Concours Communs Polytechniques

Mathématiques 2

I. Étude d'un exemple

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ son polynôme caractéristique χ_A vaut :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad-bc) = X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X + \det(A)$$

   or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ donc $A^2 - \mathrm{tr}\,(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
   On peut bien sûr obtenir également ce résultat par un calcul direct.

2. Par définition, $\mathbb{A}$ est le sous-espace vectoriel engendré par I_2 et A donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{A}$ contient I_2. De plus, A n'est pas une matrice scalaire donc (I_2, A) est une famille libre et par conséquent une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{A}$. Enfin, $\mathbb{A}$ est stable pour le produit car si $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$,

$$(aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A) = (aa' - bb'\det(A))I_2 + (ab' + a'b + bb'\mathrm{tr}\,(A))A \in \mathbb{A}$$

3. $\diamond$ Supposons qu'il existe une matrice $B = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$ telle que $B^2 = -I_2$. Alors toute valeur propre λ de B vérifie $\lambda^2 = -1$ donc B ne possède pas de valeur propre réelle. On en déduit que A ne possède pas non plus de valeur propre réelle (car μ valeur propre de A implique $a + b\mu$ valeur propre de B). Le polynôme caractéristique de A n'a donc pas de racine réelle donc son discriminant $\Delta = (\mathrm{tr}\,A)^2 - 4\det A$ est strictement négatif.

   $\diamond$ *Réciproquement*, supposons $(\mathrm{tr}\,A)^2 - 4\det A < 0$.
   Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(aI_2 + bA)^2 = (a^2 - b^2\det A)I_2 + (2ab + b^2\mathrm{tr}\,A)A$. Or le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2\det A = -1 \\ 2ab + b^2\mathrm{tr}\,A = 0 \end{cases}$$

   équivaut à

$$\begin{cases} b^2\det A = a^2 + 1 \\ a = -\frac{b}{2}\mathrm{tr}\,A \end{cases}$$

   ou encore à

$$\begin{cases} b^2 = \frac{4}{4\det A - (\mathrm{tr}\,A)^2} \\ a = -\frac{b}{2}\mathrm{tr}\,A \end{cases}$$

   Il existe donc des matrices de $\mathbb{A}$ dont le carré vaut $-I_2$ par exemple

$$B = \frac{2}{\sqrt{4\det A - (\mathrm{tr}\,A)^2}}\left(\left(-\frac{\mathrm{tr}\,A}{2}\right)I_2 + A\right)$$

4. On suppose que $B \in \mathbb{A}$ est telle que $B^2 = -I_2$. Alors B n'est pas une matrice scalaire (car si $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda I_2)^2 = \lambda^2 I_2 \neq -I_2$) donc (I_2, B) est une famille libre de $\mathbb{A}$. Comme $\mathbb{A} = \mathrm{vect}\,\{I_2, A\}$ on en déduit que $\mathbb{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux et que (I_2, B) en est une base.

Définissons alors f comme l'unique application linéaire entre les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{A}$ et $\mathbb{C}$ telle que $f(I_2) = 1$ et $f(B) = i$. Alors f est un isomorphisme d'espaces vectoriels car elle envoie une base de $\mathbb{A}$ sur une base de $\mathbb{C}$. De plus $f(I_2) = 1$. Enfin, si $M = xI_2 + yB$ et $M' = x'I_2 + y'B$ sont deux éléments de $\mathbb{A}$, $MM' = xx'I_2 + (xy' + x'y)B + yy'B^2 = (xx' - yy')I_2 + (xy' + x'y)B$ donc

$$f(MM') = (xx' - yy')f(I_2) + (xy' + x'y)f(B) = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

et

$$f(M)f(M') = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

On a donc $f(MM') = f(M)f(M')$ ce qui achève de montrer que f est un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{C}$.

5. D'après le calcul fait en question 3. et A étant non scalaire, si $M = aI_2 + bA$, la condition $M^2 = 0$ équivaut à $\left\{\begin{array}{c} a^2 - b^2 \det A = 0 \\ 2ab + b^2 \operatorname{tr} A = 0 \end{array}\right.$ c'est-à-dire à

$$b = a = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{array}{c} a = -\frac{b}{2}\operatorname{tr} A \\ b^2\left(\frac{1}{4}(\operatorname{tr} A)^2 - \det A\right) = 0 \end{array}\right.$$

soit encore, compte-tenu de l'hypothèse $(\operatorname{tr} A)^2 = 4\det A$ à $a = -\frac{b}{2}\operatorname{tr} A$.

Conclusion : Si A n'est pas une matrice scalaire et vérifie $(\operatorname{tr} A)^2 = 4\det A$, les solutions de $M^2 = 0$ dans $\mathbb{A}$ sont les matrices de la forme $b\left(\left(-\frac{\operatorname{tr} A}{2}\right) I_2 + A\right)$ avec $b \in \mathbb{R}$. Il existe donc dans $\mathbb{A}$ des matrices non nulles de carré nul, donc non inversibles, par conséquent $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

6. Par hypothèse, B est une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en déduit que A n'est pas non plus scalaire et (I_2, A) est une base de $\mathbb{A}$. Définissons alors g comme l'unique application linéaire de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ telle que $g(I_2) = I_2$ et $g(A) = B$. L'application g est alors bijective car est linéaire et envoie une base de $\mathbb{A}$ sur une base de $\mathbb{B}$. De plus, on a $\forall\, M = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$, $g(M) = aI_2 + bB = aI_2 + bP^{-1}AP = P^{-1}(aI_2 + bA)P = P^{-1}MP$. On en déduit que si $(M, M') \in \mathbb{A}^2$,

$$g(M)g(M') = P^{-1}MPP^{-1}M'P = P^{-1}MM'P = g(MM')$$

ce qui achève de montrer que g est un isomorphisme d'algèbres. Par suite, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux algèbres isomorphes.

7. Si $(\operatorname{tr} A)^2 > 4\det A$ le discriminant du polynôme caractéristique de A est strictement positif donc χ_A possède deux racines réelles distinctes *i.e.* A possède deux valeurs propres réelles distinctes ce qui implique sa diagonalisabilité vu que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Soit B matrice diagonale semblable à A. D'après la question précédente, $\mathbb{A}$ est isomorphe à $\mathbb{B} = \operatorname{vect}\{I_2, B\}$. Or $\mathbb{B}$ est égal à l'espace $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées diagonales d'ordre 2 : en effet $\mathbb{B} \subset \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{B}) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}_2(\mathbb{R}))$ (car $\left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$).

   Dans ce cas, $\mathbb{A}$ n'est pas un corps car si h désigne un isomorphisme de $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{B} = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, $h^{-1}(E_{11})$ et $h^{-1}(E_{22})$ sont deux éléments non nuls de $\mathbb{A}$ dont le produit est nul donc qui sont non inversibles.

II. Quelques résultats généraux

1. Comme $\mathbb{D}$ est une algèbre, l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi & : & \mathbb{D}^2 & \to & \mathbb{D} \\ & & (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

est bilinéaire : on en déduit que pour tout $a \in \mathbb{D}$, l'application partielle $\phi_a = \pi(a,\cdot)$ est linéaire.

2. $\diamond$ Toujours par bilinéarité de la multiplication dans $\mathbb{D}$, on a $\forall\,(a,b) \in \mathbb{D}^2$, $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\phi_{\lambda a+\mu b} = \lambda\phi_a + \mu\phi_b$$

Par ailleurs, par associativité de la multiplication dans $\mathbb{D}$, on a $\forall\,(a,b) \in \mathbb{D}^2$, $\phi_{ab} = \phi_a \circ \phi_b$. Enfin, par définition de l'élément neutre pour le produit, $\phi_{1_{\mathbb{D}}}$ est l'application identité de $\mathbb{D}$. On en déduit que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathbb{D} & \to & \mathcal{L}(\mathbb{D}) \\ & & a & \mapsto & \phi_a \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres.
Or on sait que, $\mathcal{B}$ étant une base fixée de $\mathbb{D}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{D}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres. On en déduit que Ψ est un morphisme d'algèbres comme composée des deux morphismes d'algèbres précédents. De plus, si $\Psi(a) = 0$, on a $\phi_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{D})}$ et, en particulier $a = \phi_a(1_{\mathbb{D}}) = 0$ donc Ψ est injectif.

$\diamond$ Comme Ψ est un morphisme d'algèbres, $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ce qu'on peut redémontrer très facilement comme le réclame l'énoncé. Dans ces conditions, Ψ induit un isomorphisme de $\mathbb{D}$ sur $\Psi(\mathbb{D})$ donc $\mathbb{D}$ est isomorphe à la sous-algèbre $\Psi(\mathbb{D})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Si $\mathbb{D} = \mathbb{C}$ et $z = a + ib$, $\phi_z(1) = z = a + ib$ et $\phi_z(i) = (a+ib)i = -b + ia$ donc si $\mathcal{B} = (1, i)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

4. (a) Soit $A \in \mathbb{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui possède une valeur propre réelle λ et n'est pas une matrice scalaire. Alors $A - \lambda I_n$ appartient à $\mathbb{A}$ (car $\mathbb{A}$ est stable par combinaisons linéaires et contient A et I_n), $A - \lambda I_n$ est non inversible (car λ est valeur propre de A) et n'est pas la matrice nulle (car A n'est pas scalaire) ce qui prouve que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

   (b) Toute matrice trigonalisable (*a fortiori* diagonalisable) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$ donc possède au moins une valeur propre réelle. Par suite, d'après (a), si $\mathbb{A}$ contient une matrice non scalaire trigonalisable, $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

   (c) On suppose $\mathbb{A}$ intègre et $A \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. D'après 1., on sait que $\Phi_A\ :\ X \mapsto AX$ est un endomorphisme de $\mathbb{A}$. De plus, $\mathbb{A}$ étant intègre et A étant non nulle, $\mathrm{Ker}\,\phi_A = \{0\}$ donc ϕ_A est injectif. Comme ϕ_A est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que ϕ_A est un isomorphisme. En particulier, ϕ_A est surjective donc il existe $B \in \mathbb{A}$ telle que $\phi_A(B) = I_n$. La matrice A possède donc un inverse à droite, donc est inversible d'inverse B appartenant à $\mathbb{A}$. Tout élément non nul de $\mathbb{A}$ possède donc un inverse dans $\mathbb{A}$ donc $\mathbb{A}$ est un corps.

III. L'algèbre des quaternions

1. Comme $A^2 = -I_n$, on a $(\det A)^2 = (-1)^n \in \mathbb{R}^+$ donc n est pair.
2. Remarquons que $(AB)^2 = A(BA)B = A(-AB)B = -A^2B^2 = -I_n$, $BAB = -AB^2 = A$ et $ABA = -A^2B = B$. On en déduit que si $M = tI_n + xA + yB + zAB$ et $M' = t'I_n + x'A + y'B + z'AB$ sont deux éléments de $\mathbb{H}$,

$$MM' = (tt'-xx'-yy'-zz')I_n+(tx+xt'+yz'-zy')A+(ty'-xz'+yt'+zx')B+(tz'+xy'-yx'+zt')AB$$

ce qui montre que $\mathbb{H}$ est stable pour le produit ce qui ajouté au fait qu'il est un sous-espace vectoriel contenant I_n prouve que $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. D'après 2.,

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n$$

4. (a) Si $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ sont tels que $tI_n + xA + yB + zAB = 0$ alors

$$(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n = (tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = 0$$

donc $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ce qui, vu que t, x, y, z sont réels impose $t = x = y = z = 0$. La famille (I_n, A, B, AB) est donc libre.

(b) Si M est un élément non nul de $\mathbb{H}$ on a donc $M = tI_n + xA + yB + zAB$ avec $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ donc M est inversible d'inverse $\frac{1}{t^2+x^2+y^2+z^2}(tI_n - xA - yB - zAB)$ appartenant à $\mathbb{H}$ donc $\mathbb{H}$ est un corps.
5. (a) On a $J^2 = -I_2$ et d'après les régles de calcul des produits de matrices par blocs,

$$A^2 = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} = -I_4,\ B^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = -I_4$$

$$AB + BA = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} = 0$$

6. Comme A, B et $C = AB$ sont antisymétriques, si $M = tI_n + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$, ${}^tM = tI_n - xA - yB - zC \in \mathbb{H}$ et d'après 3., $M.{}^tM = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_4$. On en déduit donc que $(\det M)^2 = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^4$. Si $M \neq 0$, on a donc d'après 4.(b),

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{|\det M|}}{}^tM$$

IV. Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. Si $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ et $M = tI_n + xA + yB + zC$, $M + {}^tM = 2tI_n$ donc $M = -{}^tM$ si et seulement si $t = 0$ ou encore $M \in \operatorname{vect}\{A, B, C\}$. Or (A, B, C) est une famille libre car sous-famille de la famille libre (I_4, A, B, C). Donc l'ensemble des quaternions purs est le sous-espace vectoriel engendré par (A, B, C) et a pour base (A, B, C). $\mathbb{L}$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathbb{H}$ car, par exemple $A.A = -I_2 \notin \mathbb{L}$ alors que $A \in \mathbb{L}$.
2. Soit $M = xA+yB+zC$ et $N = x'A+y'B+z'C$ deux éléments de $\mathbb{L}$. Comme (A, B, C) est une base orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on a $(M|N) = xx' + yy' + zz'$. Par ailleurs, d'après III.3.,

$$\begin{aligned} MN + NM &= (-xx' - yy' - zz')I_4 + (yz' - zy')A + (-xz' + zx')B + (xy' - yx')C \\ &\quad +(-x'x - y'y - z'z)I_4 + (y'z - z'y)A + (-x'z + z'x)B + (x'y - y'x)C \\ &= -2(xx' + yy' + zz')I_4 \end{aligned}$$

On a donc $\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4$.

3. $\diamond$ D'après 2., si $M \in \mathbb{L}$, $M^2 = \lambda I_4$ avec $\lambda = -\|M\|^2 \in \mathbb{R}^-$.
   $\diamond$ Réciproquement, soit $M = tI_4 + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$ telle que $M^2 = \lambda I_4$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Alors, d'après III.2.,
   $$M^2 = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)I_4 + 2txA + 2tyB + 2tzC$$
   donc $\left\{ \begin{array}{l} tx = ty = tz = 0 \\ t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \in \mathbb{R}^- \end{array} \right.$. Ces conditions imposent $t = 0$ car sinon $x = y = z = 0$ et alors $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t^2 > 0$. Donc si $M \in \mathbb{H}$ est telle que $M^2 = \lambda I_4$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^-$, alors $M \in \mathbb{L}$.
4. Soit ϕ un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$ dans elle-même. Si $M \in \mathbb{L}$, on a $M^2 = -\|M\|^2 I_4$ donc $\phi(M)^2 = \phi(M^2) = -\|M\|^2 \phi(I_4) = -\|M\|^2 I_4$. On en déduit d'après 3. que $\phi(M) \in \mathbb{L}$. Dans ces conditions $\phi(M)^2 = -\|\phi(M)\|^2 I_4$ donc $-\|\phi(M)\|^2 = -\|M\|^2$ soit $\|\phi(M)\| = \|M\|$. Donc ϕ transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme. L'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbb{L}$ conserve la norme donc conserve également le produit scalaire donc est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{L}$.
5. (a) Si M et N sont deux quaternions purs de même norme colinéaires, on a ou bien $M = N$ ou bien $M = -N$.
   Si $M = N$ la matrice $P = I_4$ vérifie $P \in \mathbb{H}$, $P \neq 0$ et $M = P^{-1}NP$.
   Si $N = -M$ la condition $M = P^{-1}NP$ équivaut à $PM + MP = 0$. Dans ces conditions il suffit de prendre pour P une matrice non nulle appartenant à l'orthogonal de vect$\{M\}$ dans $\mathbb{L}$: une telle matrice existe bien puisque $(\text{vect}\{M\})^\perp$ est un plan vectoriel de $\mathbb{L}$ et si $P \in (\text{vect}\{M\})^\perp \setminus \{0\}$, $PM + MP = -(P|M)I_4 = 0$.
   (b) On suppose que M et N sont deux quaternions purs de même norme, non colinéaires. Alors
   $$M(MN) - (MN)N = M^2N - MN^2 = (-\|M\|^2 I_4)N - M(-\|N\|^2 I_4) = \|M\|^2(M - N)$$
   On a donc $M(MN - \|M\|^2 I_4) = (MN - \|M\|^2 I_4)N$. Dans ces conditions, si on pose $P = MN - \|M\|^2 I_4$, on a $MP = PN$, $P \in \mathbb{H}$ et $P \neq 0$ car sinon on aurait $MN = \|M\|^2 I_4 = -M^2$ ou encore $M(N + M) = 0$ donc $M + N = 0$ (M est inversible car élément non nul de $\mathbb{H}$) ce qui est contradictoire avec le fait que la famille (M, N) soit libre. Comme P est un élément non nul de $\mathbb{H}$, P est inversible et $M = PNP^{-1}$.
6. Telle qu'elle est formulée cette question est incorrecte ; en effet, sous la seule condition d'être non nulle et de vérifier $MP = PN$ une matrice $P = \alpha I_4 + Q$ avec $Q \in \mathbb{L}$ n'est pas nécessairement telle que Q soit orthogonale à M et N (contre-exemple $P = 0I_4 + Q$ avec $Q = M + N$ vérifie $MP = PN$ (si M et N sont deux éléments de même norme de $\mathbb{L}$), est élément de $\mathbb{L}$, est non nulle et, en général, $M + N$ n'est pas orthogonale à M). Par contre, pour la matrice P mise en évidence dans chacun des 3 cas envisagés, on a bien la propriété souhaitée. En effet, dans le cas où $M = N$, on a choisi $P = I_4$ soit $Q = 0$ qui est bien orthogonale à $M = N$, si $M = -N$, on a choisi $P = 0I_4 + Q$ avec Q orthogonale à M et N. Enfin, lorsque M et N sont linéairement indépendantes, la matrice $P = MN - \|M\|^2 I_4$ se décompose en $\alpha I_4 + Q$ avec $Q = \frac{1}{2}(MN - NM) \in \mathbb{L}$ (en effet, Q est nécessairement la partie antisymétrique de la matrice P à savoir $\frac{1}{2}(P - {}^tP)$ or ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM = (-N)(-M) = NM$). De plus, $Q = \frac{1}{2}(MN - NM)$ est bien orthogonale à M et N car, par exemple $-4(Q|M)I_4 = (MN - NM)M + M(MN - NM) = -NM^2 + M^2N$ qui est bien la matrice nulle car $M^2 = -\|M\|^2 I_4$.
7. Remarquons tout d'abord que $\forall P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, l'application ϕ_P de $\mathbb{H}$ dans lui-même qui à M associe $P^{-1}MP$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$. En effet, ϕ_P est bien une application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ puisque $\mathbb{H}$ est un corps, ϕ_P est linéaire par bilinéarité du produit dans $\mathbb{H}$, $\phi_P(I_4) = P^{-1}I_4P = I_4$ et $\phi_P(M)\phi_P(N) = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP) = P^{-1}MNP = \phi_P(MN)$ pour tout

couple $(M, N) \in \mathbb{H}^2$. Enfin, ϕ_P est bien bijective, de bijection réciproque égale à $\phi_{P^{-1}}$.

Remarquons également qu'un morphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$ est entièrement déterminé par les images de A et de B : en effet, si ϕ est un morphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$, on a pour tout $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, $\phi(tI_4 + xA + yB + zC) = tI_4 + x\phi(A) + y\phi(B) + z\phi(A)\phi(B)$.

Soit ϕ un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$.
Premier cas. Etudions tout d'abord le cas où $\phi(A) = A$. On recherche donc $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ telle que $P^{-1}AP = A$ et $P^{-1}BP = \phi(B)$. D'après 4., on sait que $\phi(B)$ est un quaternion pur de norme 1 et orthogonal à $\phi(A) = A$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(B) = \cos\theta B + \sin\theta C$. La question 6. nous incite à chercher P sous la forme $P = \alpha I_4 + \beta A$. Dans ces conditions, P commute avec A donc $P^{-1}AP = A$ et

$$BP - P\phi(B) = (\alpha(1 - \cos\theta) + \beta\sin\theta)B - (\beta(1 + \cos\theta) + \alpha\sin\theta)C$$

donc on cherche (α, β) solution de

$$\begin{cases} \alpha(1 - \cos\theta) + \beta\sin\theta = 0 \\ \alpha\sin\theta + \beta(1 + \cos\theta) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire solution de $\alpha\sin\frac{\theta}{2} + \beta\cos\frac{\theta}{2} = 0$.
Posons donc par exemple, $P = \cos\frac{\theta}{2}I_4 - \sin\frac{\theta}{2}A$. On a alors $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, $P^{-1}AP = A = \phi(A)$ et $P^{-1}BP = \phi(B)$ et donc d'après les deux remarques, $\forall\, M \in \mathbb{H}$, $\phi(M) = P^{-1}MP$.
Cas général. Soit ϕ un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$. Alors, d'après 4., on sait que $\phi(A)$ est un quaternion pur de même norme que A donc d'après 5., il existe $Q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ telle que $A = Q^{-1}\phi(A)Q$. Si ϕ_Q désigne l'application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ telle que $\phi_Q(M) = Q^{-1}MQ$, alors $\phi_Q \circ \phi$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$ tel que $\phi_Q \circ \phi(A) = A$ donc d'après le premier cas étudié, il existe $R \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ tel que pour tout M de $\mathbb{H}$, $\phi_Q \circ \phi(M) = R^{-1}MR$. En posant $P = RQ^{-1}$, on a $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ et pour tout M de $\mathbb{H}$, $\phi(M) = P^{-1}MP$.