De la Cinématique à l'Odométrie : Modéliser et Localiser un robot

Table des matières

1 Modéle Cinématique

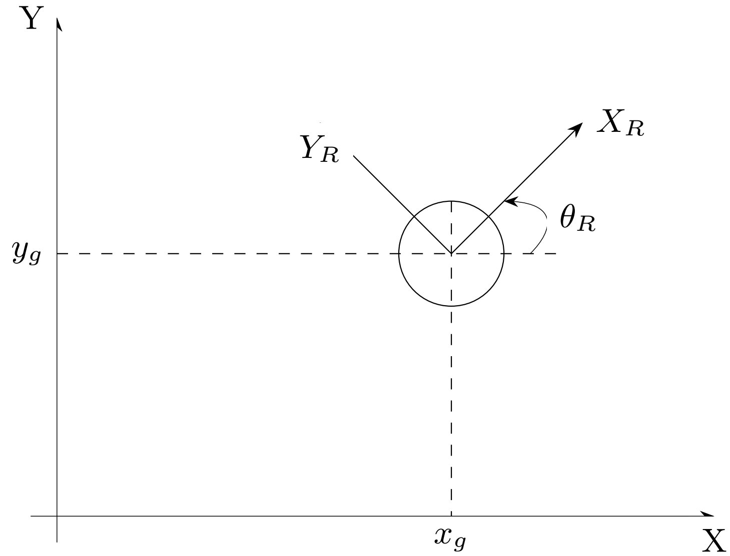

Figure 1 – Représentation du système avec repères

La figure 1 illustre le repère global (X, Y), qui définit l'espace de déplacement du robot. Ce dernier est représenté par un cercle dont la position est donnée par les coordonnées (x_g, y_g) dans ce repère, ainsi que par une orientation θ_R, définie comme l'angle entre l'axe X du repère global et l'axe de déplacement du robot. Un repère local (X_R, Y_R) est associé au robot : centré sur ce dernier, il est constamment orienté dans la direction du robot. Ce repère mobile permet de décrire les actions et mouvements du robot de manière relative à sa propre orientation.

Dans chacun de ces repères, on définit un vecteur de mouvement exprimé sous forme de vecteur colonne. Dans le repère global, ce vecteur est noté :

$$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{\theta}_R \end{pmatrix},$$

et dans le repère local du robot, il est noté :

$$\dot{\zeta}_R = \begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{pmatrix}.$$

En notant $R_Z(\theta)$ la matrice de rotation autour de l'axe Z, on obtient la relation suivante entre le vecteur de mouvement exprimé dans le repère global et celui exprimé dans le repère local, en fonction de l'angle θ :

$$\dot{\zeta} = R_Z(\theta)^{-1}\dot{\zeta}_R$$

avec $R_Z(\theta)$ qui vaut :

$$R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la suite de notre étude, nous nous placerons uniquement dans le repère local du robot, dans la mesure où il est toujours possible de passer d'un repère à l'autre par une simple rotation.

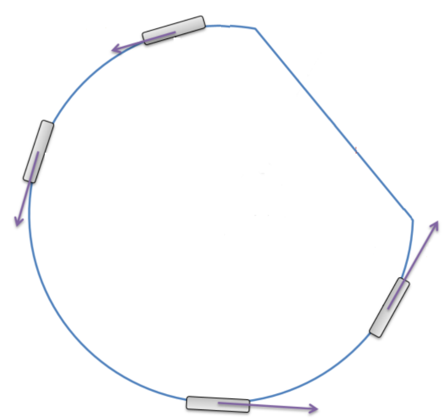

FIGURE 2 – Structure Du Robot

Le robot est équipé de 4 roues de rayon identique r. Deux roues sont positionnées à un angle de 30° par rapport à l'axe central du châssis, tandis que les deux autres roues sont positionnées à un angle de 45°. Toutes les roues sont situées à une distance constante l du centre du châssis, assurant ainsi une répartition symétrique autour du centre.

Si l'on étudie une roue quelconque i, en notant α_i l'angle formé par cette roue et en notant $\dot{\Phi}_i$ la vitesse angulaire de la roue, on obtient le schéma suivant :

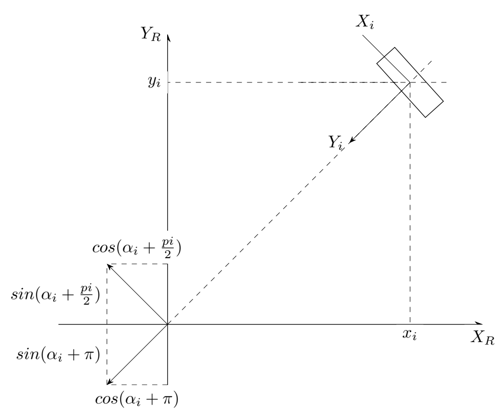

FIGURE 3 – Représentation d'une roue (a refaire ajouter alpha est une meilleur design ajouter $l\theta_r$)

En projetant les vitesses dans le repère local du robot, on obtient la relation suivante entre la vitesse linéaire des roues et la vitesse globale du robot :

$$r\dot{\Phi_i} = -\sin(\alpha_i)\dot{x_r} + \cos(\alpha_i)y_r + l\dot{\theta_R}$$

En suivant le même raisonnement, et dans un souci de généralisation, on note α_i l'angle formé par la $i^{\text{ème}}$ roue par rapport au centre du châssis. On en déduit un système d'équations décrivant la cinématique de chaque roue, qui peut être regroupé sous forme matricielle. Ce système régit la vitesse angulaire des roues en fonction du vecteur de mouvement du robot exprimé dans son repère local $\dot{\zeta}_R$.

$$\begin{cases} r\dot{\Phi}_1 = -\sin(\alpha_1)\dot{x}_R + \cos(\alpha_1)\dot{y}_R + l\dot{\theta}_R \\ r\dot{\Phi}_2 = -\sin(\alpha_2)\dot{x}_R + \cos(\alpha_2)\dot{y}_R + l\dot{\theta}_R \\ r\dot{\Phi}_3 = -\sin(\alpha_3)\dot{x}_R + \cos(\alpha_3)\dot{y}_R + l\dot{\theta}_R \\ r\dot{\Phi}_4 = -\sin(\alpha_4)\dot{x}_R + \cos(\alpha_4)\dot{y}_R + l\dot{\theta}_R \end{cases}$$

Et donc sous forme matricelle :

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \\ \dot{\Phi}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & l \\ -\sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & l \\ -\sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & l \\ -\sin(\alpha_4) & \cos(\alpha_4) & l \end{pmatrix} \dot{\zeta}_R$$

En particulier en considerant les angles de nos roues, on obtient une matrice à 4 lignes et 3 colonnes nommé la matrice Jacobienne noté J :

$$J = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & l \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & l \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & l \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & l \end{pmatrix}$$

1.1 Cinématique Directe

La cinématique directe permet de déterminer les vitesses du robot $\dot{\zeta}_R = (\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R)^T$ à partir des vitesses des roues $\dot{\Phi}_i$. Cela se fait en utilisant la pseudo-inverse de la matrice Jacobienne J.

$$\dot{\zeta}_R = J^+ \begin{pmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \\ \dot{\Phi}_4 \end{pmatrix}$$

où J^+ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice J, définie par :

$$J^+ = (J^T J)^{-1} J^T$$

Cette opération permet de calculer la vitesse du châssis à partir des vitesses mesurées ou imposées aux roues. Mathématiquement, la pseudo-inverse existe toujours

1.2 Cinématique Inverse

La cinématique inverse permet de déterminer les vitesses angulaires des roues $\dot{\Phi}_i$ à partir des vitesses du robot exprimées dans son repère local $\dot{\zeta}_R = (\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R)^T$. Cela s'obtient directement en appliquant la matrice Jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \\ \dot{\Phi}_4 \end{pmatrix} = J \cdot \dot{\zeta}_R$$

Cette formulation permet de déterminer les commandes des moteurs de roues à partir de la commande de déplacement du robot.

2 Modéle Dynamique

Le but de la Dynamique

Le modèle cinématique décrit uniquement le mouvement géométrique du robot, en reliant les vitesses des roues aux vitesses du châssis (position, orientation, trajectoire), sans tenir compte des masses, des forces ni des couples moteurs. Ce modèle est suffisant pour des tâches de planification ou de commande à basse vitesse, où les effets dynamiques sont négligeables.

Cependant, pour concevoir des lois de commande réalistes, piloter précisément les moteurs, ou simuler le comportement du robot dans un environnement physique (accélérations, inertie, frottements...), il devient nécessaire d'introduire la dynamique du robot. Le modèle dynamique prend en compte les forces, couples, masses, inertie, et frottements, permettant de relier les efforts moteurs aux accélérations du robot.

Modélisation Mathématiques

En gardant les notations de la partie cinématique, on considere en plus la masse m du robot et I_z le moment d'inertie selon l'axe Z du robot (On peut dans un premier temps l'approximer en considerant que le robot est un cylindre et donc utiliser le moment d'inertie d'un cylindre).

Pour un robot mobile simple sans frottement visqueux ni terrain irrégulier, on a :

$$M\ddot{\zeta}_R = \vec{F}_{\text{roues}}$$

Avec $\vec{F}_{\text{roues}}$, le vecteur des efforts résultants (forces et couples) que les roues transmettent au corps du robot, c'est la "traduction" des efforts individuels des roues en un effort global appliqué au centre de masse du robot.

Et M est la matrice definie par :

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

Lien avec la Jacobienne J

Il est nécessaire d'avoir cette interpretation sur J

- J traduit comment les vitesses du robot se transforment en vitesses des roues
- J^T traduit comment les couples moteurs des roues se convertissent en efforts (forces et moment) sur le robot

On sachant la traduction de J^T, on obtient :

$$\vec{F}_{\text{roues}} = J^T\Gamma, \quad \text{avec} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur Γ représente les couples moteurs appliqués à chaque roue du robot. Chaque γ_i est le couple mécanique généré par le moteur de la roue i.

In fine, on obtient cette équation :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \ddot{\zeta}_R = J^T\Gamma$$

Ainsi en exprimant $\ddot{\zeta}_R$ (respectivement Γ) en fonction du reste, on obtient la dynamique direct (respectivement la dynamique inverse).

2.1 Dynamique Directe

On cherche l'accélération $\ddot{\zeta}_R$

$$\ddot{\zeta}_R = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}^{-1} J^T \Gamma$$

2.2 Dynamique Inverse

On cherche les couples moteurs Γ

$$\Gamma = \left(J^T\right)^+ \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \ddot{\zeta}_R$$

3 Odometrie

L'odométrie est une méthode utilisée pour estimer la position et l'orientation d'un robot ou d'un véhicule au cours du temps, en intégrant ses mouvements à partir de mesures locales. Elle permet de reconstituer la trajectoire parcourue à partir des données de mouvement, sans recourir à un système de positionnement global (comme le GPS).

Elle repose généralement sur des capteurs embarqués, tels que :
- des **encodeurs placés sur les roues** (odométrie dite *classique*),
- une **centrale inertielle** (IMU) mesurant les accélérations et rotations,
- ou encore des **caméras** (dans le cas de l'odométrie visuelle).

Dans notre cas, nous utilisons les encodeurs de roues, qui fournissent directement la vitesse de rotation de chaque roue. À partir de ces vitesses, et grâce à un modèle cinématique du robot, nous pouvons estimer sa position et son orientation à chaque instant par intégration.

L'odométrie présente plusieurs avantages :
- Elle permet de suivre le déplacement du robot en temps réel.
- Elle fournit une estimation de la pose (position et orientation) à chaque instant.
- Elle rend possible l'exécution de tâches de navigation autonome, comme le suivi de trajectoire ou la cartographie (SLAM).

Pour une première approximation, il est généralement plus simple d'utiliser un modèle cinématique plutôt qu'un modèle dynamique, car il se concentre uniquement sur la géométrie du mouvement (position, vitesse, orientation), sans prendre en compte les forces, les masses ou les frottements.

En revanche, dans des contextes où le robot évolue à grande vitesse ou interagit fortement avec son environnement, un modèle dynamique peut devenir nécessaire pour gagner en précision.

Intégrer les vitesses pour savoir les positions

Si les vitesses global de notre robot $\dot{\zeta}_R$ sont connues, sa position peut être estimée par intégration discrète comme suit :

$$\begin{cases} x_R(t+\Delta t) = x_R(t) + \dot{x_R} \cdot \Delta t \\ y_R(t+\Delta t) = y_R(t) + \dot{y_R} \cdot \Delta t \\ \theta_R(t+\Delta t) = \theta_R(t) + \dot{\theta_R} \cdot \Delta t \end{cases}$$

où Δt représente le pas de temps entre deux mises à jour successives.

Cette méthode, connue sous le nom d'intégration d'Euler, est simple mais peut accumuler des erreurs. D'autres méthodes d'intégration plus précises, comme Runge-Kutta permettent de mieux contrôler les erreurs et d'obtenir des résultats plus fiables, en particulier pour des systèmes plus complexes ou pour des pas de temps plus grands.

3.1 Connaitre la position du robot au cours du temps

Pour savoir la position du robot au cours du temps, on regarde la vitesse du robot, puis on détermine la vitesse global du robot par la cinématique directe, puis on intégre pour avoir la position au cours du temps, un schéma est présent sur la figure 4 :

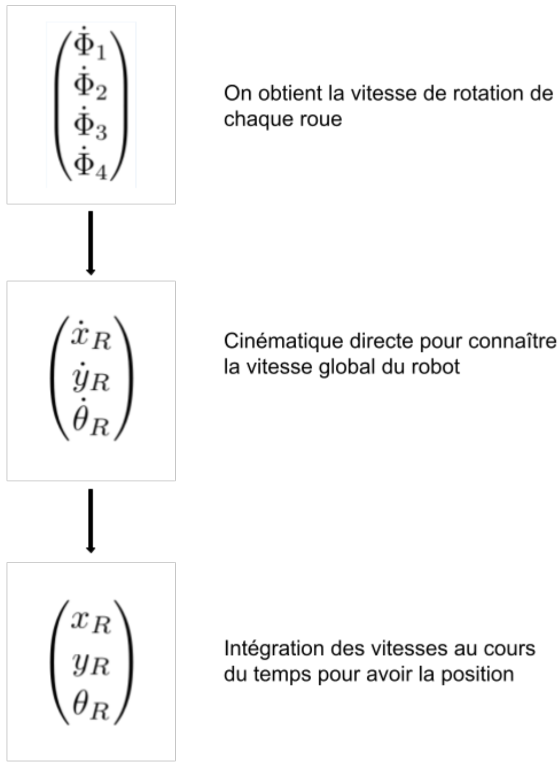

FIGURE 4 – Approximer la position du robot via ses vitesses

3.2 Faire suivre une trajectoire au robot

Pour faire suivre une trajectoire au robot, il faut définir trois fonctions dérivables du temps : $x_R(t)$, $y_R(t)$ et $\theta_R(t)$, représentant respectivement la position et l'orientation souhaitées du robot.

On en déduit les vitesses associées par dérivation :

$$\dot{x}_R(t) = \frac{dx_R(t)}{dt}, \quad \dot{y}_R(t) = \frac{dy_R(t)}{dt}, \quad \dot{\theta}_R(t) = \frac{d\theta_R(t)}{dt}$$

Ces vitesses peuvent ensuite être utilisées comme consignes dans un contrôleur pour guider le robot le long de la trajectoire souhaitée en suivant le schéma de la figure 5.

C'est le même principe que celui de la figure 4, sauf qu'en plus il faut envoyer des vitesses au roues et ensuite lire ces vitesses.

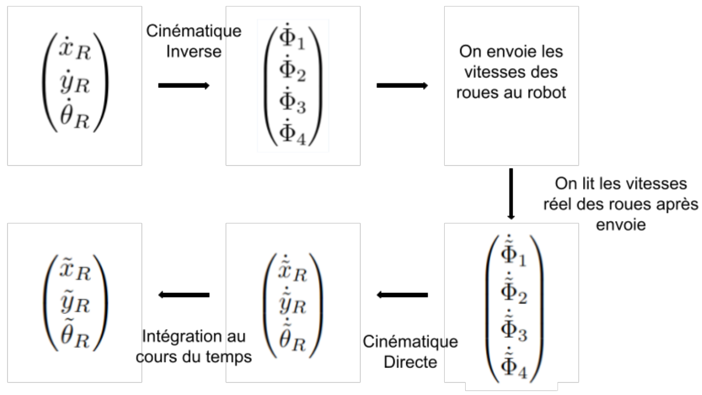

Figure 5 – Faire suivre une trajectoire au robot

Conclusion sur l'odométrie

L'odométrie permet d'estimer la position du robot en intégrant les vitesses mesurées au cours du temps. Cependant, cette intégration n'est jamais parfaite : à cause du bruit des capteurs, des glissements ou des imprécisions mécaniques, une dérive s'accumule progressivement. Pour limiter cette erreur, il est courant de coupler le modèle odométrique classique avec une source d'information externe, telle qu'une caméra ou un système de vision, capable de fournir en temps réel une estimation plus fiable de la position absolue du robot. Cette fusion de données permet ainsi de corriger la trajectoire estimée et d'améliorer la robustesse de la localisation.

4 Références

1. Hélder P. Oliveira, Armando J. Sousa, A. Paulo Moreira, et Paulo J. Costa. *Dynamical Models for Omni-Directional Robots with 3 and 4 Wheels.* Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Portugal. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2009.
2. J. Allali, J. Bezamat, A. Boussicault, R. Denieport, P. Felix, O. Ly, S. Loty, S. N'Guyen, V. Mignot, G. Passault, T. Saliba. *NAMeC - Team Description Paper, Small Size League RoboCup 2019 : Application of Qualification in Division B.* LaBRI, Université de Bordeaux, ENSEIRB-MATMECA, CATIE, Bordeaux Ynov Campus, France, 2019.
3. Daniela Moya, Claudio Tapia, Gabriel Arcaya, Nicolás Mansilla, Matias Faundes, Gerson Marihuan, et Nelson Cortés. *Sysmic Robotics - Team Description Paper 2025.* Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chili, 2025.
4. Kevin M. Lynch et Frank C. Park. *Modern Robotics : Mechanics, Planning, and Control.* Cambridge University Press, 2017. Disponible en ligne : `http://hades.mech.northwestern.edu/index.php/Modern_Robotics`.