ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES 2

CCP PSI 2009

Partie I.

I.1.1. On a $x_1 = \sin(\theta)$, $x_2 = 2\,x_1\,\cos(\theta) = \sin(2\theta)$, on peut donc conjecturer la propriété $(\mathcal{R}_p)$: $x_p = \sin(p\theta)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et on le prouve par récurrence "double" :

- les assertions $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$ sont vraies, *cf.* ci-dessus ;
- soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $(\mathcal{R}_p)$ et $(\mathcal{R}_{p+1})$, c'est-à-dire $x_p = \sin(p\theta)$ et $x_{p+1} = \sin\big((p+1)\theta\big)$, on a alors

$$\begin{aligned} x_{p+2} &= -x_p + 2x_{p+1}\,\cos(\theta) = -\sin(p\theta) + 2\,\sin\big((p+1)\theta\big)\,\cos(\theta) \\ &= -\sin(p\theta) + \Big[\sin\big((p+2)\theta\big) + \sin(p\theta)\Big] = \sin\big((p+2)\theta\big)\ , \end{aligned}$$

et l'assertion $(\mathcal{R}_{p+2})$ est vérifiée, ce qui achève la récurrence.

I.1.2. On a $x_{n+1} = 0 \iff \sin\big((n+1)\theta\big) = 0 \iff \theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$ $\quad(k \in \mathbf{Z})$.

I.2.1. On a $A_n(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1 & & & (0) \\ 1 & 2t & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 & 2t \end{pmatrix}$, matrice tridiagonale symétrique.

On calcule $d_1(t) = 2t$, $d_2(t) = 4t^2 - 1$, $d_3(t) = 8t^3 - 4t$, $d_4(t) = 16t^4 - 12t^2 + 1$.

I.2.2. Un développement par rapport à la première colonne, puis un développement par rapport à la première ligne dans le deuxième terme obtenu conduisent à la relation $d_n(t) = 2t\,d_{n-1}(t) + d_{n-2}(t)$ pour tout $n \geq 3$. On montre alors par une récurrence double que, pour tout n entier naturel non nul, la fonction d_n est polynomiale de degré n, et de coefficient dominant 2^n.

I.3.1. Démonstration par récurrence "double" sur n. La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$: en effet, $d_1(\cos\theta) = 2\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ et $d_2(\cos\theta) = 4\cos^2\theta - 1 = \dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$ par un petit calcul trigonométrique facile laissé à l'improbable lecteur. Si elle est vraie aux rangs n et $n+1$ avec $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} d_{n+2}(\cos\theta) &= 2\,\cos\theta \cdot d_{n+1}(\cos\theta) - d_n(\cos\theta) \\ &= \frac{2\,\cos\theta \cdot \sin(n+2)\theta - \sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin(n+3)\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

(c'est le même calcul qu'à la question **I.1.** à un décalage d'indice près). Voilà!

I.3.2. On a donc $d_n(\cos\theta) = 0 \iff \sin\big((n+1)\theta\big) = 0 \iff \theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$, avec $k \in [\![1, n]\!]$ puisque $\theta \in]0, \pi[$.

I.4.1. $A_n(0) - \lambda\,I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & & & (0) \\ 1 & -\lambda & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = A_n\Big(-\dfrac{\lambda}{2}\Big)$, donc $\chi_n(\lambda) = d_n\Big(-\dfrac{\lambda}{2}\Big)$.

I.4.2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $\lambda_k = -2\,\cos\Big(\dfrac{k\pi}{n+1}\Big) = 2\,\cos\left(\dfrac{(n+1-k)\pi}{n+1}\right)$, on a alors $\chi_n(\lambda_k) = d_n\Big(\cos\dfrac{k\pi}{n+1}\Big) = 0$ d'après les questions **I.3.2.** et **I.4.1.** ci-dessus. Les réels λ_k,

$1 \leq k \leq n$ sont donc valeurs propres de la matrice $A_n(0)$. Mais ces réels sont deux à deux distincts (car la fonction $-\cos$ est strictement croissante sur $[0, \pi]$, donc $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$), donc on a obtenu ainsi toutes les valeurs propres de la matrice $A_n(0)$ qui est d'ordre n. Ainsi, $\mathrm{Sp}\big(A_n(0)\big) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. On peut en déduire au passage que la matrice $A_n(0)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que ses sous-espaces propres sont de dimension un. Sa plus grande valeur propre est $\rho = \lambda_n = -2\cos\left(\dfrac{n\pi}{n+1}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$.

I.4.3. Posons $\theta = \dfrac{\pi}{n+1}$. Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$ est non nul et vérifie, d'après la question **I.1.**, la relation

$$\big(A_n(0) - \rho\, I_n\big)\, X = \begin{pmatrix} -2\cos\theta & 1 & & & (0) \\ 1 & -2\cos\theta & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 & -2\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x_{n+1} \end{pmatrix} = 0$$

puisque $x_{n+1} = \sin\dfrac{(n+1)\pi}{n+1} = 0$. Ce vecteur X est donc vecteur propre de la matrice $A_n(0)$ associé à la valeur propre $\rho = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$, et ses coordonnées sont strictement positives puisque la fonction sinus est strictement positive sur $]0, \pi[$.

Partie II.

II.1.1. Si φ est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$, on a $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ pour tout x, d'où évidemment $\|\!|\varphi|\!\| = 1$.

II.1.2. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\alpha_{i_0}| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |\alpha_i|$. Soit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n$; alors $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, puis $\delta(x) = \alpha_1 x_1\, e_1 + \cdots + \alpha_n x_n\, e_n$ et $\|\delta(x)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 x_i^2 \leq \alpha_{i_0}^2\, \|x\|^2$, on a donc $\|\!|\delta|\!\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|\delta(x)\|}{\|x\|} \leq |\alpha_{i_0}|$. Enfin, $\|e_{i_0}\| = 1$ et $\delta(e_{i_0}) = \alpha_{i_0}\, e_{i_0}$, donc $\|\delta(e_{i_0})\| = |\alpha_{i_0}|$, ce qui prouve que $\|\!|\delta|\!\| = \sup\limits_{\|u\| \leq 1} \|\delta(u)\| = |\alpha_{i_0}| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |\alpha_i|$.

II.1.3. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est autoadjoint, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle f est représenté par une matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, où les λ_i sont les valeurs propres de f. D'après **II.1.2.** ci-dessus, on a alors $\|\!|f|\!\| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i| = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |\lambda|$.

II.2.1. On sait (théorème du cours) que toute application bilinéaire en dimension finie est continue. L'application $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $B(u, v) = \big(l(u)|v\big)$ est donc pour cette raison continue. De plus, l'application $\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par $\Delta(u) = (u, u)$ est continue car elle est linéaire en dimension finie. Donc l'application $\Phi = B \circ \Delta$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ comme composée de fonctions continues. *Remarque :* l'application Φ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique B, et on peut dire aussi que l est l'endomorphisme autoadjoint associé à la forme bilinéaire symétrique B dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

La sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ est compacte, car c'est un fermé borné en dimension finie (S est fermé car c'est l'image réciproque de la partie fermée $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application norme $N : x \mapsto \|x\|$ qui est continue sur $\mathbb{R}^n$ car elle est 1-lipschitzienne). L'application Φ, continue sur le compact S, y atteint donc un maximum.

II.2.2. Comme $\|u\| = \|v\| = 1$ et $(u|v) = 0$, on a

$$\|w\|^2 = \frac{1}{\alpha^2}\left(\|v\|^2 + t^2\|u\|^2\right) = \frac{1+t^2}{\alpha^2}$$

et $w \in S \iff \alpha^2 = 1 + t^2$.

On a alors $\Phi(w) \leq \Phi(v)$, soit $\Phi\Big(\dfrac{v+tu}{\sqrt{1+t^2}}\Big) \leq \Phi(v)$, et ceci pour tout réel t, donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \frac{1}{1+t^2}\left(l(v+tu)|v+tu\right) \leq \left(l(v)|v\right) .$$

En développant et en tenant compte du caractère autoadjoint de l, on obtient, après simplifications :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Big(\Phi(v) - \Phi(u)\Big)\, t^2 - 2\left(l(v)|u\right) t \geq 0 . \qquad \textbf{(*)}$$

On peut conclure en considérant deux cas :

- si $\Phi(u) = \Phi(v)$, on a $\forall t \in \mathbb{R} \quad \left(l(v)|u\right) t \leq 0$, ce qui entraîne $\left(l(v)|u\right) = 0$;

- si $\Phi(u) < \Phi(v)$, le premier membre de **(*)** est un trinôme toujours positif, donc son discriminant est négatif ou nul, soit $\left(l(v)|u\right)^2 \leq 0$, donc $\left(l(v)|u\right) = 0$.

On vient de prouver que le vecteur $l(v)$ est orthogonal à tout vecteur orthogonal à v, donc $l(v) \in \Big(\big(\mathrm{Vect}(v)\big)^\perp\Big)^\perp = \mathrm{Vect}(v)$, donc v est un vecteur propre pour l'endomorphisme l.

II.2.3. On a $\|x\| = 1$ et $l(x) = \lambda x$, donc $\Phi(x) = \left(l(x)|x\right) = \lambda\|x\|^2 = \lambda$, et $\rho = \Phi(v)$ par le même calcul. Donc $\lambda \leq \rho$ puisque $\Phi(v) = \max\limits_{u\in S} \Phi(u) \geq \Phi(x)$.

II.3.1 On a $l(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\Big)e_i$, puis $\Phi(x) = \left(l(x)|x\right) = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}x_ix_j$. Donc

$$\left|\Phi(x)\right| = \Big|\sum_{i,j} a_{i,j}x_ix_j\Big| \leq \sum_{i,j} a_{i,j}|x_i|\,|x_j| = \Phi(x^+) .$$

II.3.2. Si $x \in S$, alors $x^+ \in S$, donc $\Phi(x^+) \leq \max\limits_{u\in S}\Phi(u) = \rho$, mézôssi $\Phi(x^+) \geq \left|\Phi(x)\right| = |\rho| \geq \rho$.

Des inégalités $\rho \leq |\rho| \leq \Phi(x^+) \leq \rho$, on déduit que tous les membres de cette inégalité sont égaux, donc $\rho = \Phi(x^+)$, et $\rho \geq 0$ puisque $\rho = |\rho|$.

II.4. Si $x \in S$ vérifie $l(x) = \lambda x$, alors $\Phi(x) = \lambda$, donc $|\lambda| = \left|\Phi(x)\right| \leq \Phi(x^+) \leq \max\limits_{u\in S}\Phi(u) = \rho$.

Donc $|\lambda| \leq \rho$, et $\rho = \max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(l)} \lambda = \max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(l)} |\lambda|$.

II.5. On a $x^+ \in S$ et $\Phi(x^+) \geq \left|\Phi(x)\right| = |\rho| = \rho = \max_{u\in S} \Phi(u)$, donc $\Phi(x^+) = \max_{u\in S} \Phi(u)$, ce qui entraîne $l(x^+) = \rho\, x^+$ d'après **II.2.2.**

Montrer $x^+ > 0$ revient à prouver que $x_i \neq 0$ pour tout i. Si ce n'était pas le cas, en posant $I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid x_i = 0\}$ et $J = \{i \in [\![1,n]\!] \mid x_i \neq 0\}$, on aurait une partition de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ (c'est-à-dire $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$, $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = [\![1,n]\!]$) ; la relation $l(x^+) = \rho x^+$ s'écrit $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| = \rho|x_i|$. Pour tout indice $i \in I$, on aurait donc $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| = \sum_{j\in J} a_{i,j}|x_j| = 0$ et chaque terme de la somme étant positif, on déduirait $\forall j \in J \quad a_{i,j} = 0$ puisque $|x_j| \neq 0$; on aurait donc une partition $\{I, J\}$ de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ telle que $\forall (i,j) \in I \times J \quad a_{i,j} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Cela prouve $x^+ > 0$.

II.6. Le vecteur $w = \dfrac{y}{\|y\|}$ est dans S et $l(w) = \rho w$, donc $w^+ > 0$ d'après **II.5.**, ce qui signifie que les coordonnées du vecteur w sont toutes non nulles, en particulier $w_1 \neq 0$, donc $y_1 \neq 0$.

Si le vecteur $z = x - \dfrac{x_1}{y_1} y$ est non nul, alors le vecteur $u = \dfrac{z}{\|z\|}$ appartient à S, et il vérifie $l(u) = \rho u$, donc $u^+ > 0$, donc $u_1 \neq 0$, donc $z_1 = x_1 - \dfrac{x_1}{y_1}\, y_1 \neq 0$, ce qui est absurde. On a donc $z = 0$, ce qui signifie que x et y sont colinéaires. Deux vecteurs propres de l pour la valeur propre ρ sont toujours colinéaires, donc le sous-espace propre est de dimension au plus 1. Comme $\mathrm{Ker}(l - \rho\,\mathrm{id}) \neq \{0\}$ d'après **II.2.2.**, ce sous-espace propre est donc de dimension 1.

Remarque. Cela montre au passage, avec **II.5.**, que ce sous-espace propre admet un vecteur directeur strictement positif.

II.7. De $l(x) = \lambda x$, on déduit, pour tout i, $\lambda = \dfrac{1}{x_i} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq 0$.

Si on avait $\lambda \neq \rho$, les sous-espaces propres de l pour les valeurs propres λ et ρ seraient orthogonaux (car l est autoadjoint), et si $y > 0$ est un vecteur directeur de $E_\rho(l)$, on a $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$, ce qui est absurde, les x_i et y_i étant tous strictement positifs. Donc $\lambda = \rho$.

II.8. La matrice A est symétrique réelle, à coefficients positifs ou nuls et, s'il existait une partition $\{I, J\}$ de $[\![1,n]\!]$ telle que $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in I \times J$, en choisissant un indice k appartenant à I (puisque $I \neq \emptyset$), on aurait $k+1 \in I$ puisque $a_{k,k+1} = 1 \neq 0$, puis $k+2 \in I$ et ainsi de suite jusqu'à $n \in I$, puis $1 \in I$ car $a_{n,1} = 1 \neq 0$, et ainsi de suite jusqu'à $k-1 \in I$, finalement $I = [\![1,n]\!]$, ce qui est absurde : la matrice A vérifie donc les conditions (1) et (2) de l'énoncé.

Par ailleurs, le vecteur $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $x > 0$ et $Ax = 2x$. De la question **II.7.**, on déduit que $\max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} \lambda = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda| = 2$.