

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE  
ENGENHARIA MECATRÔNICA

MATHEUS NUNES FRANCO

IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADOR PID PARA SISTEMA DE SUSPENSÃO  
*ATIVA QUARTER-CAR*

Joinville  
2024

## RESUMO

Este trabalho apresenta o projeto e a implementação de um controlador PID para um sistema de suspensão ativa *Quarter-car*. O estudo inclui a modelagem matemática do sistema, a análise de resposta transitória e requisitos de desempenho, a análise de estabilidade e a análise do lugar das raízes para um controlador proporcional. Além disso, o projeto do controlador PID é realizado utilizando o segundo método de Ziegler-Nichols de sintonização.

**Palavra-chave:** PID. *Quarter-car*. sistema. Ziegler-Nichols.

# 1 INTRODUÇÃO

## INTRODUÇÃO

A suspensão ativa é um componente fundamental em veículos modernos, sendo crucial para a melhoria do conforto e da estabilidade durante a condução. Diferente das suspensões passivas e semi-ativas, a suspensão ativa utiliza atuadores controlados eletronicamente para ajustar continuamente as forças aplicadas às rodas do veículo, proporcionando uma resposta mais precisa e adaptativa às condições da estrada.

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento e a implementação de um controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) para um sistema de suspensão ativa. O controlador PID foi escolhido devido à sua eficácia e simplicidade em ajustar a resposta do sistema para alcançar um desempenho ótimo. O foco está em otimizar a resposta transitória e a estabilidade do sistema de suspensão ativa, assegurando um equilíbrio entre conforto do passageiro e manuseio do veículo.

A fundamentação teórica aborda os diferentes tipos de suspensões (ativa, semi-ativa e passiva), destacando suas características e aplicações específicas. Em seguida, apresenta-se o modelo matemático do sistema de suspensão ativa baseado no modelo quarter-car, frequentemente utilizado em estudos de controle devido à sua capacidade de simplificação e eficácia na análise de desempenho. Além disso, detalhamos o funcionamento dos controladores PID e o método de sintonia de Ziegler-Nichols, utilizado para determinar os parâmetros ótimos do controlador.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 SUSPENSÃO ATIVA, SEMI-ATIVA E PASSIVA

Os diferentes tipos de dissipação de energia mecânica necessários para diversas aplicações resultaram no desenvolvimento de amortecedores específicos com diferentes comportamentos. A principal característica a ser avaliada em um amortecedor para uma determinada condição é o método de dissipação de energia (QUEIROZ, 2023).

As suspensões ativas utilizam amortecedores controlados eletronicamente, por meio de sistemas capazes de ler os movimentos do pistão e exercer uma força contrária ao movimento, na medida exata para dissipar a energia da oscilação. Esse tipo de sistema consome energia do carro, sendo recomendado para utilitários, como SUVs e veículos de carga (QUEIROZ, 2023).

As suspensões semi-ativas possuem fluidos ferromagnéticos em seus amortecedores, capazes de alterar sua viscosidade a partir de mudanças no campo elétrico ao qual estão submetidos. As propriedades desse fluido são controladas por um sistema eletrônico que consome menos energia do que os amortecedores ativos, mas proporciona boa eficiência, conforto e segurança para os carros (QUEIROZ, 2023).

As suspensões passivas utilizam apenas óleo hidráulico com viscosidade definida. Portanto, não respondem tão bem quanto as suspensões ativas e semi-ativas em situações diversificadas. São mais baratas, sendo amplamente utilizadas em carros populares, destinados a passeio e transporte de pequenas cargas (QUEIROZ, 2023).

### 2.2 SISTEMAS DE SUSPENSÃO ATIVA

A suspensão ativa é um sistema composto por molas, amortecedores, atuadores e um controlador. Nos automóveis, a suspensão ativa atenua distúrbios vibratórios, principalmente oriundos do movimento do veículo sobre estradas irregulares, proporcionando conforto ao motorista e aos passageiros. Além disso, ela mantém o sistema roda-pista em contato, oferecendo um melhor controle do carro. A suspensão ativa é caracterizada pela aplicação de uma força extra ao sistema, proveniente de atuadores pneumáticos e hidráulicos (QUEIROZ, 2023).

### 2.3 MODELO QUARTER-CAR EM SISTEMAS DE SUSPENSÃO ATIVA

Para se buscar alcançar o objetivo de atenuar vibrações verticais, produzidas por imperfeições na superfície de rodovias, sobre o corpo de veículos equipados

com suspensões ativas, propõe-se o uso de um controlador PID. Para tanto, deve-se buscar uma representação do sistema de suspensão ativa na forma de uma equação matemática, o que exige que tal sistema seja matematicamente modelado conforme suas características físicas.

Segundo (OGATA, 2010), um sistema veicular de suspensão ativa pode ser modelado a partir do modelo *quarter-car*, ilustrado pela Figura 1, o qual considera apenas um quarto do corpo do veículo.

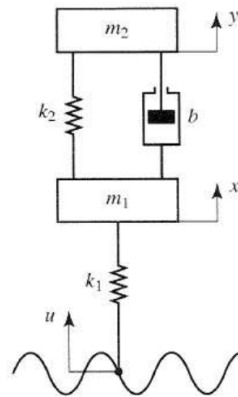


Figura 1 – Sistema simplificado de suspensão (Quarter-Car)

Onde:

- **m2** = massa suspensa do carro.
- **m1** = massa não suspensa (massa da roda).
- **y** = descolamento da massa suspensa.
- **x** = deslocamento da massa não suspensa.
- **u** = deslocamento em relação ao solo.
- **k2** = Rigidez da mola suspensa.
- **k1** = Rigidez do pneu.
- **b** = amortecimento do amortecedor da suspensão.

O modelo quarter-car é frequentemente utilizado em técnicas de projeto de sistemas de controle por permitir a otimização de conjuntos variados de critério de desempenho, os quais são formulados a partir de conceitos físicos transformados em representações matemáticas. E este modelo será utilizado para modelagem matemática do sistema neste trabalho.

## 2.4 CONTROLADORES PID

O controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) é amplamente utilizado em sistemas de controle devido à sua simplicidade e eficácia. Ele combina três ações de controle:

- **Proporcional (P):** Gera uma resposta proporcional ao erro presente.
- **Integral (I):** Gera uma resposta proporcional ao acúmulo do erro ao longo do tempo, eliminando o erro de estado estacionário.
- **Derivativo (D):** Gera uma resposta proporcional à taxa de variação do erro, antecipando futuros erros.

A função de transferência de um controlador PID pode ser expressa como:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

## 2.5 MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS

Os métodos de Ziegler-Nichols são pioneiros na literatura no sentido de proporem uma sintonia heurística (empírica/experimental) para controladores PID. São dois métodos que são empregados de acordo com o tipo de planta. Ziegler e Nichols propuseram regras para a determinação de valores do ganho proporcional  $K_p$ , do tempo integral  $T_i$  e do tempo derivativo  $T_d$ , baseadas nas características da resposta transitória de dada planta (OGATA, 2010).

Existem dois métodos denominados regras de sintonia de Ziegler-Nichols: o primeiro e o segundo método. Neste trabalho, será abordado somente o segundo método, portanto focaremos nele (OGATA, 2010).

### 2.5.1 Segundo método de Ziegler-Nichols

O método originalmente proposto por Ziegler e Nichols se baseia na observação de que muitos sistemas podem ser levados à instabilidade através do aumento do ganho proporcional em malha de realimentação com controlador proporcional. Utiliza-se um sistema de controle em malha fechada com um controlador proporcional (P) e aplica-se um sinal de referência em degrau na entrada (OGATA, 2010).

Neste método, definimos primeiro  $T_i = \infty$  e  $T_d = 0$ . Usando somente a ação de controle proporcional, aumente  $K_p$  de 0 ao valor crítico  $K_{cr}$  no qual a saída exibe uma oscilação sustentada pela primeira vez. (Se a saída não exibe uma oscilação sustentada para qualquer valor  $K_p$  pode assumir, então esse método não se aplica.) Portanto, o ganho crítico  $K_{cr}$  e o período  $P_{cr}$  correspondente são determinados experimentalmente (OGATA, 2010).

Tabela 1 – Regra de sintonia de Ziegler-Nichols baseada no ganho  $K_{cr}$  e no período  $P_{cr}$  (segundo método) - Adaptado pelo autor.

Tipo de contralodar	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5 \cdot K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0,45 \cdot K_{cr}$	$(1/1,2) \cdot P_{cr}$	0
PID	$0,6 \cdot K_{cr}$	$0,5 \cdot P_{cr}$	$0,125 \cdot P_{cr}$

Fonte: Ogata (2010, p. 45).

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA QUARTER-CAR

O sistema de Quarter-car descreve um sistema vibracional com dois graus de liberdade sujeito a condições variáveis de força (como irregularidades na pista). Para iniciar a modelagem, é crucial compreender ou estimar como o sistema reagirá sob excitações (QUEIROZ, 2023).

Ao analisar o sistema Quarter-car, algumas suposições são feitas. Por exemplo, presume-se que o deslocamento vertical ( $y$ ) seja maior que o deslocamento horizontal ( $x$ ); isto é, o deslocamento da massa suspensa é maior que o da massa não suspensa, implicando que o deslocamento sofrido pela mola  $k_2$  seja  $(y - x)$ . Similarmente, pode-se inferir que o deslocamento proveniente do solo será maior que o deslocamento da massa não suspensa ( $m_1$ ), ou seja, o deslocamento sofrido pela mola será  $(u - x)$  (NETO, 2013).

Sabendo das suposições anteriores pode-se dizer então que quando o sistema é excitado, a massa suspensa ( $m_2$ ) puxa a massa ( $m_1$ ). Logo analisando o diagrama de corpo livre do sistema, ele se torna como da Figura 2 (NETO, 2013).

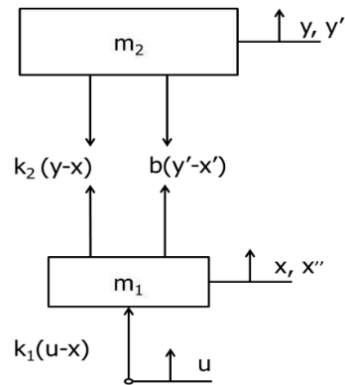


Figura 2 – Diagrama de corpo livre, Quarter-Car.

Onde  $y', y'', x'$  e  $x''$  representam as derivadas de primeira e segunda ordem dos deslocamentos  $y$  e  $x$ , respectivamente.

Para este sistema, algumas observações são consideradas:

- O carro está parado para  $t < 0$ ;
- O sistema massa-mola-amortecedor está parado para  $t < 0$ ;
- Para  $t = 0$ , a velocidade do carro é constante.

Com isso, aplicando a Segunda Lei de Newton, que nos diz:

$$m \cdot a = \sum F$$



onde:

- $m$  é a massa do automóvel,
- $a$  é a aceleração dessa massa, e
- $\sum F$  é o somatório das forças que agem sobre esta massa.

Para  $m_1$ , as equações são dadas por:

$$m_1 \cdot x'' = \sum F_{y1} = F_{k2} + F_{k1} + F_b$$

$$m_1 \cdot x'' = k_2 \cdot (y - x) + k_1 \cdot (u - x) + b \cdot (y' - x')$$

$$m_1 \cdot x'' = k_2 \cdot y - k_2 \cdot x + k_1 \cdot u - k_1 \cdot x + b \cdot y' - b \cdot x'$$

$$m_1 \cdot x'' = k_2 \cdot y + k_1 \cdot u - x \cdot (k_2 + k_1) + b \cdot y' - b \cdot x'$$

Assim, a primeira equação é:

$$m_1 \cdot x'' + x \cdot (k_2 + k_1) + b \cdot x' - k_2 \cdot y - k_1 \cdot u - m_2 \cdot y'' + b \cdot y' + k_2 \cdot y = b \cdot x' + k_2 \cdot x$$

$$b \cdot y' = 0$$

Para  $m_2$ , as equações são dadas por:

$$m_2 \cdot y'' = \sum F_{y2} = F_{k2} + F_b$$

$$m_2 \cdot y'' = -k_2 \cdot (y - x) - b \cdot (y' - x')$$

$$m_2 \cdot y'' = -k_2 \cdot y + k_2 \cdot x - b \cdot y' + b \cdot x'$$

Assim, a segunda equação é:

$$m_2 \cdot y'' - b \cdot x' + b \cdot y' - k_2 \cdot x + k_2 \cdot y = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace às equações, resulta:

$$[(m_1 \cdot s^2 + b \cdot s + (k_1 + k_2))] X(s) = (b \cdot s + k_2)Y(s) + k_1 U(s)$$

$$[m_2 \cdot s^2 + b \cdot s + k_2] Y(s) = (b \cdot s + k_2)X(s)$$

Resolvendo essas duas equações para encontrar as funções de transferência da massa suspensa e da não suspensa, temos:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1 \cdot b \cdot s + k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2 \cdot s^4 + (m_1 + m_2) \cdot b \cdot s^3 + [k_1 \cdot m_2 + (m_1 + m_2) \cdot k_2] \cdot s^2 + k_1 \cdot b \cdot s + k_1 \cdot k_2}$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k_1 \cdot m_2 \cdot s^2 + k_1 \cdot b \cdot s + k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2 \cdot s^4 + (m_1 + m_2) \cdot b \cdot s^3 + [k_1 \cdot m_2 + (m_1 + m_2) \cdot k_2] \cdot s^2 + k_1 \cdot b \cdot s + k_1 \cdot k_2}$$

A partir das funções de transferência encontradas, podemos analisar várias propriedades do sistema, como sua resposta dinâmica a diferentes frequências de entrada (através da análise no domínio da frequência), sua estabilidade (verificando os polos das funções de transferência), e sua capacidade de atenuar ou amplificar certas frequências (através da análise da resposta em frequência).

### 3.2 PARÂMETROS DO SISTEMA

Como estudo de caso adotou-se os parâmetros de um veículo de competições Baja SAE da Equipe Procobaja (NETO, 2013).

Os parâmetros adotados para o estudo de caso do veículo de competições Baja SAE da Equipe Procobaja são:

- Constantes do sistema massa-mola-amortecedor:

$$k_2 = 20 \text{ kN/m}, \quad b = 1400 \text{ Ns/m}$$

- Constante da mola dos pneus:

$$k_1 = 113 \text{ kN/m}$$

- Massas:

$$m_2 = 70 \text{ kg}, \quad m_1 = 18 \text{ kg}$$

### 3.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

A partir dos parâmetros estabelecidos as plantas do sistema de suspensão ativa foi definida, estas podem ser vistas abaixo.

Função de transferência massa suspensa:

$$G(s) = \frac{24310000s + 2378640000}{1260s^4 + 11400s^3 + 12502600s^2 + 24310001s + 2378640000}$$

Função de transferência massa não suspensa:

$$G(s) = \frac{1309000s^2 + 24310000s + 2378640000}{1260s^4 + 11400s^3 + 12502600s^2 + 24310001s + 2378640000}$$

A análise de estabilidade de um sistema de controle pode ser realizada utilizando diversos métodos. Um dos métodos clássicos é o critério de Routh, que permite determinar a estabilidade de um sistema linear contínuo baseado na sua função de transferência.

#### 3.3.1 Critério de Routh-Hurwitz

O critério de Routh-Hurwitz é uma técnica que verifica a estabilidade de um sistema linear sem a necessidade de calcular diretamente os pólos da função de transferência. Este critério utiliza a tabela de Routh, uma matriz construída a partir dos coeficientes do polinômio característico do sistema.

A condição necessária e suficiente para que um sistema seja estável é que todos os elementos da primeira coluna da tabela de Routh sejam positivos. Se algum elemento dessa coluna for zero ou negativo, o sistema será instável ou marginalmente estável.

### 3.3.2 Análise de Estabilidade

Após a construção da tabela de Routh, examinamos os sinais dos elementos na primeira coluna:

- Estabilidade: O sistema é estável se todos os elementos da primeira coluna forem positivos.
- Instabilidade: Se houver algum elemento negativo ou zero na primeira coluna, o sistema é instável. Zeros indicam a presença de raízes puramente imaginárias, o que pode indicar estabilidade marginal.

### 3.3.3 Aplicação Prática

A análise de estabilidade foi conduzida com sucesso utilizando o software Scilab e a biblioteca `roth_t`. A seguir, é apresentada a tabela de Routh para a análise de estabilidade das duas funções de transferência, as quais compartilham o mesmo denominador.

```
~_~
                2.379D+09 +24310000s
-----
2.379D+09 +24310001s +12502600s^2 +11400s^3 +1260s^4
"Estabilidade por criterio de Routh"
"Tab_routh"
1260.      12502600.    4.757D+09
11400.     48620001.    0.
7128810.4  4.757D+09    0.
41012421.  0.           0.
4.757D+09  0.           0.
```

Figura 3 – Tabela do critério de Routh gerada pelo Scilab para análise de estabilidade.

A análise pelo critério de Routh revelou que todos os valores na tabela são positivos ou nulos. Isso indica que não há nenhum polo instável no sistema de controle de suspensão ativa estudado.

A ausência de valores negativos no critério de Routh é um indicativo inicial positivo de estabilidade para o sistema. No entanto, é recomendável realizar análises adicionais para confirmar esta conclusão, como verificar a análise do lugar das raízes, esta será análise no próximo tópico.

## 3.4 ANÁLISE DO LUGAR DAS RAÍZES PARA UM GANHO KP

Para análise de estabilidade e análise do lugar das raízes com ganho  $K_p$ , precisamos analisar a planta em malha fechada. As plantas em malha fechada para a massa suspensa e não suspensa e estas podem ser vista pelas figuras abaixo.

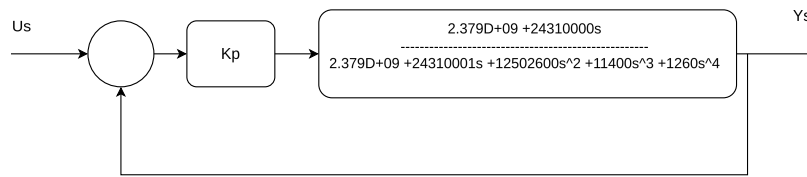


Figura 4 – Planta em malha fechada da massa suspensa - Adaptado pelo autor.

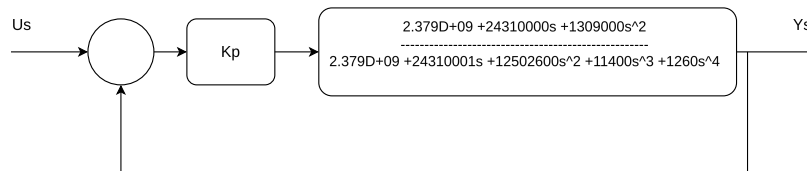


Figura 5 – Planta em malha fechada da massa não suspensa - Adaptado pelo autor.

Como o primeiro passo, analisaremos a a estabilidade com o ganho Kp a partir do critério de roth, como realizado no tópic anterior.

"Estabilidade por criterio de Routh"

"Tab\_routh"

1260	12502600	2.379D+09 + 2.379D+09k
-----	-----	-----
1	1	1
11400	24310001 + 24310000k	0
-----	-----	-
1	1	1
1.119D+11 - 3.063D+10k	2.712D+13 + 2.712D+13k	0
-----	-----	-
11400	11400	1
2.749D+22 + 1.900D+22k - 8.489D+21k^2	0	0
-----	-	-
1.276D+15 - 3.492D+14k	1	1
2.379D+09 + 2.379D+09k	0	0
-----	-	-
1	1	1

Figura 6 – Tabela do critério de Routh gerada pelo Scilab para análise de estabilidade com ganho Kp (K)

### 3.4.1 Determinar intervalos de Kp para estabilidade do sistema

$$\frac{1.119 \times 10^{11} - 3.063 \times 10^{10}kp}{11400} > 0$$

$$kp < 3.65$$

$$\frac{2.749 \times 10^{22} + 1.900 \times 10^{22}kp - 8.489 \times 10^{21}kp^2}{1.276 \times 10^{15} - 3.492 \times 10^{14}kp} > 0$$

$$-2.62 < kp < 3.65$$

$$\frac{2.379 \times 10^9 + 2.379 \times 10^9 kp}{1} > 0$$

$$kp > -1.00$$

Com isso podemos determinar um intervalo de  $K_p$ , para qual o sistema é estável:

$$-1.00 < kp < 3.65$$

Com a análise de estabilidade de routh é possível identificar os valores de  $K_p$  para qual o sistema se torna estável. No entanto mais análises são necessários para tirarmos conclusões sobre o comportamento do sistema, o próximo passo de análise será realizar a análise do lugar das raízes.

### 3.4.2 Análise do lugar das raízes

O método do Lugar das Raízes é uma técnica utilizada em teoria de controle para analisar a estabilidade e o comportamento dinâmico de sistemas de controle em malha fechada. Este método permite visualizar como as raízes da função característica do sistema variam com o ganho  $K$  do controlador.

A análise do lugar das raízes foi conduzida com sucesso utilizando o software Scilab e a biblioteca `evans`

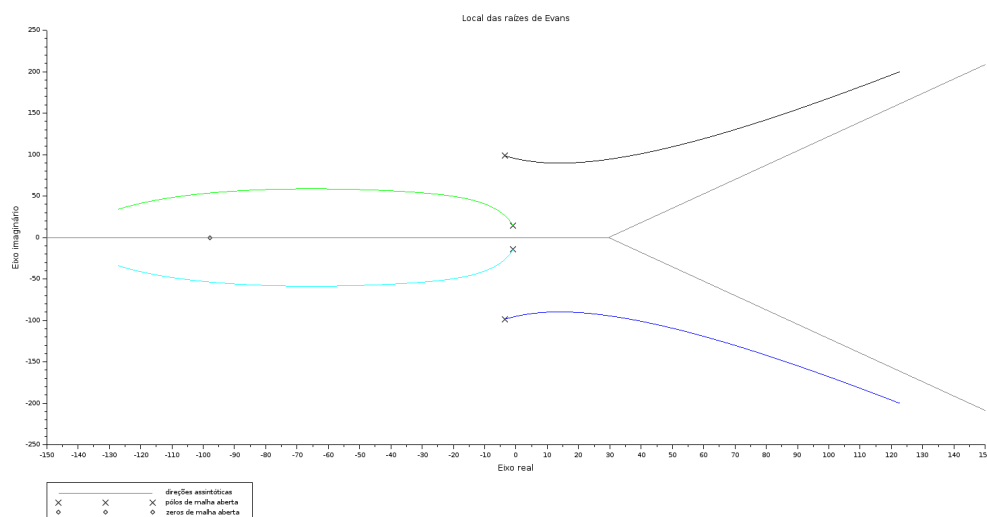


Figura 7 – Lugar das raízes para o sistema de massa suspensa

As figuras 7, 8, gerada pelo código mostra o lugar das raízes do sistema em questão. A análise detalhada da imagem é essencial para entender a estabilidade do sistema.

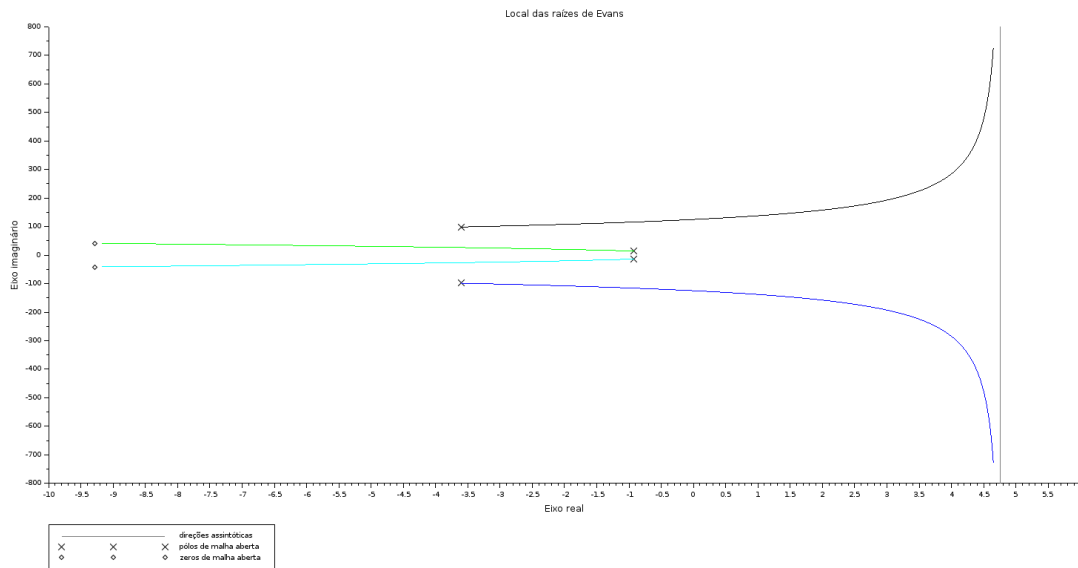


Figura 8 – Lugar das raízes para o sistema de massa não suspensa

Os eixos da imagem representam a parte real (horizontal) e imaginária (vertical) das raízes. As curvas coloridas no gráfico (verde, azul, ciano, preto) mostram a trajetória das raízes do sistema à medida que o ganho  $K_p$  varia de 0 a infinito. Cada cor representa a trajetória de uma raiz específica do polinômio característico do sistema.

A estabilidade do sistema é avaliada observando a posição das raízes no plano complexo. Para que o sistema seja estável, todas as raízes devem estar localizadas no semi-plano esquerdo (parte real negativa).

Em resumo, o método do Lugar das Raízes permite identificar regiões de estabilidade e instabilidade de um sistema de controle. A figura 7, 8 gerada mostra que, dependendo do valor de  $K_p$ , o sistema pode se tornar instável à medida que algumas raízes atravessam para o semi-plano direito. Portanto, é crucial ajustar adequadamente o ganho  $K_p$  para garantir a operação segura e eficiente do sistema controlado.

Portanto precisamos ter certo cuidado ao escolher o valor de ganho proporcional para esta planta, como observado no tópico de estabilidade por critério de Routh. Para uma melhor análise na influencia do  $K_p$  na estabilidade do sistema, foi gerado gráficos de resposta a um degrau Figura 9,10, com algumas valores de  $K_p$  dentro do intervalo estabelecido no tópico acima ( $-1 < K_p < 3.65$ )

o analisar as duas figuras 9,10, podemos identificar alguns pontos interessantes:

1. **Ganho  $K_p$  para Estabilidade:** - O sistema é estável para um ganho  $K_p$  próximo de 50% do intervalo máximo de  $K_p$  determinado pelo método de estabilidade de Routh. Este valor garante que todos os polos do sistema estejam no semi-plano esquerdo do plano  $s$ , assegurando a estabilidade do sistema.

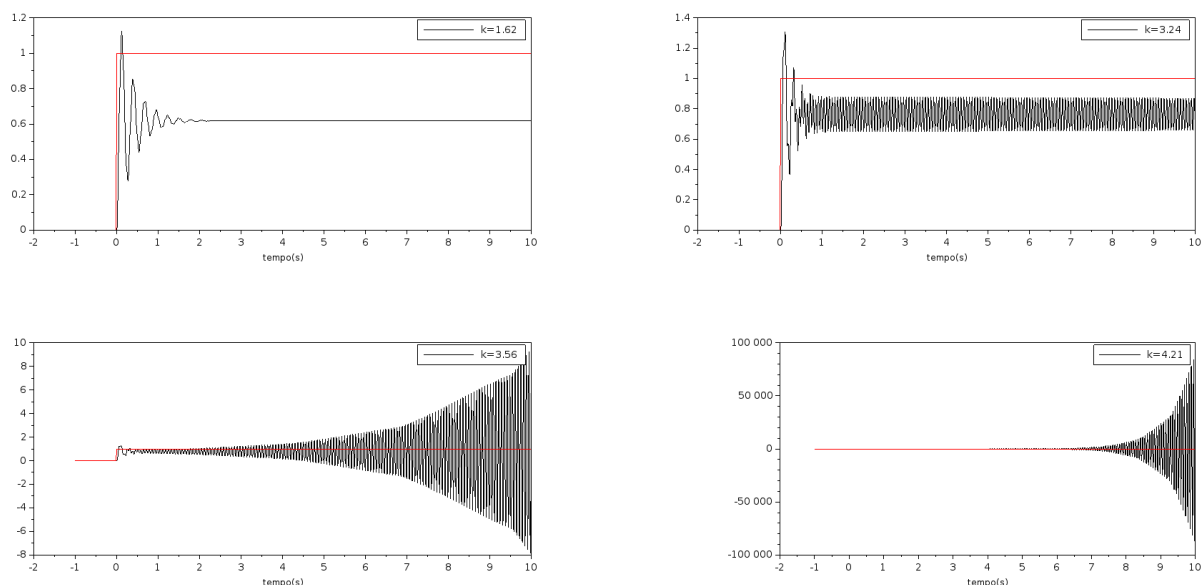


Figura 9 – Estabilidade e o comportamento dinâmico do sistema de massa suspensa em malha fechada para diferentes valores de ganho K

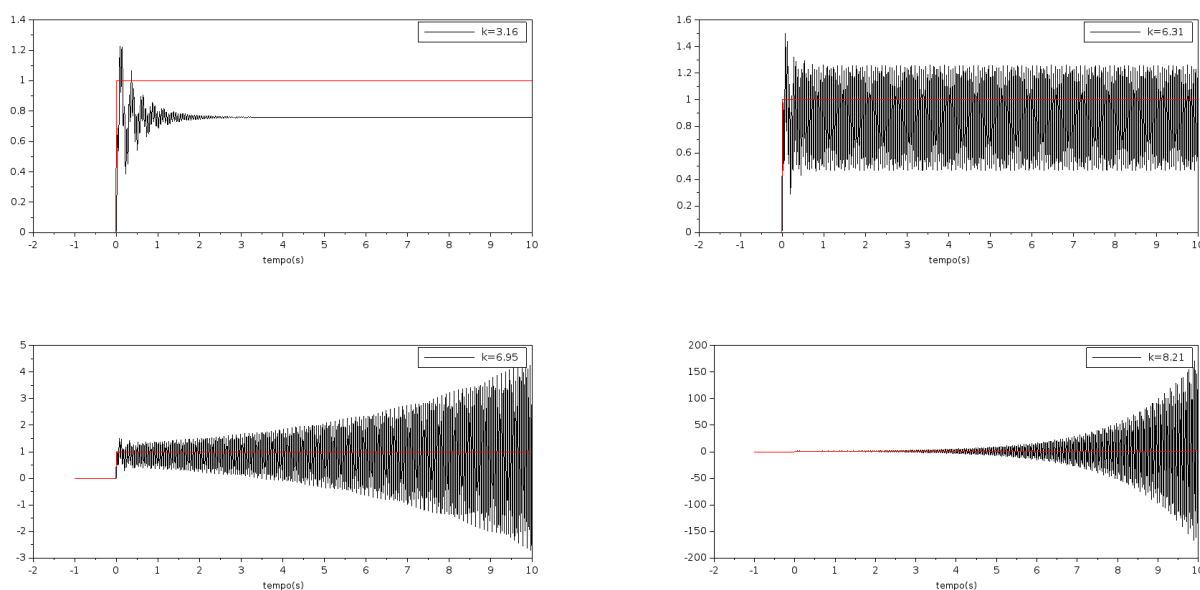


Figura 10 – Estabilidade e o comportamento dinâmico do sistema de massa não suspensa em malha fechada para diferentes valores de ganho  $K_p$

**2. Ganho  $K_p$  para Estabilidade Marginal:** - O ganho  $K_p$  que torna o sistema marginalmente estável, resultando em uma oscilação periódica, também pode ser identificado. Este valor é crucial para a definição dos parâmetros do controlador PID, pois indica o limite onde o sistema começa a oscilar sem divergência, o que é útil para ajustar a resposta dinâmica do sistema.

Além disso, é interessante observar que os valores de  $K_p$  que tornam o sistema marginalmente estável estão bem acima do zero no eixo real do plano  $s$ , figuras

11,12. Isso implica que qualquer polo localizado à direita deste valor tornará o sistema instável. Portanto, é essencial garantir que os polos permaneçam à esquerda deste ponto para manter a estabilidade do sistema.

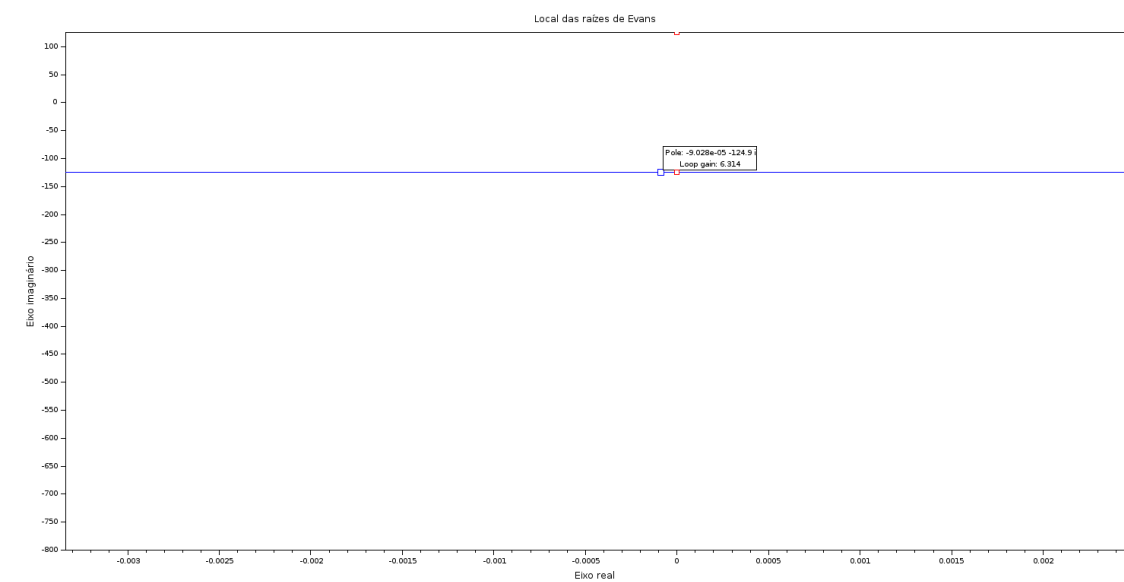


Figura 11 –  $K_p$  que torna o sistema de massa suspensa em malha fechada marginalmente estável.

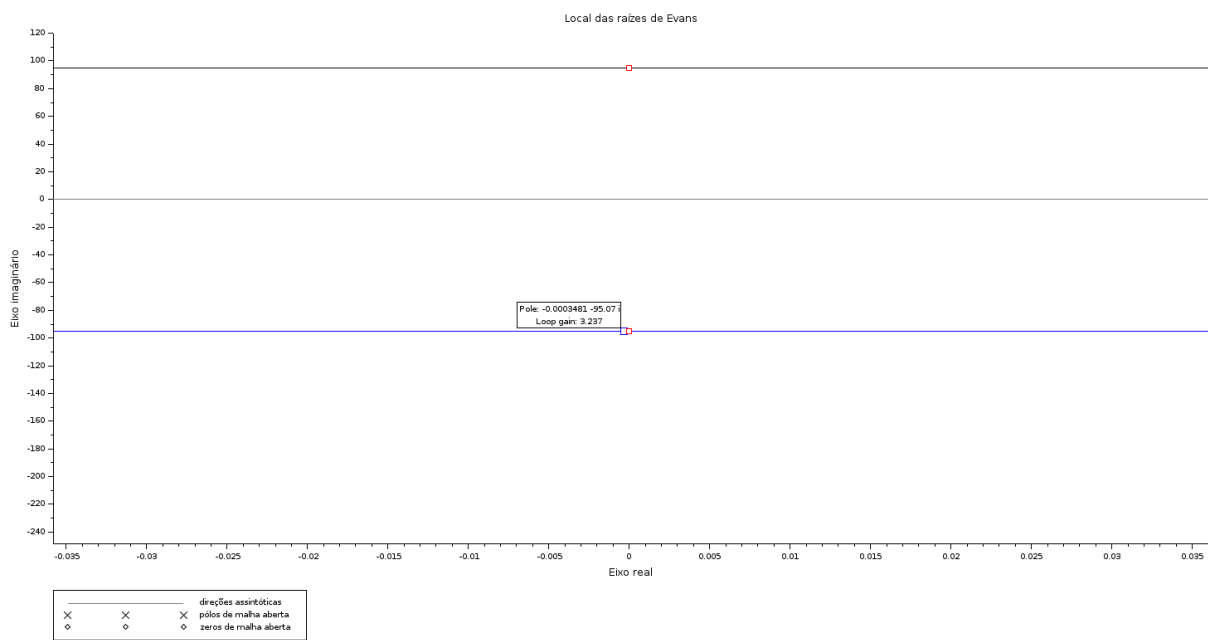


Figura 12 –  $K_p$  que torna o sistema de massa não suspensa em malha fechada marginalmente estável.



### 3.5 SINTONIZAÇÃO DO CONTROLADOR PID

Os parâmetros do controlador PID foram determinados utilizando o método de Ziegler-Nichols.

A tabela para definição dos parâmetros pode ser vista abaixo:

Tabela 2 – Regra de sintonia de Ziegler-Nichols baseada no ganho  $K_{cr}$  e no período  $P_{cr}$  (segundo método) - Adaptado pelo autor.

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5 \cdot K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0,45 \cdot K_{cr}$	$(1/1,2) \cdot P_{cr}$	0
PID	$0,6 \cdot K_{cr}$	$0,5 \cdot P_{cr}$	$0,125 \cdot P_{cr}$

Fonte: Ogata (2010).

#### 3.5.1 Definir Período Crítico ( $K_{cr}$ )

$K_{cr}$  é o ganho proporcional crítico do sistema. É o valor máximo do ganho proporcional  $K_p$  no qual o sistema, em malha fechada, começa a oscilar de forma estável (ou seja, oscilações contínuas com amplitude constante).

O valor de  $K_{cr}$  para o sistema de massa suspensa e não suspensa, foi obtido no tópico passado sobre análise do lugar das raízes, estes são:

$$K_{cr1} = 3.24$$

$$K_{cr2} = 6.31$$

#### 3.5.2 Definir Período Crítico ( $P_{cr}$ )

$P_{cr}$  é o período dessas oscilações contínuas observadas quando o ganho  $K_p$  é igual a  $K_{cr}$ . Para determinar  $P_{cr}$ , o tempo entre dois picos consecutivos das oscilações é medido.

Analisando as figuras 13,14 conseguimos obter os valores de  $P_{cr}$  para o sistema de massa suspensa e não suspensa, estes são:

$$P_{cr1} = 0.05$$

$$P_{cr2} = 0.35$$

#### 3.5.3 Definir controle PID

$$K_{cr1} = 3.24$$

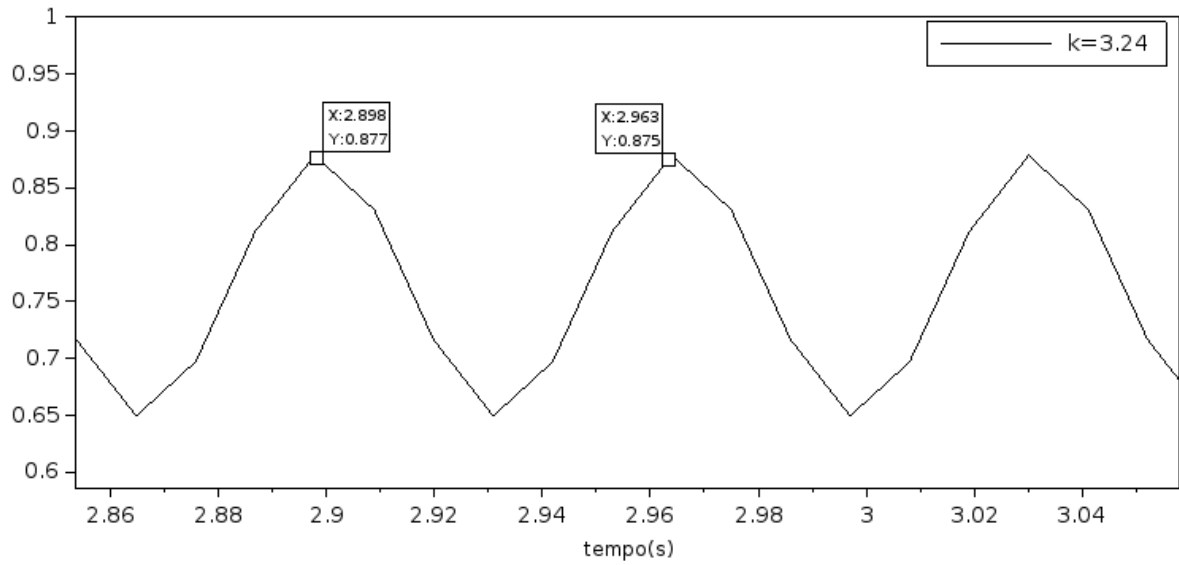


Figura 13 – Análise do Pcr do sistema dA massa suspensa em malha fechada marginalmente estável.

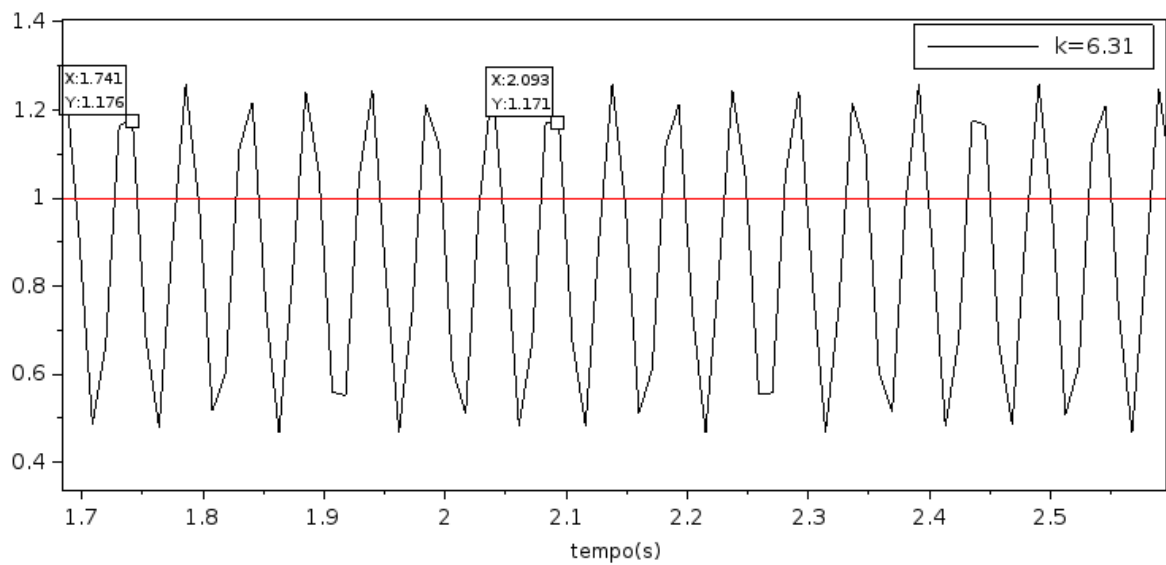


Figura 14 – Análise do Pcr do sistema da massa não suspensa em malha fechada marginalmente estável.

$$P_{cr1} = 0.05$$

$$K_{cr2} = 6$$

$$P_{cr2} = 0.352$$

$$K_p = 0.6 \cdot K_{cr};$$

$$K_i = \frac{K_p}{0.5 \cdot P_{cr}};$$

$$K_d = K_p \cdot 0.125 \cdot P_{cr};$$

$$G_{pid}(s) = \frac{C_s \cdot G(s)}{1 + C_s \cdot G(s)};$$

Controlador PID para o sistema de massa suspensa:

$$C_{s1} = \left( \frac{77.76 + 1.94 \cdot s + 0.012 \cdot s^2}{s} + 1e - 12 \cdot s^2 \right)$$

Controlador PID para o sistema de massa não suspensa:

$$C_{s2} = \left( \frac{21.65 + 3.79 \cdot s + 0.16 \cdot s^2}{s} + 1e - 12 \cdot s^2 \right)$$

### 3.5.4 Análise da resposta do controlador ao degrau unitario

Para análise do desempenho do controlador, o seu comportamento foi testado com um degrau unitario, os testes podem ser vistos nas Figuras 15,18.

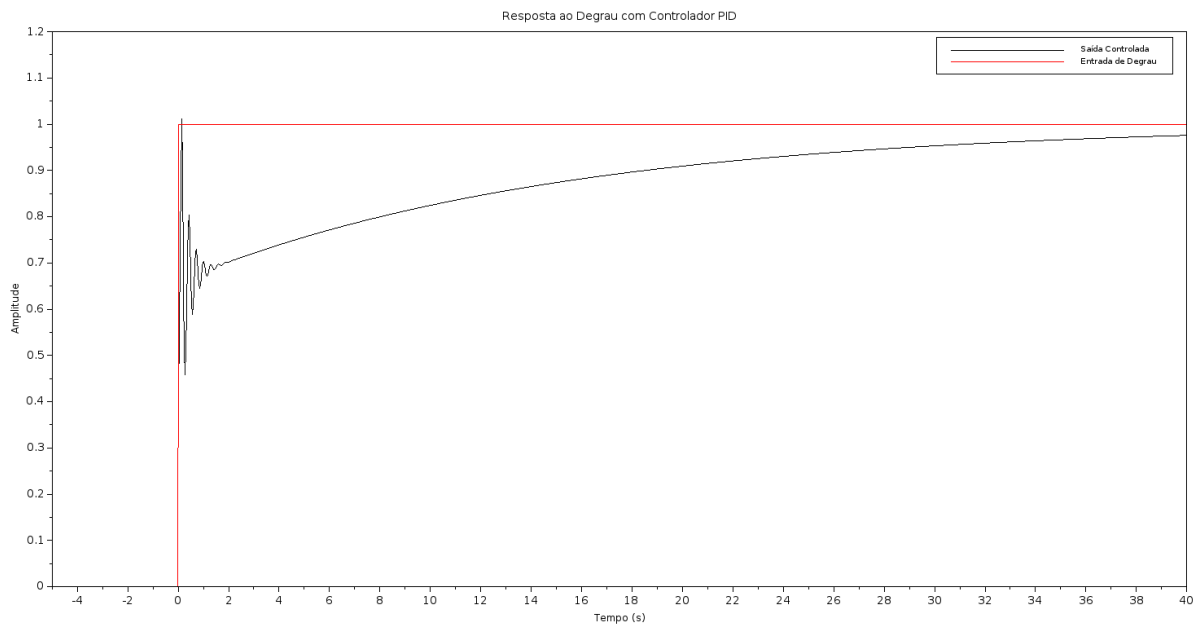


Figura 15 – Resposta do sistema de massa suspensa com controlador PID ao degrau unitario

Ao analisar as figuras 15,16,18,17, é perceptível uma redução significativa na amplitude de oscilação do sinal induzido ao sistema tanto com o controlador PID quanto sem ele.

Para o sistema de massa suspensa (massa do carro), observamos uma substancial diminuição no deslocamento vertical. Além disso, o tempo necessário para que as oscilações se reduzam a aproximadamente zero é reduzido praticamente pela metade quando o controlador PID é empregado.

No sistema da massa não suspensa (massa do pneu), as oscilações são drasticamente reduzidas, evidenciando-se apenas um pico inicial no sinal. Após esse pico

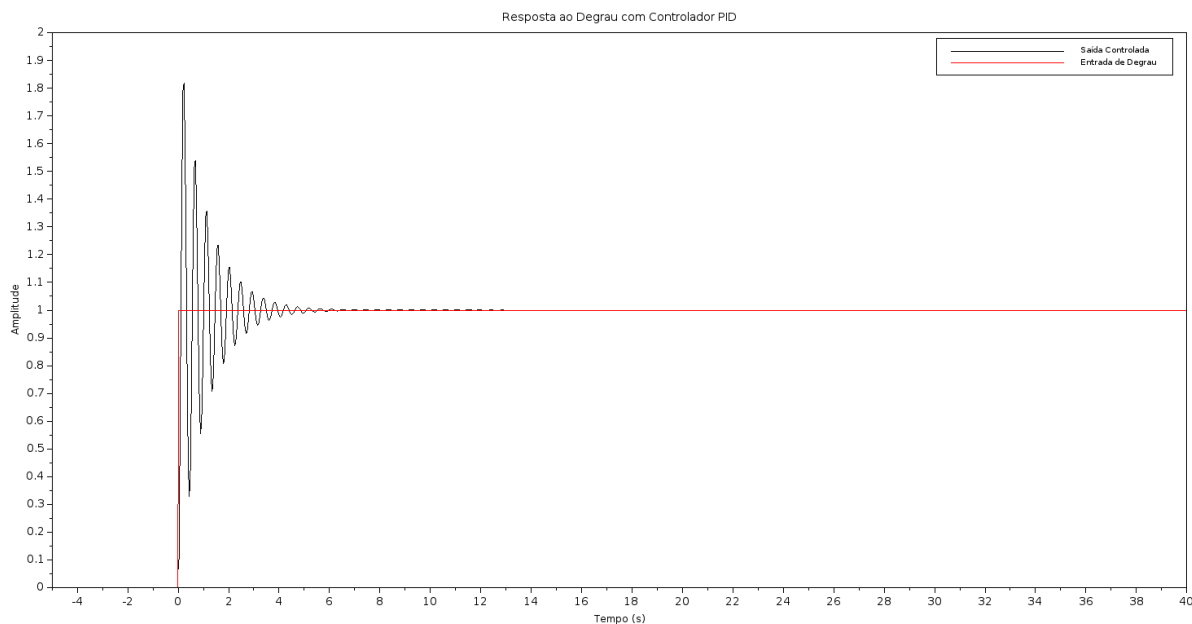


Figura 16 – Resposta do sistema de massa suspensa sem controlador PID ao degrau unitário

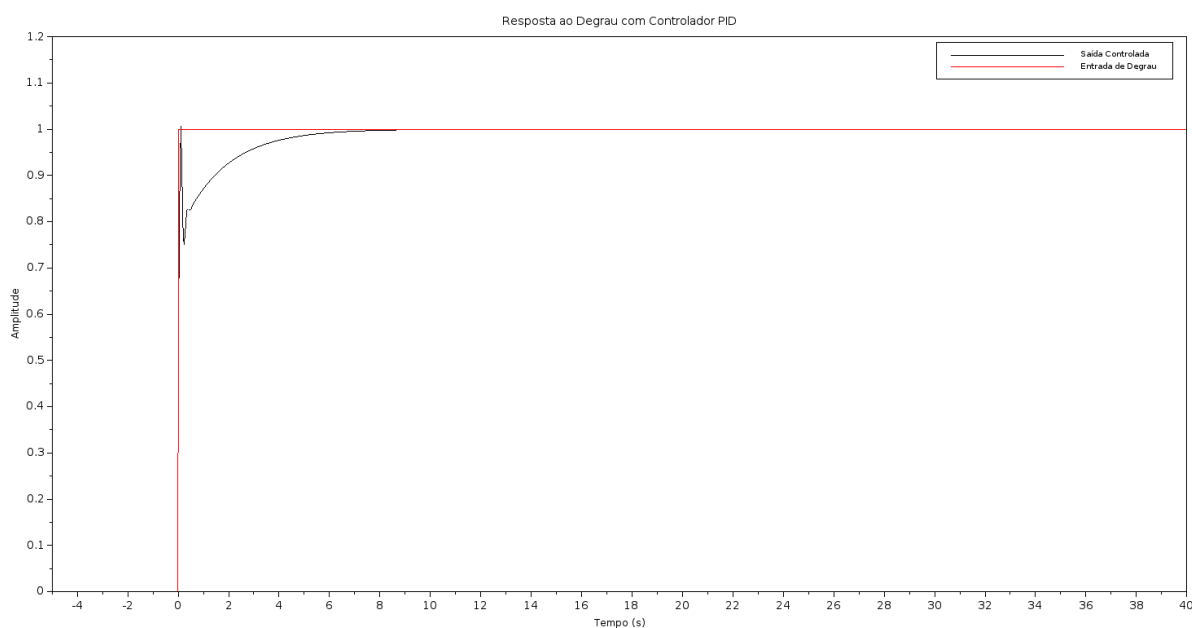


Figura 17 – Resposta do sistema de massa não suspensa com controlador PID ao degrau unitário

inicial, observa-se que o sinal converge de forma estável para o valor desejado, sem oscilações subsequentes.

Essas observações destacam a eficácia do controlador PID em mitigar oscilações indesejadas, melhorando significativamente a estabilidade e a resposta dinâmica do sistema de massa suspensa.

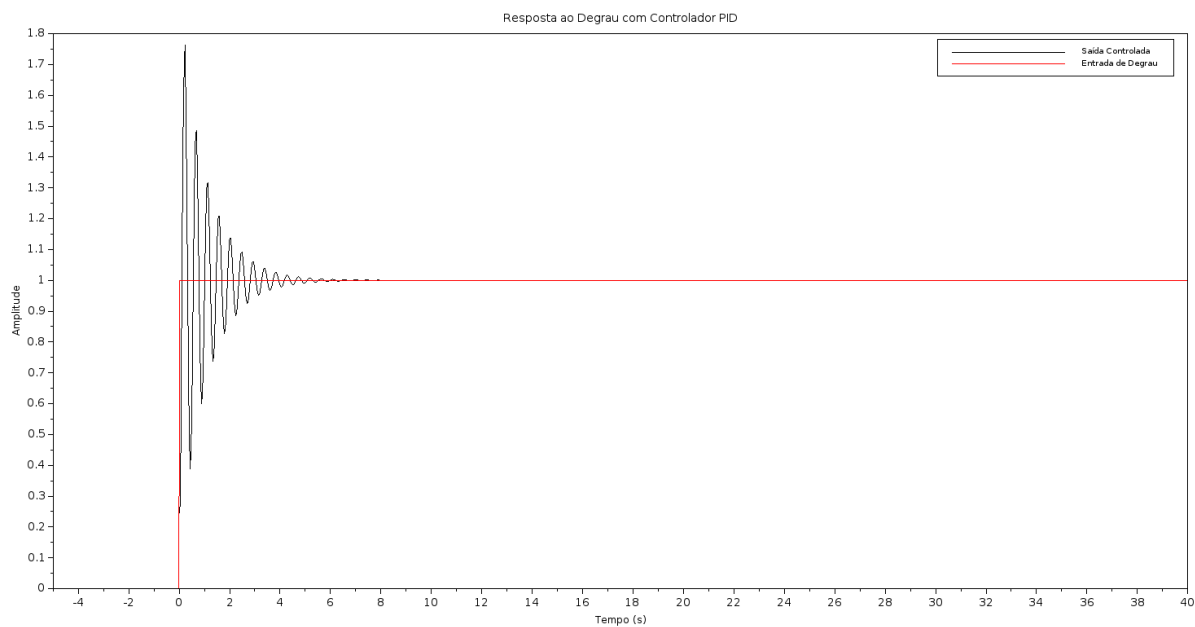


Figura 18 – Resposta do sistema de massa não suspensa sem controlador PID ao degrau unitario

## **4 CONCLUSÃO**

O desenvolvimento e a implementação de um controlador PID para um sistema de suspensão ativa demonstraram ser uma abordagem eficaz para melhorar tanto a resposta transitória quanto a estabilidade do veículo. Através de uma análise detalhada e simulações, foi possível observar que o controlador PID, devidamente ajustado pelo método de Ziegler-Nichols, proporciona um desempenho satisfatório analisando o amortecimento das oscilações.

## REFERÊNCIAS

NETO, F. R. F. **Modelagem mecânica de um sistema de suspensão com o método Quarter-Car**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, Maranhão, Brasil, 2013.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

QUEIROZ, L. F. B. de. **Modelagem e controle PID de sistema automotivo de suspensão ativa**. 2023. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2023.

## APÊNDICE A – CÓDIGOS UTILIZADOS

### A.1 VERIFICAÇÃO DE ESTABILIDADE SEM KP

```
1
2 // DEFINIÇÃO DO SISTEMA G(s) PARA A MASSA SUSPensa E N O SUSPensa
3 s = poly(0, 's')
4 num = 24310000*s + 2378640000
5
6 den = 1260*s^4 + 11400*s^3 + 12502600*s^2 + 24310001*s + 2378640000
7
8 G_s = syslin('c', num, den)
9 disp('G_s= ', G_s)
10
11 k = 1
12 disp('Estabilidade por critério de Routh')
13 tab_routh = routh_t(G_s, k)
14 disp('Tab_routh', tab_routh)
```

Listing A.1 – Código para verificação de estabilidade sem Kp com critério de Routh.

### A.2 VERIFICAÇÃO DE ESTABILIDADE COM KP

```
1
2 // DEFINIÇÃO DO SISTEMA G(s) PARA A MASSA SUSPensa E N O SUSPensa
3 s = poly(0, 's')
4 num = 24310000*s + 2378640000
5
6 den = 1260*s^4 + 11400*s^3 + 12502600*s^2 + 24310001*s + 2378640000
7
8 G_s = syslin('c', num, den)
9 disp('G_s= ', G_s)
10
11 k = poly(0, 'k')
12 disp('Estabilidade por critério de Routh')
13 tab_routh = routh_t(G_s, k)
14 disp('Tab_routh', tab_routh)
```

Listing A.2 – Código para verificação de estabilidade com Kp com critério de Routh.

### A.3 ANÁLISE DO LUGAR DAS RAIZES

```
1 //LUGAR DAS RAIZES
2 s = poly(0, 's')
```



```

3 num_massa_suspensa = 24310000*s + 2378640000
4
5 num_massa_nao_suspensa = 1309000*s^2 + 24310000*s + 2378640000
6
7 den = 1260*s^4 + 11400*s^3 + 12502600*s^2 + 24310001*s + 2378640000
8
9 G_s = syslin('c',num_massa_nao_suspensa,den)
10 disp('G_s= ',G_s)
11
12 scf(1);clf(1)
13 evans(G_s)
14
15 //RESPOSTA AO DEGRAU PARA DIFERENTES VALORES DE K (50%;100%;110%;130%)
16
17 Gain_margin = 10^(g_margin(G_s)/20)
18 disp('K maximo de estabilidade= ',Gain_margin)
19
20
21
22 Tsim = 10; quais_T = linspace(-1.,Tsim,1e3)
23 T_mf = quais_T(quais_T>=0)
24 degrau = ones(quais_T)
25 degrau(quais_T<0) = 0
26
27 quais_K = Gain_margin * ([0.5,1.0,1.1,1.3])
28 for qK = 1:length(quais_K)
29     C_s = poly([quais_K(qK)], 's', 'c')
30     G1_s = (C_s*G_s)/(1 + C_s*G_s)
31     [z,p,k] = tf2zp(G1_s)
32     scf(1)
33
34     plot(real(p), imag(p), 'rs')
35     yout_mf = csim('step', T_mf, G1_s)
36
37     scf(2)
38     subplot(2,2,qK)
39     plot(T_mf,yout_mf, 'k-')
40     plot(quais_T, degrau, 'r-')
41     xlabel('tempo(s)')
42
43     disp(strcat(["k=",string(round(quais_K(qK)*100)/100)]))
44     lg = legend(strcat(["k=",string(round(quais_K(qK)*100)/100)]))
45     set(gca(), 'font_size',3)
46     set(lg, 'font_size',3)
47 end

```

Listing A.3 – Código para análise do lugar das raízes.

## A.4 ANÁLISE DA RESPOSTA AO DEGRAU SEM O CONTROLADOR PID

```
1 // DEFINIÇÃO DO SISTEMA G(s) PARA A MASSA SUSPensa E N A SUSPensa
2 s = poly(0, 's');
3 num = 24310000*s + 2378640000;
4 numn = 1309000*s^2 + 24310000*s + 2378640000
5 den = 1260*s^4 + 11400*s^3 + 12502600*s^2 + 24310001*s + 2378640000;
6
7 G_s = syslin('c', num, den);
8
9
10 RESPOSTA AO DEGRAU
11 Tsim = 40;
12 quais_T = linspace(-1., Tsim, 1e3);
13 T_mf = quais_T(quais_T >= 0);
14 degrau = ones(quais_T);
15 degrau(quais_T < 0) = 0;
16
17 scf(2); clf(2);
18 yout_mf = csim('step', T_mf, G_s);
19
20 plot(T_mf, yout_mf, 'k-');
21 plot(quais_T, degrau, 'r-');
22 xlabel('Tempo (s)');
23 ylabel('Amplitude');
24 title('Resposta ao Degrau com Controlador PID');
25 legend('Saída Controlada', 'Entrada de Degrau');
26 set(gca(), 'font_size', 3);
```

Listing A.4 – Código para análise da resposta do sistema a um degrau sem o controlador PID.

## A.5 ANÁLISE DA RESPOSTA AO DEGRAU COM CONTROLADOR PID

```
1 // DEFINIÇÃO DO SISTEMA G(s) PARA A MASSA SUSPensa E N A SUSPensa
2 s = poly(0, 's');
3 num_massa_suspensa = 24310000*s + 2378640000;
4 num_massa_nao_suspensa = 1309000*s^2 + 24310000*s + 2378640000
5 den = 1260*s^4 + 11400*s^3 + 12502600*s^2 + 24310001*s + 2378640000;
6
7 G_s = syslin('c', num_massa_nao_suspensa, den);
8 disp('G_s = ', G_s);
9
10 // PARÂMETROS DO CONTROLADOR PID
11 //MALHA SUSPensa
12 //Kcr = 3.24
13 //Pcr = 0.05
```

```

14 //MALHA N O SUSPENSA
15 Kcr = 6
16 Pcr = 0.352
17
18 Kp = 0.6*Kcr;
19 Ki = Kp / 0.5*Pcr;
20 Kd = Kp * 0.125*Pcr;
21
22
23 // CONTROLADOR PID
24 C_s = (Ki + Kp * s + Kd*s^2)/s + 1e-12*s^2;
25 G_pid_s = (C_s * G_s) / (1 + C_s * G_s);
26 disp('Controlador PID: ', C_s);
27
28 // RESPOSTA AO DEGRAU
29 Tsim = 40;
30 quais_T = linspace(-1., Tsim, 1e3);
31 T_mf = quais_T(quais_T >= 0);
32 degrau = ones(quais_T);
33 degrau(quais_T < 0) = 0;
34
35 scf(2); clf(2);
36 yout_mf = csim('step', T_mf, G_pid_s);
37
38 plot(T_mf, yout_mf, 'k-');
39 plot(quais_T, degrau, 'r-');
40 xlabel('Tempo (s)');
41 ylabel('Amplitude');
42 title('Resposta ao Degrau com Controlador PID');
43 legend('Sa da Controlada', 'Entrada de Degrau');
44 set(gca(), 'font_size', 3);

```

Listing A.5 – Código para análise da resposta do sistema a um degrau com controlador PID.