CCP 2004. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.
Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Résultats préliminaires.

1. a. Si f est périodique, continue par morceaux et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers sa régularisée de Dirichlet $\widetilde{f} : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\big(f(x^+) + f(x^-)\big)$. $\square$

b. Si f n'est pas continue alors la convergence ne saurait être uniforme sur $\mathbb{R}$ puisqu'alors, par théorème de récupération uniforme de la continuité, f serait continue . $\square$

2. φ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \varphi'(x) = +\infty$. $\square$

3. a. Comme $u_n - \ell$ tend vers 0 on a $u_n - l = o(v_n)$ avec $v_n = 1$. Le théorème de sommation de la relation o fournit alors, puisque la série $\sum v_n$ est à termes positifs et divergente, que $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \ell) = o\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\Big)$ c'est à dire : $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \ell) = o(n+1)$. $\square$

b. Ainsi $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \ell)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ i.e. $\dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. $\square$

4. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique dont la série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g. D'après le théorème de Césàro la suite $\big(\sigma_n(f)\big)$ converge également simplement sur $\mathbb{R}$ vers g. Mais d'après le théorème de Fejér elle converge uniformément donc a fortiori simplement sur $\mathbb{R}$ vers f. Ainsi $g = f$. $\square$

5. Soit (u_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0. Notons $d_n = \sup\limits_{k\geqslant n}\{u_k\}$ ce qui a bien un sens puisque, comme la suite (u_n) est convergente, elle est bornée.
On a bien sûr $0 \leqslant u_n \leqslant d_n$ pour tout n.
Par ailleurs la suite (d_n) est évidemment décroissante.
En outre elle tend vers 0. En effet soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Comme la suite (u_n) tend vers 0, il existe un entier N_ε tel que $0 \leqslant u_n \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$. Ainsi $0 \leqslant d_{N_\varepsilon} \leqslant \varepsilon$ ce qui prouve bien que la suite (d_n) tend vers 0 puisqu'elle est décroissante. $\square$

Un exemple de série de Fourier divergente en un point.

6. On a évidemment $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour tout n et tout $x \in [0,\pi]$ ce qui prouve bien que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,\pi]$. $\square$

REMARQUE : Comme $x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $[0,\pi]$ par théorème de récupération uniforme de la continuité, la fonction f définie déjà sur $[-\pi,\pi]$ par parité puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité est bien continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

7. a. Nous avons $2\sin\Big(\dfrac{2k+1}{2}t\Big)\cos(pt) = \sin\Big(\big(\dfrac{2k+1}{2} + p\big)t\Big) + \sin\Big(\big(\dfrac{2k+1}{2} - p\big)t\Big)$ d'où immédiatement :
$I_{p,k} = \dfrac{1}{2k+1+2p} + \dfrac{1}{2k+1-2p} = \dfrac{1}{2(k-p)+1} + \dfrac{1}{2(k+p)+1}$. $\square$

7. b. Il en découle que $T_{q,k} = \dfrac{1}{2k+1} + \sum\limits_{j=k-q}^{j=k+q} \dfrac{1}{2j+1}$. $\square$

Si $q \leqslant k$ cette somme est évidemment positive.
Sinon elle s'écrit $T_{q,k} = \dfrac{1}{2k+1} + \sum\limits_{j=-(q-k)}^{-1} \dfrac{1}{2j+1} + \sum\limits_{j=0}^{k+q} \dfrac{1}{2j+1} = \dfrac{1}{2k+1} - \sum\limits_{j=1}^{q-k} \dfrac{1}{2j-1} + \sum\limits_{j=1}^{k+q+1} \dfrac{1}{2j-1}$
donc $T_{q,k} = \dfrac{1}{2k+1} + \sum\limits_{j=q-k+1\geqslant 0}^{q+k+1} \dfrac{1}{2j-1}$ et est donc encore positive.
Ainsi on a bien $T_{q,k} \geqslant 0$ pour tout couple (q,k) d'entiers naturels. $\square$

7. c. On a classiquement par comparaison à une intégrale : $\displaystyle\int_0^{N+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{2t+1} \leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} \leqslant 1 + \int_0^{N} \frac{\mathrm{d}\,t}{2t+1}$ i.e.
$\dfrac{1}{2}\ln(2N+3) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{2k+1} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}\ln(2N)$ d'où, par le principe des gendarmes, $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{2k+1} \sim \dfrac{1}{2}\ln N$. $\square$

7. d. Nous avons $T_{k,k} = \dfrac{1}{2k+1} + \sum\limits_{j=0}^{2k} \dfrac{1}{2j+1}$ donc $T_{k,k} \sim \dfrac{1}{2}\ln(2k) \sim \dfrac{1}{2}\ln k$. $\square$

8. Comme f est paire, nous avons :

$a_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(pt)\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(pt)\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\left(\left(2^{n^3}+1\right)\dfrac{t}{2}\right)\cos(pt)\right)\mathrm{d}\,t.$

Or la série qui figure sous l'intégrale étant normalement convergente sur $[0,\pi]$ (même démonstration qu'à la question 6) on peut intégrer terme à terme d'où (en remarquant que $2^{n^3}+1 = 2k+1$ avec $k = 2^{n^3-1}$) :

$a_p(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}I_{p,2^{p^3-1}}.$ $\square$

REMARQUE : Cette relation est également vraie pour $p=0$ et pas simplement pour p entier naturel non nul comme il est demandé dans l'énoncé !

9. Nous avons $S_{2^{p^3-1}}(f)(0) = -\dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{p^3-1}} a_k(f) = -\dfrac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=0}^{2^{p^3-1}}\left(\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}I_{k,2^{n^3-1}}\right).$

Donc (par linéarisation de séries convergentes) :

$S_{2^{p^3-1}}(f)(0) = -\dfrac{a_0(f)}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2^{p^3-1}} I_{k,2^{n^3-1}}\right) = -\dfrac{a_0(f)}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}T_{2^{p^3-1},2^{n^3-1}}.$

Or cette dernière série est à termes positifs donc sa somme est supérieure en partriculier à son terme de rang p d'où $S_{2^{p^3-1}}(f)(0) \geqslant -\dfrac{a_0(f)}{2} + \dfrac{2}{\pi p^2}T_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}}.$ $\square$

D'après la question 7.d, nous avons $T_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}} \sim \dfrac{1}{2}\ln\left(2^{p^3-1}\right) = \dfrac{\ln 2}{2}(p^3-1) \sim \dfrac{\ln 2}{2}p^3.$

Il découle alors immédiatement de l'inégalité ci-dessus que $S_{2^{p^3-1}}(f)(0) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty.$

Il en résulte que la suite $\left(S_n(f)(0)\right)$ diverge puisqu'il existe une suite extraite tendant vers $+\infty$. $\square$

Fonctions à variations bornées. Théorème de Jordan.

10. Commençons par remarquer que la "subdivision" σ_n proposée est bien une subdivision de $[0,1]$! Il vient :

$$V(\sigma_n, f) = \underbrace{\left|\frac{1}{2n}\cos(n\pi)\right|}_{1/2n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{2(n-k)}\cos((n-k)\pi) - \frac{1}{2(n+1-k)}\cos((n+1-k)\pi)\right|}_{V_n} + \underbrace{\left|-\frac{1}{2}\cos(\pi)\right|}_{1/2}.$$

Or $\cos((n-k)\pi) = (-1)^{n-k}$ et $\cos((n-k+1)\pi) = (-1)^{n-k+1}$ de sorte que $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{2(n-k)} + \dfrac{1}{2(n-k+1)}\right)$

c'est à dire $V_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j} + \dfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\dfrac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n}.$

En conclusion $V(\sigma_n, f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{j} \sim \ln n$ ce qui prouve bien que f n'est pas à variations bornées. $\square$

11. a. Il est immédiat que si f est monotone sur $[a,b]$ alors $V(\sigma,f) = |f(b)-f(a)|$ pour toute subdivision σ de $[a,b]$ de sorte que f est à variations bornées et que $V([a,b],f) = |f(b)-f(a)|$. $\square$

11. b. Il est également immédiat que si σ est une subdivision de $[a,b]$ on a $V(\sigma, f+g) \leqslant V(\sigma,f) + V(\sigma,g)$.
Ainsi la somme de deux fonctions à variatons bornées (et en particulier de deux fonctions monotones) sur $[a,b]$ est-elle à variations bornées. $\square$

11.c. Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a $f(x_{i+1}) - f(x_1) = \displaystyle\int_{x_1}^{x_{i+1}} f'(t)\,\mathrm{d}\,t$ d'après la relation fondamentale primitivation-intégration. De sorte que $\left|f(x_{i+1})-f(x_1)\right| \leqslant M_1(x_{i+1}-x_1)$ en notant $M_1 = \displaystyle\sup_{t\in[a,b]}\left|f'(t)\right|$ (par la majoration fondamentale du calcul intégral).
Ainsi $V(\sigma,f) \leqslant M_1(b-a)$ pour toute subdivision σ de $[a,b]$ de sorte que f est à variations bornées. $\square$

12. Si σ_1 est une subdivision quelconque de $[a,c]$ et σ_2 de $[c,b]$ alors $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est une subdivision de $[a,b]$ et $V(\sigma_1,f) + V(\sigma_2,f) = V(\sigma,f) \leqslant V([a,b],f)$. Ce qui prouve que $V(\sigma_1,f) \leqslant V([a,b],f)$ donc que f est bien à variations bornées sur $[a,c]$. De même sur $[c,b]$. En outre en passant au sup dans l'inégalité ci-dessus pour σ_1 puis σ_2 on obtient $V([a,c],f) + V([c,b],f) \leqslant V([a,b],f)$. $\square$

REMARQUE : l'égalité annoncée dans l'énoncé est très facile à établir. En effet soit f à variations bornées sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et soient σ une subdivision quelconque de $[a,b]$ et σ' la subdivision obtenue en rajoutant (éventuellement) le point c. Par inégalité triangulaire il est clair que $V(\sigma,f) \leqslant V(\sigma',f)$. Soient alors σ_1 et σ_2 les subdivisions de $[a,c]$ et $[c,b]$ telles que $\sigma' = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Nous avons $V(\sigma',f) = V(\sigma_1,f) + V(\sigma_2,f) \leqslant V([a,c],f) + V([c,b],f)$. Ainsi $V(\sigma,f) \leqslant V([a,c],f) + V([c,b],f)$ ce qui prouve bien que f est à variations bornées sur $[a,b]$ et que $V([a,b],f) \leqslant V([a,c],f) + V([c,b],f)$.

En conclusion finale, f est à variations bornées sur $[a,b]$ si et seulement si elle l'est sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et alors $V([a,b],f) = V([a,c],f) + V([c,b],f)$. $\square$

13.a.Remarquons d'une manière générale que si f est à variations bornées sur $[a,b]$ alors $|f(x)-f(y)| \leqslant V([a,b],f)$ pour tout couple (x,y) d'éléments de $[a,b]$.

Donc ici $\left|\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(t)-f(x_k)\big)e^{-int}\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} \big|f(t)-f(x_k)\big|\,\mathrm{d}\,t \leqslant V_k(f)(x_k-x_{k-1})$.

D'où évidemment $\left|\underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(t)-f(x_k)\big)e^{-int}\,\mathrm{d}\,t}_{\underset{\text{DEF}}{=}\alpha_n}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1})$. $\square$

REMARQUE : $\displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) = \frac{2\pi}{|n|N}\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f) \leqslant \frac{2\pi}{|n|N}V(\sigma,f) \leqslant \frac{2\pi}{|n|N}V([0,2\pi],f)$ d'après la question 12.

13.b. On a $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}\,\mathrm{d}\,t = \frac{i}{n}f(x_k)\big(e^{-i\varepsilon\times 2k\pi/N} - e^{-i\varepsilon\times 2(k-1)\pi/N}\big)$ avec $\varepsilon \underset{\text{DEF}}{=} \dfrac{n}{|n|}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}\,\mathrm{d}\,t &= \frac{i}{n}\Big(\sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)e^{-i\varepsilon\times 2k\pi/N} - \sum_{k=0}^{|n|N-1} f(x_{k+1})e^{-i\varepsilon\times 2k\pi/N}\Big)\\
&= \frac{i}{n}\Big(f(2\pi) - f(x_1) + \sum_{k=1}^{|n|N-1}\big(f(x_k)-f(x_{k+1})\big)e^{-i\varepsilon\times 2k\pi/N}\Big)\\
&= \frac{i}{n}\Big(f(0) - f(x_1) + \sum_{k=1}^{|n|N-1}\big(f(x_k)-f(x_{k+1})\big)e^{-i\varepsilon\times 2k\pi/N}\Big)\\
&= \frac{i}{n}\sum_{k=0}^{|n|N-1}\big(f(x_k)-f(x_{k+1})\big)e^{-i\varepsilon\times 2k\pi/N}
\end{aligned}$$

Ainsi $\underbrace{\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}\,\mathrm{d}\,t\right|}_{\underset{\text{DEF}}{=}\beta_n} \leqslant \dfrac{1}{|n|}\displaystyle\sum_{k=0}^{|n|N-1}\big|f(x_k)-f(x_{k+1})\big| = \frac{1}{|n|}V(\sigma,f) \leqslant \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)$. $\square$

13.c. Par la relation de Chasles nous avons $2\pi c_n(f) = \alpha_n + \beta_n$.

Or $|\beta_n| \leqslant \dfrac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)$ par la question 13.b. et $|\alpha_n| \leqslant \dfrac{2\pi}{|n|N}V([0,2\pi],f)$ d'après la remarque de la question 13.a.

Donc $2\pi|c_n(f)| \leqslant \dfrac{1}{|n|}V([0,2\pi],f) + \dfrac{2\pi}{|n|N}V([0,2\pi],f)$ et cela pour tout entier relatif n non nul et tout entier $N>0$.

En fixant n dans cette inégalité et en faisant tendre N vers $+\infty$ il vient :

$|c_n(f)| \leqslant \dfrac{1}{2|n|\pi}V([0,2\pi],f)$ pour tout entier relatif non nul. $\square$

14.a. En uitilisant la définition de σ_n il vient par un calcul immédiat que :

$$\begin{aligned}
k(S_n-L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1}-L) + n(\sigma_{n-1}-L) &= S_n + \cdots + S_{n+k-1} - kS_n.\\
&= u_{n+1} + \big(u_{n+1}+u_{n+2}\big) + \cdots + \big(u_{n+1}+\cdots+u_{n+k-1}\big). \quad (1)
\end{aligned}$$
$\square$

14.b. Comme par hypothèse $|u_{n+p}| \leqslant \dfrac{A}{n+p+1} \leqslant \dfrac{A}{n+2}$pour tout entier $p \geqslant 1$, la valeur absolue du membre de droite de l'égalité (1) ci-dessus est majorée par $\dfrac{k(k-1)}{2} \times \dfrac{A}{n+2}$.

Par ailleurs $\big|-(n+k)(\sigma_{n+k-1}-L) + n(\sigma_{n-1}-L)\big| \leqslant (n+k)d_{n+k-1} + nd_{n-1} \leqslant (k+2n)d_{n-1}$ (car (d_n) décroît).

L'égalité (1) prouve alors par inégalité triangulaire que :

$\big|S_n - L\big| \leqslant \Big(1+\dfrac{2n}{k}\Big)d_{n-1} + A\dfrac{k-1}{2(n+2)}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $k \geqslant 1$. (2) $\square$

14.c. Fixons n dans l'inégalité ci-dessus et choisissons $k = 1 + \mathrm{Int}(2n\sqrt{d_{n-1}})$ i.e. $(k-1)^2 \leqslant 4n^2d_{n-1} < k^2$.

Il vient alors $\dfrac{2n}{k} < \dfrac{1}{\sqrt{d_{n-1}}}$ et $\dfrac{k-1}{2(n+2)} < \dfrac{k-1}{2n} \leqslant \sqrt{d_{n-1}}$.

Il découle alors de (2) que $\big|S_n - L\big| \leqslant d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$. $\square$

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est-elle convergente de somme L. $\square$

En d'autres termes si une série de nombres complexes $\sum u_n$ converge au sens de Césàro et si $u_n = O(\dfrac{1}{n})$ alors la série converge (évidemment vers la même somme par le théorème de Cesàro).

15.• Comme F est continue, d'après le théorème de Fejér sa série de Fourier converge uniformément au sens de Cesàro vers f. C'est à dire que la suite $\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sigma_n(f)(x) - f(x)\right|\right)$ tend vers 0. D'après la question 5, cette suite est majorée par une suite (d_n) décroissante de limite nulle. Ainsi $\left|\sigma_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant d_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Notons $u_n(x) \underset{\text{DEF}}{=} c_{-n}(f)e^{-inx} + c_n(f)(x)e^{inx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0(x) = c_0(f)$.

D'après la question 13.c, on a $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{V([0,2\pi],f)}{n\pi}$ pour $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Or $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{2}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.

Ainsi $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{2V([0,2\pi],f)}{\pi} \times \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{A}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ avec $A = \max\left\{|c_0(f)|, \dfrac{2V([0,2\pi],f)}{\pi}\right\}$.

• Nous sommes alors dans la situation de la question 14 pour la suite $\big(u_n(x)\big)$ avec la même constante A et la même suite (d_n) pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il en découle que $\left|S_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce qui prouve bien que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. $\square$

16. Il suffit de prouver que f est à variations bornées sur $[-\pi,\pi]$ (ce qui entraîne par périodicité qu'elle l'est sur $[0,2\pi]$). Or pour $x \in [-\pi,\pi]$ on a $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ avec $\varphi_1(x) = \sqrt{-x}$ si $x \in [-\pi, 0]$ et 0 sinon et $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0,\pi]$ et 0 sinon. La fonction φ_1 est décroissante sur $[-\pi,\pi]$ et φ_2 croissante. Il en découle que f est à variations bornées sur $[-\pi,\pi]$ par la question 11.b. $\square$

17. En remarquant qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle y est à variations bornées (immédiat) et bien sûr continue, on a immédiatement la conclusion de cette question.. $\square$

FIN