

# ENSI-MP

## Mathématiques 1

François Saint Pierre

### I. convergence uniforme dans $C([0, 1], \mathbf{R})$

1. Pour tout  $x$  de  $[0, 1]$   $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de Cauchy donc convergente car  $\mathbf{R}$  est complet.  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  a donc une limite simple.

2. Soit  $\varepsilon > 0$  pour  $n \geq N(\varepsilon)$  et  $p \geq N(\varepsilon)$  on a  $|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ . par continuité de  $\| \cdot \|$  on obtient par passage à la limite pour  $p$  :  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

Donc  $|f(x)| \leq \varepsilon + f_n(x) \leq \varepsilon + N_\infty(f_n)$ .  $N_\infty(f_n)$  existe car  $f_n$  est continue sur le compact  $[0, 1]$ .

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ justifie } N_\infty(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3. Une limite uniforme d'applications continues est continue donc  $f \in C([0, 1], \mathbf{R})$ .

Toute suite de Cauchy dans  $(C([0, 1], \mathbf{R}), N_\infty)$  est convergente donc c'est un espace de Banach.

4.  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $u$

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 & x \in [0, 1[ \\ u(1) &= e \end{aligned}$$

$u$  n'est pas continue donc  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ne peut être de Cauchy (cf 3).

5.  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge simplement vers  $\int_0^x 1 dt$ . (la valeur en 1 ne modifie pas l'intégrale).

$N_\infty(\int_0^x (e^{t^n} - 1) dt)$  tend vers 0 avec  $n$  donc on a la convergence uniforme.

(On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que l'on a une suite de Cauchy en utilisant la convergence simple vers  $u$ .)

### II. Théorème du point fixe de Banach.

1.  $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\|$ . Donc  $(1 - \alpha) \|x - y\| \leq 0$  avec  $1 - \alpha > 0$ . donc  $\|x - y\| = 0$  et  $x = y$ .

2.1 Dans tous les livres....

2.2  $\alpha \in [0, 1[$  on obtient donc une série géométrique convergente:

$\|a_{n+p} - a_n\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|a_1 - a_0\|$  qui prouve que  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est de Cauchy donc convergente vers  $l$  dans  $E$  (Banach) et  $l$  est dans  $\overline{A}$ .

De plus  $A$  est fermé  $\overline{A} = A$  donc la limite est dans  $A$ .

2.3  $T$  continue donc,  $T(a_n) \rightarrow T(l)$ ,  $T(a_n) = a_{n+1}$   $(a_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  est une sous suite de  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  donc converge aussi vers  $l$ . On a donc en passant à la limite:  $T(l) = l$ . Cette limite est unique d'après 2.1.

3.1  $U = I + T$  est continue comme somme de fonctions continues ( $T$  est lipchitzienne).

Soit  $y \in E$   $U(x) = y$  ssi  $x = y - T(x)$ . Or  $T_y$  définie par  $T_y(x) = y - T(x)$  est contractante car  $\|T_y(x) - T_y(z)\| = \|T(z) - T(x)\| \leq \|x - z\|$  donc d'après II;2  $T_y$  possède un point fixe unique donc  $U$  est bijective. (remarque directement l'injectivité est triviale mais pas la surjectivité.....).

3.2 On pose  $(U^{-1}(x), U^{-1}(y)) = (a, b)$ ,  $a + T(a) = x$   $b + T(b) = y$ .  
 $x - y = a - b - (T(b) - T(a))$  donc  $\|x - y\| = \|a - b - (T(b) - T(a))\| \geq$   
 $\|a - b\| - \|T(a) - T(b)\|$   
Or  $\|T(a) - T(b)\| \leq \alpha \|a - b\|$  comme  $\alpha \in [0, 1[$   
 $\|x - y\| \geq \|a - b\| - \|T(a) - T(b)\| \geq (1 - \alpha) \|a - b\|$   
Donc  $\|U^{-1}(x) - U^{-1}(y)\| \leq (1 - \alpha)^{-1} \|x - y\|$

4.1  $\|V(x - y)\| = \|V(x) - V(y)\| \leq \|V\| \cdot \|x - y\|$  Par linéarité de  $V$  et par propriété des normes subordonnées. Donc comme  $\|V\| \in [0, 1[$ ,  $V$  est contractante.

4.2  $y = (I + V_n)(x_n) = (I + V)(x)$  donc  $x_n - x = V(x) - V_n(x_n) = V(x) - V_n(x) + V_n(x - x_n)$ .

On a donc  $(I + V_n)(x_n - x) = (V - V_n)(x)$  et  $(x_n - x) = (I + V_n)^{-1}(V - V_n)(x)$ .  
 $\|x_n - x\| = \|(I + V_n)^{-1}(V - V_n)(x)\| \leq (I - \|V_n\|)^{-1} \|V - V_n\| \|x\|$ . (II.3.2 II.4.1)

Comme  $\|V - V_n\| \rightarrow 0$  et  $(I - \|V_n\|)^{-1}$  est borné ( $(I - \|V_n\|)^{-1} \rightarrow (I - \|V\|)^{-1}$  et  $\|V_n\| < 1$ ).

Bilan  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  et  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ .

### III. Etude d'une transformation de l'ensemble $C([0, 1], \mathbf{R})$ .

1. découle directement du théorème des accroissements finis.

2.1  $y \rightarrow (x, y, u(y))$  est continue car ses composantes le sont et  $\varphi$  est continue donc l'application composée est continue.

2.2  $y \rightarrow \varphi(x, y, u(y))$  est continue sur  $[0, 1]$  ce qui permet de définir  $T_\varphi$   
 $(x, y) \rightarrow \varphi(x, y, u(y))$  est aussi continue sur  $[0, 1]^2$  (même démarche qu'au 2.1) on peut donc utiliser le théorème de continuité sous le signe  $\int$ .

2.3 Pour  $(u_1, u_2) \in (C([0, 1], \mathbf{R}))^2$  et pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned}
|(T_\varphi(u_1))(x) - (T_\varphi(u_2))(x)| &= \left| \int_0^1 (\varphi(x, y, u_1(y)) - \varphi(x, y, u_2(y))) dy \right| \\
|T_\varphi(u_1) - (T_\varphi(u_2))(x)| &\leq \int_0^1 |\varphi(x, y, u_1(y)) - \varphi(x, y, u_2(y))| dy \leq \int_0^1 r |u_1(y) - u_2(y)| dy \\
\text{Donc pour tout } x & |(T_\varphi(u_1) - (T_\varphi(u_2)))(x)| \leq \int_0^1 r N_\infty(u_1 - u_2) dy = r N_\infty(u_1 - u_2) \\
\text{D'où pour tout } (u_1, u_2) &\in (C([0, 1], \mathbf{R}))^2 : N_\infty(T_\varphi(u_1) - T_\varphi(u_2)) \leq r N_\infty(u_1 - u_2)
\end{aligned}$$

2.4 D'après 2.3 pour  $\lambda \in \mathbf{R}$   $N_\infty(\lambda T_\varphi(u_1) - \lambda T_\varphi(u_2)) = |\lambda| N_\infty(T_\varphi(u_1) - T_\varphi(u_2)) \leq |\lambda| N_\infty(u_1 - u_2)$

Pour  $\lambda \in ]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}[$  on a  $|\lambda| r < 1$  et  $\lambda T_\varphi$  est une contraction du Banach  $(C([0, 1], \mathbf{R}), N_\infty)$ . donc d'après II.3  $S_{(\varphi, \lambda)}$  est un homéomorphisme de  $(C([0, 1], \mathbf{R}), N_\infty)$  dans lui même.

3.1  $(x, y, z) \rightarrow \mu(x, y)z$  est continue. Sur le compact  $[0, 1]^2$   $\mu$  est continue donc on peut poser  $r = N_\infty(\mu)$ . On a  $|\varphi(x, y, z) - \varphi(x, y, z')| = |\mu(x, y)| |z - z'| \leq r |z - z'|$   $\mu$  est donc de type U.

La linéarité de  $\int$  justifie celle de  $T_\varphi$  donc d'après 2.4 pour  $\lambda \in ]-\frac{1}{N_\infty(\mu)}, \frac{1}{N_\infty(\mu)}[$  on a  $S_{(\varphi, \lambda)}$  est un isomorphisme de  $(C([0, 1], \mathbf{R}), N_\infty)$  dans lui même.

3.2 Soit  $u \in C([0, 1], \mathbf{R})$  telle que  $N_\infty(u) \leq 1$ . Pour  $x \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned}
|(T_{\varphi_n}(u) - (T_\varphi(u)))(x)| &= \left| \int_0^1 (\mu_n(x, y) - \mu(x, y)) u(y) dy \right| \leq \left| \int_0^1 |(\mu_n - \mu)(x, y)| |u(y)| dy \right| \\
|(T_{\varphi_n}(u) - (T_\varphi(u)))(x)| &\leq \int_0^1 N_\infty(\mu_n - \mu) N_\infty(u) dy \leq N_\infty(\mu_n - \mu) N_\infty(u) \\
\text{Avec } N_\infty(u) \leq 1 &\text{ on obtient } N_\infty(T_{\varphi_n}(u) - T_\varphi(u)) \leq N_\infty(\mu_n - \mu) \text{ donc on}
\end{aligned}$$

a:

$$\|T_{\varphi_n} - T_\varphi\|_\infty \leq N_\infty(\mu_n - \mu) \text{ et } \|T_{\varphi_n} - T_\varphi\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

#### IV Etude d'une application

1. On prend  $\mu(x, y) = \sin(x, y)$   $\varphi(x, y, z) = \mu(x, y).z$   $r = N_\infty(\mu) = \sin 1$ .

Or  $-1 \in ]-\frac{1}{\sin 1}, \frac{1}{\sin 1}[$  donc on peut appliquer l'étude précédente  $S_{(\varphi, -1)}$  est un isomorphisme. Donc il existe un unique  $w \in C([0, 1], \mathbf{R})$  tel que pour tout  $x$  de  $[0, 1]$   $x = w(x) - \int_0^1 \sin(x, y)w(y)dy$

2.1  $w_1(x) = x(1 + \int_0^1 yw_1(y)dy)$  Donc si des solutions existent elles sont de la forme  $w_1(x) = a.x$

avec  $a = 1 + \int_0^1 yw_1(y)dy$  d'où  $a = 1 + \int_0^1 ay^2 dy$  qui donne nécessairement  $a = \frac{3}{2}$ . On vérifie que  $w_1(x) = 1,5.x$  est bien solution. D'où l'existence et l'unicité.

2.2 On pose pour  $x \in [0, 1]$   $e_i(x) = x^i$ .  $\{e_1, e_3 \dots e_{2i+1} \dots e_{2n-1}\}$  est une famille libre de  $C([0, 1], \mathbf{R})$ .  $w_n$  est une solution de  $(E_n)$  ssi :

$$w_n(x) = e_1(x) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} \int_0^1 y^{2i-1} w_n(y) dy \right] e_{2i-1}(x)$$

En raison de la liberté de la famille on a en posant

$$w_n = \sum_{i=1}^n a_{2i-1,n} e_{2i-1}$$

l'équivalence avec le système linéaire:

$$\begin{aligned} a_{1,n} &= 1 + \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_{2j-1,n} y^{2j} . dy \\ a_{2i-1,n} &= \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_{2j-1,n} y^{2i+2j-2} . dy \\ a_{2n-1,n} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_{2j-1,n} y^{2n+2j-2} . dy \end{aligned}$$

qui donne le système:

$$\begin{aligned} a_{1,n} &= 1 + \sum_{j=1}^n \frac{a_{2j-1,n}}{2j+1} y^{2j} . \\ (-1)^{i+1} (2i-1)! a_{2i-1,n} &= \sum_{j=1}^n \frac{a_{2j-1,n}}{2i+2j-1} \\ (-1)^{n+1} (2n-1)! a_{2n-1,n} &= \sum_{j=1}^n \frac{a_{2j-1,n}}{2n+2j-1} \end{aligned}$$

2.3 On pose  $\varphi_n(x, y, z) = v_n(x, y) . z$   $r_n = N_\infty(v_n)$ .

On a la convergence uniforme de la série entière de terme général  $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} t^{2n-1}$  nrs  $t \rightarrow \sin t$  sur  $[0, 1]$ . Pour  $t$  fixé la série numérique associée est alternée et la valeur absolue de son terme général tend vers zéro en décroissant. La valeur absolue du reste d'ordre  $p$  est donc inférieure à  $\frac{1}{2p+1}$  ( $t^{2p-1} \leq 1$ ). . . Pour  $p \geq 2$  on a  $N_\infty(v_p - v) \leq \frac{1}{5!}$  donc ce qui garantie que  $N_\infty(v_p) \in [\sin 1 - \frac{1}{5!}, \sin 1 + \frac{1}{5!}] \subset ]0, 1[$  et que l'on peut conclure avec II.3 car alors pour  $n \geq 2$   $-1 \in [-\frac{1}{N_\infty(v_n)}, \frac{1}{N_\infty(v_n)}]$  et  $(E_n)$  admet une solution unique.

2.4 Dans 2.3 on a vu que  $N_\infty(v_n - v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  avec III.3 on a  $\|T_{\varphi_n} - T_\varphi\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . On a donc le résultat avec II.4.2.

Fin