Corrigé CCP math I PSI 2003

PARTIE I

Question I.1 L'application $t \mapsto \mu(t)\cos t$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème fondamental de l'intégration G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $G'(x) = \mu(x)\cos x$. De même pour H, avec $H'(x) = \mu(x)\sin x$. On en déduit

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sin x\, \mu(x)\cos x + \cos x \int_0^x \mu(t)\ \cos t\,\mathrm{d}t + \sin x \int_0^x \mu(t)\sin t\,\mathrm{d}t - \cos x\, \mu(x)\sin(x) \\ &= \cos x \int_0^x \mu(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \sin x \int_0^x \mu(t)\sin t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

D'où $F(0) = 0$ et $F'(0) = 0$.

Question I.2

G et H étant de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que F' est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc que F est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus,

$$F''(x) = -\sin x G(x) + \cos^2 x\, \mu(x) + \cos x H(x) + \sin^2(x)\mu(x) = -F(x) + \mu(x).$$

Donc

$$F''(x) + F(x) = \mu(x).$$

Question I.3

F vérifie le problème de Cauchy linéaire

$$y'' + y = \mu, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0,$$

et d'après le cours il y a unicité de la solution de ce problème donc $F = \varphi$.

Remarque : l'égalité $\varphi(x) = \sin x \int_0^x \mu(t)\,\mathrm{d}t - \cos x \int_0^x \mu(t)\,\mathrm{d}t$ s'obtient aussi en appliquant la méthode de variation des constantes pour résoudre (E_μ).

Question I.4

I.4.1 En dérivant : $G'(x+2\pi) - G'(x) = \mu(x+2\pi)\cos(x+2\pi) - \mu(x)\cos x = 0$ car μ est $2\pi-$périodique. De même $H'(x+2\pi) - H'(x) = 0$.

I.4.2 La fonction $x \mapsto G(x+2\pi) - G(x)$ est donc constante, égale à sa valeur en $x = 2\pi$, soit :

$$G(x+2\pi) - G(x) = G(2\pi).$$

De même, $H(x+2\pi) - H(x) = H(2\pi)$.

I.4.3

$$\begin{aligned} \varphi(x+2\pi) - \varphi(x) = F(x+\pi) - F(x) &= (G(x+2\pi) - G(x))\sin x - (H(x+2\pi) - H(x))\cos x \\ &= G(2\pi)\ \sin x - H(2\pi)\ \cos x. \end{aligned}$$

I.4.4 La famille $(\cos, \sin)$ étant libre, F est 2π-périodique si et seulement si $G(2\pi) = H(2\pi) = 0$.

I.4.5 Avec $\mu = \sin$ on a $G(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\,\mathrm{d}t = 0$ et $H(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi \neq 0$ donc $\varphi_{\sin}$ n'est pas 2π-périodique. Même conclusion pour $\varphi_{\cos}$ car alors $G(2\pi) = \pi \neq 0$.

I.4.6 Pour $\mu = \sin$ et pour tout entier n on a

$$\varphi(2n\pi) = F(2n\pi) = 0 \times 0 - \cos(2n\pi) \times n\pi = -n\pi$$

donc $\varphi_{\sin}$ n'est pas bornée.

Pour $\mu = \cos$ et pour tout entier n on a

$$G\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = n\pi$$

d'où

$$\varphi\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = F\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi$$

donc $\varphi_{\cos}$ n'est pas bornée.
Autre méthode : on peut aussi calculer

$$\varphi_{\sin}(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

et

$$\varphi_{\cos}(x) = \frac{1}{2}x\sin x.$$

I.4.7 Pour $\mu = |\sin|$

$$G(2\pi) = \int_0^{2\pi} |\sin t|\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin t\cos t\,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t\cos t\,\mathrm{d}t,$$

et en faisant $t = \pi + u$ dans la deuxième intégrale cela donne $G(2\pi) = 0$. On obtient par le même procédé $H(2\pi) = 0$, ce qui établit que φ est 2π-périodique.

I.4.8 φ étant de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique, les applications φ, φ' et φ'' sont continues et 2π-périodiques donc bornées : en effet on a alors $\varphi(\mathbb{R}) = \varphi([0, 2\pi])$ qui est donc une partie compacte de $\mathbb{R}$ et de même pour φ' et φ''.

PARTIE II

Question II.1 $t \mapsto e^{-t}|\sin t|$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant e^{-t}|\sin t| \leqslant e^{-t}$ ce qui montre que $t \mapsto e^{-t}|\sin t|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $t \mapsto e^{-t}$ l'est.

Question II.2

II.2.1 $v_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \mathfrak{Im}\left(\int_0^{\pi} e^{(-1+i)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathfrak{Im}\left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_0^{\pi} = \mathfrak{Im}\left[\frac{-1-i}{2}(-e^{-\pi}-1)\right]$ ce qui donne : $v_0 = \dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$.

II.2.2 Avec le changement de variable $t = n\pi + u$ on obtient :

$$v_n = \int_0^{\pi} e^{-n\pi-u}|\sin u|\,\mathrm{d}u = e^{-n\pi}v_0 = (e^{-\pi})^n v_0.$$

II.2.3 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est donc une série géométrique de raison $\rho = e^{-\pi} \in]-1, 1[$ donc convergente. De plus sa somme est égale à

$$\frac{v_0}{1-\rho} = \frac{e^{-\pi}+1}{2(1-e^{-\pi})} = \frac{1}{2}\coth\frac{\pi}{2}.$$

II.2.4 La fonction $t \mapsto e^{-t}|\sin t|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty}\int_0^{X} e^{-t}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi} e^{-t}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Question II.3

II.3.1 Nous avons vu que φ était bornée sur $\mathbb{R}^+$. Posons $M = \sup_{\mathbb{R}^+} |\varphi|$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |e^{-t}\varphi(t)| \leqslant Me^{-t}.$$

Donc l'application $t \mapsto e^{-t}\varphi(t)$ est continue et majorée en module par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ce qui prouve qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De même pour les deux autres.

II.3.2 Soit $X \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^X \varphi(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t &= [-e^{-t}\varphi(t)]_0^X + \int_0^X \varphi'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\varphi(X)e^{-X} + [-e^{-t}\varphi'(t)]_0^X + \int_0^X \varphi''(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\varphi(X)e^{-X} - \varphi'(X)e^{-X} + \int_0^X \varphi''(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

En faisant tendre X vers $+\infty$ on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi''(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Or $\varphi(t) + \varphi''(t) = \mu(t)$ donc $\varphi(t)e^{-t} + \varphi''(t)e^{-t} = \mu(t)e^{-t}$ ce qui donne

$$2\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mu(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}.$$

PARTIE III

Question III.1

III.1.1 μ est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de convergence normale s'applique et la suite des sommes partielles de la série de Fourier de μ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers μ.

III.1.2 De même pour φ puisque φ est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Question III.2

III.2.1 μ étant paire on a pour tout n entier naturel $b_n(\mu) = 0$ et

$$\begin{aligned}
a_n(\mu) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mu(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin(n+1)t - \sin(n-1)t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On distingue : $a_1(\mu) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin(2t)\,\mathrm{d}t = 0$ et,

$$\text{si } n \neq 1 \qquad \begin{aligned}
a_n(\mu) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n-1)t}{n-1} - \frac{\cos(n+1)t}{n+1}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\left[((-1)^{n-1}-1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{n-1}-1}{(n-1)(n+1)}.
\end{aligned}$$

Soit pour tout entier naturel p :

$$\begin{aligned} a_{2p}(\mu) &= -\frac{4}{\pi(2p-1)(2p+1)} = \frac{-4}{\pi(4p^2-1)} \\ a_{2p+1}(\mu) &= 0. \end{aligned}$$

III.2.2 On peut justifier la convergence de la série par le fait que

$$\frac{1}{4p^2-1} \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{4p^2} > 0.$$

En appliquant le résultat de **III.1.1** on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad |\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2pt)}{4p^2-1}$$

qui donne pour $t = 0$

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$$

et donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}.$$

III.2.3 Cette fois on justifie la convergence de la série par le fait que

$$\frac{1}{(4p^2-1)^2} \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{16p^4} > 0.$$

On retrouve la convergence et on obtient de plus la somme grâce au théorème de Parseval qui s'applique à μ puisque μ est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}^2\right]$$

soit

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2}\right]$$

soit

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2}$$

et finalement

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Question III.3

III.3.1 Maintenant $G(x) = \displaystyle\int_0^x |\sin t| \cos t \,\mathrm{d}t$ et donc $G(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} |\sin t| \cos t \,\mathrm{d}t = -G(x)$ après avoir fait le changement de variable $u = -t$. Donc G est impaire. De même H est paire. On en déduit que $F (= \varphi)$ est paire. Et donc $b_n(\varphi) = 0$ pour $n \in N^*$.

III.3.2

$$\begin{aligned}
a_n(\varphi'') &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi''(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\varphi'(t)\cos(nt)\right]_0^{2\pi} + \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{n}{\pi}\left[\varphi(t)\sin(nt)\right]_0^{2\pi} - \frac{n^2}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= -n^2 a_n(\varphi).
\end{aligned}$$

Pour la troisième égalité on a utilisé le fait que φ' est 2π-périodique.

III.3.3 On a $\varphi + \varphi'' = \mu$ et donc par linéarité des coefficients de Fourier $a_n(\varphi) + a_n(\varphi'') = a_n(\mu)$ soit $(1-n^2)a_n(\varphi) = a_n(\mu)$.

Donc pour $n \neq 1$ on a $a_n(\varphi) = \dfrac{1}{1-n^2}a_n(\mu)$ ce qui donne

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p}(\varphi) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-4p^2)(4p^2-1)} = \frac{4}{\pi(4p^2-1)^2}$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1}(\varphi) = 0.$$

III.3.4 φ étant 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$ le théorème de convergence normale peut lui être appliqué et donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{2}{\pi} + a_1(\varphi)\cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2px)}{(4p^2-1)^2}$$

Pour $x = 0$ on obtient

$$\varphi(0) = 0 = \frac{2}{\pi} + a_1(\varphi) + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}$$

d'où l'on tire

$$a_1(\varphi) = -\frac{\pi}{4}.$$

Question III.4 On justifie la convergence de la série par le fait que

$$\frac{1}{(4p^2-1)(16p^4-1)} \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{64p^6} > 0.$$

En reprenant les notations précédentes on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left[\frac{2}{\pi} + a_1\cos t + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}\cos(2pt)\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t + a_1\int_0^{+\infty}\cos t\ e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}\cos(2pt)e^{-t}\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Il s'agit donc maintenant de justifier l'interversion série-intégrale.

- $t \mapsto a_{2p}\cos(2pt)\ e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$,
- la série de fonctions $\sum a_{2p}\cos(2pt)\ e^{-t}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction continue,
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_{2p}\cos(2pt)e^{-t}|\,\mathrm{d}t \leqslant |a_{2p}| = \frac{4}{\pi(4p^2-1)^2} \underset{p\infty}{\sim} \frac{1}{16\pi p^4}(>0)$ terme général d'une série convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes s'applique et permet donc l'interversion. On calcule d'abord

$$\int_0^{+\infty} \cos(nt)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathfrak{Re}\left[\int_0^{+\infty} e^{(-1+in)t}\,\mathrm{d}t\right] = \mathfrak{Re}\left[\frac{e^{(-1+in)t}}{-1+in}\right]_0^{+\infty} = \mathfrak{Re}\left[\frac{-1}{-1+in}\right] = \frac{1}{1+n^2}$$

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2pt)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+4p^2}$ donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2(4p^2+1)}$$

et donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)(16p^4-1)} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{4}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{8}\right]$$

Question III.5

III.5.1 $G_\varphi(2\pi) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t = \pi a_1(\varphi) \neq 0$ donc ϕ n'est pas 2π-périodique d'après le critère de **I.4.4**.

III.5.2 On a $\phi(x) = \sin x G_\varphi(x) - \cos x H_\varphi(x)$ donc

$$\begin{aligned}\phi\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= G_\varphi\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t + n\int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t + n\pi a_1(\varphi) \xrightarrow[n\infty]{} -\infty\end{aligned}$$

ce qui prouve que ϕ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

III.5.3 Soit $x \geqslant 0$. Alors

$$|G_\varphi(x)| = \left|\int_0^x \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant N_\infty(\varphi)x$$

et de même

$$|H_\varphi(x)| = \left|\int_0^x \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant N_\infty(\varphi)x.$$

On en déduit

$$|\phi(x)| = |F_\varphi(x)| \leqslant 2xN_\infty(\varphi),$$

et donc

$$|e^{-t}\phi(t)| \leqslant 2N_\infty(\varphi)t\, e^{-t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Ainsi l'application $t \mapsto e^{-t}\phi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, négligeable devant une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.