CNC Maroc 2005 - Math I

Par M. TAIBI Professeur en MP* Lycée Moulay Youssef Rabat

I. Résultats préliminaires

A- Un Résultat de dérivation

1. La formule de Taylor-young à l'ordre 2 appliquée à f entre x_0 et x_0+h donne :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+h^2\varepsilon_1(h)\quad avec\quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)\qquad (1)$$

De même si l'on applique la formule de Taylor-young à l'ordre 2 appliquée à f entre x_0-h et x_0, on aura :

$$f(x_0-h)=f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+h^2\varepsilon_2(h)\quad avec\quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h)\qquad (2)$$

2. Si l'on pose $\Delta_f^2(x_0,h)=\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$, par (1) et (2), on a : $\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)+\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(h)$ et puis $\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}\right)=\lim\limits_{h\to 0^+}\left(f''(x_0)+\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(h)\right)=f''(x_0)$. Donc :

$$\lim_{h\to 0^+}\Delta_f^2(x_0,h)=f''(x_0)$$

3. Si $f''=0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, alors f est affine sur $\mathbb{R}$.

B- Un résultat de convergence

On suppose que $(v_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle .

1. On suppose en plus que $(b_n)_n$ est bornée : $\exists M\geqslant 0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|b_n|\leqslant M$

   1.1 Montrons que $\lim\limits_{n\infty}\int\limits_0^{2\pi}v_n^2(x)dx=0$

   On a : • Pour tout n, v_n est continue sur R
   • $(v_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, donc $(v_n^2)_n$ converge aussi vers la fonction nulle.
   • Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout entier $n\geqslant 1$, $0\leqslant v_n^2(x)\leqslant b_n^2\sin^2(nx)\leqslant b_n^2\leqslant M^2$.

   Par le théorème de convergence dominée, on a : $\lim\limits_{n\infty}\int\limits_0^{2\pi}v_n^2(x)dx=\int\limits_0^{2\pi}0dx=0$

   1.2 Pour tout entier $n>0$, on a : $\int\limits_0^{2\pi}v_n^2(x)dx=b_n^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2(nx)dx=\pi b_n^2$, donc $\lim\limits_{n\infty}\pi b_n^2=\lim\limits_{n\infty}\int\limits_0^{2\pi}v_n^2(x)dx=0$, et puis $\lim\limits_{n\infty}b_n=0$.

2. .

   2.1 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $c_n=\min(1,|b_n|)\leqslant 1$, donc $(c_n)_n$ est bornée .
   Pour $x\in\mathbb{R}$, et $n\in\mathbb{N}$, ,on a :

   $$\begin{aligned}|w_n(x)| &= |c_n\sin(nx)|\\ &= |c_n|\,|\sin(nx)|\\ &\leqslant |b_n|\,|\sin(nx)| \quad = |b_n\sin(nx)|=|v_n(x)|\end{aligned}$$

   Comme $(v_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, alors $(w_n)_n$ converge aussi vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

   2.2 D'après la question 1.), la suite $(c_n)_n$ converge vers 0.
   Soit $\varepsilon=\frac{1}{2}<1$, il existe donc $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $|c_n|\leqslant\varepsilon=\frac{1}{2}$ pour tout $n\geqslant n_0$ et par $c_n=\min(1,|b_n|)$, on a : $|c_n|=|b_n|$ pour tout $n\geqslant n_0$ et par suite $\lim\limits_{n}b_n=0$.

II. Série trigonométriques dont la somme est continue.

On suppose ici $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers et que sa somme f est continue sur $\mathbb{R}$.

1. .

1.1 On sait que (hypothèse) la série numérique $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la suite $(u_n(x))_n$ converge vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$, et par suite la suite de fonctions $(u_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur R .

1.2 Pour $x = 0$, on a : $\sum u_n(0)$ converge, donc $\lim\limits_{n} u_n(0) = 0$. Mais $u_n(0) = a_n \cos(n.0) + b_n \sin(n.0) = a_n$,donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

1.3 On sait que, piur tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0$, en échangeant x en $-x$, on a aussi $\lim\limits_{n}(a_n \cos(nx) - b_n \sin(nx)) = 0$ et par différence, on obtient : $\lim\limits_{n}(2b_n \sin(nx)) = 0$ et apr suite : $\lim\limits_{n} v_n(x) = 0.$

En conclusion : la suite de fonctions $(v_n)_n$ converge sipmlement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Autre façon : On peut écrire $v_n(x) = u_n(x) - a_n \cos(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc : $|v_n(x)| \leqslant \underbrace{|u_n(x)|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - \underbrace{|a_n|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$ et puis $(v_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

D'après la question I-2.2.1 la suite $(b_n)_n$ converge vers 0.

2. .

2.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{|u_n(x)|}{n^2} \leqslant \dfrac{|a_n| + |b_n|}{n^2} = o(\dfrac{1}{n^2})$ car $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, il en résulte que $\sum \dfrac{u_n}{n^2}$ converge normalement (donc uniformément) sur R.

On pose $-F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n(x)}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme chaque fonction $\dfrac{1}{n^2}u_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\sum \dfrac{1}{n^2}u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $-F$, il en résulte (thm. du cours)que $-F$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : F est continue sur R .

2.2 Pour chaque n, u_n est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, donc F est aussi 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n(F) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(x)\cos(nx)dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{u_k(x)}{k^2}\cos(nx)dx$

Mais $\left|\frac{u_k(x)}{k^2}\cos(nx)\right| \leqslant \dfrac{\|u_k\|_\infty}{k^2}$ et que $\sum \dfrac{\|u_k\|_\infty}{k^2}$ converge (donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(x \mapsto \dfrac{u_k(x)}{k^2}\cos(nx)\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$)., donc le théorème d'interversion de $\int\limits_0^{2\pi}$ et $\sum$ s'applique, il en résulte que

$$\begin{aligned}
a_n(F) &= -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_k(x)\cos(nx)dx \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\left(a_k\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx}_{\delta_{n,k}} + b_k\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(kx)\cos(nx)dx}_{=0}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}a_k\delta_{n,k}, \quad \text{avec} \quad \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases} \\
&= -\frac{a_n}{n^2}
\end{aligned}$$

3. Si $\varphi(t) = \begin{cases} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 & si \quad t \neq 0 \\ 1 & si \ \ t = 0 \end{cases}$, on pose $g(t)\begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & si \quad t \neq 0 \\ 1 & si \ \ t = 0 \end{cases}$, alors $\varphi = g^2$.

3.1 Or pour $t \neq 0$, on a : $g(t) = \dfrac{\sin(t)}{t} = \dfrac{1}{t}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ relation qui reste aussi valable pour $t = 0$, donc g est developpable en série entière sur $\mathbb{R}$, elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et par suite $\varphi = g^2$ est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En particulier $\varphi = g^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi'(t) = 2g(t)g'(t) = \frac{\sin(2t)}{t^2} - \frac{2\sin^2(t)}{t^3}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3.2 D'après la question précédente φ' est continue sur $[0, +\infty[$ et qu'au voisinage de $+\infty$, $\varphi'(t) = O(\frac{1}{f^2})$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc φ' est intégrable sur $[0, +\infty[$.

4. $S_0(x)=0$ et $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

4.1 Pour $n\geqslant 1$, $u_n(x+2h)+u_n(x-2h)-2u_n(x)=a_n\left[\cos(nx+2nh)+\cos(nx-2nh)-2\cos(nx)\right]+b_n\left[\sin(nx+2nh)+\sin\right.$

Or $\quad \begin{aligned}\cos(nx+2nh)+\cos(nx-2nh)-2\cos(nx) &= 4\cos nx\cos^2 nh-4\cos nx\\ &= 4\cos(nx)\left[\cos^2(nh)-1\right]\end{aligned}$

et $\quad \begin{aligned}\sin(nx+2nh)+\sin(nx-2nh)-2\sin(nx) &= 4\sin nx\cos^2 nh-4\sin nx\\ &= 4\sin(nx)\left[\cos^2(nh)-1\right]\end{aligned}$.

Donc

$$\begin{aligned}\frac{F(x+2h)-F(x-2h)-2F(x)}{4h^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{u_n(x+2h)+u_n(x-2h)-2u_n(x)}{4h^2}\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\frac{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)}{4h^2}\left[\cos^2(nh)-1\right]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\left[\frac{\cos^2(nh)-1}{n^2h^2}\right]\end{aligned}$$

et comme $-\dfrac{\cos^2(nh)-1}{n^2h^2}=\left(\dfrac{\sin(nh)}{nh}\right)^2=\varphi(nh)$, on obtient :

$$\Delta_F^2(x,2h)=\frac{F(x+2h)-F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\varphi(nh)$$

4.2 Avec $u_n=S_n-S_{n-1}$, on a : $\begin{aligned}[t]\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\varphi(nh) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(S_n(x)-S_{n-1}(x)\right)\varphi(nh)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}S_n(x)\varphi(nh)-\sum_{n=1}^{+\infty}S_{n-1}(x)\varphi(nh)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}S_n(x)\varphi(nh)-\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\varphi((n+1)h)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\left(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)\right) \text{ car } S_0(x)=0\end{aligned}$

Comme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)\right)=\varphi(0)=1$ car $\varphi(nh)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, on a : $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(x)\left(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)\right)$ et par suite :

$$\begin{aligned}\Delta_F^2(x,2h)-f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\left(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)\right)-\sum_{n=1}^{+\infty}f(x)\left(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(S_n(x)-f(x)\right)\left(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)\right)\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé .

4.3 Soit $\varepsilon>0$ et $A=\int_0^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt$.

Comme φ' est continue et non identiquement nulle sur $[0,+\infty[$, alors $A=\int_0^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt>0$.

i) Pour $x\in\mathbb{R}$, comme $(S_n)_n$ converge simplement vers f sur R, il existe alors $N\in\mathbb{N}^*$ tel que : $|S_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2A}$ pour tout $n\geqslant N$.

ii) Pour $n\in\mathbb{N}$ et $h>0$, on a : $\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)=-\int\limits_{nh}^{(n+1)h}\varphi'(t)dt$, donc :

$|\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)|\leqslant\int\limits_{nh}^{(n+1)h}|\varphi'(t)|\,dt$ et par suite :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}\left(S_n(x)-f(x)\right)\left(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)\right)\right| &\leqslant \sum_{n=N}^{+\infty}\underbrace{|S_n(x)-f(x)|}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2A}}\underbrace{|\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)|}_{\geqslant 0}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2A}\sum_{n=N}^{+\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}|\varphi'(t)|\,dt\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2A}\int_{Nh}^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

iii) D'après $ii)$, pour $n\geqslant N$ et $h>0$, on a : $\left|\Delta_F^2(x,2h)-f(x)\right|\leqslant\sum\limits_{k=0}^{N-1}|S_k(x)-f(x)|\,|\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)|+\frac{\varepsilon}{2}$.

Comme φ est continue en 0, on a : $\lim_{h\to 0}|\varphi(kh)-\varphi((k+1)h)|=0$, donc $\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{N-1}|S_k(x)-f(x)|\,|\varphi(nh)-\varphi((n+1)h$

0 et par suite $\lim_{h\to 0}\left|\Delta_F^2(x,2h)-f(x)\right|=0$ c'est à dire $\lim_{h\to 0}\dfrac{F(x+2h)-F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}=f(x)$.

5. .

5.1 Pour $x\in\mathbb{R}$, $F_1(x)=\int_0^x(x-t)f(t)=x\int_0^x f(t)-\int_0^x tf(t)$ et comme f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, il en résulte que F_1 est de classe C^1 avec $F_1'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$.

F_1' est donc la primitive de f qui s'annule en 0, d'où $F_1''(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

En Conclusion F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $F_1''=f$.

5.2 Pour $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$, on pose $H=2h$, on a : $h\to 0^+\Leftrightarrow H\to 0^+$.

Comme $\lim_{H\to 0}\Delta_F^2(x,H)=\lim_{h\to 0}\Delta_F^2(x,2h)=f(x)$ et $\lim_{h\to 0}\Delta_{F_1}^2(x,2h)=\lim_{H\to 0}\Delta_{F_1}^2(x,H)=F_1''(x)=f(x)$, il en résulte que $\lim_{h\to 0}\Delta_{(F-F_1)}^2(x,2h)=\lim_{h\to 0}\left(\Delta_F^2(x,2h)-\Delta_{F_1}^2(x,2h)\right)=0$, donc $g=F-F_1$ est affine

En déduit que $F=g+F_1$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car g affine et F_1 de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, avec $F''(x)=F_1''(x)=f(x)$.

5.3 Pour tout x, $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ et u_n est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, pour tout entier n, donc f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

On a :
$$\begin{aligned} a_n(f) &= a_n(F'') &&= -nb_n(F') \\ &&&= -n^2a_n(F) \\ &&&= -n^2(-\tfrac{a_n}{n^2}) \\ &&&= a_n \\ b_n(f) &= b_n(F'') &&= na_n(F') \\ &&&= -n^2b_n(F) \quad = b_n \end{aligned}$$

Car la série trigonométrique de somme F convege uniformément sur $\mathbb{R}$.

III. Séries trigonométriques impaires

A. Une étude de l'application précedente

On suppose que $\sum v_n$ converge simplement ves $f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

1. La série trigonométrique $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc $(v_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, et par suite $b_n\to 0$.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{|v_n(x)|}{n^2(n^2+1)}\leqslant\dfrac{|b_n|}{n^2(n^2+1)}=o(\dfrac{1}{n^4})$ et que $\sum\dfrac{1}{n^4}$ converge, donc $\sum\dfrac{|b_n|}{n^2(n^2+1)}$ converge et par suite $\sum\dfrac{v_n}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

   Dans la suite $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{v_n(x)}{n^2(n^2+1)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

   Si $\psi_n(x)=\dfrac{v_n(x)}{n^2(n^2+1)}$, alors :

   • ψ_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\psi_n'(x)=\dfrac{v_n'(x)}{n^2(n^2+1)}=\dfrac{b_n\cos(nx)}{n(n^2+1)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout entier $n\geqslant 1$.

   • $\forall(x,n)\in\mathbb{R}\times N$, $|\psi_n'(x)|\leqslant\dfrac{|b_n|}{n(n^2+1)}=o(\dfrac{1}{n^3})$, donc $\sum\psi_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$.

   •$\forall(x,n)\in\mathbb{R}\times N$, $|\psi_n''(x)|\leqslant\dfrac{|b_n|}{(n^2+1)}=o(\dfrac{1}{n^2})$, donc $\sum\psi_n''$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$.

   Le théorème de dérivation terme à terme montre que ψ est de classe C^2, et $\psi''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n\sin(nx)}{(n^2+1)}$.

3.