Concours Communs Polytechniques - Session 2008

Corrigé de l'épreuve d'analyse

Autour de la fonction Zeta alternée de Riemann.

Corrigé par Mohamed TARQI

RAPPEL : Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à terme réels est dite alternée si $(-1)^n u_n$ a un signe constant. Quitte à multiplier le terme général par -1, on pourra supposer $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n |u_n|$.
Théorème : (Séries alternées) Toute série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0 est convergente.
Remarque : Sous les hypothèses du théorème précédent deux sommes partielles consécutives S_n et S_{n+1} encadrent la somme de la série et

$$|R_n| = |S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| \leq |u_{n+1}|$$

avec $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

I. GÉNÉRALITÉS.

1. Soit x un réel fixé, posons $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
   • si $x < 0$, $|f_n(x)| = e^{-x\ln n}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.
   • si $x = 0$, $|f_n(x)| = 1$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.
   Dans ces deux cas, les séries $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ et $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ sont toutes deux divergentes puisque leur terme général ne tend pas vers 0.
   • si $x > 0$, $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0. Donc $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}|f_n(x)|$ est une série alternée, dont le terme général tend vers 0, il est donc convergente. Donc F est définie sur $]0, +\infty[$
   Remarque : La série $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)| = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^x}$ est une série de Riemann, donc elle est convergente si et seulement si $x > 1$. Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $]0, +\infty[$, et absolument convergente sur $]1, +\infty[$.

2. Puisque $t \neq -1$, alors $g_n(t) = \dfrac{1 - (-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$, donc la série de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction g définie par : $\forall t \in [0, 1[,\ \ g(t) = \dfrac{1}{1+t}$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions intégrables sur $[0, 1[$ et qui converge simplement vers g, d'autre part, $\forall t \in [0, 1[$, $|g_n(t)| \leq \varphi(t) = \dfrac{2}{1+t}$ et φ est intégrable sur $[0, 1[$, puisqu'elle est continue sur $[0, 1[$ et prolongeable par continuité en 0, donc d'après le théorème de convergence dominée, on peut écrire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t},$$

   relation qui s'écrit encore sous la forme

$$F(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2.$$

3. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in]x_1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la fonction $x \longmapsto |f_n(x)| = \dfrac{1}{n^x}$ est décroissante sur $[x_1, x_2]$, donc $\sup_{x\in[x_1,x_2]} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n^{x_1}}$.
   Par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[x_1, x_2]$ si et seulement si $\sum \dfrac{1}{n^{x_1}}$

converge, c'est-à-dire si et seulement si $x_1 > 1$.
Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=1.$$

4. *Dérivabilité de F*
   (a) Notons u_x cette fonction, u_x est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

   $$\forall t>0,\ u_x'(t)=\frac{1-x\ln(t)}{t^{x+1}}$$

   On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$e^{\frac{1}{x}}$	$+\infty$
u_x'	$+$	0	$-$
u_x	$-\infty$ $\nearrow$		$\searrow$ 0

   Donc la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante à partir de $n_0(x)=E(e^{\frac{1}{x}})+1$. ($E(x)$ désigne la partie entière de x).

   (b) On a $f_n'(x)=(-1)^n u_x(n)$ qui est le terme général d'une suite alternée de limite nulle pour $x>0$ et décroissante à partir du rang $E(e^{\frac{1}{x}})+1$.
   Soit $a>0$ et $n_0=E(e^{\frac{1}{a}})+1$. Pour tout $x\geq a$, $(f_n'(x))$ vérifie les hypothèses de le critère spéciale à partir du rang n_0. On a donc

   $$\forall n\geq n_0,\ \forall x\geq a,\ \left|\sum_{k\geq n}f_k'(x)\right|\leq |f_n'(x)|\leq\frac{\ln(n)}{n^a}$$

   Le majorant étant de limite nulle et indépendant de x, on a montré que $\sum_{n\geq 1}f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
   Donc d'après le théorème de régularité des sommes de séries, $F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ (f_n est de classe $\mathcal{C}^1$), et

   $$\forall x>0,\ \ F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n^x}.$$

5. *Lien avec ζ*
   Dans $F(x)$, on sépare les termes d'indice pair et impair. Toutes les séries écrites étant convergentes (on passe par des sommes finies et on fait tendre la borne vers l'infini), on a

   $$\forall x>1,\ \ F(x)=-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^x}+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^x}$$

   On ajoute à la seconde somme les termes de la première pour obtenir

   $$\forall x>1,\ \ F(x)=-2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^x}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}=(1-2^{1-x})\zeta(x)$$

   Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{1-2^{1-x}}=1.$

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même .

6. *Étude de la convergence*

   (a) Si $x>1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est absolument convergente, donc d'après le théorème de cours, la série produit de Cauchy par elle-même est une série absolument convergente sur $]1,+\infty[$, de somme $[F(x)]^2$.

(b) On a $c_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k)^x} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x}$. Pour $x > 0$, le maximum de $k \to [k(n-k)]^x$ est atteint en $\frac{n}{2}$ et vaut $\left(\frac{n}{2}\right)^{2x}$

$$|c_n(x)| \geq (n-1)\frac{1}{[(\frac{n}{2})^2]^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}.$$

Si $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, alors la suite $\left(\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}\right)_{n\geq 2}$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ diverge.

7. *Cas où $x = 1$.*

(a) Il est clair que :

$$\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X}\right),$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} \\ &= (-1)^n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}) \\ &= (-1)^n \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \right) \\ &= 2(-1)^n \frac{1}{n} \sum \frac{1}{k} = 2(-1)^n \frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

(b) On a pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n}\left(H_n - \frac{1}{n}\right) - \frac{H_n}{n+1} = H_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n^2} \\ &\geq H_1 \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n-2}{2n^2(n+1)} \geq 0, \end{aligned}$$

donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante.

(c) Puisque $H_n \sim \ln n$, alors la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 2} c_n(1) = \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{H_{n-1}}{n}$ converge.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de Zeta au voisinage de 1.

8. *Développement asymtotique en 1*

(a) Puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$, alors :

$$F(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + o(x-1) = \ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1).$$

D'autre part, on a

$$1 - 2^h = 1 - e^{h\ln 2} = -h\ln 2 - \frac{h^2(\ln 2)^2}{2} + o(h^2)$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$1 - 2^{1-x} = (x-1)\ln 2 - \frac{(x-1)^2(\ln 2)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

(b) D'après ce précède, on a :

$$(x-1)\zeta(x) = \frac{(x-1)F(x)}{1-2^{1-x}} = \frac{(x-1)\ln 2 + (x-1)^2 F'(1) + o((x-1)^2)}{(x-1)\ln 2 - \dfrac{(x-1)^2(\ln 2)^2}{2} + o((x-1)^2)}$$

Donc $\lim_{x\to 1}(x-1)\zeta(x) = 1$ et par suite $a = 1$. D'autre part, on a :

$$\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = (x-1)\zeta(x) - 1\, x - 1 = \frac{\left[F'(1) + \frac{(\ln 2)^2}{2}\right](x-1)^2 + o((x-1)^2)}{(x-1)^2\ln 2 - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)}$$

Donc $\lim_{x\to 1}\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{F'(1)}{\ln 2} + \dfrac{\ln 2}{2}$ et par suite $b = \dfrac{F'(1)}{\ln 2} + \dfrac{\ln 2}{2}$. Ainsi

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1) = \frac{1}{x-1} + \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} + o(1).$$

9. *Développement asymtotique en 1 (bis)*

(a) Si $x \in [1,2]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ décroît sur $[n, n+1]$ et on a donc

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall x \in [1,2],\ \forall n \geq 1,\ 0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(b) Notons $w_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$. On a

$$w_n'(x) = -\frac{\ln(n)}{n^x} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} = u_x(n+1) - u_x(n)$$

Soit $x \geq 1$. u_x décroît sur $[e^{\frac{1}{x}}, +\infty[$ et donc sur $[e, +\infty[$ (puisque $e^{\frac{1}{x}} \leq e$). On en déduit que w_n' est négative sur $[1, +\infty[$ pour $n \geq 3$ et donc

$$\forall n \geq 3,\ \forall x \geq 1,\ 0 \leq w_n(x) \leq w_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$, et il est de même de la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$.

(c) Par relation de Chasles, on a

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x}$$

L'intégrale se calcule immédiatement et, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\forall x > 1,\ \ v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$$

(d) Déjà faite, voir question 9.(b).

(e) Par continuité de v en 1^+, on a donc

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\zeta(x) + \frac{1}{1-x}\right) = v(1) = \gamma.$$

D'où

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. *Application*
On sait que d'après la question 8.(b), que $\gamma = \dfrac{F'(1)}{\ln 2} + \dfrac{\ln 2}{2}$, et par conséquent
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n} = -F'(1) = \ln 2\left(\gamma - \frac{(\ln 2)^2}{2}\right).$$

IV. CALCUL DES $F(2k)$ À L'AIDE DES NOMBRES DE BERNOULLI.

11. On a $B_1'(X) = 1$, donc $B_1(X) = X + a$ avec $a \in \mathbb{R}$, et comme $\displaystyle\int_0^1 (t+a)dt = 0$, alors $a = -\frac{1}{2}$, d où $B_1(X) = X - \dfrac{1}{2}$.
De même $B_2'(x) = 2x - 1$, donc B_2 est de la forme $X^2 - X + b$ avec $b \in \mathbb{R}$, et la condition $\displaystyle\int_0^1 B_2(t)dt = 0$, donne $b = \dfrac{1}{6}$, d où $B_2(X) = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$.
On trouve $b_1 = \dfrac{-1}{2}$ et $b_1 = \dfrac{1}{6}$.
12. Soit $n \geq 2$, on a $\displaystyle\int_0^1 B_{n-1}dt = \frac{1}{n}\int_0^1 B'n(t) = B_n(1) - B_n(0)$ et comme $\displaystyle\int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0$, alors $B_n(1) - B_n(0) = 0$.
13. *Symétrie*
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$, on a :
    - $P_0(X) = B_0(1) = 1$
    - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n'(X) = -(-1)^n B'(1-X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X) = nP_{n-1}(X)$
    - $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-X) = (-1)^n \int_1^0 B_n(u)du = 0.$

    Donc par unicité $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = B_n$, c'est-à-dire $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
14. *Développement en série de fourier.*
Par définition on a : $g_k(-x) = g_k(2\pi - x)$,donc
$$B_{2k}\left(\frac{-x}{2\pi}\right) = B_{2k}\left(\frac{2\pi - x}{2\pi}\right) = B_{2k}\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) = (-1)^{2k} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right),$$
c'est-à-dire $g_k(-x) = g_k(x)$.
g_k est continue sur $[0, 2\pi[$ et comme $B_{2k}(1) = B_{2k}(0)$, alors
$$\lim_{x \to 2\pi^-} g_k(x) = B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = g_k(2\pi),$$
donc g_k est continue sur $[0, 2\pi]$ est comme elle est périodique, g_k est continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k est une fonction paire, périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc la série de Fourier associée à g_k converge simplement en tout point x de $\mathbb{R}$ vers $g_k(x)$, c'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k)\cos(nx),$$
avec
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\cos(nx)dx = 2\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)dt.$$
Pour $n = 0$ et $k \geq 1$, $a_0(k) = 2\displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)dt = 0$
15. *Expression des coefficients*

    (a) Par des intégrations par parties successives, on obtient :

$$\begin{aligned}
a_n(k) &= 2\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi n}\left[B_{2k}\sin(2\pi nt)\right]_0^1 - \frac{2k}{\pi n}\int_0^1 B_{2k-1}(t)\sin(2\pi nt)dt \\
&= \frac{-2k}{\pi n}\left[\frac{-B_{2k-1}\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 - \frac{(2k)(2k-1)}{2(\pi n)^2}\int_0^1 B_{2k-2}(t)\cos(2\pi nt)dt \\
&= \frac{k}{(n\pi)^2}\left(B_{2k-1}(0) - B_{2k-1}(0)\right) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2\pi n)^2}a_n(k-1).
\end{aligned}$$

(b) On a $a_n(0) = 2\int_0^1 B_0(t)\cos(2\pi nt)dt = 2\int_0^1 \cos(2\pi nt)dt = 0$ et d'après la dernière relation :

$$a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2}(B_1(1) - B_1(0)) - \frac{2\times 1}{(2n\pi)^2}a_n(0) = \frac{1}{(n\pi)^2},$$

puisque $B_1(1) - B_1(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ($B_1(X) = X - \frac{1}{2}$).

(c) Pour $k \geq 2$, on a $B_{2k-1}(1) = B_{2k-1}(0)$, donc

$$a_n(k) = -\frac{(2k)(2k-1)}{(2\pi n)^2}a_n(k-1),$$

et par conséquent :

$$a_n(k) = (-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}.$$

16. *Conclusion*
Soit $k \geq 1$ fixé. Pour $x = 0$, on obtient :

$$g_k(0) = B_{2k}(0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}},$$

relation qui s'écrit encore sous la forme :

$$b_{2k} = (-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\zeta(2k).$$

17. *Calcul effectif des b_n*

(a) B_n étant un polynôme de degré n, donc la formule de Taylor s'écrit :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{B^k(0)}{k!}X^k$$

Mais on peut vérifier par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ B_n^{(k)}(0) = n(n-1)...(n-k+1)B_{n-k}(0)$, donc on obtient

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}B_{n-k}(0)X^k = \sum_{k=0}^{n}\mathtt{C}_n^k b_{n-k}X^k$$

(b) La dernière relation entraîne, en tenant compte de la condition :$B_n(1) = B_n(0)$,

$$B_n(0) = \sum_{k=0}^{n}\mathtt{C}_n^k b_{n-k},$$

relation qui s'écrit encore :

$$b_n = b_n + \mathtt{C}_n^1 b_{n-1} + ... + \mathtt{C}_n^n b_0.$$

D'où, pour tout $n \geq 2$:

$$b_{n-1} = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \mathtt{C}_n^k b_k,$$

ou encore

$$b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathtt{C}_{n+1}^k b_k.$$

Cette relation de récurrence permet de calculer de proche en proche tous les b_n.

••••••••••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr