CCP PSI 2005 - Mathématiques 2
Corrigé

Partie I

I.1 Soient $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$ et λ, μ deux scalaires complexes.
$(y|x) = \left(\overline{c}, \overline{d}\right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \overline{c}a + \overline{d}b = \overline{\overline{a}c + \overline{b}d} = \overline{(x|y)}$.
De même $(\lambda x|y) = \overline{\lambda}(x|y)$, $(x|\mu y) = \mu(x|y)$.

I.2 Soient $x = (a, 1 + 3i)$, $y = (-1 + 5i, 3 - 2i)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$.

I.2.1 Les vecteurs x et y forment une base de $\mathbb{C}^2$ si et seulement si $det_{\mathcal{B}}(x, y) \neq 0$.
On obtient (x, y) libre $\Leftrightarrow a \neq -4 - 2i$.

I.2.2 $(x|y) = \overline{a}(-1 + 5i) + (1 - 3i)(3 - 2i)$; $(x|y) = 0 \Leftrightarrow a = 2 + i$
Pour cette valeur de a on obtient bien une base. Dans ce cas $||x|| = \sqrt{15}$.

I.3 Soit $T = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

I.3.1 $\chi_T(\lambda) = \lambda^2 + 1$; $sp(T) = \{i, -i\}$. T possède deux valeurs propres distinctes en dimension 2 ; T est diagonalisable. L'espace propre attaché à i est dirigé par $u = (i\sqrt{3}, -1)$, celui attaché à $-i$ par $v = (i\sqrt{3}, 3)$.

I.3.2 $(u|v) = (-i\sqrt{3})(i\sqrt{3}) + 1 \times 3 = 0$. Ces deux vecteurs sont orthogonaux, une base orthonormale de vecteurs propres est $\left(\frac{1}{||u||}u, \frac{-i}{||v||}v\right)$. On peut prendre $\left(u_1 = (\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{-i\sqrt{3}}{2})\right)$. (choix conforme à III.2.2)

I.4 Soit $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $x = (a, b)$ et $y = (c, d)$ les vecteurs colonnes de U.

$$^t\overline{U}U = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x\|^2 & (x|y) \\ (y|x) & \|y\|^2 \end{pmatrix}$$

Partie II

On note $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); {}^t\overline{U}U = I_2\}$.

II.1 Soit $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec $x = (a, b)$, $y = (c, d)$. D'après le calcul de **I.4**, $U \in \mathcal{U}$ si et seulement si (x, y) est une base orthonormale.

II.2 Soit $U \in \mathcal{U}$. $det(\overline{U}) = \overline{det(U)}$ et $|det(U)|^2 = det(U\overline{U}) = det(I_2) = 1$.

II.3 Soit $U \in \mathcal{U}$.

II.3.1 U est inversible car $det(U) \neq 0$. De plus pour deux matrices carrées A, B éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on a : $\overline{AB} = \overline{A} \times \overline{B}$ et $\overline{{}^tA} = {}^t\overline{A}$.
Donc ${}^t\overline{U}U = I_2 \Rightarrow {}^t\overline{U} = U^{-1} \Rightarrow \overline{U^{-1}} = {}^tU \Rightarrow {}^t\overline{U^{-1}}U^{-1} = UU^{-1} = I_2$.
Donc $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$.
II.3.2 ${}^t\overline{\overline{U}} \times \overline{U} = {}^tU\overline{U} = \overline{{}^t\overline{U}U} = \overline{I_2} = I_2$ et $\overline{U} \in \mathcal{U}$;
${}^t(\overline{{}^tU}) \times {}^tU = \overline{U}{}^tU = \overline{I_2} = I_2$, ${}^tU \in \mathcal{U}$.
II.3.3 Soit $V \in \mathcal{U}$. ${}^t\overline{UV}UV = {}^t\overline{V}{}^t\overline{U}UV = {}^t\overline{V}I_2V = I_2$; $UV \in \mathcal{U}$.

II.4 Soit $U \in \mathcal{U}$ et $\lambda \in sp(U)$. Il existe un vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tel que $UX = \lambda X$. On a alors $||UX||^2 = {}^t(\overline{UX})UX = {}^t\overline{X}{}^t\overline{U}UX = {}^t\overline{X}X = ||X||^2$
Mais $UX = \lambda X \Rightarrow ||UX|| = |\lambda| \times ||X||$ et donc $|\lambda| = 1$ car X non nul.

Partie III

III.1 Soit $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

III.1.1 D'après **II**,
$U \in \mathcal{SU} \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1; \quad \overline{a}c + \overline{b}d = 0; \quad ad - bc = 1.$

III.1.2 Si U appartient à $\mathcal{SU}$ on a les deux relations :
$$\begin{cases} ad - bc = 1 = \overline{a}.\overline{d} - \overline{b}.\overline{c} \\ \overline{a}c + \overline{b}d = 0 \end{cases}.$$
On obtient un système linéaire en $(\overline{a}, \overline{b})$ de déterminant $|c|^2 + |d|^2 = 1$. Ce système est de Cramer et on obtient $\overline{a} = d$ et $\overline{b} = -c$.

III.1.2 Si U appartient à $\mathcal{SU}$ U est donc de la forme $U = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$. On vérifie immédiatement que toute matrice de cette forme est dans $\mathcal{SU}$.

III.2 Soit $U = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ une matrice de $\mathcal{SU}$.

III.2.1 $\chi(\lambda) = (a - \lambda)(\overline{a} - \lambda) + |b|^2 = \lambda^2 - 2Re(a)\lambda + 1$.
Ce polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$, possède deux racines de module 1 et de produit 1. Il existe un réel θ tel que que les valeurs propres de U soient $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

III.2.2 T est bien de la forme vue en **III.2**. $T \in \mathcal{SU}$. $sp(T) = \{i, -i\}$.
$\theta = \pi/2$; les vecteurs (u_1, v_1) formant une base orthonormale de vecteurs propres donnent la matrice de passage recherchée. $P = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{SU}$
et $PD_{\pi/2}P^{-1} = T$.

Partie IV

IV.1 Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$.

IV.1.1 $A \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \overline{a} = a; \overline{d} = d; \overline{c} = b; a + d = 0$.

$A \in \mathcal{V} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}; d = -a; \overline{c} = b$.

Donc $A \in \mathcal{V}$ si et seulement si A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix}$ avec a, r, s réels. Un élément A de $\mathcal{V}$ s'écrit donc $A = aE_1 + rE_2 + sE_3$. La famille (E_1, E_2, E_3) est une famille génératrice de $\mathcal{V}$. On vérifie qu'elle est libre. $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel réel de dimension 3.

IV.1.2 Soit φ définie sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ par : $\varphi : (A, B) \mapsto \langle A, B\rangle = \dfrac{1}{2} tr(AB)$.

φ est clairement bilinéaire symétrique. Pour A élément quelconque de $\mathcal{V}$, $A = \begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+r^2+s^2 & 0 \\ 0 & a^2+r^2+s^2 \end{pmatrix}$, comme a, r, s sont réels, $\varphi(A, A) \geq 0$.

Enfin $\varphi(A, A) = 0 \Leftrightarrow a^2 + r^2 + s^2 = 0 \Leftrightarrow a = r = s = 0 \Leftrightarrow A = (0)$.

φ définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{V}$.

Pour tout $A \in \mathcal{V}$, $||A|| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{a^2 + r^2 + s^2}$ et $det(A) = -a^2 - r^2 - s^2$

D'où $||A||^2 = -det(A)$.

IV.1.3 $E_1E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $E_1E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $E_2E_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

On a : $\langle E_1, E_2\rangle = 0 = \langle E_1, E_3\rangle = \langle E_2, E_3\rangle$.

De plus en utilisant la formule de **VI.1.2**, on a ;

pour $j \in \{1, 2, 3\}$,$\langle E_j, E_j\rangle = 1$. La base est orthonormale.

IV.2 Soit $P \in \mathcal{SU}$. $\mathcal{L}_P(A) = PAP^{-1}$.

IV.2.1 Pour tout $A \in \mathcal{V}$, ${}^t\overline{PAP^{-1}} = \left({}^t\overline{P}\right)^{-1}\, {}^t\overline{A} \times {}^t\overline{P}$.

Mais $P \in \mathcal{U}$ donc ${}^t\overline{P} = P^{-1}$ et ${}^t\overline{A} = A$ car $A \in \mathcal{V}$.

Finalement : ${}^t\overline{PAP^{-1}} = PAP^{-1}$. $\forall A \in \mathcal{V}$, $\mathcal{L}_P(A) \in \mathcal{V}$.

$\mathcal{L}_P$ est une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$. La linéarité est évidente.

Pour tout $A \in \mathcal{V}$, $||\mathcal{L}_p(A)||^2 = -det(PAP^{-1}) = -det(A) = ||A||^2$. (deux matrices semblables ont même déterminant). $\mathcal{L}_P$ est un endomorphisme $\mathcal{V}$ qui conserve la norme : c'est un automorphisme orthogonal.

IV.2.2 Soient P et Q dans $\mathcal{SU}$. On sait déjà que $PQ \in \mathcal{U}$ (question II.3.3)

De plus $det(PQ) = det(P)det(Q) = 1$ donc $PQ \in \mathcal{SU}$.

$\forall A \in \mathcal{V}$, $\mathcal{L}_{PQ}(A) = PQA(PQ)^{-1} = P\left(QAQ^{-1}\right)P^{-1} = \mathcal{L}_P(\mathcal{L}_Q(A))$.

On a : $\mathcal{L}_P \circ \mathcal{L}_Q = \mathcal{L}_{PQ}$.

IV.3 Caractérisation de $\mathcal{L}_{D_\theta}$.

IV.3.1 Pour $j = 1, 2, 3$, on effectue le calcul matriciel

$\mathcal{L}_{D_\theta}(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathcal{L}_{D_\theta}(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\theta} \\ e^{-2i\theta} & 0 \end{pmatrix}$; $\mathcal{L}_{D_\theta}(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & ie^{2i\theta} \\ -ie^{-2i\theta} & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{L}_{D_\theta}(E_1) = E_1$;$\mathcal{L}_{D_\theta}(E_2) = \cos 2\theta E_2 + \sin 2\theta E_3$; $\mathcal{L}_{D_\theta}(E_3) = \cos 2\theta E_3 - \sin 2\theta E_2$

La matrice de $\mathcal{L}_{D_\theta}(E_j)$ dans la base (E_1, E_2, E_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$.

IV.3.2 $\mathcal{L}_{D_\theta}$ est une rotation de l'espace euclidien $\mathcal{V}$, d'axe dirigé par E_1 et dont une mesure de l'angle est 2θ.

IV.4 Soit $U \in \mathcal{SU}$. D'après **III.2**, il existe $P \in \mathcal{SU}$, $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :
$U = PD_\theta P^{-1}$. On a : $\mathcal{L}_U = \mathcal{L}_P \circ \mathcal{L}_{D_\theta} \circ \mathcal{L}_{P^{-1}}$.
Mais $\mathcal{L}_{P^{-1}} = (\mathcal{L}_P)^{-1}$.
Soit F_1, F_2, F_3 les images de E_1, E_2, E_3 par $\mathcal{L}_P$. On a : $\mathcal{L}_U(F_1) = \mathcal{L}_P\left(\mathcal{L}_{D_\theta}(E_1)\right)$
Donc :$\mathcal{L}_U(F_1) = \mathcal{L}_P(E_1) = F_1$. De même : $\mathcal{L}_U(F_2) = \cos 2\theta F_2 + \sin 2\theta F_3$; $\mathcal{L}_U(F_3) = \cos 2\theta F_3 - \sin 2\theta F_2$
$\mathcal{L}_U$ est une rotation d'axe dirigé par $\mathcal{L}_P(E_1)$ et de mesure d'angle 2θ.

IV.5 Soit $U = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{SU}$. En notant $a = p + iq$, $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, on écrit $U = pI_2 + iH$ avec $H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

IV.5.1 $U = \begin{pmatrix} p + iq & -\overline{b} \\ b & p - iq \end{pmatrix} = pI_2 + i \begin{pmatrix} q & i\overline{b} \\ -ib & -q \end{pmatrix}$

Soit $H = \begin{pmatrix} q & i\overline{b} \\ -ib & -q \end{pmatrix}$; $tr(H) = 0$ et ${}^t\overline{H} = H$ donc $H \in \mathcal{V}$.

IV.5.2 D'après **VI.1.2**, $H^2 = (q^2 + |b|^2)I_2)$.
$\mathcal{L}_U(H) = UHU^{-1} = UH{}^t\overline{U} = (pI_2 + iH)H(pI_2 - i\overline{H})$.
$\mathcal{L}_U(H) = (pI_2 + iH)H(pI_2 - iH) = H(p^2 I_2 + H^2) = H((p^2 + q^2 + |b|^2)I_2)$.
$\mathcal{L}_U(H) = (|a|^2 + |b|^2)H) = H$ car $U \in \mathcal{U}$.

IV.5.3 H est donc un vecteur de l'axe de la rotation.En notant $b = r + is$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, $H = \begin{pmatrix} q & i\overline{b} \\ -ib & -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & s + ir \\ s - ir & -q \end{pmatrix} = qE_1 + sE_2 + rE_3$

IV.6 Avec $U = T$, $p = 0, q = 1/2, r = -\sqrt{3}/2, s = 0$.
Un vecteur de l'axe de la rotation $\mathcal{L}_U$ est $1/2E_1 - \sqrt{3}/2E_3$. U est semblable à $D_{\pi/2}$, une mesure de l'angle de cette rotation est π.

IV.7 Soit $U \in \mathcal{SU}$.

IV.7.1 On suppose que U a une valeur propre double α. Comme α est de module 1 et que $\overline{\alpha} = \alpha$ on a $\alpha = \pm 1$. La somme des deux racines est $2Re(a) = \pm 2$. Donc $|a| \geq |Re(a)| = 1$. Mais $|a|^2 + |b|^2 = 1 \geq 1 + |b|^2$ donc $b = 0$ et $U = \pm I_2$.

IV.7.2 Dans le cas où U a deux valeurs propres distinctes, U est diagonalisable, les deux valeurs propres sont du type $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Soient X_1, X_2 deux vecteurs colonnes propres associés à ces deux valeurs propres distinctes α, β avec $\alpha \neq \pm 1$ et $\overline{\alpha} = \beta$.
$(UX_1|X_2) = (\alpha X_1|X_2) = \overline{\alpha}(X_1|X_2)$
Mais : $(UX_1|X_2) = {}^t\overline{UX_1}X_2 = {}^t\overline{X_1}{}^t\overline{U}X_2 = {}^t\overline{X_1}U^{-1}X_2 = (1/\beta)(X_1|X_2)$
On obtient : $\overline{\alpha}(X_1|X_2) = \overline{\beta}(X_1|X_2)$ avec $\alpha \neq \beta$ donc $(X_1|X_2) = 0$.
Les deux sous-espaces propres sont orthogonaux. On peut construire une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de vecteurs propres. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ est élément de $\mathcal{U}$ de déterminant de module 1. Quitte à diviser le deuxième vecteur par $det(P)$, on peut choisir $P \in \mathcal{SU}$ et $U = PD_\theta P^{-1}$.