Concours National Commun - Session 2008

Corrigé de l'épreuve d'analyse

Propriétés et applications des fonctions analytiques

Corrigé par Mohamed TARQI

$1^{ère}$ Partie : Résultats préliminaires

1. (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un seul couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x+iy$, autrement dit l'application ψ est bijective, et comme $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$, on a $|\psi(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$, alors ψ est une isométrie bicontinue.

   (b) La partie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+iy \in \Omega\}$ n'est autre que l'image réciproque de l'ouvert Ω par l'application continue ψ, donc est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Il suffit de montrer que Ω^C. Soit $z = x+iy \in \overline{\Omega^C}$, alors il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω^C telle que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n := \mathrm{Re}(z_n) \leq 0$, ainsi $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq 0$, donc $\mathrm{Re}(z) \leq 0$ et par conséquent $z \in \Omega^C$, c'est-à-dire Ω^C est fermé.
   Pour tout z et z' de Ω, le segment joignant les points d'affixe z et z' reste dans Ω, donc Ω est convexe et par conséquent connexe par arcs.

2. (a) $\forall z \in \mathbb{C}$ telle que $|z| < R$, on a $f(z) = a_p z^p + a_{p+1}z^{p+1} + ... = z^p g(z)$ avec $g(z) = \sum\limits_{k=p}^{\infty} a_k z^k$.
   On a évidement $g(0) = a_p$.

   (b) g étant continue sur $D(0,R)$ et non s'annule pas en 0, donc il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall z \in D(0,r)\ g(z) \neq 0$, et par suite $\forall z \in D(0,r)\backslash\{0\}$, $f(z) = z^p g(z) \neq 0$.

$2^{ème}$ Partie : La propriété (H)

1. (a) Il est évident que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puisque les dérivées partielles existent et sont continues.
   D'autre part, on a $\widetilde{f}(x,y) = e^{x+iy}$, donc $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) = e^{x+iy}$ et $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = ie^{x+iy}$, et par conséquent : $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = i\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y)$. Donc f vérifie la propriété (H).

   (b) $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω comme composé et produit des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
   D'autre part $\forall x > 0$, $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x+iy}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y+ix}{x^2+y^2}$. Donc $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = i\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y)$, donc f vérifie la propriété (H).
   Pour tout $z = x+iy$ de Ω, on a $e^{f(z)} = e^{\ln|z| + i\arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)} = |z|e^{i\arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)}$. Mais
   $$\cos\left(\arcsin\frac{y}{|z|}\right) + i\sin\left(\arcsin\frac{y}{|z|}\right) = \cos\theta + i\frac{y}{|z|} = e^{i\theta}$$
   avec $\theta = \arcsin\dfrac{y}{|z|}$. On a encore $\cos^2\left(\arcsin\dfrac{y}{|z|}\right) + \sin^2\left(\arcsin\dfrac{y}{|z|}\right) = 1$, donc
   $$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{|z|}\right)^2} = \frac{x}{|z|},$$
   car $\dfrac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ et par conséquent
   $$e^{f(z)} = |z|e^{i\arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)} = |z|\frac{(x+iy)}{|z|} = z.$$

   (c) Il suffit de vérifier que les applications puissances $z \longmapsto z^k$ $(k \in \mathbb{N})$ vérifient (H). D'une part $\widetilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$, car elle est polynomiale. D'autre part, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\partial(x+iy)^k}{\partial x}(x,y) = k(x+iy)^{k-1} \text{ et } \frac{\partial(x+iy)^k}{\partial y}(x,y) = ki(x+iy)^k,$$

la propriété est clair si $k=0$. Ainsi f vérifie la propriété (H) et

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) = \sum_{k=1}^{d} k(x+iy)^{k-1} = P'(z).$$

(d) Non, puisque $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) = 1$ et $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = -i$

2. *Cas d'une fonction définie par une intégrale*

(a) On a $|e^{-t^2+ivt}| = e^{-\mathrm{Re}(z)t^2}$, donc la fonction $t \longmapsto e^{-zt^2+ivt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

(b) Pour x fixé dans $]0,+\infty[$, posons $F : y \to \widetilde{f}_v(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)t^2+ivt}dt$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $g : y \to e^{-(x+iy)t^2+ivt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -it^2e^{-(x+iy)t^2+ivt}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, on a $\left|\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| = t^2e^{-xt^2} = \varphi(t)$, de plus φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -it^2e^{-(x+iy)t^2+ivt}dt$. Autrement dit, $\widetilde{f}_v$ admet une dérivé partielle première par rapport à y et $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \widetilde{f}_v}{\partial y}(x,y) = F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it^2e^{-(x+iy)t^2+ivt}dt.$$

(c) Pour y fixé dans $\mathbb{R}$, posons $F : x \to \widetilde{f}_v(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)t^2+ivt}dt$ définie sur $]0,+\infty[$. La fonction $g : x \to e^{-(x+iy)t^2+ivt}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -t^2e^{-(x+iy)t^2+ivt}$ et $\forall x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| = t^2e^{-xt^2} \leq \varphi(t) = t^2e^{-at^2}$, de plus φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, F est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -t^2e^{-(x+iy)t^2+ivt}dt$. Comme a et b sont quelconques, le résultat reste valide sur la réunion des intervalles $[a,b]$, donc $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial \widetilde{f}_v}{\partial x}(x,y) = F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -t^2e^{-(x+iy)t^2+ivt}dt = \frac{1}{i}\frac{\partial \widetilde{f}_v}{\partial y}(x,y)$$

(d) On peut vérifie que l'application $(x,y) \longmapsto \dfrac{\partial \widetilde{f}_v}{\partial x}(x,y)$ est continue, ce qui entraîne la continuité de $(x,y) \longmapsto \dfrac{\partial \widetilde{f}_v}{\partial y}(x,y)$, grace à la dernière relation et on a bien, pour tout v de $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U},\ \frac{\partial \widetilde{f}_v}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial \widetilde{f}_v}{\partial x}(x,y).$$

Donc la fonction $\widetilde{f}_v$ vérifie la propriété (H).

3. *Cas de la somme d'une série entière*

(a) Pour $y \in]-R,R[$ $(=\mathbb{R})$ si $R=+\infty)$ fixé, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme à la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+iy)^n$ sur les compacts inclus dans $]-r,r[$ avec $r = \sqrt{R^2-y_0^2}$. On obtient alors

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$$

(b) De même , pour $x \in]-R, R[$ ($= \mathbb{R}$) si $R = +\infty$) fixé, on a :

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} ina_n(x+iy)^{n-1} = i\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y)$$

(c) On a $(x,y) \longmapsto \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y)$ est continue et :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U},\ \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y).$$

Donc la fonction $\widetilde{f}$ vérifie la propriété (H).

4. *Quelques propriétés générales*

(a) $\widetilde{\lambda f + g}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, et pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$, on a :

$$\frac{\partial(\widetilde{\lambda f + g})}{\partial y}(x,y) = \lambda\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial y}(x,y) = \lambda i\lambda\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial x}(x,y) = i\frac{\partial(\widetilde{\lambda f + g})}{\partial x}(x,y).$$

Donc $\lambda f + g$ vérifie la propriété (H).

(b) De même , $\widetilde{fg}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, et on a pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$:

$$\frac{\partial(\widetilde{fg})}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y)\widetilde{g}(x,y) + \widetilde{f}(x,y)\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y)\widetilde{g}(x,y) + \widetilde{f}(x,y)i\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial x}(x,y) = i\frac{\partial(\widetilde{fg})}{\partial x}(x,y)$$

Donc fg vérifie la propriété (H).

(c) $\widetilde{F \circ f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. Soit $(x,y) \in \mathcal{U}$, on a :

$$\frac{\partial(\widetilde{F \circ f})}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y} \circ \widetilde{f}(x,y) \times \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x} \circ \widetilde{f}(x,y) \times i\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) = i\frac{\partial(\widetilde{F \circ f})}{\partial x}(x,y).$$

Ainsi $F \circ f$ vérifie la propriété (H) sur $\mathcal{U}$.

(d) De même , $\dfrac{1}{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et on pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$:

$$\frac{\partial(\widetilde{\frac{1}{f}})}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y)}{(\widetilde{f}(x,y))^2} = \frac{-i\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y)}{(\widetilde{f}(x,y))^2} = i\frac{\partial(\widetilde{\frac{1}{f}})}{\partial x}(x,y)$$

Donc $\dfrac{1}{f}$ vérifie la propriété (H).

(e) i. On a $d\widetilde{f}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0)dy = (a+ib)dx + i(a+ib)dy$, et

$$A = J_{\widetilde{f}}(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = (a+ib, -b+ia) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ii. Si $a + ib \neq 0$, A représente une similitude de rapport $k = \sqrt{a^2+b^2}$. Si $a^2+b^2 = 1$, A représente une rotation vectorielle.

(f) Si $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x^2} = i\frac{\partial(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y})}{\partial x} = i\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x \partial y}$$

et

$$\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial y^2} = \frac{\partial(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y})}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial y \partial x} = -i\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial y \partial x}$$

mais le théorème de Schwarz montre que $\dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x \partial y}$, donc

$$\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial y^2} = 0.$$

$3^{ème}$ Partie : Analyticité des applications vérifiant la propriété (H)

1. Puisque Ω est un ouvert et $z_0 \in \Omega$, alors $\exists \rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$, donc $\{\rho > 0 / D(z_0, \rho) \subset \Omega\}$ est non vide.

2. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, R[\times\mathbb{R}$, comme composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De plus pour tout couple $(r, \theta) \in]0, R[\times\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y}\sin\theta = \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(\cos\theta + i\sin\theta).$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y} = r\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(-\sin\theta + i\cos\theta).$$

On a

$$r\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) = r\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}.$$

3. (a) Il est clair que φ_r est 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\varphi_r'(\theta) = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) = r\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x}(-\sin\theta + i\cos\theta).$$

   (b) Puisque l'application φ_r est 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$, alors d'après le théorème de Dirichlet, la série $c_0(r) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n(r)| + \sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_{-n}(r)|$ est convergente, c'est-à-dire la suite $(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
   Pour tout $r \in]0, R[$, la fon,ction $\varphi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de φ_r converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme φ_r

4. (a) $\forall n \in \mathbb{Z}$ et $\forall r \in]0, R[$, $c_n(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$

   (b) Soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé. D'après les théorèmes usuels de régularité sous l'integrale la fonction c_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, R[$. Puis par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_n'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi ir}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi ir}\left[\varphi(r,\theta)e^{-in\theta}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi ir}\int_0^{2\pi}\varphi(r,\theta)(-in)e^{-in\theta}d\theta \\
&= \frac{n}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\varphi(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta = \frac{n}{r}c_n(r).
\end{aligned}$$

   (c) $\forall n \in \mathbb{Z}$, c_n est solution de l'équation différentielle du premier ordre $ry'(r) - ny(r) = 0$, ainsi $c_n(r) = kr^n = c_n(\rho)\,\rho^n r^n$, où $0 < \rho < r$. Donc h_n est constante sur $]0, R[$.

   (d) Si $n < 0$, pour que l'expression $c_n(r) = kr^n = \dfrac{c_n(\rho)}{\rho^n}r^n$ ait une limite quand r tend vers 0^+, il est nécessaire et suffisante que $c_n(\rho) = 0$, donc $c_n = 0$ si $n \in \mathbb{N}^-$. Si $n \geq 0$, la continuité de c_n assure la validité de la formule en $r = 0$.

5. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| < R$, il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = z_0 + re^{i\theta}$. Pour r fixé, la fonction φ_r étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc la série de Fourier associée à φ_r, à savoir $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(r)e^{in\theta} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme vaut $\varphi_r(\theta) = f(z_0 + re^{i\theta}) = f(z)$.
De plus le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est supérieur ou égal à R.

6. D'après le cours, les a_n sont unique et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{\varphi_r^{(n)}(0)}{n!}$.
7. L'égalité de Parseval, s'écrit pour φ_r,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_r(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(r)|^2,$$
qui s'écrit encore, en tenant compte de $a_n = 0$ si $n < 0$:
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

$4^{ère}$ Partie : Propriétés fondamentales des applications vérifiant la propriété (H)

A. Théorème de Liouville

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$. on a :
$$|c_n(r)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}\right| d\theta \leq M = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|.$$
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0$, $|a_n| \leq \dfrac{M}{r^n}$, alors on obtient, quand r tend vers l'infini et $n \neq 0$, $a_n = 0$. Ainsi $f(z) = a_0$, donc f est constante.
2. ***Application :***

   (a) Posons $f(x) = |a_d|x^d - \sum\limits_{k=0}^{d-1} |a_k|x^k$ avec $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on peut écrire :
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ |a_d z^d| - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z^k| \leq \left|a_d z^d + \sum_{k=0}^{d} a_k z^k\right| = |P(z)|.$$
   Il clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et comme on a $\forall z \in \mathbb{C},\ \ |P(z)| \geq f(|z|)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, donc $|P(z)| \sim |a_d||z^d|$ au voisinage de l'infini, et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{P(z)} = 0$.

   Il existe $r_0 > 0$ tel que $\forall |z| > r_0$ on a $\dfrac{1}{|P(z)|} \leq 1$. $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z)$ est non nul, donc la fonction $g : z \longmapsto \dfrac{1}{P(z)}$ est une fraction polynomiale continue sur $\mathbb{C}$, en particulier sur le compact $K = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq r_0\}$, donc bornée par M_0.
   Sur K^c la fonction $g : z \longmapsto \dfrac{1}{P(z)}$ est majorée par 1 et sur K elle est majorée par M_0, donc $g : z \to \dfrac{1}{P(z)}$ est majorée sur $\mathbb{C} = K \cup K^c$ par $M = \sup\{1, M_0\}$.

   (b) On sait, d'après la question $1.(c)$ de la deuxième partie, que $g = \dfrac{1}{P}$ vérifie la propriété (H) et comme elle est bornée, alors, d'après la question $A.1.$ de cette partie, g est une constante, ce qui est absurde. ***Ainsi tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine dans $\mathbb{C}$.***

B. Principe du prolongement anlytique

1. C'est par définition d'une partie connexe par arcs.
2. I est une partie non vide, car il contient 0, et est majorée puisque $I \subset [0, 1]$, donc $\sigma = \sup I$ est bien défini.
   Supposons $I = \{0\}$, alors dans ce cas $\gamma([0, 1]) \cap D(z_0, \rho) = \{z_0\}$, ce qui est absurde, car γ est continue.
   Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I tel que $\sigma = \lim\limits_{t\to+\infty} t_n$ (d'après la caractérisation de la borne supérieure), on a $\forall s \in [0, \sigma[$, $f(\gamma(s))$=0, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ f(\gamma(t_n)) = 0$ et par argument de continuité, $f(\gamma(\sigma)) = 0$, donc $\sigma \in I$.

3. Soit $t \in [0, \sigma]$, alors $\forall s \in [0, t] \subset [0, \sigma]$, $f(\gamma(s)) = 0$, donc $t \in I$. Ainsi $[0, \sigma] \subset I$.
Supposons $\sigma = 1$, alors dans ce cas $f(\gamma(1) = f(z_1) = 0$, ce qui est impossible.
$\sigma = \inf]\sigma, 1]$, donc il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]\sigma, 1]$ telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} t_n = \sigma$, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(\gamma(t_n)) \neq 0$.
Si $\gamma(\sigma) = z_0$, alors $\gamma(\sigma) = \gamma(0)$ et donc $\gamma([0, 1]) \cap D(z_0, \rho) = \{z_0\}$, ce qui est absurde.
4. (a) Il suffit d'appliquer les résultats de la troisième partie à f au point $\gamma(\sigma)$.
   (b) Si tous les a_n sont nuls, alors $f(z) = 0$ pour tout $z \in D(\gamma(\sigma), r_1)$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(t_n) = \gamma(\sigma)$, donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$, on a $|\gamma(t_k) - \gamma(\sigma)| < r_1$, en particulier $f(\gamma(t_k)) = 0$ pour tout $k \geq k_0$, et ceci est impossible, donc les coefficients a_n ne sont pas tous nuls, et d'après la question 2 de la partie préliminaire, il existe $r \in]0, r_1[$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(\gamma(\sigma), r)\backslash\{\gamma(\sigma)\}$.
5. Soit $\beta = \inf J$ avec $J = \{t \in [0, \sigma]/\gamma(t) = \gamma(\sigma)\}$, on vérifie facilement que β est bien définie et appartient à J. Alors il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{t \in [0, \sigma]/\gamma(t) = \gamma(\sigma)\}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \beta$. Si $\beta = 0$, alors $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t_n) = \gamma(0) = \gamma(\sigma)$, ceci est impossible, donc $\beta > 0$. Autrement dit, $\gamma([0, 1])$ coupe $D(\gamma(\sigma), r)$ en d'autre point que $\gamma(\sigma)$.
En particulier on a $\forall t \in [0, \sigma]$:
$$f(\gamma(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\gamma(t) - \gamma(\sigma))^n = 0.$$
Ceci est en contradiction avec la question $4.(b)$ de cette partie. en conclusion : un tel z_1 n'existe pas, donc f est nulle sur tout Ω.

C. Applications

1. ***Principe du maximum :***
   (a) On sait qu'il existe $R > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall z \in D(z_0, R)$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, en particulier $\forall z \in D(z_0, \rho)$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ et comme elle est bornée sur $\in D(z_0, \rho)$, f est constante et vaut $a_0 = f(z_0)$.
   (b) C'est une conséquence immédiate du principe du prolongement analytique.
2. ***Calcul d'une intégrale :***
   (a) i. En reprenant la question 2 de la deuxième partie, on peut montrer que μ est dériavable sur $\mathbb{R}$ et que $\mu'(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} ite^{-ut^2+ivt}dt$, et comme
$$\frac{\partial(e^{-ut^2+ivt})}{\partial t} = (iv - 2ut)e^{-ut^2+ivt},$$
alors
$$\left[e^{-ut^2+ivt}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} (iv - 2ut)e^{-ut^2+ivt} = iv\mu(v) + i2u\mu'(v)$$
et par conséquent :
$$\mu'(v) = \frac{-v}{2u}\mu(v).$$
   ii. On a $\mu(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut^2}dt = \frac{1}{u}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2}dr = \sqrt{\frac{\pi}{u}}$. (on posant $r = \sqrt{u}t$). La solution de l'équation différentielle $\mu'(v) = \dfrac{-v}{2u}\mu(v)$ est $\mu(v) = \mu(0)e^{\frac{-v^2}{4u}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{u}}e^{\frac{-v^2}{4u}}$.
   (b) i. Si $u > 0$, alors $f(u) = \ln u$ et donc $f_v(u) = \mu(v) = \sqrt{\pi}u^{\frac{-f(u)}{2}}e^{\frac{-v^2}{4u}} = \sqrt{\pi}e^{\frac{-f(u)}{2}}e^{\frac{-v^2}{4u}}$.
   ii. L'application $z \longmapsto \sqrt{\pi}e^{\frac{-f(z)}{2}}e^{\frac{-v^2}{4z}}$ appariait comme composé et produit des fonctions vérifiant la propriété (H), donc elle même vérifie la propriété (H).

iii. Pour tout $v \in \mathbb{R}$, posons $g(z) = f_v(z) - \sqrt{\pi}e^{\frac{-f(z)}{2}}e^{\frac{-v^2}{4z}}$. g vérifie la propriété (H) donc développable en série entière au voisinage de $z_0 = 1$, soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ pour $z \in D(1,R)$, si g est non nulle, alors les coefficients a_n ne sont pas tous nuls, et d'après la question 2. de la première partie $\exists r \in]0, R[$ tel que, pour tout $z \in D(1,r))\backslash\{1\}$, $g(z) \neq 0$, ce qui est absurde, puisque g est nulle sur $D(1,r) \cap \mathbb{R}$. Ainsi g est nulle et par conséquent :

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut^2+ivt}dt = \sqrt{\pi}e^{\frac{-f(z)}{2}}e^{\frac{-v^2}{4z}}.$$

•••••••••••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr