEMPLO 1.5.7 Um icosaedro regular tem suas faces numeradas de 1 a 20. O icosaedro é lançado quatro vezes. Qual é a probabilidade de que não apareça nenhuma face repetida?

O espaço amostral pode ser considerado como o conjunto das amostras ordenadas com reposição de tamanho 4 de um conjunto com 20 elementos. Não ocorrer repetição equivale a retirar amostras ordenadas sem reposição. A razão do número dessas amostras nos dá a probabilidade p procurada.

$$p = \frac{(20)_4}{20^4} = 0,0363.$$

DEFINIÇÃO 1.5.3 *Uma amostra ordenada sem reposição de tamanho n de um conjunto com n elementos será denominada uma permutação dos n elementos.*

LEMA 1.5.3 *O número de permutações de n elementos, denotado P_n, é dado por:*

$$P_n = n! \tag{1.7}$$

onde $n! = 1.2 \ldots n$.

DEMONSTRAÇÃO Basta substituir N por n na expressão de $(N)_n$ dada pela fórmula 1.5.

EXEMPLO 1.5.8 Considere o conjunto dos inteiros de 1 a 3. O número de permutações desse conjunto é $P_3 = 6$ e as permutações são as seguintes:

$$123, \ 132, \ 213, \ 231, \ 312, \ \text{e } 321.$$

DEFINIÇÃO 1.5.4 *Uma amostra é dita não ordenada se os seus elementos não forem ordenados, assim uma amostra não ordenada de tamanho n coincide com um subconjunto de tamanho n.*

Uma amostra não ordenada, de tamanho n, sem reposição, de um conjunto com N elementos será também, como mencionamos, denominada uma combinação de N elementos tomados n a n. O número dessas amostras será denotado $C_{N,n}$.

LEMA 1.5.4 *O número de amostras não ordenadas sem reposição de tamanho n, de um conjunto com N elementos, é dado por:*

$$C_{N,n} = \frac{(N)_n}{P_n}. \tag{1.8}$$

DEMONSTRAÇÃO Vamos designar o conjunto de N elementos por $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Uma amostra não ordenada sem reposição de tamanho n é um subconjunto desse conjunto com n elementos. Consideremos, por exemplo, a amostra de tamanho n composta pelos elementos: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Esta amostra pode gerar $n!$ amostras ordenadas sem reposição. Como isto é válido para qualquer amostra não ordenada e o número dessas é $C_{N,n}$ temos:

$$\begin{aligned}(N)_n &= C_{N,n}.P_n \\ C_{N,n} &= \frac{(N)_n}{P_n} = \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!}.\end{aligned}$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador por $(N-n)!$ podemos reescrever $C_{N,n}$ da seguinte forma:

$$C_{N,n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{1.9}$$

que é o coeficiente binomial $\binom{N}{n}$.

EXEMPLO 1.5.9 Seis times participam de um torneio de basquete. Cada uma das equipes enfrenta todas as demais. Quantos jogos serão realizados?

Para determinar o número de jogos, precisamos calcular o número de amostras não ordenadas de tamanho 2 de um conjunto com 6 elementos. Pela fórmula (1.8) temos:

$$C_{6,2} = \frac{6.5}{2} = 15.$$

Como mencionamos acima, $C_{N,n}$ coincide com o coeficiente binomial $\binom{N}{n}$. Este nome deriva do fato que $\binom{N}{n}$ é o coeficiente de $a^n b^{N-n}$ na expansão do binômio $(a+b)^N$. De fato, temos:

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^n b^{N-n}. \tag{1.10}$$

Deixamos a cargo do leitor provar essa igualdade e as seguintes propriedades dos coeficientes binomiais:

$$\binom{N}{n} = \binom{N}{N-n} \; ; \; \binom{N}{n} = \binom{N-1}{n-1} + \binom{N-1}{n}.$$

EXEMPLO 1.5.10 Uma comissão formada por três estudantes deve ser escolhida em uma classe de vinte estudantes para organizar os jogos interclasses. De quantas maneiras essa comissão pode ser escolhida?

Como a comissão deve ter três membros distintos, as amostras devem ser selecionadas sem reposição, e como a ordem da escolha dos participantes é irrelevante, trata-se de amostras não ordenadas. Pela fórmula (1.8) temos:

$$C_{20,3} = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{20.19.18}{6} = 1\,140.$$

Quando selecionamos uma amostra não ordenada de tamanho n de um conjunto com N elementos, nós particionamos esse conjunto em dois subconjuntos; um com n elementos e o outro com $N-n$ elementos. Vimos que isto pode ser feito de $\binom{N}{n}$ maneiras. É natural que procuremos resolver o seguinte problema: Dado um conjunto com N elementos, de quantas maneiras podemos particioná-lo em k subconjuntos, de modo que o primeiro tenha n_1 elementos, o segundo tenha n_2 elementos, ... e o k-ésimo tenha n_k elementos, com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$.

Em vez de dar a resposta no caso geral, vamos considerar o exemplo que corresponde à distribuição de cartas no jogo do bridge. Nesse jogo participam quatro jogadores e as 52 cartas do baralho são distribuídas entre eles. Trata-se portanto de particionar um conjunto com 52 elementos em quatro subconjuntos, cada um com 13 elementos. Vamos então determinar de quantas maneiras isto pode ser feito.

Podemos selecionar 13 cartas a serem dadas ao primeiro jogador de tantas maneiras quantas são as amostras não ordenadas sem reposição (combinações) de tamanho 13 de um conjunto com 52 elementos. Esse número é igual a $\binom{52}{13}$. Restam no baralho 39 cartas. Podemos escolher 13 cartas para o segundo jogador de $\binom{39}{13}$ maneiras. Das 26 restantes, podemos escolher 13 para o terceiro jogador de $\binom{26}{13}$ maneiras. As 13 restantes irão para o quarto jogador. Assim o número de maneiras de particionar as 52 cartas do baralho em quatro subconjuntos com 13 cartas em cada um deles é:

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}.$$

O mesmo raciocínio nos fornecerá a prova do lema que enunciamos a seguir:

LEMA 1.5.5 *O número de partições de um conjunto de N elementos em k subconjuntos, com $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elementos, respectivamente, é igual a:*

$$\frac{N!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\,. \tag{1.11}$$

DEMONSTRAÇÃO A linha de raciocínio é a mesma do exemplo. Nós selecionamos inicialmente do conjunto com N elementos um subconjunto de tamanho n_1. Do conjunto remanescente com $N - n_1$ elementos selecionamos um subconjunto com n_2 elementos. Dos $N-(n_1+n_2)$ retiramos n_3 e assim sucessivamente até que na última etapa restam n_k elementos e o processo termina. A primeira retirada pode ser feita de $\binom{N}{n_1}$ maneiras, a segunda de $\binom{N-n_1}{n_2}$, e assim por diante, sendo que a última pode ser feita de $\binom{N-(n_1+n_2+\ldots+n_{k-2})}{n_{k-1}}$ maneiras. Pelo princípio fundamental de contagem, o número de maneiras de retirar $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, restando n_k elementos para o último subconjunto, é igual ao produto:

$$\binom{N}{n_1}\binom{N-n_1}{n_2}\cdots\binom{N-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-2})}{n_{k-1}}.$$

Substituindo nessa fórmula cada coeficiente binomial pela sua expressão em termos dos fatoriais obtemos:

$$\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\cdot\frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-(n_1+n_2))!}\cdots$$

$$\cdots\frac{(N-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-2}))!}{n_{k-1}!(N-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}))!}$$

$$=\frac{N!}{n_1!n_2!..n_k!}\,.$$

EXEMPLO 1.5.11 No jogo de pôquer com quatro participantes é comum usar-se 32 cartas. As cartas pertencem a um de quatro naipes, a saber: paus, espadas, ouros e copas. As denominações das cartas são: sete, oito, nove, dez, valete, dama, rei e ás. Numa primeira etapa são dadas cinco cartas a cada jogador. Consideremos as cartas dadas a um jogador na primeira etapa. Qual é a probabilidade de que ele receba um par de ases?

Vamos considerar o espaço amostral como o conjunto das amostras não ordenadas sem reposição, de tamanho 5, de um conjunto com 32 elementos. Pelo lema 1.5.4 o número de pontos do espaço amostral é $\binom{32}{5}$.

No pôquer, dizer que o jogador recebe um par de ases quer dizer que ele só tem um par e três outras cartas distintas. Vamos designar por A o evento "o jogador recebe um par de ases". Para calcular o número de pontos de A, observemos que podemos selecionar os dois ases de $\binom{4}{2}$ maneiras; podemos selecionar as outras três cartas que não devem ser ases e ser distintas de $\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3$ maneiras. Esse produto corresponde a selecionar três denominações do conjunto {sete, oito, nove, dez, valete, dama, rei} e de cada uma das quatro cartas das denominações selecionadas, escolher uma carta. Assim:

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3}{\binom{32}{5}}=0,11\,.$$

Observemos que alternativamente nós podemos adotar para espaço amostral associado à distribuição de cartas na primeira etapa o conjunto das partições de 32 cartas em cinco subconjuntos, quatro com cinco cartas cada um, correspondendo às cartas entregues aos quatro jogadores, e um quinto subconjunto com 12 cartas que são as que permanecem sem serem distribuídas. Vamos determinar o número de pontos do espaço amostral e calcular a probabilidade de que um jogador tenha um par de ases. O número dessas partições pelo lema 1.5.5 é igual a: $\frac{(32)!}{(12)!(5!)^4}$. Consideremos agora as partições em que um jogador especificado recebe um par de ases. Uma mão com um par de ases e outras três cartas diferentes do ás e diferentes entre si pode ser escolhida de $\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3$ maneiras. Para cada mão desse jogador com o par de ases o número de maneiras que os três outros jogadores podem receber suas cartas é igual ao número de partições de um conjunto de 27 cartas em quatro subconjuntos, um deles com doze cartas e os outros três com cinco cartas cada um. O número dessas partições é igual a $\frac{27!}{12!(5!)^3}$. Para a probabilidade de obtermos um par de ases, obtemos:

$$\frac{\dfrac{\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3(27)!}{(12)!(5!)^3}}{\dfrac{(32)!}{(12)!(5!)^4}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3}{\binom{32}{5}}$$

que é o mesmo valor que obtivemos acima.

1.6 PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE

Vamos apresentar nesta seção algumas das propriedades da probabilidade que decorrem diretamente ou quase diretamente dos axiomas da definição 1.4.2.

LEMA 1.6.1 *Denotemos por ϕ o evento impossível. Temos $P(\phi) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO Seja A um evento de S de probabilidade positiva; seja ϕ o evento impossível, podemos exprimir o evento A da seguinte maneira: $A = A\bigcup_{i=1}^{\infty}\phi_i$, onde para todo $i \geq 1, \phi_i = \phi$.

Então pelo axioma b da definição 1.4.2 segue que:

$$P(A) = P(A) + \sum_{i=1}^{\infty} P(\phi).$$

Subtraindo $P(A)$ de ambos os membros, segue-se que a igualdade acima só faz sentido se $P(\phi) = 0$.

LEMA 1.6.2 *Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente exclusivos, então:*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.12}$$

DEMONSTRAÇÃO Basta considerarmos a seqüência $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $A_k = \phi, k \geq n+1$ e aplicar b da definição 1.4.2. Como pelo lema anterior $P(\phi) = 0$ o resultado segue.

LEMA 1.6.3 *Se A^c é o complementar do evento A, então:*

$$P(A^c) = 1 - P(A). \tag{1.13}$$

DEMONSTRAÇÃO A e A^c são eventos mutuamente exclusivos cuja reunião é S. Daí decorre que $P(A) + P(A^c) = 1$. Subtraindo-se $P(A)$ tem-se o resultado do lema.

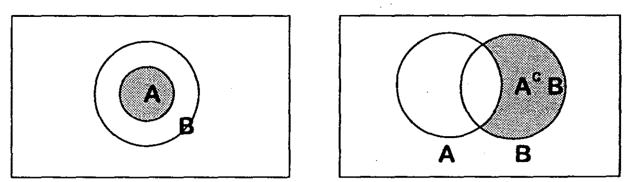
LEMA 1.6.4 *Sejam A e B dois eventos do espaço amostral S, tais que $A \subset B$, tem-se:*

$$P(A) \leq P(B). \tag{1.14}$$

DEMONSTRAÇÃO Como $A \subset B$, segue-se que $B = A \cup A^cB$. Da aditividade da probabilidade (lema 1.6.2) segue que:

$$P(B) = P(A) + P(A^cB)$$

Como $P(A^cB) \geq 0$ concluímos que (1.14) é verdadeira.



LEMA 1.6.5 *Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral S, tem-se:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.15}$$

DEMONSTRAÇÃO $A \cup B$ pode ser escrito como uma reunião de dois eventos mutuamente exclusivos: $A \cup B = A \cup A^c B$. Do lema 1.6.2 segue que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c B). \tag{1.16}$$

Notando que $B = A^c B \cup AB$, vem:

$$P(B) = P(A^c B) + P(AB).$$

Tirando-se o valor de $P(A^c B)$ e substituindo na expressão (1.16), nós obtemos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

EXEMPLO 1.6.1 No exemplo 1.3.1 consideramos um urna contendo bolas numeradas de um a quinze. Suponha que uma bola é retirada da urna ao acaso, isto é, de modo que cada bola tem probabilidade $\frac{1}{15}$ de ser retirada. Calcule as probabilidades dos eventos A e B definidos no exemplo 1.3.1, isto é, A: o número da bola retirada é par; B: o número da bola retirada é múltiplo de 3, e dos eventos AB, $A \cup B$ e $(A \cup B)^c$.

Como os eventos A, B e AB têm respectivamente 7, 5 e 2 pontos e o espaço amostral 15, temos: $P(A) = \frac{7}{15}$, $P(B) = \frac{5}{15}$, $P(AB) = \frac{2}{15}$.

Podemos obter $P(A \cup B)$ diretamente, contando o número de pontos de $A \cup B$ ou utilizando a expressão (1.15). Como $A \cup B$ tem dez pontos, tem-se: $P(A \cup B) = \frac{10}{15}$. Substituindo os valores de $P(A)$, $P(B)$ e de $P(AB)$ em (1.15), obtém-se esse mesmo valor. Finalmente $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \frac{5}{15}$.

No exemplo 1.5.11, calculamos a probabilidade do jogador receber um par de ases. Fixada qualquer denominação, a probabilidade de o jogador receber um par dessa denominação é a mesma que a de receber um par de ases.

EXEMPLO 1.6.2 Nas condições do Exemplo 1.5.11, calcular a probabilidade de o jogador receber um par de ases ou um par de reis.

Vamos designar por A o evento "receber um par de ases" e por B o evento "receber um par de reis". O evento "receber um par de ases ou um par de reis" é o evento $A \cup B$. Notemos que pela definição de "um par" no jogo de pôquer o jogador somente pode receber um par de uma certa carta e três outras cartas distintas entre si e daquelas do par. Assim os eventos "um par de ases" e "um par de reis" são mutuamente exclusivos e portanto

$$P(AB) = 0.$$

Pela expressão (1.15) temos então:

$$P(A \cup B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3}{\binom{32}{5}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3}{\binom{32}{5}}.$$

LEMA 1.6.6 *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos do espaço amostral S, temos:*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = 1 - P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\Big), \tag{1.17}$$

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = P(A_1) + P(A_1^c A_2) + \cdots + P(A_1^c A_2^c \cdots A_{n-1}^c A_n), \tag{1.18}$$

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{1.19}$$

DEMONSTRAÇÃO A relação:

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c$$

é uma extensão da propriedade c do lema 1.3.1. Temos:

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)^c = P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\Big).$$

Pelo lema 1.6.3 segue que:

$$1 - P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\Big),$$

donde segue a expressão (1.17).

Mostremos que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_1^c A_2 \cup \cdots \cup A_1^c A_2^c \cdots A_{n-1}^c A_n \tag{1.20}$$

e que os eventos do lado direito da igualdade são mutuamente exclusivos.

Considere $x \in (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$. Então $x \in A_k$, para algum $k, 1 \leq k \leq n$. Tome o menor k tal que $x \in A_k$, então $x \in A_1^c A_2^c..A_{k-1}^c A_k$. Logo x pertence ao conjunto do lado direito de (1.20).

Tomemos dois eventos quaisquer do lado direito de (1.20) e verifiquemos que são mutuamente exclusivos. Sejam i e j inteiros tais que: $1 \leq i < j \leq n$. Consideremos $A_1^c A_2^c \cdots A_{i-1}^c A_i$ e $A_1^c A_2^c \cdots A_{j-1}^c A_j$. Note que o primeiro desses conjuntos está contido em A_i e o segundo está contido em A_i^c e portanto eles são mutuamente exclusivos. Tomemos agora x pertencente ao lado direito em (1.20). Então para algum k, $1 \leq k \leq n$, $x \in A_1^c A_2^c \cdots A_{k-1}^c A_k$. Logo $x \in A_k$ e portanto $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Para provar (1.18) basta calcular a probabilidade de ambos os lados da igualdade (1.20). Como os eventos da união no lado direito são mutuamente exclusivos, o resultado decorre do lema 1.6.2.

A desigualdade (1.19) segue diretamente da fórmula (1.18), pois como foi visto acima $A_1^c A_2^c \cdots A_{i-1}^c A_i \subset A_i$, e portanto

$$P(A_1^c A_2^c \cdots A_{i-1}^c A_i) \leq P(A_i) \text{ , para todo } i = 2, 3, \cdots, n.$$

Somando-se obtemos o resultado desejado.

Exemplo 1.6.3 Uma moeda balanceada é lançada dez vezes. Vamos calcular a probabilidade que ocorra cara em pelo menos um dos lançamentos de números 2, 4, 6 ou 8.

Vamos designar que o evento cara ocorra no lançamento $2k$ por A_{2k}, para $k = 1, 2, 3, 4$. O evento de interesse é: $\bigcup_{k=1}^{4} A_{2k}$. Vamos utilizar a expressão (1.16) para calcular a probabilidade desse evento. Notemos que o evento $\bigcap_{k=1}^{4} A_{2k}^c$ corresponde à ocorrência de coroa nos lançamentos de números 2, 4, 6 e 8. O número de pontos do espaço amostral que satisfazem esta condição é 2^6, pois, nós fixamos coroa nesses quatro lançamentos e nos outros seis temos duas possibilidades em cada um deles. Deste modo:

$$P(\bigcup_{k=1}^{4} A_{2k}) = 1 - P(\bigcap_{k=1}^{4} A_{2k}^c) = 1 - \frac{2^6}{2^{10}} = 0,0625.$$

Antes de encerrarmos esta seção vamos enunciar a generalização do lema 1.6.5 para uma reunião de um número inteiro positivo de eventos do espaço amostral.

Lema 1.6.7 *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de um espaço amostral onde está definida uma probabilidade P, temos:*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} P(A_i A_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \tag{1.21}$$

Não daremos aqui a prova desse lema.

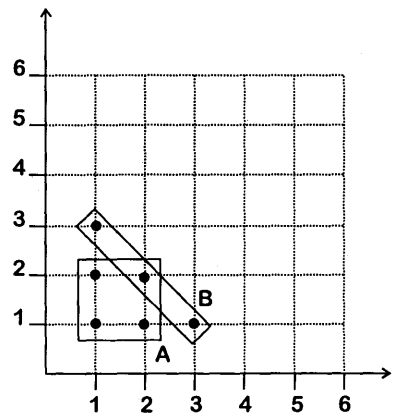
1.7 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Os conceitos de probabilidade condicional e de independência de eventos são conceitos típicos da Teoria das Probabilidades e que servem para distingui-la de outros ramos da Matemática. Vamos introduzir o conceito de probabilidade condicional considerando uma situação especial em que o espaço amostral tem eventos equiprováveis.

Vamos considerar o experimento que consiste em lançar um dado duas vezes em uma superfície plana e observar o número de pontos na face superior do dado em cada um dos lançamentos. Vamos supor que não se presencie os lançamentos do dado, mas se receba a seguinte informação: "em cada um dos lançamentos, o número de pontos observados é menor ou igual a dois". Vamos denotar por A esse evento. Nestas condições, pergunta-se: qual é a probabilidade de que a soma dos pontos nos dois lançamentos seja igual a quatro? Ou seja, designando por B o evento "soma dos pontos nos dois lançamentos igual a quatro", queremos saber qual é a probabilidade de ocorrer o evento B, sabendo-se que o evento A ocorreu? Para o espaço amostral associado aos dois lançamentos e para os eventos A e B temos:

$$S = \{(i, j) : i, j \text{ são inteiros } 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$$

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}\ ,\quad A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$



Dizer que o evento A ocorreu é equivalente a dizer que pode não se levar em conta qualquer ponto do espaço amostral que não pertença a A, ou seja, pode considerar-se o evento A como novo espaço amostral para o experimento. Desta maneira a probabilidade de B ocorrer dado A é igual a $\frac{1}{4}$, pois dos quatro pontos de A apenas o ponto $(2, 2) \in B$ e os quatro pontos são equiprováveis.

Para espaços amostrais com eventos equiprováveis pode-se adotar este procedimento como definição de probabilidade condicional do evento B dado o evento A. Ele serve, no entanto, de motivação para a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.7.1 *Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral e supondo que $P(A) > 0$, a probabilidade condicional de B dado A é definida por:*

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}\,. \tag{1.22}$$

Retornemos ao exemplo acima. Temos $AB = \{(2, 2)\}$ e portanto $P(AB) = \frac{1}{36}$, $P(A) = \frac{4}{36}$. Aplicando-se a fórmula (1.22) obtemos o valor $\frac{1}{4}$, já encontrado acima.

Da fórmula (1.22) que define a probabilidade condicional do evento B dado o evento A, obtemos a seguinte expressão:

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)\,. \tag{1.23}$$

Esta expressão e sua generalização para uma interseção de n eventos permitem construir probabilidades em espaços amostrais que representam experimentos realizados em seqüência, em que a ocorrência de um evento na k-ésima etapa depende das ocorrências nas $k - 1$ etapas anteriores. Vejamos inicialmente um exemplo para $n = 2$.

EXEMPLO 1.7.1 Considere uma urna com três bolas brancas e sete bolas vermelhas. Duas bolas são retiradas da urna, uma após a outra sem reposição. Determinar o espaço amostral e as probabilidades associadas a cada ponto amostral.

O espaço amostral é o conjunto $\{B_1B_2, B_1V_2, V_1B_2, V_1V_2\}$

O evento B_1B_2 é o evento que corresponde a ocorrer branca na primeira retirada e branca na segunda. Para os outros pontos do espaço amostral a interpretação é análoga.

Utilizando (1.23) temos:

$$\begin{aligned}
P(B_1B_2) &= P(B_1)P(B_2 \mid B_1) = \frac{3}{10}\frac{2}{9} = \frac{2}{30} \\[2ex]
P(B_1V_2) &= P(B_1)P(V_2 \mid B_1) = \frac{3}{10}\frac{7}{9} = \frac{7}{30} \\[2ex]
P(V_1B_2) &= P(V_1)P(B_2 \mid V_1) = \frac{7}{10}\frac{3}{9} = \frac{7}{30} \\[2ex]
P(V_1V_2) &= P(V_1)P(V_2 \mid V_1) = \frac{7}{10}\frac{6}{9} = \frac{14}{30}\,.
\end{aligned}$$

A fórmula (1.23) pode ser generalizada de modo a exprimir a probabilidade da interseção de n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ por meio das probabilidades condicionais sucessivas.

Lema 1.7.1 *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos do espaço amostral S, onde está definida a probabilidade P, tem-se:*

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\cdots A_n) &= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots \\ &\quad P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Demonstração Vamos demonstrar por indução. Para $n = 2$ esta fórmula se reduz à fórmula (1.23). Suponha que (1.24) vale para $n-1$ eventos, isto é,

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) &= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots \\ &\quad P(A_{n-1} \mid A_1A_2\cdots A_{n-2}). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Aplicando-se a fórmula (1.22) aos eventos $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ e A_n temos:

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n) = P(A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

Substituindo nesta igualdade a expressão de $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})$ dada por (1.25), obtemos (1.24).

Exemplo 1.7.2 Vamos retomar o exemplo 1.7.1 e calcular a probabilidade de obter o seguinte resultado: $B_1B_2V_3V_4B_5$ em cinco retiradas de bolas da urna, sem reposição. O índice representa o número da retirada. Pela fórmula (1.24) temos:

$$\begin{aligned} P(B_1B_2V_3V_4B_5) &= P(B_1)P(B_2 \,|\, B_1)P(V_3 \,|\, B_1B_2). \\ &\quad .P(V_4 \,|\, B_1B_2V_3)P(B_5 \,|\, B_1B_2V_3V_4) \\ &= \frac{3}{10}\frac{2}{9}\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{1}{6} = \frac{1}{120}. \end{aligned}$$

As probabilidades condicionais sucessivas foram calculadas levando-se em conta as mudanças na composição da urna após cada retirada. Assim após a primeira retirada, em que saiu branca, a urna fica com duas brancas e sete vermelhas; após a segunda em que também saiu branca, fica com uma branca e sete vermelhas; após a terceira em que saiu vermelha, fica com uma branca e seis vermelhas e assim por diante.

1.7.1 *Fórmula das Probabilidades Totais e Fórmula de Bayes*

Lema 1.7.2 *Seja $B_1, B_2, \ldots, B_n$ uma partição do espaço amostral S, isto é, esses eventos são mutuamente exclusivos e sua reunião é S; seja A um evento e P uma probabilidade definida nos eventos de S, temos:*

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k). \tag{1.26}$$

Demonstração Como $S = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$

$$A = AS = A(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \bigcup_{k=1}^{n} AB_k$$

Calculando-se a probabilidade de A obtemos:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(AB_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k).$$

Esta última igualdade foi obtida exprimindo $P(AB_k)$ pela fórmula (1.23).

A fórmula (1.26) é conhecida como a fórmula das probabilidades totais. Note que ela permite calcular a probabilidade de um evento A quando se conhece as probabilidades de um conjunto de eventos disjuntos cuja reunião é o espaço amostral (uma partição de S) e as probabilidades condicionais de A dado cada um deles.

Exemplo 1.7.3 São dadas três urnas com as seguintes composições: a urna um tem três bolas brancas e cinco vermelhas, a urna dois tem quatro bolas brancas e duas vermelhas e a urna três tem uma bola branca e três vermelhas. Escolhe-se uma das três urnas de acordo com as seguintes probabilidades: urna um com probabilidade $\frac{2}{6}$, urna dois com probabilidade $\frac{3}{6}$ e urna três com probabilidade $\frac{1}{6}$. Uma bola é retirada da urna selecionada. Calculemos a probabilidade da bola escolhida ser branca.

Designemos por A o evento que corresponde a retirar uma bola branca da urna selecionada, e por B_i, para $1 \leq i \leq 3$, o evento "a urna i é selecionada". Temos então $A = A(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

Utilizando a fórmula (1.26) para $n = 3$ vem:

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3).$$

Os dados do exemplo nos fornecem:

$$P(B_1) = \frac{2}{6},\ P(B_2) = \frac{3}{6},\ P(B_3) = \frac{1}{6};$$

$$P(A \mid B_1) = \frac{3}{8},\ P(A \mid B_2) = \frac{4}{6},\ P(A \mid B_3) = \frac{1}{4}.$$

Substituindo-se esses valores na expressão acima obtemos

$$P(A) = \frac{1}{2}\,.$$

A probabilidade condicional, definida na classe dos eventos do espaço amostral, satisfaz as propriedades estabelecidas no seguinte lema.

LEMA 1.7.3 *Seja A um evento tal que $P(A) > 0$. A probabilidade condicional satisfaz:*

i) Para todo evento B $P(B \mid A) \geq 0$;

ii) Se B_1, $B_2, \ldots, B_n$ são eventos mutuamente exclusivos então:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \mid A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k \mid A); \tag{1.27}$$

iii) Se S denota o espaço amostral $P(S \mid S) = 1$.

DEMONSTRAÇÃO A parte i decorre imediatamente da definição de probabilidade condicional e do fato da probabilidade de um evento ser sempre não negativa.

A parte ii decorre da definição de probabilidade condicional e da aditividade da probabilidade, expressa pela fórmula (1.12). De fato, sejam $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eventos mutuamente exclusivos

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \mid A) &= \frac{P((\bigcup_{k=1}^{n} B_k) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_{k=1}^{n}(B_k \cap A))}{P(A)} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P(B_k \mid A)P(A)}{P(A)}\,. \end{aligned}$$

A demonstração de iii é imediata, pois, $P(S \mid S) = \frac{P(S)}{P(S)} = 1$.

Vamos agora deduzir a fórmula de Bayes. Como veremos, sua dedução é bem simples, porém permite interpretação bastante profunda e que é responsável pelo desenvolvimento de uma linha de fundamentos da estatística que hoje em dia é denominada Bayesiana.

LEMA 1.7.4 *Seja B um evento e A_1 e A_2 uma partição do espaço amostral S, isto é $A_1 \cap A_2 = \phi$ e $A_1 \cup A_2 = S$. Seja P uma probabilidade definida nos eventos de S. Temos para $i = 1, 2$:*

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}\,. \tag{1.28}$$

DEMONSTRAÇÃO Pela definição de probabilidade condicional temos:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)},$$

mas $P(A_iB) = P(A_i)P(B \mid A_i)$ e expressando $P(B)$ pela fórmula das probabilidades totais (1.26) nós obtemos a fórmula (1.28).

Vamos fazer algumas observações sobre a fórmula de Bayes:

a) Ela permanece válida quando se considera uma partição finita do espaço amostral S, ou seja, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uma partição de S, e B é um evento de S, então, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B \mid A_k)P(A_k)}\,. \tag{1.29}$$

b) Como $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uma partição do espaço amostral S, isto é, $\cup_{i=1}^{n} A_i = S$ e $A_i \cap A_j = \phi$, segue-se que $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$. É fácil verificar que $\sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid B) = 1$. De fato isto decorre das propriedades *ii* e *iii* do lema 1.7.3.

EXEMPLO 1.7.4 Uma companhia monta rádios cujas peças são produzidas em três de suas fábricas denominadas A_1, A_2 e A_3. Elas produzem, respectivamente, 15%, 35% e 50% do total. As probabilidades das fábricas A_1, A_2 e A_3 produzirem peças defeituosas são 0,01; 0,05 e 0,02, respectivamente. Uma peça é escolhida ao acaso do conjunto das peças produzidas. Essa peça é testada e verifica-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade que tenha sido produzida pela fábrica A_i, para $i = 1, 2, 3$?

Designemos por B o evento "a peça é boa" e por D o evento "a peça é defeituosa". Sabemos que: $P(A_1) = 0,15$, $P(A_2) = 0,35$ e que $P(A_3) = 0,5$, pois a peça é escolhida ao acaso do conjunto das peças. Sabemos ainda dos dados do problema que $P(D \mid A_1) = 0,01$, $P(D \mid A_2) = 0,05$ e $P(D \mid A_3) = 0,02$. Desejamos calcular $P(A_i \mid D)$, isto é, a probabilidade condicional de a peça ter sido produzida na fabricada A_i, para $i = 1, 2, 3$, sabendo-se que ela é defeituosa.

Pela fórmula de Bayes temos, para $i = 1, 2, 3$:

$$P(A_i \mid D) = \frac{P(D \mid A_i)P(A_i)}{P(D \mid A_1)P(A_1) + P(D \mid A_2)P(A_2) + P(D \mid A_3)P(A_3)}$$

$$P(D \mid A_1)P(A_1) + P(D \mid A_2)P(A_2) + P(D \mid A_3)P(A_3) =$$

$$= (0,01)(0,15) + (0,05)(0,35) + (0,02)(0,5) = 0,0290.$$

Para $i = 1$, o numerador é $P(D \mid A_1)P(A_1) = 0,0015$, para $i = 2$ é $P(D \mid A_2)P(A_2) = 0,0175$ e para $i = 3$ é $P(D \mid A_3)P(A_3) = 0,01$. Substituindo-se, obtemos:

$$P(A_1 \mid D) = 0,052, \; P(A_2 \mid D) = 0,603, \; P(A_3 \mid D) = 0,345.$$

O uso da fórmula de Bayes nos fornece a seguinte interpretação: como as fábricas A_1, A_2 e A_3 são responsáveis, respectivamente, por 15%, 35% e 50% da produção, se retirarmos uma peça

ao acaso da linha de produção, as probabilidades de que essa peça venha das fábricas A_1, A_2 e A_3 são respectivamente iguais a 0,15, 0,35 e 0,5. Por outro lado se retiramos a peça ao acaso e deconhecemos a procedência da peça, isto é, de que fábrica ela veio, e somos informados de que ela é defeituosa, então levando em conta esta informação proveniente do experimento, as probabilidades que a peça tenha vindo de A_1, A_2 ou de A_3 passam a valer, respectivamente, 0,052, 0,603 e 0,345.

1.8 INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS

Vamos introduzir a noção de independência para dois eventos e posteriormente estender a definição para um número qualquer de eventos.

DEFINIÇÃO 1.8.1 *Sejam A e B dois eventos e suponha que $P(A) > 0$. O evento B é dito independente do evento A se:*

$$P(B \mid A) = P(B). \tag{1.30}$$

Esta definição corresponde à noção intuitiva da independência do evento B em relação ao evento A, pois diz que a probabilidade de B não se altera com a informação de que o evento A ocorreu.

Se o evento B é independente do evento A decorre da fórmula (1.23) que:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1.31}$$

Se o evento B é independente do evento A então nós esperamos que A também seja independente de B. De fato isto ocorre, como é verificado a seguir:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

A primeira igualdade é a definição de probabilidade condicional, e a segunda decorre da fórmula (1.31).

Se a fórmula (1.31) é válida, então essas igualdades mostram que A é independente de B. Logo A e B são independentes se e somente se a fórmula (1.31) valer. Então podemos adotar essa fórmula como a definição de independência. Note que esta fórmula, apesar de não ser tão intuitiva como a expressão da definição 1.8.1, é simétrica em relação aos dois eventos, e além disso ela é adequada para a generalização da definição de independência para mais que dois eventos.

EXEMPLO 1.8.1 Vamos considerar uma urna, como no exemplo 1.7.1, que contém três bolas brancas e sete bolas vermelhas. Retiram-se duas bolas da urna, pórem, após a primeira retirada, a bola é reposta na urna.

Vamos supor que as dez bolas são numeradas de 1 a 10, as brancas recebem números de 1 a 3 e as vermelhas de 4 a 10. Podemos considerar como espaço amostral associado a esse experimento o conjunto:

$$S = \{(i,j) : i, j \,\text{inteiros}\,, 1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq 10\}\,.$$

Se partirmos da hipótese de que qualquer das 10 bolas tem a mesma chance de ser escolhida, como as duas retiradas são feitas com reposição, podemos associar aos pontos do espaço amostral probabilidade $\frac{1}{100}$. Obtemos para as probabilidades dos eventos, B_1B_2, B_1V_2, V_1B_2, V_1V_2, onde o índice indica a retirada, os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
P(B_1B_2) &= \frac{9}{100} \\
P(B_1V_2) &= \frac{21}{100} \\
P(V_1B_2) &= \frac{21}{100} \\
P(V_1V_2) &= \frac{49}{100}\,.
\end{aligned}$$

Vamos justificar a primeira igualdade, pois a justificação para as demais é a mesma. Pode-se tirar branca na primeira vez de três maneiras e na segunda retirada também de três maneiras, pois a primeira bola é reposta na urna antes da retirada da segunda. Assim o evento B_1B_2 pode ocorrer de nove maneiras e o espaço amostral

tem 100 pontos. Para os eventos B_1 e B_2 temos:

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \\
P(B_2) &= \frac{30}{100} = \frac{3}{10}\,.
\end{aligned}$$

Observe que tanto B_1 quanto B_2 têm 30 pontos amostrais,

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{(i,j) : 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 10\} \\
B_2 &= \{(i,j) : 1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq 3\}\,.
\end{aligned}$$

De modo análogo obtemos $P(V_1)$ e $P(V_2)$. Vemos assim que:

$$\begin{aligned}
P(B_1B_2) &= P(B_1)P(B_2) \\
P(B_1V_2) &= P(B_1)P(V_2) \\
P(V_1B_2) &= P(V_1)P(B_2) \\
P(V_1V_2) &= P(V_1)P(V_2).
\end{aligned}$$

Esse exemplo nos mostra formalmente que os eventos B_1 e B_2; B_1 e V_2; V_1 e B_2 e V_1 e V_2 são independentes. A seguir partiremos da independência e usaremos a fórmula do produto (1.31) para definir a probabilidade em espaços amostrais associados a experimentos repetidos.

Vamos encontrar com freqüência situações em que um experimento é repetido um número arbitrário de vezes. Se consideramos um evento associado a cada repetição, precisamos generalizar a definição de independência para mais de dois eventos.

Antes de prosseguir, daremos dois exemplos que auxiliarão a determinar as condições que devem ser impostas para definir a independência de três ou mais eventos.

EXEMPLO 1.8.2 Duas moedas são lançadas. Consideremos os seguintes eventos: A_1 – cara no primeiro lançamento, A_2 – cara no segundo lançamento e A_3 – nos dois lançamentos ocorre a mesma face.

O espaço amostral é o conjunto $S = \{CC, C\overline{C}, \overline{C}C, \overline{C}\,\overline{C}\}$, onde C designa cara e $\overline{C}$ coroa.

Suporemos que a moeda é balanceada e portanto que os pontos do espaço amostral têm probabilidade $\frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{lll} A_1 = \{CC, C\overline{C}\}, & A_2 = \{CC, \overline{C}C\}, & A_3 = \{CC, \overline{C}\,\overline{C}\}, \\ A_1A_2 = \{CC\}, & A_1A_3 = \{CC\}, & A_2A_3 = \{CC\}, \\ A_1A_2A_3 = \{CC\}. & & \end{array}$$

Calculando-se as probabilidades desses eventos, obtemos:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_2) = P(A_2A_3) = P(A_1A_3) = \frac{1}{4},$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4}.$$

Daí decorre que vale a igualdade (1.31) para os eventos tomados dois a dois, mas

$$P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

EXEMPLO 1.8.3 Lança-se uma moeda três vezes. O espaço amostral é o conjunto das seqüências de caras e coroas de comprimento 3. Consideremos os eventos:

$$\begin{aligned} A &= \{CCC, CC\overline{C}, C\overline{C}C, C\overline{C}\,\overline{C}\} \\ B &= \{C\overline{C}C, C\overline{C}\,\overline{C}, \overline{C}CC, \overline{C}C\overline{C}\} \\ C &= \{C\overline{C}\,\overline{C}, \overline{C}CC, \overline{C}C\overline{C}, \overline{C}\,\overline{C}C\}. \end{aligned}$$

Decorre daí que: $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

Temos:

$$AB = \{C\overline{C}C, C\overline{C}\,\overline{C}\}$$

$$BC = \{C\overline{C}\,\overline{C}, \overline{C}CC, \overline{C}C\overline{C}\}$$

$$AC = \{C\overline{C}\,\overline{C}\}$$

$$ABC = \{C\overline{C}\,\overline{C}\}.$$

Calculando-se as probabilidades desses eventos, obtemos o seguinte:

$$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = \frac{1}{8} \neq P(A)P(C)$$

$$P(BC) = \frac{3}{8} \neq P(B)P(C)$$

$$P(ABC) = \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

As igualdades acima mostram que os eventos A e B são independentes, que os eventos B e C e os eventos A e C não são independentes e que A, B e C satisfazem a forma produto.

Sugerimos ao leitor que considere no exemplo 1.8.3 os eventos A_1 – cara no primeiro lançamento, A_2 – cara no segundo lançamento, e A_3 – cara no terceiro lançamento e verifique que, para esses eventos, todas as quatro expressões acima se transformam em igualdades, isto é:

$$\begin{aligned} P(A_1A_2) &= P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1A_3) &= P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2A_3) &= P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1A_2A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Esta análise mostra que, para definirmos independência de três eventos, devemos impor que essas quatro igualdades valham. Esses exemplos nos sugerem que para definir a independência para n eventos, sendo n um inteiro positivo, devemos exigir a validade da forma produto para todo subconjunto de k dos n eventos, para $2 \leq k \leq n$.

DEFINIÇÃO 1.8.2 *Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se:*

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \tag{1.33}$$

para todo $k = 2, 3, \ldots n$ e todo $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

O número de equações que devem ser satisfeitas nesta definição é $2^n - n - 1$.

De fato, para todo k, $2 \leq k \leq n$, há uma equação para cada subconjunto de tamanho k dos n eventos, e como o número desses subconjuntos é $\binom{n}{k}$, há para cada k esse número de equações. O total de equações é, portanto:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - n - 1.$$

Para obter esta última igualdade, utilizamos a fórmula (1.10) pondo $a = b = 1$.

1.9 EXERCÍCIOS

1. Defina o espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios: (a) lançam-se dois dados e anota-se a configuração obtida; (b) conta-se o número de peças defeituosas, no intervalo de uma hora, de uma linha de produção; (c) investigam-se famílias com quatro crianças e anota-se a configuração obtida, segundo o sexo; (d) numa entrevista telefônica com dez assinantes, pergunta-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa; (e) de um fichário com seis nomes, sendo três de mulheres e três de homens, seleciona-se ficha após ficha até que o último nome de mulher seja selecionado.

2. Uma moeda é lançada três vezes. Descreva o espaço amostral. Considere os eventos A_i: cara no i-ésimo lançamento, para $i = 1, 2, 3$. Determine os seguintes eventos: (a) $A_1^c \cap A_2$; (b) $A_1^c \cup A_2$; (c) $(A_1^c \cap A_2^c)^c$; (d) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$.

3. Suponha que o espaço amostral é o intervalo $[0, 1]$ dos reais. Considere os eventos $A = [x : 1/4 \leq x \leq 5/8]$ e $B = [x : 1/2 \leq x \leq 7/8]$. Determine os eventos: (a) A^c; (b) $A \cap B^c$; (c) $(A \cup B)^c$; (d) $A^c \cup B$.

4. Quais das seguintes relações são verdadeiras: (a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (A \cap C)$; (b) $A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$; (c) $A^c \cap B = A \cup B$; (d) $(A \cup B)^c \cap C = A^c \cap B^c \cap C^c$.

5. Sejam A, B e C três eventos de um espaço amostral. Determine expressões em função de A, B e C para os eventos: (a) somente A ocorre; (b) todos os três eventos ocorrem; (c) pelo menos dois eventos ocorrem; (d) exatamente dois eventos ocorrem; (e) não mais do que dois eventos ocorrem; (f) A e B ocorrem, mas C não ocorre; (g) pelo menos um dos eventos ocorre; (h) exatamente um dos eventos ocorre; (i) nenhum dos eventos ocorre.

6. Prove e interprete as seguintes identidades:
   (a) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$; (b) $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$.

7. Prove que: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

8. Mostre que:
   (a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$; (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$;
   (c) $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$; (d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k} = \binom{n+m}{r}$, $n \leq r \leq m$;
   (e) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{2n}{n}$; (f) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$;
   (g) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$;
   (h) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$, com n par.

9. A, B e C são três eventos de um mesmo espaço amostral, tais que: $P(B) = 0,5$, $P(C) = 0,3$, $P(B \mid C) = 0,4$ e $P[A \mid (B \cap C)] = 0,5$. Calcule $P(A \cap B \cap C)$.

10. Prove que se A e B são dois eventos de um espaço amostral S e P é uma probabilidade definida nos eventos de S, então: $P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

11. Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço de probabilidades. Sabendo-se que $P(A) = 0,7$ e $P(B) = 0,6$, determine o valor máximo e mínimo de $P(A \cap B)$.

12. Sejam A, B e C três eventos independentes dois a dois tal que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Dado que $P(A) = P(B) = P(C) = x$, determine o maior valor possível de x.

13. Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral. Se A e B são independentes, prove que A e B^c; A^c e B; A^c e B também são independentes.

14. Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral. Suponha que $P(A) = 0,4$ e $P(A \cup B) = 0,7$ e $P(B) = p$. (a) Para que valor de p os eventos A e B são mutuamente exclusivos? (b) Para que valor de p os eventos A e B são independentes?

15. Prove que: (a) Se $P(A^c) = \alpha$ e $P(B^c) = \beta$, então $P(A \cap B) \geq 1 - \alpha - \beta$; (b) Se $P(A \mid B) \geq P(A)$, então $P(B \mid A) \geq P(B)$.

16. Mostre que: $P(E^c \cap F^c) = 1 - P(E) - P(F) + P(E \cap F)$.

17. Uma urna contém duas bolas brancas e duas pretas. As bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição. (a) Qual é a probabilidade de sair uma bola preta na primeira retirada? (b) Qual é a probabilidade de que a primeira bola preta apareça somente na quarta retirada? (c) Qual é a probabilidade de que a segunda bola preta apareça logo na segunda retirada? (d) Qual é a probabilidade de que a segunda bola preta apareça somente na quarta retirada?

18. Um dado é viciado de modo que um número par é duas vezes mais provável que um número ímpar. Encontre a probabilidade de que: (a) um número par ocorra; (b) um número primo ocorra; (c) um número primo par ocorra em um lançamento.

19. Um número é escolhido, ao acaso, entre os números inteiros de 1 a 20. Considere os eventos: A : o número escolhido é múltiplo de 3; B: o número escolhido é par.
Descreva os eventos $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap B^c$ e calcule suas probabilidades.

20. No exercício 1 considere os pontos amostrais em a) e c) equiprováveis. Em a) calcule a probabilidade da soma dos pontos dos dois dados ser igual a seis. Em c) calcule a probabilidade de uma família ter três filhos do sexo masculino.

21. Em média, 5% dos produtos vendidos por uma loja são devolvidos. Qual é a probabilidade de que, nas quatro próximas unidades vendidas deste produto, duas sejam devolvidas?

22. Um comitê é formado por quatro homens e duas mulheres. Dois membros do comitê são selecionados sucessivamente, ao acaso e sem reposição. Calcule a probabilidade de cada um dos resultados: HH, HM, MH e MM.

23. Uma cidade tem 30.000 habitantes e três jornais: A, B e C. Uma pesquisa de opinião revela que 12.000 lêem A, 8.000 lêem B; 7.000 lêem A e B; 6.000 lêem C; 4.500 lêem A e C; 1.000 lêem B e C e 500 lêem A, B e C. Selecionamos ao acaso um habitante dessa cidade. Qual a probabilidade de que ele leia: (a) pelo menos um jornal? (b) somente um jornal?

24. É dada a distribuição de 300 estudantes segundo o sexo e a área de concentração:

	Biologia	Exatas	Humanas
Masculino	52	40	58
Feminino	38	32	80

Um estudante é sorteado ao acaso.

(a) Qual é a probabilidade de que ele seja do sexo feminino e da área de humanas? (b) Qual é a probabilidade de que ele seja do sexo masculino e não seja da área de biológicas? (c) Dado que foi sorteado um estudante da área de humanas, qual é a probabilidade de que ele seja do sexo feminino?

25. Um restaurante popular apresenta dois tipos de refeições: salada completa e um prato à base de carne. 20% dos fregueses do sexo masculino preferem salada, e 30% das mulheres preferem carne. 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

H : o freguês é homem, M : o freguês é mulher,
A : o freguês prefere salada, B : o freguês prefere carne.

Calcule:

(a) $P(H)$, $P(A \mid H)$ e $P(B \mid H)$;

(b) $P(A \cup H)$ e $P(A \cap H)$;

(c) $P(M \mid A)$.

26. Um indivíduo tem n chaves, das quais somente uma abre uma porta. Ele seleciona, a cada tentativa, uma chave ao acaso sem reposição e tenta abrir a porta. Qual é a probabilidade de que ele abra a porta na k-ésima tentativa ($k = 1, 2, \ldots, n$)?

27. O jogo da loto consiste em selecionar-se cinco dezenas do conjunto de cem dezenas de 00 a 99. Qual a probabilidade de se acertar a quina (5 dezenas) se marcar-se 10 dezenas no volante?

28. Duas cartas são retiradas simultaneamente de um baralho. Qual é a probabilidade de que: (a) ambas sejam de espadas; (b) uma seja de espadas e a outra de copas.

29. Suponha que existam dez livros que devem ser colocados em uma estante, sendo quatro de matemática, três de química, dois de física e um dicionário. Se quisermos que os livros de mesmo assunto fiquem juntos, de quantas maneiras isso será possível?

30. Em um jornal existem dez jornalistas. Se quisermos colocar três jornalistas trabalhando na sede do jornal, cinco em reportagem externa e dois de reserva, de quantas maneiras isso poderá ser feito?

31. Ache a probabilidade de que uma mão de pôquer seja um: (a) *royal flush* (dez, valete, dama, rei e ás do mesmo naipe); (b) quatro de um mesmo tipo (quatro cartas do mesmo valor); (c) trinca e par (um par e uma trinca de cartas do mesmo valor); (d) seguida (cinco cartas em seqüência, não importando o naipe); (e) três cartas do mesmo tipo (três valores iguais mais duas cartas diferentes); (f) dois pares (dois pares do mesmo valor mais uma outra carta); (g) um par (um par de valores iguais mais três cartas diferentes).

32. Uma moeda é lançada até se obter a primeira cara. Determine: (a) a probabilidade de que isto ocorra em um lançamento de número par; (b) a probabilidade de que isto ocorra em um lançamentos de número ímpar.

33. Um dispositivo eletrônico é formado por três partes. Cada parte tem probabilidade de 0,9 de funcionar bem e 0,1 de falhar. O funcionamento de cada parte não depende das demais. O dispositivo falha se duas ou mais falham. Calcule a probabilidade de falha do dispositivo.

34. Três máquinas A, B e C produzem 50%, 30% e 20%, respectivamente, do total de peças de uma fábrica. As porcentagens de produção defeituosa destas máquinas são 3%, 4% e 5%. Se uma peça é selecionada aleatoriamente, ache a probabilidade de ela ser defeituosa. Se a peça selecionada é defeituosa, encontre a probabilidade de ter sido produzida pela máquina C.

35. A probabilidade de que a porta de uma casa esteja trancada à chave é $3/5$. Um chaveiro possui 25 chaves das quais três abrem essa porta. Qual a probabilidade de que um indivíduo entre na casa, se ele puder escolher, ao acaso, somente uma chave do chaveiro?

36. Numa urna onde existiam oito bolas brancas e seis azuis, foi perdida uma bola de cor desconhecida. Uma bola foi retirada da urna. Qual é a probabilidade de a bola perdida ser branca, dado que a bola retirada é branca?

37. A probabilidade de que um aluno saiba a resposta de uma questão de um exame de múltipla escolha é p. Há m respostas possíveis para cada questão, das quais apenas uma é correta. Se o aluno não sabe a resposta para uma dada questão, ele escolhe ao acaso uma das m respostas possíveis. (a) Qual é a probabilidade de o aluno responder corretamente uma questão?

(b) Se o aluno respondeu corretamente a questão, qual é a probabilidade de que ele tenha "chutado" a resposta?

38. De quantas maneiras diferentes r bolas distintas podem ser distribuídas, ao acaso, em n urnas numeradas de 1 a n? Qual é a probabilidade de que pelo menos uma urna tenha duas bolas? Qual é a probabilidade de cada urna conter no máximo uma bola?

39. Seleciona-se ao acaso uma amostra casual de tamanho r de uma população de tamanho n, sem reposição. Qual é a probabilidade de que um elemento fixado seja incluído na amostra? Se a amostragem for com reposição, qual é a probabilidade de que um elemento fixado seja incluído pelo menos uma vez na amostra?

40. Distribuindo-se r bolas distintas em n urnas numeradas de 1 a n, qual é a probabilidade de que a urna 1 seja ocupada por r_1 bolas, a urna 2 seja ocupada por r_2 bolas, ... , a urna n seja ocupada por r_n bolas, de modo que $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$, $r_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$?

41. Refaça o exercício 40, supondo bolas idênticas ou indistinguíveis.

42. De uma urna com n bolas numeradas de $1, 2, \ldots, n$, seleciona-se ao acaso e sem reposição todas as bolas, uma de cada vez. Dizemos que ocorre um pareamento na j-ésima seleção $(1 \leq j \leq n)$, se nessa seleção for selecionada a bola de número j. Determine a probabilidade de que (a) ocorra pelo menos um pareamento; (b) não ocorra pareamento algum; (c) ocorram exatamente r pareamentos, $r = 0, 1, \ldots, n$.

43. Suponha que r bolas distintas sejam distribuídas aleatoriamente em n urnas. Determine a probabilidade de que uma urna específica contenha exatamente k bolas, $k = 0, 1, \ldots, r$.

2

Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade

2.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Para descrever um experimento aleatório é conveniente associar valores numéricos aos seus resultados. Como os eventos que ocorrem quando se realizam experimentos aleatórios variam a cada realização dos mesmos, também variarão os valores numéricos que lhes são associados. Em alguns experimentos os resultados já são descritos numericamente; no exemplo 1.1.2 observamos o número de chamadas telefônicas que chegam a uma central, que é um inteiro não negativo; no exemplo 1.1.3 observamos o tempo de duração de uma lâmpada, que é um número real não negativo, e no exemplo 1.1.4 o número de pontos que aparecem na face superior de um dado, que é um inteiro de 1 a 6. No entanto, em um grande número de situações, os pontos do espaço amostral não são expressos numericamente. No exemplo 1.1.5 observa-se o sexo do primogênito representado pela letra M para masculino e pela letra F para feminino. Neste caso o espaço amostral é o conjunto $\{M, F\}$. No exemplo 1.2.2 observamos cara (C) ou co-