SESSION 2000

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES I

DURÉE: 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

Le problème proposé a pour but la démonstration d'un théorème relatif aux contractions d'un espace de Banach et l'étude, grâce à ce théorème, d'une équation fonctionnelle.

Si X et Y sont des ensembles, Y^X désigne l'ensemble des applications de X dans Y.

Si X est un ensemble non vide, $\mathcal{N}_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{N}_\infty(f) = \mathrm{Sup}(\{|f(x)| \ / \ x \in X\})$.

Partie I : Convergence uniforme dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, pour $\mathcal{N}_\infty$, de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit f la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que f est bornée et que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Justifier que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\mathcal{N}_\infty)$ est un espace de Banach.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ définie par: $u_n(x) = e^{x^n}$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy pour $\mathcal{N}_\infty$?

5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ définie par: $v_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^n}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers un élément v de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Partie II : Théorème du point fixe de Banach

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace de Banach réel, soit A un sous-ensemble fermé non vide de E et soit $T \in A^A$ vérifiant: il existe $\alpha \in [0,1[$ tel que $\|T(x) - T(y)\| \leqslant \alpha\|x-y\|$ pour tout $(x,y) \in A^2$ (on dit que T est contractante ou encore que T est une contraction).

1. Soit $(x,y) \in A^2$ tel que: $T(x) = x$, $T(y) = y$. Montrer que $x = y$.

2. Soit $a \in A$, on définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par: $a_0 = a$, $a_{n+1} = T(a_n)$

2.1 Montrer que: $\|a_{n+1} - a_n\| \leqslant \alpha^n\|a_1 - a_0\|$. En déduire que si $(n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ on a:

$$\|a_{n+p} - a_n\| \leqslant \|a_1 - a_0\|\left(\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{n+i}\right).$$

2.2 Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est élément de A.

2.3 Montrer que T possède un unique point fixe qui est la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On établit ainsi le théorème du point fixe de Banach: « Toute contraction T d'un fermé non vide A d'un espace de Banach possède un point fixe unique, de plus si $a \in A$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a$, $a_{n+1} = T(a_n)$, converge vers ce point fixe ».

3. On suppose que $A = E$, soit alors, $U \in E^E$ définie par: $U(x) = x + T(x)$.

3.1 Montrer que U est une bijection continue de E sur E.

3.2 Montrer que, pour tout $(x, y) \in E$ on a:

$$\|U^{-1}(x) - U^{-1}(y)\| < (1 - \alpha)^{-1}\|x - y\|$$

(U est donc un homéomorphisme de E sur E).

4. Soit $\mathcal{L}(E) = \{V \in E \ / \ (V \text{ linéaire et } V \text{ continue})\}$, on note encore $\|V\| = \mathrm{Sup}\big(\{\|V(x)\| \ / \ \|x\| \leqslant 1\}\big)$ la norme subordonnée de V ($V \in \mathcal{L}(E)$); soit I l'identité de E.

4.1 Soit $V \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|V\| < 1$, montrer que V est contractante.

4.2 Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E)$ et soit $V \in \mathcal{L}(E)$ tels que: $\|V_n\| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|V\| < 1$, $\|V_n - V\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Soit $y \in E$ alors, d'après 3, $I + V_n$ et $I + V$ sont des isomorphismes de E; on peut donc définir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((I+V_n)^{-1}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ et $x = (I+V)^{-1}(y)$, montrer que: $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (on aura intérêt à écrire: $V(x) - V_n(x_n) = (V(x) - V_n(x)) + (V_n(x - x_n))$).

Partie III : Une transformation de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

Soit $\varphi : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dira que φ est de type $\mathcal{U}$ si: φ est continue et, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que l'on ait:
$|\varphi(x,y,z) - \varphi(x,y,z')| \leqslant r|z - z'|$ pour tout $(x,y,z,z') \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Montrer que s'il existe $(\Psi, M) \in \mathcal{C}^1(R^3, R) \times \mathbb{R}$, tel que: $\varphi = \Psi_{|[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}}$ et $\left|\dfrac{\partial \Psi}{\partial z}(x,y,z)\right| \leqslant M$ pour tout $(x,y,z) \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}$, alors φ est de type $\mathcal{U}$.

2. On suppose que φ est de type $\mathcal{U}$.

2.1 Soit $u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $\big(y \longmapsto \varphi(x,y,u(y))\big) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

2.2 Montrer que l'on peut définir $T_\varphi : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{[0,1]}$ par: $\big(T_\varphi(u)\big)(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(x,y,u(y))\,\mathrm{d}y$.
Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $T_\varphi(u) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

2.3 Montrer que l'on a:

$$\mathcal{N}_\infty\big(T_\varphi(u_1) - T_\varphi(u_2)\big) \leqslant r\mathcal{N}_\infty(u_1 - u_2)$$

pour tous $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})^2$.

2.4 On définit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $S_{(\varphi,\lambda)} : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ par: $S_{(\varphi,\lambda)}(u) = u + \lambda T_\varphi(u)$. On suppose $r > 0$, montrer que l'on a: $\lambda \in]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}[\Longrightarrow S_{(\varphi,\lambda)}$ est un homéomorphisme de $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$ sur lui même.

3. Soit $\mu \in \mathcal{C}([0,1]^2, \mathbb{R})$, soit $\varphi : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\varphi(x,y,z) = \mu(x,y)z$; on supposera $\mu \neq 0$.

3.1 Montrer que φ est de type $\mathcal{U}$ et que si

$$\lambda \in \left]-\frac{1}{\mathcal{N}_\infty(\mu)}, \frac{1}{\mathcal{N}_\infty(\mu)}\right[,$$

alors on a: $S_{(\varphi,h)}$ est un isomorphisme de $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$ sur lui même.

3.2 Soit (μ_n) une suite de $\mathcal{C}([0,1]^2, \mathbb{R})$ telle que: $\mathcal{N}_\infty(\mu_n - \mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme subordonnée, associée à $\mathcal{N}_\infty$, définie sur $\mathcal{L}(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}))$. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de $\mathcal{C}([0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi_n(x,y,z) = \mu_n(x,y)z$, montrer que: $\|T_{\varphi_n} - T_\varphi\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie IV : Étude d'une application

On considère l'équation intégrale de Fredholm: (E) $w(x) = x + \displaystyle\int_0^1 \sin(xy)w(y)\,\mathrm{d}y$.
Une solution de (E) (s'il en existe) est donc un élément w de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait: $w(x) = x + \displaystyle\int_0^1 \sin(xy)w(y)\,\mathrm{d}y$. On s'intéresse à la résolution de (E) dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer, en utilisant III) que (E) possède une solution unique $w \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R})$ définie par: $v_n(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!}(xy)^{2i-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit l'équation intégrale (E_n) par: $w_n(x) = x + \displaystyle\int_0^1 v_n(x,y)w_n(y)\,\mathrm{d}y$.

2.1 Montrer que (E_1) possède une solution unique $w_1 \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et expliciter w_1.

2.2 Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, la résolution de (E_n) se ramène à celle d'un système linéaire que l'on explicitera.

2.3 Montrer, en utilisant III.3), que si $n \geqslant 2$ alors (E_n) possède une solution unique $w_n \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (on aura intérêt à montrer que:

$$-1 \in \left]-\frac{1}{\mathcal{N}_\infty(v_n)}, \frac{1}{\mathcal{N}_\infty(v_n)}\right[$$

si $n \geqslant 2$).

2.4 Montrer que $\mathcal{N}_\infty(w_n - w) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.