CCP 2008 - PSI - ÉPREUVE 1

Partie I. Quelques valeurs de la fonction θ

I.1. Calcul de $\theta(1)$

I.1.1. $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^x}=\begin{cases}+\infty & \text{si} \quad x<0\\ 1 & \text{si} \quad x=0\\ 0 & \text{si} \quad x>0\end{cases}.$$

I.1.2. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge grossièrement si $x\leq 0$, et converge pour $x>0$: en effet, dans ce dernier cas, la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ tend vers zéro en décroissant, la convergence résulte donc du critère spécial des séries alternées. On a donc bien $D_\theta=E=\mathbb{R}_+^*$.

I.1.3.

I.1.3.1. Sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par exemple, on a $\tan=\dfrac{\sin}{\cos}=-\dfrac{(\cos)'}{\cos}=(-\ln\circ\cos)'$. Donc

$$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,\mathrm{d}t=\Big[-\ln(\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\ln 2}{2}.$$

I.1.3.2. Posons $f_n(t)=(\tan t)^n$ pour $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $n\in\mathbb{N}^*$; on a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[\\ 1 & \text{si} \quad t=\frac{\pi}{4}\end{cases}$. La suite de fonctions continues (f_n) converge donc simplement sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ vers la fonction f continue par morceaux qui vaut 0 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ et 1 au point $\dfrac{\pi}{4}$. Enfin, on a $|f_n(t)|\leq 1$, la fonction constante $t\mapsto 1$ étant intégrable sur le segment $S=\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$. Le théorème de convergence dominée permet d'affirmer alors que

$$\lim_{n\to+\infty}J_n=\lim_{n\to+\infty}\int_S f_n=\int_S\lim_{n\to+\infty}f_n=\int_S f=0.$$

I.1.3.3. En utilisant le changement de variable $u=\tan t$, on a

$$J_n+J_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 t)\,(\tan t)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^1 u^n\,\mathrm{d}u=\frac{1}{n+1}.$$

Remarque. Cela permet de retrouver avec des arguments plus élémentaires le résultat de la question précédente : les intégrales J_n étant positives, on a $0\leq J_n\leq J_n+J_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$ et, de cet encadrement, on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}J_n=0$.

I.1.3.4. Pour tout entier naturel non nul k, on a $\dfrac{1}{2k}=J_{2k-1}+J_{2k+1}$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k+1}}{2k} &= \sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}(J_{2k-1}+J_{2k+1})\\ &= (J_1+J_3)-(J_3+J_5)+\cdots+(-1)^{n+1}(J_{2n-1}+J_{2n+1})\\ &= J_1+(-1)^{n+1}J_{2n+1}\end{aligned}$$

après télescopage.

I.1.3.5. On fait tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus sachant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}J_{2n+1}=0$: on obtient $\dfrac{1}{2}\,\theta(1)=J_1$, donc $\theta(1)=2\,J_1=\ln 2$.

I.2. Une valeur approchée de $\theta(3)$.

I.2.1. $s := 0$; pour k de 1 à n faire $s := s + (-1)^{k+1}/k^3$; afficher s.

I.2.2. La valeur approchée décimale à 10^{-4} près par défaut de S_{30} est $\sigma = 0,9015$.

I.2.3. Du critère spécial des séries alternées, on déduit que la somme $\theta(2)$ de la série est encadrée par deux sommes partielles consécutives, par exemple $S_{30} < \theta(2) < S_{31}$. Comme S_{31} admet aussi σ pour valeur approchée décimale à 10^{-4} près par défaut, on conclut.

I.3. Calcul de $\theta(2)$ et $\theta(4)$.

I.3.1. On a $\alpha_0 = \dfrac{\pi^3}{3}$ et, par deux intégrations par parties, on obtient $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{n^2}(-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

I.3.2. La fonction g est paire donc $b_n(g) = 0$ et $a_n(g) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g(x)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\,\alpha_n$. Ainsi, $a_0(g) = \dfrac{2\pi^2}{3}$ et, pour n entier naturel non nul, $a_n(g) = \dfrac{4}{n^2}(-1)^n$.

I.3.3. Posons $h_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nx)$. De $|h_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$, on déduit la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} h_n(x)$ pour tout x réel et, même mieux, la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} h_n$ sur $\mathbb{R}$. La fonction g est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, elle est donc somme sur $\mathbb{R}$ de sa série de Fourier (et cette dernière converge normalement, mais c'est la constatation déjà faite plus haut). On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\,\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nx)\,,$$

soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nx) = \frac{1}{4}\left(g(x) - \frac{\pi^2}{3}\right)$. En particulier,

$$\forall x \in\,]-\pi,\pi] \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nx) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\,.$$

I.3.4. On évalue cette dernière relation pour $x = 0$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\theta(2) = -\frac{\pi^2}{12}$, donc $\theta(2) = \dfrac{\pi^2}{12}$.

I.3.5. La convergence de la série de Riemann d'exposant 4 est un résultat du cours. Pour calculer sa somme, utilisons la formule de Parseval.

En posant $\|g\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^4}{5}$, on a

$$\|g\|_2^2 = \frac{|a_0(g)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(g)|^2 = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\,,$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{8}\Big(\frac{\pi^4}{5}-\frac{\pi^4}{9}\Big)=\frac{\pi^4}{90}$. *Il serait facile d'en déduire la valeur de $\theta(4)$ en séparant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs, mais suivons l'énoncé...*

I.3.6. La série proposée converge normalement sur $\mathbb{R}$ par rapport au paramètre x puisque le terme général est majoré, en valeur absolue, par $\dfrac{1}{n^3}$. La convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} h_n$ (question **I.3.3.**) permet d'intégrer terme à terme sur le segment $[0,x]$ ou $[x,0]$ pour $x\in]-\pi,\pi]$, cela donne

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x h_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}h_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^x\Big(\frac{t^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}\Big)\,\mathrm{d}t=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi^2 x}{12}\ .\end{aligned}$$

I.3.7. La série proposée converge toujours normalement sur $\mathbb{R}$ par rapport au paramètre x. La convergence normale de la série proposée en **I.3.6.** permet toujours d'intégrer terme à terme sur le segment $[0,x]$ ou $[x,0]$ avec $x\in]-\pi,\pi]$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x\Big(\frac{t^3}{12}-\frac{\pi^2 t}{12}\Big)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ \sin(nt)}{n^3}\Big)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n\sin(nt)}{n^3}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\frac{(-1)^{n+1}\cos(nt)}{n^4}\Big]_0^x\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^4}-\theta(4)\ ,\end{aligned}$$

soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^4}=\frac{\pi^2x^2}{24}-\frac{x^4}{48}-\theta(4)$.

I.3.8. On évalue pour $x=\pi$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{24}-\frac{\pi^4}{48}-\theta(4)\ .$$

Après réduction, $\theta(4)=\dfrac{7\pi^4}{720}$.

Partie II. Étude d'une fonction

II.1. Si $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$; si $x = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \ln 2$: dans ces deux cas, la série de terme général $u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$, donc $u_n(x) = \ln(1+e^{-nx}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nx}$: par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $u_n(x)$ converge. En conclusion, $D_f =]0,+\infty[$.

II.2. Soit $a > 0$. Pour $x \in [a,+\infty[$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \ln(1+e^{-nx}) \leq \ln(1+e^{-na})$ (terme général d'une série convergente). La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge donc normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$. Les fonctions u_n étant continues, on en déduit la continuité de la somme f sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (par addition d'inégalités de même sens, l'une au moins étant stricte).

II.4. C'est le théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Comme f est continue et strictement monontone sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut préciser que f établit une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathcal{E}$, et que $\mathcal{E} = f\big(]0,+\infty[\big) = \big]\lim\limits_{+\infty} f\ ,\ \lim\limits_{0^+} f\big[$.

II.5. La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1,+\infty[$; $\lim\limits_{x\to+\infty} u_0(x) = \ln 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Par le théorème d'interversion limite-somme, on déduit que $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$.

II.6.

II.6.1. C'est l'intégrale impropre d'une fonction continue et positive sur $[0,+\infty[$, et on a $\psi_x(t) = \ln(1+e^{-tx}) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-xt}$. Or on sait que, pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en est donc de même de la fonction ψ_x.

II.6.2. Pour tout $x > 0$ fixé, la fonction ψ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t \leq \psi_x(n)\ .$$

On en déduit que

$$\int_n^{n+1} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t \leq \psi_x(n) = u_n(x) \leq \int_{n-1}^{n} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$$

(la première inégalité est vraie pour tout n entier naturel, la deuxième à partir du rang 1). En sommant ces inégalités (les séries et intégrales impropres étant convergentes), on obtient

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x) \leq \ln 2 + \int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

II.6.3. La fonction $y \mapsto \dfrac{\ln(1+y)}{y}$ est continue sur $]0,1]$, et prolongeable par continuité en 0 (avec la valeur 1) d'où l'existence de l'intégrale. On la calcule maintenant par une intégration terme à terme.

Sur l'intervalle $I =]0,1[$, on a $\dfrac{\ln(1+y)}{y} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(y)$, en posant $f_n(y) = (-1)^{n-1}\dfrac{y^{n-1}}{n}$.
Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur I, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I vers la fonction $y \mapsto \dfrac{\ln(1+y)}{y}$, et la série de terme général $\displaystyle\int_I |f_n| = \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n^2}$ converge, on peut donc intervertir série et intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^{n-1}}{n}\Big)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1 y^{n-1}\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \theta(2)\ .\end{aligned}$$

II.6.4. Le changement de variable $y = e^{-tx}$ donne

$$\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 \frac{\ln(1+y)}{xy}\,\mathrm{d}y = \frac{\theta(2)}{x}\ .$$

La question **II.6.2.** donne alors

$$\frac{\theta(2)}{x} \leq f(x) \leq \ln 2 + \frac{\theta(2)}{x}\ ,$$

soit l'encadrement recherché avec $\lambda = \ln 2$ et $\mu = \theta(2) = \dfrac{\pi^2}{12}$.

II.6.5. Donc $\theta(2) \leq x\,f(x) \leq x\,\ln 2 + \theta(2)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\,f(x) = \theta(2) = \frac{\pi^2}{12}$. Donc $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{12x}$ lorsque $x \to 0^+$, et notamment $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Ainsi, $\mathcal{E} =]\ln 2, +\infty[$.

Partie III. Propriétés de la fonction θ

Dans toute cette partie, on notera $v_k(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$; on notera aussi $\theta_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$ la somme partielle d'ordre n de la série définissant $\theta(x)$.

III.1. La suite $\left(\dfrac{1}{k^x}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers zéro. D'après le critère spécial des séries alternées, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \theta_{2p}(x) \leq \theta(x) \leq \theta_{2p-1}(x)\ .$$

En particulier, $1 - \dfrac{1}{2^x} = \theta_2(x) \leq \theta(x) \leq \theta_1(x) = 1$.

III.2. Pour tout x strictement positif, on a $0 < \dfrac{1}{2^x} = e^{-x\ln 2} < 1$, donc $0 \leq \theta(x) \leq 1$: la fonction θ est bornée sur E. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(1 - \frac{1}{2^x}\Big) = 1$. L'encadrement de la question précédente montre alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\theta(x) = 1$.

III.3. Continuité de la fonction θ

III.3.1. Soit $a \in]1,+\infty[$. Pour $x \in [a,+\infty[$, on a $|v_k(x)| \leq \dfrac{1}{k^a}$ (terme général d'une série convergente) : on a ainsi prouvé la convergence normale sur $[a,+\infty[$ de la série $\sum_{k\geq 1} v_k$. Chacune des fonctions v_k étant continue, on en déduit la continuité de la fonction somme θ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 1$, donc la continuité sur $]1,+\infty[$.

III.3.2. Du critère spécial des séries alternées, on déduit aussi que $|\theta(x)-\theta_n(x)| \leq |v_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{(n+1)^x}$. Fixons alors $a > 0$; pour $x \in [a,+\infty[$, on a $|\theta(x) - \theta_n(x)| \leq \dfrac{1}{(n+1)^a}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)^a} = 0$, il y a donc convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ de la série de fonctions définissant θ. Comme en **III.3.1.**, on en déduit que θ est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $E = \mathbb{R}_+^*$.

III.4. Caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction θ

III.4.1. On calcule d'abord $\varphi_x'(t) = \dfrac{1 - x\ln t}{t^{x+1}}$.

III.4.1.1. Si $x \geq \dfrac{1}{\ln 2}$, alors, comme $\ln t \geq \ln 2$ sur $[2,+\infty[$, on a $x\ln t \geq 1$ donc $\varphi_x'(t) \leq 0$ et φ_x est (strictement) décroissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

III.4.1.2. Si $0 < x < \dfrac{1}{\ln 2}$, on a $e^{\frac{1}{x}} > 2$ et la fonction φ_x est strictement croissante sur l'intervalle $\left[2, e^{\frac{1}{x}}\right]$, strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{x}}, +\infty\right[$.

III.4.2. Notons d'abord que chaque fonction v_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E = \mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall k \geq 2 \qquad v_k'(x) = (-1)^k \frac{\ln k}{k^x} = (-1)^k \varphi_x(k) .$$

Notons aussi que la fonction v_1 est constante, donc $v_1' = 0$.

III.4.2.1. Pour $x \in \left[\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$, la suite de terme général $|v_k'(x)| = \varphi_x(k)$ est décroissante à partir du rang 2 (d'après la question **III.4.1.1.**) et elle tend vers zéro (croissances comparées) donc, toujours d'après le critère spécial des séries alternées, le reste $r_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^x}$ vérifie $|r_n(x)| \leq |v_{n+1}'(x)| = \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{1}{\ln 2}}}$. Cette dernière expression majorante tendant vers zéro indépendamment de x, on a prouvé la convergence uniforme sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n'$ (la suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle). On en déduit que la fonction $\theta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

III.4.2.2. Soit $a > 0$, si $x \in [a,+\infty[$, la suite $\big(|v_n'(x)|\big)_{n\geq 2}$ est décroissante à partir du rang $1 + E\Big(e^{\frac{1}{x}}\Big)$, donc au moins à partir du rang $N = 1 + E\Big(e^{\frac{1}{a}}\Big)$. La série

$\sum_{n\geq N} v_n'(x) = \sum_{n\geq N}(-1)^n|v_n'(x)|$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées : pour tout $x \in [a,+\infty[$, la suite $\big(|v_n'(x)|\big)_{n\geq N}$ tend vers zéro en décroissant. On a donc, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [a,+\infty[$,

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k'(x)\Big| \leq |v_{n+1}'(x)| \leq |v_{n+1}'(a)| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ .$$

La série de fonctions $\sum_{n\geq N} v_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$, la fonction $\sum_{n=N}^{+\infty} v_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Donc θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

III.4.3.

III.4.3.1. On a $\theta'(2) = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\varphi_2(n)$. Or, $2 > \frac{1}{\ln 2}$, donc la suite $\big(\varphi_2(n)\big)$ est strictement décroissante à partir du rang 2 d'après **III.4.1.1.**, et elle tend vers zéro ; il résulte donc du critère spécial des séries alternées que la somme de la série est du même signe que son premier terme, à savoir $\theta'(2) > 0$.

III.4.3.2. On a $\theta'(1) = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\varphi_1(n)$. La fonction φ_1 est décroissante seulement sur $[e,+\infty[$, donc la suite $\big(\varphi_1(n)\big)$ est strictement décroissante à partir du rang 3, et elle tend vers zéro . Le critère spécial (encore!) permet alors d'encadrer la somme $\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\varphi_1(n)$ entre deux sommes partielles consécutives. En rajoutant à chaque membre d'un tel encadrement le terme $\varphi_1(2)$, on peut aussi encadrer la somme $\theta'(1) = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{k}$ entre deux sommes partielles consécutives Ainsi, par exemple,

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} \leq \theta'(1) \leq \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4}\ .$$

Comme le minorant est strictement positif (valeur approchée $0,005056$), on a $\theta'(1) > 0$.