CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices ***sont interdites.***

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants

PREMIER EXERCICE

Calculer les deux intégrales doubles suivantes :

a. $\iint_T (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 , x \le 1 , y \le 1 , x + y \ge 0\}$.

b. $\iint_C |x+y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $C = [-1, 1]\times[-1, 1]$.

DEUXIÈME EXERCICE

Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire

$$(E_n) : xy' - ny = 0 .$$

1. Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$.

2. Dans le cas où $n = 1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

3. Dans le cas où $n \ge 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME : Autour du théorème d'ABEL pour les séries entières

Dans tout le problème :
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1, 1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :
$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I. GÉNÉRALITÉS

1. En utilisant des développements en série entière « usuels », donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :

a. (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;

b. (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;

c. (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;

d. La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1, 1[$ (justifier).

2. On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. *Exemple*

Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

(on pourra utiliser une décomposition en éléments simples).

II. THÉORÈME D'ABEL

4. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge.

On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).

On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\, x^k$.

a. Simplifier, pour tout $x \in [0,1]$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p}$.

b. En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $R_n(x) = r_n\, x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.

c. Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que :

pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout réel $x \in [0,1]$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

d. Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5. Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$?

6. *Exemple*

Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \arctan x$ puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

7. *Application*

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

a. Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

(On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$ pour $n \geq 1$).

b. Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Tournez la page S.V.P.

III. RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

8. Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

On cherche à rajouter une condition $(\mathcal{Q})$ à la condition $(\mathcal{P}_2)$ de telle sorte que si (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$, alors elle vérifie $(\mathcal{P}_1)$.

9. On prend pour $(\mathcal{Q})$ la propriété : pour tout entier n, $a_n \geq 0$.
Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$, alors elle vérifie la propriété $(\mathcal{P}_1)$ (on pourra montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \lim_{x\to 1^-} f(x)$).

Si on prend pour $(\mathcal{Q})$ la propriété :
la suite (a_n) vérifie $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (la suite (a_n) est dominée par la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$),
on obtient le **théorème de Littlewood** dont on admettra la démonstration pour l'appliquer dans la partie suivante.

IV. SÉRIES HARMONIQUES TRANSFORMÉES

Désormais, on admet et on pourra utiliser le théorème de Littlewood :
si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum a_n$ converge.

Pour p entier naturel non nul, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ périodique de période p formée d'éléments de l'ensemble $\{-1,\ 1\}$.

10. Donner, en justifiant leur valeur, les rayons de convergence des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \varepsilon_n\, x^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$.

On pose, pour $x \in \left]-1, 1\right[$: $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $\displaystyle g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n\, x^{n-1}$.

11. Établir que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

12. Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.

13. Retrouver, uniquement par les deux questions précédentes, que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et que la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.

14. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$ pour que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.

Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?

15. *Exemple*

Dans le cas où la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est périodique de période 6 avec $\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = 1,\ \varepsilon_4 = -1,\ \varepsilon_5 = -1,\ \varepsilon_6 = -1$, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$

(il est demandé de détailler les calculs).

Fin de l'énoncé.