

n^2 Euler-Squares 邏輯限制式數學模型

加減 Plus & Minus

2020.5

1 情境描述

有一個 $n \times n$ 方格，列行座標為 $S := \{(0, 0), (0, 1), \dots, (n-1, n-1)\}$ ，行集合 $J := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ，列集合 $I := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ，有 n^2 個相異物件，每個物件 (a_1, a_2) 可用兩種屬性集 A_1, A_2 表示，數學式大概可寫成

$$\left| \left\{ (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 : |A_1| = |A_2| = n \right\} \right| = n^2$$

，今要尋找所有放法(把這 n^2 個物件放到方格上，並滿足以下條件)

- 每一列物件恰有 所有屬性 A_1, A_2 ，且屬性不會重覆
- 每一行物件恰有 所有屬性 A_1, A_2 ，且屬性不會重覆
- 兩條主對角線恰有所有屬性 A_1, A_2 ，且屬性不會重覆，其中對角線座標集可既做

$$- S^{\text{左上右下}} := \{(i, j) \in S : i = j\}$$

$$- S^{\text{左下右上}} := \{(i, j) \in S : i + j = (n-1)\}$$

2 邏輯數學建模

- 定義 n^4 大小，四維布林陣列 $X \in \{0,1\}^{I \times J \times A_1 \times A_2}$
 $X(i, j, a_1, a_2) = 1 \iff$ 把物件(a_1, a_2) 放到方格 (i, j) 位置上
 並把以下限制式放入 CP(Constraint Programming) Solver，即可有效率窮舉求解 !!

- (1) 每一個方格恰好放一個物件

$$\bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} \left[\sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} X(i, j, a_1, a_2) = 1 \right]$$

- (2) 每一個物件在所有方格上是存在且唯一

$$\bigwedge_{a_1 \in A_1} \bigwedge_{a_2 \in A_2} \left[\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} X(i, j, a_1, a_2) = 1 \right]$$

- (3-1) 每一列物件都含有所有屬性 A_1 且都唯一

$$\bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{a_1 \in A_1} \left[\sum_{a_2 \in A_2} \sum_{j \in J} X(i, j, a_1, a_2) = 1 \right]$$

- (3-2) 每一列物件都含有所有屬性 A_2 且都唯一

$$\bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{a_2 \in A_2} \left[\sum_{a_1 \in A_1} \sum_{j \in J} X(i, j, a_1, a_2) = 1 \right]$$

- (4-1) 每一行物件都含有所有屬性 A_1 且都唯一

$$\bigwedge_{j \in J} \bigwedge_{a_1 \in A_1} \left[\sum_{a_2 \in A_2} \sum_{i \in I} X(i, j, a_1, a_2) = 1 \right]$$

- (4-2) 每一行物件都含有所有屬性 A_2 且都唯一

$$\bigwedge_{j \in J} \bigwedge_{a_2 \in A_2} \left[\sum_{a_1 \in A_1} \sum_{i \in I} X(i, j, a_1, a_2) = 1 \right]$$

- (5-1) 主對角線(左上右下)物件都含有所有屬性 A_1 且都唯一

$$\bigwedge_{a_1 \in A_1} \left[\sum_{(i,j) \in S^{\text{左上右下}}} \sum_{a_2 \in A_2} X(i, j, a_1, a_2) = 1 \right]$$

- (5-2) 主對角線(左上右下)物件都含有所有屬性 A_2 且都唯一

$$\bigwedge_{a_2 \in A_2} \left[\sum_{(i,j) \in S^{\text{左上右下}}} \sum_{a_1 \in A_1} X(i, j, a_1, a_2) = 1 \right]$$

- (6-1) 主對角線(左下右上)物件都含有所有屬性 A_1 且都唯一

$$\bigwedge_{a_1 \in A_1} \left[\sum_{(i,j) \in S^{\text{左下右上}}} \sum_{a_2 \in A_2} X(i, j, a_1, a_2) = 1 \right]$$

- (6-2) 主對角線(左下右上)物件都含有所有屬性 A_2 且都唯一

$$\bigwedge_{a_2 \in A_2} \left[\sum_{(i,j) \in S^{\text{左下右上}}} \sum_{a_1 \in A_1} X(i, j, a_1, a_2) = 1 \right]$$

3 小記

- 符號備註：

\bigwedge 符號代表大 ”and” ，代表這些限制式要同時滿足，或可想成 for each ... such that

- 廣義抽象形式：

$$\left(\forall a \in A, \exists b \in B \right) \iff \bigwedge_{a \in A} \sum_{b \in B} X(a, b) = 1$$