Concours Communs Marocain - Session 2005

Corrigé de l'épreuve d'algèbre

Étude d'équations du type $X^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Corrigé par Mohamed TARQI

I. Préliminaires

1. 1-1 Il est clair que la fonction f_α est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout x de $]-1,+\infty[$, $(1+x)f'_\alpha(x) - \alpha f_\alpha(x) = 0$

   1-2 (a) S_α vérifié (1) si et seulement si $(1+x)S'_\alpha(x) - \alpha S_\alpha(x) = 0$ égalité qui s'écrit encore $(a_1 - \alpha a_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)a_{k+1} - (\alpha - k)a_k]x^k = 0$, donc

   $$\begin{cases} a_1 - \alpha a_0 = 0 \\ \forall k \geq 1, \ \ (k+1)a_{k+1} - (\alpha - k)a_k = 0 \end{cases}$$

   (b) Les dernières relations permettent d'écrire : $a_1 = \alpha a_0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ a_k = \dfrac{\alpha - k + 1}{k}a_{k-1}$ ou encore

   $$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}a_0.$$

   (c) D'après le règle de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ admet un rayon de convergence non nul, vaut $R = 1$.
   Sur l'intervalle de convergence, la somme de cette série est solution de l'équation différentielle (1) et prend, pour $x = 0$, la valeur 1, cette somme, par le théorème de Cauchy-Lipchitz, est $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$.
   On peut donc écrire :

   $$\forall x \in]-1,1[, \ \ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

   1-3 Posons $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$. Alors l'égalité

   $$\sqrt{1+x}\sqrt{1+x} = 1+x,$$

   entraîne, en effectuant le produit de Cauchy des deux séries :

   $$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{q}b_k b_{q-k}\right)x^q = 1+x,$$

   puis par identification, on obtient :

   $$b_0 = 1, \ \ 2b_0 b_1 = 1 \ \ \ et \ \ \ \forall q \geq 2, \ \sum_{k=0}^{q}b_k b_{q-k} = 0$$

2. 2-1 Si $\forall x \in E$, $u^{p-1}(x) = 0$, alors dans ce cas u^{p-1} serait nul, ce qui contredit la définition de p, ainsi il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

2-2 Soient $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{p-1}$ des réels tels que $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x_0) = 0$. En appliquant u^{p-1}, on obtient $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$, donc $\lambda_0 = 0$, puis par application de u^{p-2}, on obtient $\lambda_1 u^{p-1}(x_0) = 0$, donc $\lambda_1 = 0$, puis de proche en proche, on peut montrer que tous les λ_i sont nuls, donc la famille $\{x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0)\}$ est libre.

2-3 On a $p = \dim \operatorname{Vect}(x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0)) \leq \dim E = n$. Donc il est nécessaire que $u^n = u^{n-p}u^p = 0$.

2-4 Supposons le polynôme minimal est de degré inférieure ou égal à $p-1$, donc il existe des réels λ_i non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i u^i = 0$, en particulier $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i u^i(x_0) = 0$, donc la famille $\{x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0)\}$ sera liée, ce qui est impossible. Donc le polynôme minimal est degré supérieure ou égal à p, et comme $u^p = 0$, alors c'est X^p.

II. ÉTUDE D'ÉQUATIONS DU TYPE $X^2 = A$ DANS $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

A- Un exemple

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (1-X)(2-X)(3-X)$, admet trois racines distinctes, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On trouve facilement $e_1 = (-1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 1, -1)$ et $e_3 = (1, 1, 0)$.
3. D'après le cours et puisque A est digonalisable, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base la matrice de u s'écrit :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
de plus on a : $D = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. 4-1 La relation matricielle $B^2 = A$ s'écrit vectoriellement sous la forme $v^2 = u$ et comme u est un polynôme en v, alors $uv = vu$.

   4-2 On trouve, pour chaque i, $uv(e_i) = vu(e_i) = \lambda_i v(e_i)$ et puisque les sous-espaces propres de u sont des droites, alors $v(e_i)$ et e_i sont colinéaires, soit le réel α_i tel que $v(e_i) = \alpha_i e_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

   4-3 D'après ce qui précède la matrice V de v s'écrit dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme $V = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et on a évidement la relation $V = P^{-1}BP$ et $V^2 = D$, donc $\forall i = 1, 2, 3$ $\alpha_i = \varepsilon_i \sqrt{\lambda_i}$, avec $\varepsilon_i^2 = 1$.
5. Soit X une solution, alors d'après la question précédente, la matrice de X dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit $Y = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, donc la relation $X^2 = A$ entraîne nécessairement $Y^2 = D$, d'où les relations $\forall i = 1, 2, 3$, $\alpha_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$. Ainsi
$$Y = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix}$$
avec $\varepsilon_i^2 = 1$ pour $i = 1, 2, 3$. Finalement l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 = A$ est
$$\left\{PYP^{-1} / \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1\right\},$$
elle est de cardinal 8.

B- Quelques résultats généraux

1. 1-1 On a $v^{2p} = u^p = 0$ et $v^{2(p-1)} = u^{p-1} \neq 0$, donc v est un endomorphisme nilpotent d'indice soit $2p-1$ ou $2p$ et d'après la question 2. [2-3] de la partie preliminaries, on obtient soit $p \leq \frac{n}{2}$ ou $p \leq \frac{n+1}{2}$ et dans les deux cas $p \leq \frac{n+1}{2}$.

   1-2 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $M^2 = 0$, donc M d'indice $p = 2$, donc l'équation $X^2 = M$ n'a pas de solutions, sinon on aura $2 \leq \frac{3}{2}$, ce qui est impossible.

2. On a, en tenant compte des relations qui définissent les b_i :

$$\begin{aligned} w^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k\right) \\ &= \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} b_i b_j u^{i+j} \\ &= b_0^2 I_E + 2b_0 b_1 u + (b_0 b_2 + b_1 b_1 + b_2 b_0)u^2 + ... + (b_0 b_k + b_1 b_{k-1} + ... + b_k b_0)u^k + ... \\ &= I_E + u. \end{aligned}$$

3. 3-1 On a déjà montrer que la famille $\{x_1, u(x_1), ..., u^{n-1}(x_1)\}$ est libre et puisque elle est de cardinal n, la famille est une base de E. $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ sont les coordonnées de $g(x_1)$ dans cette base.

   3-2 Comme u est un polynôme en g, alors $gu = ug$.
   Pour montrer que $g = \alpha_0 I_E + \alpha_1 u + ... + \alpha_{n-1} u^{n-1}$, il suffit que les deux endomorphismes g et $\alpha_0 I_E + \alpha_1 u + ... + \alpha_{n-1} u^{n-1}$ coincident dans la base $\{x_1, u(x_1), ..., u^{n-1}(x_1)\}$.
   On a déjà $g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + ... + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1)$ et puisque $ug = gu$, alors

$$g(u(x_1)) = \alpha_0 u(x_1) + \alpha_1 u(u(x_1)) + ... + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u(x_1))$$

   puis de proche en proche on peut montrer que $\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, on a :

$$g(u^i(x_1)) = \alpha_0 u^i(x_1) + \alpha_1 u(u^i(x_1)) + ... + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u^i(x_1)),$$

   d'où le résultat.

   3-3 Le polynôme minimal étant X^n, donc toute relation de liaison entre les vecteurs $I_E, u, u^2, ..., u^{n-1}$ entraîne l'existence d'un polynôme annulateur de u de degré inférieure strictement à n, ce qui est faux. Ainsi la famille $\{I_E, u, u^2, ..., u^{n-1}\}$ est libre.
   En tenant compte de la question 2. de cette partie, on trouve facilement les relations :

$$\alpha_0^2 = 1, \quad 2\alpha_0\alpha_1 = 1 \quad \text{et pour} \quad 2 \leq q \leq n-1, \ \sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$$

   3-4 Si $\alpha_0 = 1$, alors on vérifie sans difficulté que $\forall k \in 0, 1, ..., n-1$, $\alpha_k = b_k$, et dans ce cas $g = w$. Si $\alpha_0 = -1$, alors $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $\alpha_k = -b_k$, et donc $g = -w$.

4. **Application :** L'équation matricielle s'écrit sous la forme $X^2 = I_3 + U$ avec $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On a $U^3 = 0$ et $U^2 \neq 0$. Donc la solution générale de l'équation est de la forme $X = \pm W$

avec $W = I + b_1U + b_2U^2$, et comme $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)$, alors $W = I + \frac{1}{2}U + \frac{3}{8}U^2$.

Finalement $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 5-1 Soit $x \in E_\lambda$, alors $(d - \lambda I_E)(\nu(x)) = d\nu(x) - \lambda\nu(x) = \nu(d - \lambda I_E)(x) = 0$, donc $\nu(E_\lambda) \subset E_\lambda$.
Soit p l'indice de nilpotence de ν, alors $\forall x \in E_\lambda$, $\nu_\mu^p(x) = \nu^p(x) = 0$, donc ν est nilpotent.

   5-2 Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(d)$, ν_λ étant nilpotent, donc il existe un vecteur $x \in E_\lambda$ non nul tel que $\nu_\lambda^{q-1}(x) = \nu^{q-1}(x) \neq 0$ avec q l'indice de nilpotence de ν_λ. Donc $u(\nu^{q-1}(x)) = d\nu^{q-1}(x) + \nu^q(x) = d\nu^{q-1}(x) = \lambda\nu^{q-1}(x)$. Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

   5-3 Puisque d est diagonalisable, alors d'après le théorème de cours :
$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}$$
et si $x = x_1 + x_2 + ... + x_r \in E$, alors $d(x) = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_r x_r$.

   5-4 Posons $\delta(x) = \sqrt{\lambda_1}x_2 + \sqrt{\lambda_2}x_2 + ... + \sqrt{\lambda_r}x_r$ si $x = x_1 + x_2 + ... + x_r \in E$, alors on vérifie facilement que $\delta^2 = d$. De plus pour tout x_i $(1 \leq i \leq r)$, $\nu\delta(x_i) = \sqrt{\lambda_i}\nu(x_i)$ et puisque $\forall i$, $\nu(x_i) \in E_\lambda$, alors $\delta\nu(x_i) = \sqrt{\lambda_i}\nu(x_i)$. Donc $\nu\delta = \delta\nu$.

   5-5 On a $\det\delta^2 = \det d \neq 0$, donc δ est inversible. De plus $(\nu\delta^{-2})^p = \nu^p\delta^{-2p} = 0$, donc $\nu\delta^{-2}$ est nilpotent.

   5-6 Considérons l'endomorphisme $w = \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k(\nu\delta^{-2})^k$ (les b_k sont définis dans la partie préliminaires), on a $w^2 = I_E + \nu\delta^{-2}$ toujours d'après la partie préliminaires. De plus $w^2 = I_E + (u-d)\delta^{-2} = I_E + u\delta^{-2} - I_E = u\delta^{-2}$, donc $w^2\delta^2 = u$, soit $v = w\delta$.

III. Racine carrée d'une matrice symétrique positive

1. Il est clair que ${}^t({}^tMM) = {}^tMM$ et $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX \geq 0$. Si M est symétrique, alors ${}^tMM = M^2$ serait symétrique et positive.

2. 2-1 Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A et $(.|.)$ le produit scalaire canonique. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et x un vecteur propre associé à λ, puisque $x \neq 0$, $(x|x) > 0$ d'où :
$$(x|u(x)) = \lambda(x|x)$$
ou encore
$$\lambda = \frac{(x|u(x))}{(x|x)} \geq 0.$$
Inversement si les valeurs propres de u sont positives, alors, dans une base de diagonalisation de u :
$$(x|u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0.$$

   2-2 On a un résultat analogue pour les endomorphismes symétriques définies positives : Un endomorphisme symétrique u est défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

3. 3-1 On sait que la matrice A est diagonalisable, soit P une matrice orthogonale telle que :
$$A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n){}^tP$$

avec les λ_i sont les valeurs propres positives de A.
La matrice $B = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n})^t P$ est symétrique, il est positive puisque ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_i}$ sont positives et vérifie $B^2 = A$.
Si $A \in S_n^{++}$, alors $B \in S_n^{++}$.

3-2 (a) Puisque f est un polynôme en g, alors tout sous-espace propre $E_\lambda(f)$ de f est stable par g.

(b) Si μ est une valeur propre de g_λ elle est positive et vérifie $\mu^2 = \lambda$ donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. g_λ est diagonalisable puisqu'il est auto-adjoint et ne possède que la valeur propre $\sqrt{\lambda}$, c'est donc $\sqrt{\lambda} Id_{E_\lambda(f)}$.

(c) Puisque f est diagonalisable dans une base orthonormale , alors $E = \oplus_{\lambda\in Sp(f)} E_\lambda(f)$.
Ainsi $g = \sum\limits_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} E_{\lambda_i}(f)$ où $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\} = \mathrm{Sp}(f)$.
Soit h un endomorphisme symétrique positive tel que $h^2 = f$. Soit λ une valeur propre de f. Comme h commute avec $f = h^2$ le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est stable par h. L'endomorphisme h_λ induit par h sur $E_\lambda(f)$ est symétrique, positif et vérifie

$$h_\lambda^2 = \lambda Id_{E_\lambda(f)}$$

donc

$$h_\lambda = \sqrt{\lambda} Id_{E_\lambda(f)}$$

Les restrictions de h et de g aux sous-espaces propres de f coïncident donc $h = g$.

3-3 On sait que pour tous réels différents $x_1 < x_2 < ... < x_r$ et pour tous réels $y_0, y_1, ..., y_r$, il existe un unique polynôme (polynôme d'interpolation de Lagrange) L tel que $L(x_i) = y_i$, un tel polynôme est donné par :

$$L = \sum_{i=0}^{r} \left(y_i \prod_{j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Soit maintenant $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0)$ et $V = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_r}, 0, ..., 0)$ où les λ_i sont les différentes valeurs propres strictement positifs de A. On sait qu'il existe un polynôme L tel que pour $(i = 1, 2, ..., r)$ on $L(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. Alors

$$L(D) = \begin{pmatrix} L(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & L(\lambda_r) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = V$$

Soit P une matrice orthogonale tel que $A = PD^tP$. Nous avons donc

$$L(A) = L(PD^tP) = PL(D)^tP = PV^tP = B,$$

le polynôme L convient.

4. **Applications :** A et C deux matrices symétriques éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4-1 On a ${}^t(\sqrt{A}C\sqrt{A}) =^t \sqrt{A}^t C^t\sqrt{A} = \sqrt{A}C\sqrt{A}$, donc $\sqrt{A}C\sqrt{A}$ est symétrique. D'autre part $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX\sqrt{A}C\sqrt{A}X =^t (\sqrt{A}X)C(\sqrt{A}X) \geq 0$, donc ${}^t\sqrt{A}C\sqrt{A}$ est positive.
On a aussi $\mathrm{tr}(AC) = \mathrm{tr}(\sqrt{A}\sqrt{A}C) = \mathrm{tr}(\sqrt{A}C\sqrt{A}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \geq 0$ où les μ_i sont les valeurs propres positives de $\sqrt{A}C\sqrt{A}$.

4-2 AC est semblable à une matrice symétrique, donc diagonalisable, en effet on a :

$$\left(\sqrt{A}\right)^{-1} AC\left(\sqrt{A}\right) = \sqrt{A}C\sqrt{A}.$$

Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non diagonalisable.

5. 5-1 On a bien ${}^t(AB) ={}^t B{}^tA = BA = AB$, donc AB est symétrique. D'après la question [3-3] de cette partie $\sqrt{A}$ (resp. $\sqrt{B}$) s'exprime comme polynôme en A (resp. B) et comme A et B commutent, il est de même de $\sqrt{A}$ et $\sqrt{B}$.

5-2 Il est immédiat que $(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = AB$. D'autre part pour tout élément $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXABX ={}^t X(\sqrt{A}\sqrt{B})^2X ={}^t (\sqrt{A}\sqrt{B}X)(\sqrt{A}\sqrt{B}X) \geq 0$, donc $AB \in S_n^+$.

5-3 Il suffit de remplacer le couple (A, B) par le couple $(\sqrt{A}, \sqrt{B})$ pour conclure. D'autre part, on sait que $(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = AB$, donc par unicité de la racine carrée d'une matrice, $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$.

6. 6-1 On sait que S_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de plus $S_n^+ = S_n \cap \det^{-1}([0, +\infty[)$ avec

$$\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array}$$

donc S_n^+ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque $\det$ est continue.

6-2 On sait que toute matrice symétrique positive admet une seule racine, autrement dit l'application Φ est une bijection. Φ^{-1} n'est autre que l'application $X \longmapsto X^2$ définie de S_n^+ dans lui même , donc elle est continue puisque elle est polynomiale.

6-3 L'application tr étant linéaire, donc continue ; et comme $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A, alors la suite $(\mathrm{tr}(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{tr}(A)$, en particulier elle est bornée.
Puisque $(M, N) \longmapsto \mathrm{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire, alors l'application

$$\rho : M \longmapsto \sqrt{\mathrm{tr}({}^tMM)}$$

est une norme. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \rho\left(\sqrt{A_k}\right)^2 = \mathrm{tr}\left({}^t\sqrt{A_k}\sqrt{Ak}\right) = \mathrm{tr}(A_k),$$

donc la suite $\left(\sqrt{A_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

6-4 Soit B une valeur d'adhérence de $(\sqrt{A_k})_{k\in\mathbb{N}}$, alors il existe une sous-suite $\left(\sqrt{A_{\varphi(k)}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers B, alors $(A_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B^2, mais la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant convergente de limite A, donc $B = A^2$, d'où $B = \sqrt{A}$ et par conséquent la suite $\left(\sqrt{A_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une seule valeur d'adhérence $\sqrt{A}$, donc convergente de limite $\sqrt{A}$.
Conclusion : d'après la caractérisation séquentielle de la continuité l'application Φ est continue de S_n^+ dans lui même .

7. 7-1 Il est clair que cette application est linéaire. Soit maintenant $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} AH + HA = 0 &\iff {}^tHAH = -{}^tHHA \\ &\iff {}^tHAH = -(\sqrt{A})^{-1}\sqrt{A}({}^tHH)\sqrt{A}\sqrt{A} \end{aligned}$$

Donc les matrices ${}^tHAH$ et $-\sqrt{A}({}^tHH)\sqrt{A}$ sont semblables, et comme ${}^tHAH \in S_n^+$ et $\sqrt{A}({}^tHH)\sqrt{A} \in S_n^+$, alors ${}^tHAH = \sqrt{A}({}^tHH)\sqrt{A}\sqrt{A} = 0$ ou encore ${}^tHH = 0$, soit $H = 0$, donc l'application est bijective.

7-2 Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $(X+H)^2 - X^2 - (XH+HX) = H^2 = o(\|H\|)$, où $\|.\|$ une norme quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cette égalité montre que Ψ est différentiable et $d\Psi_X(H) = XH + HX$.

7-3 L'application Ψ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de S_n^{++} dans lui même , puisque elle est polynomiale, et $\forall A \in S_n^{++}$, $d\Psi_A$ est inversible, d'après la question [7-1], donc d'après le théorème de cours, Ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de S_n^{++} dans lui même .

●●●●●●●●●●●●●

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr