Concours National Commun - Session 2008
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II

Sur les classes de similitude de matrices carrées d'ordre 2

Corrigé par M.TARQI

I. Résultats préliminaires

1. (a) Un matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est semblable à A si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tel que $B = PAP^{-1}$, donc $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{PAP^{-1};\ \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})\}$.

   (b) Il est clair que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(xI_2) = \{P(xI_2)P^{-1};\ \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})\} = \{xI_2\}$ est singleton.

2. (a) On a $\det E_\lambda = F_\lambda = 1 \neq 0$, donc les deux matrices sont inversibles, $E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{-\lambda}$ et $F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = F_{-\lambda}$.

   (b) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$E_\lambda A E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda c + a & -c\lambda^2 + (d-a)\lambda + b \\ c & -c\lambda + d \end{pmatrix}$$
et
$$F_\lambda A F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} b\lambda + a & b \\ -b\lambda^2 + (a-d)\lambda + c & b\lambda + a \end{pmatrix}.$$

   (c) Dans ce cas on aura $\forall P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, $PAP^{-1} = A$, en particulier on aura $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
$$E_\lambda A E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda c + a & -c\lambda^2 + (d-a)\lambda + b \\ c & -c\lambda + d \end{pmatrix} = A$$
et
$$F_\lambda A F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} b\lambda + a & b \\ -b\lambda^2 + (a-d)\lambda + c & b\lambda + a \end{pmatrix} = A.$$
On obtient donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\begin{cases} a + \lambda c = a \\ -c\lambda^2 + (d-a)\lambda + b = b \\ d - c\lambda = d \end{cases}$ et $\begin{cases} a - \lambda b = a \\ -b\lambda^2 + (a-d)\lambda + c = c \\ a + c\lambda = a \end{cases}$. D'où $a = d$ et $b = c = 0$ et par conséquent $A = aI_2$.

3. (a) Soit φ l'isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^4$ défini par :
$$\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a, b, c, d).$$
Ainsi $\|A\|_S = \|\varphi(A)\|_2$ ($\|.\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{K}^4$), donc $\|.\|_S$ est une norme.

   (b) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors
$$AA^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\overline{c} + b\overline{d} \\ c\overline{a} + d\overline{b} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix},$$
donc $\mathrm{tr}(AA^*) = |a|^2 + |b|^2| + |c|^2 + |d|^2 = \|A\|_S^2$.
Comme $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, alors
$$\|U^*AU\|_S^2 = \mathrm{tr}(U^*AU(U^*AU)^*) = \mathrm{tr}(UU^*AA^*) = \mathrm{tr}(AA^*) = \|A\|_S^2,$$
de même $\|UAU^*\|_S = \|A\|_S$.

4. (a) Les deux parties en question sont des parties d'une partie bornée, donc elles sont bornées.

   (b) Soit $M > 0$ tel que $\forall B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, $\|B\|_S \leq M$. En particulier, on aura pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\|E_\lambda A E_\lambda^{-1}\|_S \leq M$ et $\|F_\lambda A F_\lambda^{-1}\|_S \leq M$, donc d'après les calculs faites dans la question 2.(b), on obtient $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:
$$\begin{cases} |a + \lambda c|^2 \leq M \\ |a + \lambda b|^2 \leq M \\ |b + (d-a)\lambda - c\lambda^2|^2 \leq M \end{cases},$$
donc nécessairement $a = d$ et $b = c = 0$ et par conséquent $A = aI_2$.

5. Toute partie compacte est bornée, donc si $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(B)$ est compacte, alors B est une matrice scalaire.
6. tr est une forme linéaire, donc continue, et $A \longmapsto \det$ est le composé de deux applications continues $A = [C_1, C_2] \longmapsto (C_1, C_2)$ (linéaire en dimension finie) et $(C_1, C_2) \longmapsto \det(C_1, C_2)$ (bilinéaire en dimension finie), donc l'application $A \longmapsto \det A$ est continue.
7. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ semblables, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$, donc les propriétés de tr et $\det$, on a :
   - $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}PA) = \operatorname{tr}(A)$.
   - $\det(B) = \det(PAP^{-1}) = \det P \det A \det P^{-1} = \det A$.
   - $\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \det(P(A - \lambda I_2)P^{-1} = \det(P - \lambda I_2) = \chi_A(\lambda)$.

II. Condition pour qu'une matrice de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit fermée

1. (a) A admet deux valeurs propres distinctes, donc diagonalisable et donc semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

   (b) Si A est diagonalisable, alors il existe P matrice inversible telle que
   $$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = \lambda I_2.$$
   La réciproque est evident.

   (c) Dans ce cas $\dim E_\lambda = 1$ ($E_\lambda = \operatorname{Vect}\{u\}$ le sous-espace caractéristique associé à λ). Soit v un vecteur (non nul) vérifiant $(A - \lambda I_2)v = u$ et forme avec u une base, alors dans cette base la matrice canoniquement associé A s'écrit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
2. (a) Si $A = xI_2$, alors $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$ est un singleton, donc est un fermé.

   (b) On a $A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, donc $\lim\limits_{k \to \infty} A_k = \lambda I_2$. La suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $S_{\mathbb{K}}(A)$, car $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in S_{\mathbb{K}}(A)$ et qui converge vers $\lambda I_2 \notin \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, donc si A est non diagonalisable, alors $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermé.

   (c) i. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1} = P_k A P_k^{-1} - \alpha I_2$, donc
   $$\lim_{k \to \infty} P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1} = (B - \alpha I_2),$$
   et par continuité de l'application $\det$,
   $$\det(B - \alpha I_2) = \lim_{k \to \infty} \det(P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1}) = 0.$$
   ii. D'après la dernière question, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B) = \{\lambda, \mu\}$, donc B est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, donc $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$. Ainsi on a montré que toute suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ converge dans $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, donc $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.
3. Tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ admet des racines, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ est toujours non vide.
   - Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, alors A est diagonalisable et donc $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.
   - Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$, alors si A est diagonalisable, alors $A = \lambda I_2$ et dans ce cas $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

   Réciproquement, et dans les cas, supposons $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée, donc si A est non diagonalisable, alors d'après la question 2.(b) de cette partie, $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée ce qui est faux.
4. (a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\chi(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A$, donc si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors χ n'a pas de racines et donc $\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A < 0$.

   (b) On sait d'après le théorème de Cayely-Hamilton que $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I_2 = 0$, donc on obtient :
   $$\begin{aligned} A'^2 &= \frac{4}{\delta^2}\left(A - \frac{\operatorname{tr} A}{2} I_2\right)\left(A - \frac{\operatorname{tr} A}{2} I_2\right) \\ &= \frac{4}{\delta^2}\left(A^2 - (\operatorname{tr} A)A + \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{4} I_2\right) \\ &= \frac{4}{\delta^2}\left(-(\det A)I_2 + \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{4} I_2\right) = -I_2 \end{aligned}$$

(c) On a d'abord $f(e) \neq 0$, car sinon $e = -f^2(e) = 0$. Soient α et β des réels tels que $\alpha e + \beta f(e) = 0$, donc $\alpha f(e) + \beta f^2(e) = \alpha f(e) e - \beta e = 0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $e = \dfrac{-\beta}{\alpha} f(e)$ et donc $(\alpha^2 + \beta^2) f(e) = 0$, et ceci est absurde, ainsi $\alpha = 0$ puis $\beta = 0$. Donc $\{e, f(e)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et la matrice de f dans cette base s'écrit $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Soit $P = [e, f(e)]$ la matrice de passage canonique à la base $\{e, f(e)\}$, alors on a $A' = P^{-1} A' P$, donc

$$\frac{2}{\delta}\left(A - \frac{\operatorname{tr} A}{2} I_2\right) = P^{-1} A_1 P$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} A &= \frac{\operatorname{tr} A}{2} I_2 + \frac{\delta}{2} P^{-1} A_1 P \\ &= P^{-1}\left(\frac{\operatorname{tr} A}{2} I_2 + \frac{\delta}{2} A_1\right) P \\ &= \frac{1}{2} P^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{tr} A & -\delta \\ \delta & \operatorname{tr} A \end{pmatrix} P \\ &= P^{-1} A'' P. \end{aligned}$$

Donc les deux matrices A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(e) i. On a $\lim\limits_{k\to\infty} (P_k A P_k^{-1}) = \widetilde{A}$, donc par continuité des applications tr et $\det$, on obtient $\operatorname{tr} \widetilde{A} = \operatorname{tr} A$ et $\det \widetilde{A} = \det A$.

ii. A et $\widetilde{A}$ ont même trace et même déterminant donc d'après la question 4. de cette partie, les deux sont semblables à A'', donc elles sont semblables.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si A est diagonalisable alors $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée, d'après la question 3. de cette partie.
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$, d'après la dernière question, sa limite reste dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$, c'est-à-dire $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.
Réciproquement, supposons $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée. Trois cas sont possibles, soit $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$ est donc A est diagonalisable, ou bien $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda\}$ et dans ce cas $A = \lambda I_2$, car sinon $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ sera non fermée, ou bien $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.
Ainsi on a montré que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable ou bien $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

III. Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. ***Un résultat de réduction***

(a) Tout polynôme de degré 2 qui a une racine dans $\mathbb{K}$ est scindé, donc si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(G) \neq \emptyset$, alors χ_G est scindé dans $\mathbb{K}$.

(b) D'après le cours, on a :

$$u_1 = \frac{u_1'}{\|u_1'\|} \text{ et } u_2 = \frac{u_2' - (u_2'|u_1)u_1}{\|u_2' - (u_2'|u_1)u_1\|}$$

(c) Si $u_1 = ae_1 + be_2$ et $u_2 = ce_1 + de_2$, alors $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et comme $\{u_1, u_2\}$ est une base orthonormée, alors $\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 1 \\ |c|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\bar{c} + b\bar{d} = 0 \end{cases}$. Autrement dit, $UU^* = I_2$.

(d) u_1 et u_1' étant colinéaires, donc $g(u_1) = \lambda u_1$. Soient α et β des scalaires tels que $g(u_2) = \alpha u_1 + \beta u_2$, donc $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, donc nécessairement $\beta = \mu$, et puisque U est la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2\}$ à la base $\{u_1, u_2\}$, alors $G = UTU^{-1} = UTU^*$. On a évidement $\|G\|_S = \|T\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\alpha|^2}$.

2. ***Calcul d'une borne inférieure***

(a) L'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S;\ \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})\}$ est une partie non vide, car elle contient $\|A\|$, et minorée (par 0), donc admet une borne inférieure.

(b) Soit $\mathcal{B} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \neq \emptyset$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et donc il existe $U \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que

$$B = U \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} U^*$$

(λ et μ les valeurs propres de B).
Ainsi $\|B\|_S = \|UTU^*\|_S = \|T\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\alpha|^2} \geq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$

(c) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, on prend $\alpha = 0$. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$, alors puisque A est trigonalisable, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ on peut toujours trouver une base de $\mathbb{K}^2$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}^*$ $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$

(d) D'une part on a $\forall B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, $\|B\|_S \geq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$. D'autre part $\forall t \in \mathbb{K}^*$, $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, $\lim\limits_{t \to 0} \begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $\left\| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$, donc

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}.$$

(e) Si A est diagonalisable, alors $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et donc

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} = \left\| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right\|_S,$$

donc la borne inférieure de $\{\|PAP^{-1}\|_S / P \in GL_2(\mathbb{K})\}$ est atteint.
Inversement, soit $G \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ telle que $\inf\limits_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \|G\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$, Mais d'après la question 1., il existe matrice $U \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $UU^* = I_2$ et $G = UTU^*$, donc $T \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et par conséquent

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} = \|G\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\alpha|^2},$$

donc nécessairement $\alpha = 0$ et donc G et par conséquent A est diagonalisable.

3. *Application*

(a) On a $\inf\limits_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$, donc d'après la caractérisation de la borne inférieure, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une matrice $P_k \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $\|P_k APk^{-1}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + \dfrac{1}{k+1}$.

(b) la suite $(\|P_k APk^{-1}\|_S)_{k \in \mathbb{N}}$ étant bornée, donc on peut extraire une sous-suite $\left(P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\widetilde{A}$, et comme $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée, alors $\widetilde{A} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, donc il existe P inversible telle que $\widetilde{A} = PAP^{-1}$.
Mais on a $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\|P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + \frac{1}{\varphi(k) + 1}$$

et par passage à la limite on obtient :

$$\|\widetilde{A}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} = \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S.$$

Donc la borne inférieure de $\{\|PAP^{-1}\|_S;\ \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})\}$ est atteint en $\widetilde{A}$ et par conséquent A est diagonalisable.

IV. Cas d'une matrice réelle n'ayant aucune valeur propre réelle

1. On a

$$\begin{aligned} M' &= \frac{2}{\delta}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{2}{\delta}\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2ad-4bc-a^2-d^2}}\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} \alpha = \dfrac{a-d}{\sqrt{2ad-4bc-a^2-d^2}} \\ \beta = \dfrac{2b}{\sqrt{2ad-4bc-a^2-d^2}} \\ \gamma = \dfrac{2c}{\sqrt{2ad-4bc-a^2-d^2}} \end{cases}$, et on vérifie facilement que $\alpha^2+\beta\gamma=-1$.

2. Si $v=(x,y)$, alors $f(v)=(\alpha x+\beta y, \gamma x-\alpha y$ et par conséquent $(v|f(v)=\alpha x^2+(\beta+\gamma)yx-\alpha y^2$.
Soit y fixé dans $\mathbb{R}^*$, l'équation $\alpha x^2+(\beta+\gamma)yx-\alpha y^2=0$ est une équation de second degré ($\alpha\neq 0$), dont le discriminant vaut $[(\beta+\gamma)y]^2+\alpha^2y^2\geq 0$, donc pour chaque $y\in\mathbb{R}^*$ on peut trouver x tel que $\alpha x^2+(\beta+\gamma)yx-\alpha y^2=0$, c'est-à-dire $(v|f(v)=0$.
Si $f(e)=0$, alors $e=-f^2(e)=0$, ce qui est absurde.

3. Les deux vecteurs u_1 et u_2 sont unitaires et orthogonaux, donc la famille $\{u_1,u_2\}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2,(.|.))$.
On a $f(u_1)=\dfrac{1}{\|e\|}f(e)=\dfrac{\|f(e)\|}{\|e\|}u_2$ et $f(u_2)=-\dfrac{1}{\|f(e)\|}e=-\dfrac{\|e\|}{\|f(e)\|}u_1$, donc

$$M_1=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\|e\|}{\|f(e)\|} \\ \frac{\|f(e)\|}{\|e\|} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Les deux bases sont orthonormées, donc la matrice de passage U de (e_1,e_2) à (u_1,u_2) est orthogonale et on a la relation $M'=UM_1^tU$ ou encore $\dfrac{\delta}{2}M'=M-\dfrac{\operatorname{tr}M}{2}I_2$, d'où :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\delta}{2}M'+\frac{\operatorname{tr}M}{2}I_2=\frac{\delta}{2}(UM_1^tU)+\frac{\operatorname{tr}M}{2}I_2 \\ &= U\left[\frac{\delta}{2}M_1)+\frac{\operatorname{tr}M}{2}I_2\right]^t U \\ &= U\left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{-\delta}{2t} \\ \frac{t\delta}{2} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{\operatorname{tr}M}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\operatorname{tr}M}{2} \end{pmatrix}\right]\ {}^tU \\ &= U\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{tr}M & \frac{-\delta}{t} \\ t\delta & \operatorname{tr}M \end{pmatrix}^t U \\ &= U\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{tr}M & -l\delta \\ \frac{\delta}{l} & \operatorname{tr}M \end{pmatrix}^t U=UM_2^tU, \end{aligned}$$

avec $l=\dfrac{1}{t}=\dfrac{\|e\|}{\|f(e)\|}>0$.

5. (a) On a $M''\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$, donc $\inf\limits_{B\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)}\|B\|_S\leq\|M''\|_S=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left[2(\operatorname{tr}M)^2+2\delta^2\right]}=\sqrt{2\det M}$.

   (b) On a $\|M_2\|_S^2=\dfrac{1}{4}\left[2(\operatorname{tr}M)^2+\delta^2\left(l^2+\dfrac{1}{l^2}\right)\right]\geq\dfrac{1}{4}\left[2(\operatorname{tr}M)^2+2\delta^2\right]=\|M''\|_S^2$, car $\forall x>0$, $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$.
   On sait que M et M'' sont semblables, donc $M''\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$ et comme $\|M''\|_S=\sqrt{2\det M}$, alors $\inf\limits_{B\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)}\|B\|_S=\|M''\|_S=\sqrt{2\det M}$.

6. D'après ce qui précède, $\inf\{\|PMP^{-1}\|_S;\ \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\} = \inf\limits_{B\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S = \|M''\|_S$, cette borne est atteint en toute matrice de la forme $UM''{}^tU$ où U est orthogonale.
7. ***Conclusion :*** On sait d'après la question 5. de la partie II que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable ou bien $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et on sait d'après la partie III, que A est diagonalisable si et seulement si $\inf\{\|PAP^{-1}\|_S;\ \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$ est atteint, enfin d'après la partie II et la dernière partie si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ alors $\inf\{\|PAP^{-1}\|_S;\ \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$ est atteint.
   Réciproquement, si $\inf\{\|PAP^{-1}\|_S;\ \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$ est atteint, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ ou bien $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ et dans ce cas, d'après la partie III.2.(e), A est diagonalisable. Ainsi on a montré que la borne inférieure de $\{\|PAP^{-1}\|_S;\ \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte si et seulement si $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

•••••••••••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr