

## EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

## MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

*Les calculatrices sont interdites.*

\* \* \*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

### A propos de l'hypothèse « de classe $C^1$ par morceaux » du théorème de convergence normale d'une série de Fourier...

Pour toute fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue par morceaux et de période  $2\pi$ , on associe ses coefficients de Fourier exponentiels définis, pour  $n \in \mathbb{Z}$ , par  $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i n t} dt$  et ses coefficients de Fourier trigonométriques définis par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(n t) dt \text{ (pour } n \in \mathbb{N}) \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(n t) dt \text{ (pour } n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

On pose, pour tout entier naturel  $p$  et tout réel  $x$  :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^p c_n(f) e^{i n x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n(f) \cos(n x) + b_n(f) \sin(n x)).$$

On rappelle le **théorème de convergence normale** :

Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue de période  $2\pi$  et de classe  $C^1$  par morceaux, la série de Fourier de  $f$  converge normalement vers la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, la fonction  $f$  est limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques  $(S_p(f))_{p \in \mathbb{N}}$ .

Nous allons étudier ce qui peut se produire si on enlève à ce théorème l'hypothèse « de classe  $C^1$  par morceaux ».

Une première partie démontre des résultats préliminaires.

Une deuxième partie traite d'un exemple où, sans l'hypothèse « de classe  $C^1$  par morceaux », la série de Fourier peut diverger.

Une troisième partie recherche une condition plus faible pour que, sans l'hypothèse « de classe  $C^1$  par morceaux », on puisse quand même assurer que la série de Fourier de  $f$  converge uniformément vers la fonction  $f$  sur  $I$ .

## I. Résultats préliminaires

1. Si, dans le théorème de convergence normale ci-dessus, on suppose que la fonction  $f$  n'est pas continue mais seulement continue par morceaux sur  $I$  :
  - a. Rappeler le théorème de Dirichlet en précisant de quel type de convergence il s'agit.
  - b. Cette convergence pourrait-elle être uniforme sur  $I$  ?

2. On considère la fonction continue  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , de période  $2\pi$ , paire et définie pour  $x \in [0, \pi]$ , par  $\varphi(x) = \sqrt{x}$ .  
Donner l'allure de la courbe de cette fonction et expliquer pourquoi elle n'est pas de classe  $C^1$  par morceaux sur  $I$ .

### 3. Théorème de Cesàro

Soit  $(u_n)$  une suite de complexes qui converge vers le complexe  $l$ .

- a. Justifier, simplement, en utilisant un théorème de sommation de relations de comparaison, que :  $\sum_{k=0}^n (u_k - l) = o(n+1)$  au voisinage de  $+\infty$ .

- b. En déduire que la suite  $\left( \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1} \right)$  converge vers  $l$ .

4. Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et de période  $2\pi$  dont la somme de Fourier de rang  $n$  est notée  $S_n(f)$ . Pour  $n$  entier naturel non nul, on définit la somme de Fejér de  $f$  de rang  $n$ , notée  $\sigma_n(f)$  comme la moyenne de Cesàro des sommes de Fourier :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} (S_0(f) + S_1(f) + \dots + S_n(f)).$$

On démontre, *et nous l'admettrons*, le **théorème de Fejér** :

« La suite de polynômes trigonométriques  $(\sigma_n(f))$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction  $f$  ».

**Une application :**

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et de période  $2\pi$  telle que la suite  $(S_n(f))$  converge simplement sur  $I$ , montrer que la suite  $(\sigma_n(f))$  converge vers la fonction  $f$ .

5. Si  $(u_n)$  est une suite de réels positifs qui converge vers 0, montrer qu'il existe une suite de réels  $(d_n)$  décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq d_n$  (on pourra, par exemple, vérifier que la suite  $(\sup\{u_k, k \geq n\})_n$  convient).

## II. Un exemple de Série de Fourier divergente (en un point)

On considère la suite de fonctions  $(f_n)$  définies sur l'intervalle  $[0, \pi]$  pour tout entier naturel non nul  $n$  par :  $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin\left[\left(2^{n^3} + 1\right) \frac{x}{2}\right]$ .

6. Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $[0, \pi]$ .

On définit alors la fonction  $f$  paire, continue, de période  $2\pi$  sur  $\mathbb{R}$  et telle que pour tout réel  $x \in [0, \pi]$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ .

7. On pose, pour  $p$  et  $k$  entiers naturels,  $I_{p,k} = \int_0^\pi \cos(p t) \sin\left(\frac{2k+1}{2} t\right) dt$  et, pour  $q$  entier naturel,

$$T_{q,k} = \sum_{p=0}^q I_{p,k}.$$

a. Calculer, pour  $p$  et  $k$  entiers naturels, l'intégrale  $I_{p,k}$ .

b. Pour  $q$  et  $k$  entiers naturels, déterminer un réel positif  $c_k$  tel que  $T_{q,k} = c_k + \sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}$  et en déduire que, pour tout couple  $(q, k)$  d'entiers naturels,  $T_{q,k} \geq 0$ .

c. Déterminer, pour  $N$  au voisinage de  $+\infty$ , un équivalent simple de  $\sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1}$ .

d. En déduire que, pour  $k$  au voisinage de  $+\infty$ ,  $T_{k,k} \sim \frac{1}{2} \ln k$ .

8. Montrer que, pour  $p$  entier naturel non nul,  $a_p(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} I_{p, 2^{n^3}-1}$ .

9. Montrer que, pour  $p$  entier naturel non nul,  $S_{2^{p^3}-1}(f)(0) \geq \frac{-a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi p^2} T_{2^{p^3}-1, 2^{p^3}-1}$

(on remarquera que :  $\frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^N a_l = \frac{-a_0}{2} + \sum_{l=0}^N a_l$ ).

Conclure que la suite  $(S_n(f)(0))$  diverge.

## III. Fonctions à variation bornée, Théorème de Jordan

Pour deux réels  $a < b$  on note  $S_{[a,b]}$  l'ensemble des subdivisions de l'intervalle  $[a, b]$ .

Si  $f$  est une fonction de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in S_{[a, b]}$ , on note :

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

On dira que la fonction  $f$  est à variation bornée s'il existe un réel positif  $M$  tel que pour toute  $\sigma \in S_{[a, b]}$ , l'on ait :  $V(\sigma, f) \leq M$ .

On appelle alors **variation totale** de  $f$  sur  $[a, b]$  le réel positif noté :

$$V([a, b], f) = \sup_{\sigma \in S_{[a, b]}} V(\sigma, f).$$

**10.** Montrer que la fonction  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(0) = 0$  et  $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$  si  $x \neq 0$  est continue et n'est pas à variation bornée sur  $[0, 1]$ .

(on pourra choisir  $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n+1}$  subdivision de  $[0, 1]$  :  $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$  et

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = \frac{1}{2(n+1-k)}).$$

## 11. Exemples généraux

- Montrer qu'une fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui est monotone est à variation bornée sur  $[a, b]$  et préciser  $V([a, b], f)$ .
- Montrer qu'une fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui est somme de deux fonctions monotones est à variation bornée sur  $[a, b]$ .
- Montrer qu'une fonction  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui est continue et de classe  $C^1$  par morceaux est à variation bornée.

**12.** Soit une fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  à variation bornée sur  $[a, b]$  et soit  $a < c < b$ .

Montrer que chacune des restrictions de  $f$  aux intervalles  $[a, c]$  et  $[c, b]$  est à variation bornée et que :  $V([a, c], f) + V([c, b], f) \leq V([a, b], f)$ .

*Remarque :* on peut même montrer qu'il y a égalité mais ce ne sera pas utile pour ce problème.

**13.** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et de période  $2\pi$  telle que la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0, 2\pi]$  soit à variation bornée.

Pour  $n$  entier relatif et  $N$  entier naturel, tous deux non nuls, on utilisera la subdivision

$$\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq |n|N} \text{ de } [0, 2\pi] \text{ définie, pour } k \text{ entier compris entre } 0 \text{ et } |n|N, \text{ par : } x_k = \frac{2\pi k}{|n|N}.$$

Pour  $k$  entier compris entre 1 et  $|n|N$ , on notera  $V_k(f)$  la variation totale de  $f$  sur l'intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$ .

- Vérifier que : 
$$\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) e^{-int} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f) (x_k - x_{k-1}).$$

- b. Montrer que :  $\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f).$
- c. En déduire que pour tout entier  $n$  non nul,  $|c_n(f)| \leq \frac{V([0, 2\pi], f)}{2|n|\pi}.$

**14.** Soit  $(u_n)$  une suite de complexes, on pose, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$S_n = \sum_{j=0}^n u_j \quad \text{et} \quad \sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}.$$

On suppose que la suite  $(\sigma_n)$  converge vers un complexe  $L$  et on suppose qu'il existe une constante réelle  $A$  non nulle telle que, pour tout entier naturel  $k$ ,  $|u_k| \leq \frac{A}{k+1}.$

a. Pour  $n$  et  $k$  entiers naturels non nuls, exprimer, à l'aide des termes de la suite  $(u_i)$ , l'expression :  $k(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L).$

b. Soit une suite de réels  $(d_n)$  décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|\sigma_n - L| \leq d_n$ , montrer que, pour  $n$  et  $k$  entiers naturels non nuls :

$$|S_n - L| \leq \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + A \frac{k-1}{2(n+2)}.$$

c. L'entier naturel non nul  $n$  étant donné, on choisit  $k$  tel que  $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$  ( $k-1$  est donc la partie entière de  $2n\sqrt{d_{n-1}}$ ).

Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $|S_n - L| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}.$  Que peut-on en déduire ?

**15.** Montrer que la série de Fourier d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et de période  $2\pi$  telle que la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0, 2\pi]$  soit à variation bornée converge uniformément vers la fonction  $f$ .

**16.** Montrer que la série de Fourier de la fonction  $\varphi$  de la question 2. converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $\varphi$ .

**17.** Application

Montrer que la série de Fourier d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de période  $2\pi$  et lipschitzienne converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $f$ .

**Fin de l'énoncé**