Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Préliminaires.

1. En notant $Y = MX$, il vient:
$|y_i| = \Big|\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j\Big| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}|.|x_j| \leqslant \|X\|_\infty \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \leqslant \|X\|_\infty \|M\|$ pour tout i de 1 à n.
Donc, par définition même du sup, $\|MX\|_\infty \leqslant \|M\|\|X\|_\infty$. □

2. a. L'application φ de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{R}^d$ définie par $\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k e_k$ en notant $(x_1,\dots,x_k)$ les composantes de M sur la base $\mathcal{B}$ et $(e_1,\dots,e_k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ est clairement un isomorphisme d'espace vectoriel. Il en découle que $\mathcal{N}$ est bien une norme sur $\mathcal{M}$ "transférée" par φ^{-1} de la norme infinie de $\mathbb{R}^d$. □

2. b. La restriction à $\mathcal{M}$ de la norme $\|\ \|$ de $M_n(\mathbb{R})$ est bien sûr une norme sur $\mathcal{M}$. Comme $\mathcal{M}$ est de dimension finie, cette norme est équivalente à la norme $\mathcal{N}$ de la question précédente d'où l'existence demandée. □

2. c. Comme toutes les normes sur $\mathcal{M}$ sont équivalentes, dire que la suite (M_p) converge vers 0 c'est en particulier dire qu'elle converge vers 0 pour la norme $\mathcal{N}$ d'où le résultat demandé. □

Une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_I^\infty$.

3. a. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $\ell - 1$ appliquée à f de λ vers x (ce qui est bien licite puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc a fortiori de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur I donc sur $[\lambda, x]$ ou $[x,\lambda]$) donne immédiatement le résultat demandé. □

3. b. De manière à ramener l'intervalle d'intégration au segment fixe $[0,1]$ on effectue le changement de variable (bien admissible car affine) $u = \lambda + t(x-\lambda)$ ce qui fournit $f(x) = (x-\lambda)^\ell h(x)$ avec :

$$(\ell-1)!h(x) = \int_0^1 \underbrace{(1+t)^{\ell-1} f^{(\ell)}\big(\lambda + (x-\lambda)t\big)}_{g(x,t)}\,\mathrm{d}\,t.$$

On a là une intégrale <u>sur un segment</u> dépendant d'un paramètre et comme g est par théorèmes opératoires de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times [0,1]$, l'application itérée du théorème de dérivation sous le signe intégral (dans le cas d'un segment) prouve bien que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. □

4. a. Pour j de 1 à r et k de 0 à $m_j - 1$, remarquons qu'on a $\Pi_A^{(k)}(\lambda_j) = 0$ par caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme. Par ailleurs la formule de dérivation de Leibniz fournit :

$$(h\Pi_A)^{(k)}(\lambda_j) = \sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p\, h^{(k-p)}(\lambda_j) \underbrace{\Pi_A^{(p)}(\lambda_j)}_{=0 \text{ car } p \leqslant k} = 0.$$

Ainsi $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$ pour tout j de 1 à r et tout k de 0 à $m_j - 1$ i.e. $f \underset{A}{\equiv} g$. □

4. b. Supposons $f \underset{A}{\equiv} g$. Alors $f(x) - g(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} h_1(x)$ avec $h_1 \in \mathcal{C}^\infty(I)$ d'après la question 3.

Pour $x \neq \lambda_1$ on a $h_1(x) = \dfrac{1}{(x-\lambda_1)^{m_1}} \times (f-g)(x)$ et la formule de Leibniz prouve que $h^{(k)}(\lambda_2) = 0$ pour k de 1 à $m_2 - 1$ puisque $(f-g)^{(p)}(\lambda_2) = 0$ pour $p \leqslant m_2 - 1$. La question 3 prouve alors que $h_1(x) = (x-\lambda_2)^{m_2} h_2(x)$ avec $h_2 \in \mathcal{C}^\infty(I)$ donc que $f(x) - g(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} h_2(x)$.
En écrivant que $h_2(x) = \dfrac{1}{(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}} \times (f-g)(x)$ pour $x \in I \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$, on prouve de même que $h_2(x) = (x-\lambda_3)^{m_3} h_3(x)$ avec $h_3 \in \mathcal{C}^\infty(I)$ ...
L'itération est claire et ainsi il existe bien $h = h_r \in \mathcal{C}^\infty(I)$ vérifiant $f = g + h\Pi_A$. □

En conclusion deux fonctions de $\mathcal{C}^\infty(I)$ coïncident sur le spectre de A si et seulement si il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(I)$ telle que $f = g + h\Pi_A$.

5. (2) implique (1) d'après la question 4.a. Réciproquement si P et Q coïncident sur le spectre de A alors $P - Q$ est divisible par $(X-\lambda_i)^{m_i}$ (caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine) donc par Π_A d'après le théorème de Gauss puisque les polynômes $(X-\lambda_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux deux à deux. □

Définition de la matrice $f(A)$.

6. L'application φ est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie m. Pour prouver qu'elle est bijective, il suffit donc de prouver qu'elle est injective. Or si P est un élément de son noyau, alors P est un polynôme de degré au plus $m-1$ admettant au moins m racines comptées avec leur ordre de multiplicité. Il en découle que P est le polynôme nul. □

7. P_f répond à la question si et seulement si $\varphi(P) = \left(\left(f^{(k_1)}(\lambda_1)\right)_{0\leqslant k_1\leqslant m_1-1}, \ldots, \left(f^{(k_r)}(\lambda_r)\right)_{0\leqslant k_r\leqslant m_r-1}\right) \underset{\text{DEF}}{=} X_{A,f}$.
D'où l'existence et l'unicité de P_f d'après la question précédente à savoir $\varphi^{-1}(X_{A,f})$. $\square$

8. Supposons que f soit la fonction polynôme associée au polynôme P. Effectuons la division euclidienne de P par Π_A : $P = Q\Pi_A + R$. Alors d'après la question 4 (ou 5) on a $P \underset{A}{\equiv} R$ i.e. $f \underset{A}{\equiv} R$ et comme le degré de $R \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, on a par la définition de la question 7 que $f(A) = R(A)$.
Or par le morphisme classique de l'algèbre des polynômes sur l'algèbre des matrices carrées, on a :
$P(A) = Q(A)\underbrace{\Pi_A(A)}_{=0} + R(A) = R(A)$.
Ainsi on a bien $f(A) = P(A)$, ce qui est effectivement "naturel" !. $\square$

9. a. Un calcul immédiat montre que le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = (X-1)^2$. Donc le polynôme minimal qui le divise d'après le théorème de Cayley-Hamilton est $X-1$ ou $(X-1)^2$. Or $X-1$ n'annule pas A puisque $A \neq I$. Ainsi $\Pi_A(X) = \chi_A(X) = (X-1)^2$. $\square$

9. b.• Lorsque $f(x) = ax+b$ on a d'après la question 8 que $f(A) = aA + bI$ et on ne peut "faire mieux" puisque le polynôme $aX+b$ est de degré inférieur à 2. $\square$
• Lorsque $f(x) = \sin(\pi x)$ on a $f(1) = 0$ et $f'(1) = -\pi$ donc immédiatement $P_f(X) = -\pi(X-1)$ de sorte que $f(A) = -\pi(A-I)$. $\square$
• Lorsque $f(x) = (x-1)^2 g(x)$ alors $f(1) = f'(1) = 0$ de sorte que $P_f(X) = 0$ et donc $f(A) = 0$. $\square$

Le calcul systématique de $f(A)$.

10. Avec les notations précédentes nous avons, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $X_{A,f} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)E_{j,k}$ où $E_{j,k}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indices j,k i.e. en d'autres termes $E_{j,k}$ est l'image par φ d'une fonction $f_{j,k}$ (par exemple un polynôme) telle que $f_{j,k}^{(k)}(\lambda_j) = 1$ et $f_{j,k}^{(p)}(\lambda_i) = 0$ pour tout couple (i,p) tel que $1 \leqslant i \leqslant r$ et $0 \leqslant p \leqslant m_i - 1$ et $(i,p) \neq (j,k)$.
Il en découle immédiatement l'existence et l'unicité des polynômes $Q_{j,k}$ répondant à la question à savoir : $Q_{j,k} = \varphi^{-1}(E_{j,k})$. $\square$

11. En tant qu'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^m$, la famille $\left(Q_{j,k}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$.

Soit désormais une famille $\left(\alpha_{j,k}\right)$ de réels telle que $\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k}Z_{j,k} = 0$. Cette realtion s'écrit :
$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k}Q_{j,k}(A) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} \left(\alpha_{j,k}Q_{j,k}\right)(A) = 0$.
Ainsi le polynôme $\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k}Q_{j,k}$ annule A. Comme il est de degré au plus $m-1$ donc strictement inférieur au degré du polynôme minimal, il est nul. Il en résulte, puisque comme noté ci-dessus la famille des polynômes $\left(Q_{j,k}\right)$ est libre, que tous les coefficients $\alpha_{j,k}$ sont nuls.
En conclusion la famille de matrices $\left(Z_{j,k}\right)$ est libre. $\square$

Quant à la relation $f(A) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)Z_{j,k}$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, c'est bien sûr une immédiate conséquence de la question 10. $\square$

12.a. Comme $\Pi_A(X) = (X-1)^2$ la question précédente prouve l'existence de deux matrices $Z_1 \underset{\text{DEF}}{=} Z_{1,0}$ et $Z_2 = \underset{\text{DEF}}{=} Z_{1,1}$ telles que $f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2$ pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I où I est un intervalle quelconque non réduit à un point contenant 1. $\square$

12.b. En choisissant en particulier pour f la fonction constante égale à 1, il vient que $Z_1 = I_2$. Puis le choix $f : x \longmapsto x$ montre que $Z_2 = A - I_2$. Ainsi $f(A) = f(1)I_2 + f'(1)(A - I_2)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. $\square$

12.c. D'après la question 8, on a A^{2004} (au sens polynomial) qui est bien égal à $f(A)$ avec f la fonction $x \longmapsto x^{2004}$.
Donc $A^{2004} = f(A) = I_2 + 2004(A - I_2) = 2004A - 2003I_2$. $\square$
De même la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I pour $\alpha > 0$ on a $A^\alpha = I_2 + \alpha(A - I_2) = \alpha A + (1-\alpha)I_2$.
$\square$

13.a. En remplaçant la première colonne du polynôme caractéristique de A par elle-même plus la seconde on peut mettre X en facteur dans le polynôme caractéristique.

Ainsi $\chi_A(X) = X\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & X+2 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = X\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = X^2(X+1)$.

Il en découle que le polynôme minimal (qui le divise et a les mêmes racines) est soit $X(X+1)$ soit $X^2(X+1)$.

Or $A(A+I) \neq 0$ donc $\Pi_A(X) = X^2(X+1)$ et la matrice A n'est pas diagonalisable (ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$) puisque son polynôme minimal n'est pas à racines simples. $\square$

13.b. Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I intervalle quelconque contenant $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 0$, nous avons $f(A) = f(-1)Z_{1,0} + f(0)Z_{2,0} + f'(0)Z_{2,1}$.
La considération de $f(x) = x^2$ fournit $Z_{1,0} = A^2$. En envisageant ensuite $f(x) = 1$ il vient $Z_{2,0} = I_3 - A^2$ et enfin $f(x) = x$ fournit $Z_{2,1} = A + A^2$. $\square$

Un calcul fonctionnel sur la matrice A.

14.a. L'application ψ de $\mathcal{C}^\infty(I)$ dans $\mathbb{R}^m$ qui à f associe $X_{A,f}$ (défini à la question 7) est linéaire.
Or $P_f = \varphi^{-1}(X_{A,f}) = \varphi^{-1} o \psi(f)$ donc l'application de $\mathcal{C}^\infty(I)$ dans $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ qui à f associe P_f est linéaire.
On peut également remarquer que cette application est linéaire d'après la formule de la question 10 !
Ainsi $P_{\alpha f} = \alpha P_f$ et $P_{f+g} = P_f + P_g$. $\square$

14.b. D'après la question 4.b, il existe deux fonctions h_f et h_g de $\mathcal{C}^\infty(I)$ telles que $f = P_f + h_f \Pi_A$ et $g = P_g + h_g \Pi_A$.
Donc $fg = P_f P_g + h\Pi_A$ avec $h = P_f h_g + P_g h_f + h_f h_g \Pi_A \in \mathcal{C}^\infty(I)$.
Ce qui prouve, d'après la question 4.a, que $fg \underset{A}{\equiv} P_f P_g$.
Or $fg \underset{A}{\equiv} P_{fg}$ et comme la relation $\underset{A}{\equiv}$ est clairement une relation d'équivalence, nous avons $P_{fg} \underset{A}{\equiv} P_f P_g$ ce qui prouve, d'après la question 5, l'existence d'un polynôme H tel que $P_{fg} = P_f P_g + H\Pi_A$. $\square$

15.a. D'après la question 14.a, nous avons $S(\alpha f) \underset{\text{DEF}}{=} P_{\alpha f}(A) = (\alpha P_f)(A) = \alpha P_f(A) = \alpha S(f)$.
De même $S(f+g) = S(f) + S(g)$.
En outre par la question 14.b et le morphisme classique de l'algèbre des polynômes sur celui des matrices carrées :
$S(fg) \underset{\text{DEF}}{=} P_{fg}(A) = (P_f P_g + H\Pi_A)(A) = P_f(A)P_g(A) + H(A)\underbrace{\Pi_A(A)}_{=0} = P_f(A)P_g(A) = S(f)S(g)$.

Ainsi l'application S est bien un morphisme d'algèbres. $\square$

15.b. $f(A) = 0$ si et seulement si $P_f(A) = 0$. Or P_f étant de degré au plus $m-1$ donc strictement inférieur au degré du polynôme minimal, ceci n'est réalisé que si $P_f = 0$ donc si et seulement si f coïncide avec la fonction nulle sur le spectre de A. Le noyau de S est donc la sous-algèbre des fonctions de la forme $h\Pi_A$ où est une fonction quelconque de $\mathcal{C}^\infty(I)$. $\square$

16.a. Compte-tenu du morphisme précédent, on peut écrire :
$\cos^2(A) + \sin^2(A) = S(\cos)^2 + S(\sin)^2 = S(\cos^2) + S(\sin^2) = S(\cos^2 + \sin^2) = S(1) = I_n$. $\square$

16.b. En supposant les $\lambda_j > 0$ de sorte que $\sqrt{A}$ ait un sens :
$\left(\sqrt{A}\right)^2 = S(f_1)^2 = S(f_1^2) = S(x \longmapsto x) = A$. $\square$
En supposant les $\lambda_j \neq 0$ de sorte que $\dfrac{1}{A}$ ait un sens :
$\dfrac{1}{A}A = f_2(A)A = S(f_2)S(x \longmapsto x) = S(x \longmapsto 1) = I_n$ de sorte que $\dfrac{1}{A} = A^{-1}$. $\square$

17. En tant qu'image de l'algèbre commutative $\mathcal{C}^\infty(I)$ par le morphisme d'algèbres S, $\mathcal{M}_A$ est bien une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{R})$.
Tout élément $f(A)$ de $\mathcal{M}_A$ s'écrivant (par définition) sous la forme $P_f(A)$ où P_f est de degré au plus $m-1$, la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right)$ est génératrice. En outre cette famille st libre car si $\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{m-1}A^{m-1} = 0$ alors le polynôme $\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{m-1}X^{m-1}$ annule A donc est nul car de degré strictement inférieur à m, le degré du polynôme minimal.
En conclusion $\mathcal{M}_A$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension m. $\square$
REMARQUE : on peut aussi déduire directement la dimension de la question 11 !

18. *Première démonstration* : Soit $B = f(A) = P_f(A)$ inversible. On sait (conséquence classique du théorème de Cayley-Hamilton) que B^{-1} est un polynôme $Q(B)$. Il en découle que $B^{-1} = Q\big(P_f(A)\big) = (QoP_f)(A)$ donc B^{-1} appartient bien encore à $\mathcal{M}_A$. $\square$

Seconde démonstration : Soit B un élément inversible de $\mathcal{M}_A$. Alors l'application ψ de l'algèbre $\mathcal{M}_A$ dans elle-même définie par $\psi(M) = BM$ est clairement linéaire et injective puisque B est inversible. Donc elle est bijective puisque l'algèbre $\mathcal{M}_A$ est de dimension finie. Comme $I_n = 1(A) \in \mathcal{M}_A$, il existe une matrice $B' \in \mathcal{M}_A$ telle que $BB' = I_n$. Ainsi $B^{-1} = B'$ appartient bien à $\mathcal{M}_A$. $\square$

19. Nous avons $f(A) \underset{\text{DEF}}{=} P_f(A)$. Il en découle que l'ensemble des valeurs propres de $f(A)$ est l'ensemble des $P_f(\lambda_j)$ (classique résultat sur les valeurs propres d'un polynôme d'une matrice, qu'on obtient immédiatement en trigonalisant la matrice quitte à passer sur $\mathbb{C}$). Or $P_f(\lambda_j) = f(\lambda_j)$.
Donc $f(A)$ est inversible si et seulement si $f(\lambda_j) \neq 0$ pour j de 1 à r. $\square$

20. Nous avons montré dans la question précédente que $\Lambda_{f(A)} = f(\Lambda_A)$. $\square$

Application à la résolution d'un système différentiel.

21. Nous avons $f_p(A) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} f_p^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$ pour tout entier p d'après la question 11. En outre les matrices $Z_{j,k}$ forment une base de $\mathcal{M}_A$ toujours d'après la question 11. En munissant $\mathcal{M}_A$ de la norme infinie relative à cette base (toutes les normes y étant équivalentes) ou en utilisant la question 2.c, on voit que la suite de matrices $\big(f_p(A)\big)$ converge vers $f(A)$ si et seulement si la suite de fonctions $\big(f_p\big)$ converge vers f sur le spectre de A. $\square$

22. Commençons par remarquer que comme f_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut bien envisager $f_t(A)$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Fixons $t \in \mathbb{R}$ et envisageons la suite de fonctions $\big(S_p\big)$ définie par $S_p(x) = \sum_{\ell=0}^{p} \frac{t^\ell}{\ell!} x^\ell$.

Il vient alors (cours sur les séries entières) que pour tout entier k la suite $\big(S_p^{(k)}\big)$ converge localement normalement donc a fortiori simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f_t^{(k)}$. En particulier la suite $\big(S_p\big)$ converge vers f_t sur le spectre de A.
Il en découle d'après la question précédente que la suite de matrices $\big(S_p(A)\big)$ converge vers la matrice $f_t(A)$.

En d'autres termes la suite $\left(\sum_{\ell=0}^{p} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell\right)$ converge vers $f_t(A)$ c'est à dire encore $f_t(A) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell \underset{\text{DEF}}{=} \exp(tA)$. $\square$

23. Avec des notations claires le système s'écrit $X' = AX$ et (système différentiel linéaire à coefficients constants) sa solution générale est $X = \exp(tA)X_0$ avec $X_0 = X(0)$.
On remarque que la matrice A est celle de la question 13 et ainsi nous avons (d'après les questions 13 et 22) : $\exp(tA) = e^{-t}A^2 + (I_3 - A^2) + t(A + A^2)$.
La solution générale est donc $\big((e^{-t} + t - 1)A^2 + tA + I_3\big)X_0$. $\square$

FIN