CCP 2002. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.

Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Généralités et exemples.

1. Si le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^*$ et donc $u_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. $\square$

2. a. Soit (u_n) une suite de réels non nuls convergeant vers 1. En écrivant le définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il vient qu'il existe n_0 tel que $u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour $n \geqslant n_0$. $\square$

2. b. Notons $C = \prod\limits_{p=0}^{n_0-1} u_p$. Il vient que C est une constante non nulle (puisqu'aucun terme de la suite (u_n) n'est nul par hypothèse) et que $\prod\limits_{p=0}^{n} u_p = C \prod\limits_{p=n_0}^{n} u_p$ pour $n \geqslant n_0$ ce qui prouve que les produits infinis $\prod\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\prod\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ sont de même nature. $\square$

3. Dans toute cette question on peut envisager la suite $(\ln u_n)$ puisque (u_n) est une suite de réels strictement positifs.

3. a. La suite (P_n) est une suite de réels strictement positifs et donc, par caractérisation séquentielle de la continuité du logarithme dans un sens et de l'exponentielle dans l'autre, elle converge vers un réel ℓ non nul si et seulement si la suite $(\ln P_n)$ converge vers le réel $\ln \ell$.

En d'autres termes si $u_n > 0$ alors le produit infini $\prod u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \ln u_n$ converge et alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln u_n = \ln \prod\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \exp\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln u_n\Big)$. $\square$

2. b. • Comme $1+u_n > 0$ il découle de 3.a que $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge.
• Si cette série converge alors son terme général tend vers 0 donc u_n tend vers 0 et donc $\ln(1+u_n) \sim u_n > 0$ ce qui prouve que la série $\sum u_n$ converge (séries à termes positifs équivalents).
• Réciproquement si la série $\sum u_n$ converge alors son terme général tend vers 0 donc $u_n \sim \ln(1+u_n) > 0$ ce qui prouve de la même manière que la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge.

En conclusion si $u_n > 0$ alors le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. $\square$

3. c. Lorsque $0 < u_n < 1$ alors $1 - u_n > 0$ et par exactement la même démonstration que ci-dessus (sauf qu'on a affaire à des séries à termes négatifs donc de signe fixe -et donc la règle des équivalents est encore valable-) on prouve que le produit infini $\prod(1-u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. $\square$

4. a. $\prod\big(1 - \dfrac{1}{4n^2}\big)$ converge puisque $\sum \dfrac{1}{4n^2}$ converge (question 3.c). $\square$

4. b. Idem pour $\prod\big(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\big)$ et $x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$. Pour $x = 0$ convergence évidente vers 1. Donc finalement convergence pour $x \in]-\pi,\pi[$. $\square$

4. c. Pour $x > 0$ on a $u_n \underset{\text{DEF}}{=} (1+\dfrac{x}{n})e^{-x/n} > 0$ donc, par la question 3.a, le produit infini $\prod u_n$ est de même nature que la série $\sum \ln u_n$. Or $\ln u_n = -\dfrac{x}{n} + \ln(1+\dfrac{x}{n}) = O(\dfrac{1}{n^2})$. Donc le produit infini converge. $\square$

5. a. Comme $\dfrac{1}{n} > 0$, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est de même nature que le produit infini $\prod(1+\dfrac{1}{n})$. Or $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{k} = n+1$ donc il y a divergence. $\square$

5. b. Pour $p \geqslant 2$ on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{p^k} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{p}} = \dfrac{p}{p-1}$ (série géométrique). $\square$

5. c. D'après la question 3.c la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ est de même nature que le produit infini $\prod(1 - \dfrac{1}{p_n}) = \prod \dfrac{p_n - 1}{p_n}$.

Or, d'après 5.b, $\dfrac{1}{\Pi_N} = \prod\limits_{n=1}^{N} \dfrac{p_n}{p_n - 1} = \prod\limits_{n=1}^{N} \Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{p_n^k}\Big) \geqslant \prod\limits_{n=1}^{N} \Big(\sum\limits_{k=0}^{M} \dfrac{1}{p_n^k}\Big) \underset{\text{DEF}}{=} S_{N,M}$ pour tout entier M.
Or $S_{N,M}$ est clairement la somme des inverses des entiers dont la décomposition en facteurs premiers fait intervenir uniquement les N premiers nombres premiers et en outre à une puissance inférieure ou égale à M.
En faisant tendre M vers $+\infty$, il vient que Π_N est supérieur ou égal à la somme des inverses des entiers dont la décomposition ne fait intervenir que les N premiers nombres premiers. Donc a fortiori $\dfrac{1}{\Pi_N} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{p_N} \dfrac{1}{k}$ et comme $p_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ et que la série harmonique diverge, il vient que $\dfrac{1}{\Pi_N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.

Ainsi $\Pi_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ i.e. le produit infini diverge. Donc :
La série des inverses des nombres premiers diverge. $\square$

Développement eulérien du sinus et formule de Wallis.

6. Commençons par remarquer que comme $\cos(-\alpha\pi)=\cos(\alpha\pi)$ la definition de f_α par sa restriction à $[-\pi,\pi]$ fermé et par 2π-périodicité a bien un sens.
f_α est clairement continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (discontinuités de première espèce de f'_α en les multiples de π). Donc la série de Fourier de f_α converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f_α.

Comme f_α est clairement paire, tous les b_n sont nuls et il vient pour tout entier n :

$$a_n = 2 < f_\alpha(t),\cos(nt) >= \frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f_\alpha(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\cos\left(\alpha+n)t\right)+\cos\left((\alpha-n)t\right)\Big)\,\mathrm{d}\,t = \frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\pi}\underbrace{\Big(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\Big)}_{\text{car } \alpha\notin\mathbb{Z}} = (-)^n\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}.$$

Ainsi $f_\alpha(t)=\dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left(\dfrac{1}{\alpha}+2\alpha\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\cos(nt)}{\alpha^2-n^2}\right)\quad \forall t\in\mathbb{R}\quad\forall\alpha\notin\mathbb{Z}\quad(1).\quad\square$

REMARQUE : on retrouve bien la convergence normale de la série ed Fourier sur $\mathbb{R}$.

En appliquant (1) en $t=\pi$ en particulier, on obtient $\operatorname{cotan}(\pi\alpha)=\dfrac{1}{\pi\alpha}+\dfrac{2\alpha}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\alpha^2-n^2}\quad\forall\alpha\notin\mathbb{Z}\quad(2).\quad\square$

7. a. Comme $x\in]0,\pi[$, g est continue sur $]0,x]$ et au voisinage de 0 on a :
$\operatorname{cotan} t=\dfrac{1+O(t^2)}{t+O(t^3)}=\dfrac{1}{t}.\dfrac{1+O(t^2)}{1+O(t^2)}=\dfrac{1}{t}.\big(1+O(t^2)\big)\big(1+O(t^2)\big)=\dfrac{1}{t}.\big(1+O(t^2)=\dfrac{1}{t}+O(t)$ ce qui prouve que g est bien continue sur $[0,x]$. $\square$
Comme $x\in]0,\pi[$ on a $\displaystyle\int_\varepsilon^x g(t)\,\mathrm{d}\,t=\ln(\sin x)-\ln(x)-\Big(\ln(\sin\varepsilon)-\ln\varepsilon\Big)$.
Or $\ln(\sin\varepsilon)-\ln\varepsilon=\ln\dfrac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$. Donc $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t=\ln\frac{\sin x}{x}$. $\square$

7. b. Pour $0<t\leqslant x<\pi$ on peut écrire $t=\alpha\pi$ avec $\alpha=\dfrac{t}{\pi}\notin\mathbb{Z}$ et la formule (2) fournit alors :

$\operatorname{cotan} t=\dfrac{1}{t}+\dfrac{2t}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\frac{t^2}{\pi^2}-n^2}$ soit $g(t)=2t\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{t^2-n^2\pi^2}$. En $t=0$ la série converge (Riemann) donc le membre de droite a un sens et vaut $0=g(0)$. Ainsi l'égalité est encore vraie en $t=0$.
En conclusion $g(t)=2t\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{t^2-n^2\pi^2}\quad\forall t\in[0,x]\quad(3).\quad\square$

7. c Posons $u_n(x)=1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}$ pour $x\in]0,\pi[$. On sait par la question 4.b que le produit infini $\prod u_n(x)$ converge et d'après la remarque de la question 3a, comme $u_n(x)>0$, on a $\ln\prod\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln u_n(x)$.
Il suffit donc de prouver que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln u_n(x)=\ln\dfrac{\sin x}{x}$ pour conclure i.e. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln u_n(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t$ d'après 7.a.
Or pour $t\in[0,x]$ on a $g(t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2t}{t^2-n^2\pi^2}$ et cette série converge normalement sur $[0,x]$ car :
$\left|\dfrac{2t}{t^2-n^2\pi^2}\right|=\dfrac{2t}{n^2\pi^2-t^2}\leqslant\dfrac{2\pi}{n^2\pi^2-\pi^2}=\dfrac{2}{(n^2-1)\pi}$ pour $n\geqslant 2$.
On peut donc intégrer terme à terme et $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\ln\left|t^2-n^2\pi^2\right|\Big]_0^x=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\big(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.
Ainsi $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\Big)=\dfrac{\sin x}{x}\quad\forall x\in]0,\pi[.\quad\square$

On en déduit $\sin x=x\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\Big)$ pour $x\in]0,\pi[$. Cette égalité est encore clairement vraie en 0 (le produit infini converge bien). Également sur $]-\pi,0[$ par parité. Finalement $\sin x=x\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\Big)\quad\forall x\in]-\pi,\pi[.\quad\square$

8. En particulier pour $x=\dfrac{\pi}{2}$ on obtient $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\dfrac{1}{4n^2}\Big)=\dfrac{2}{\pi}$. $\square$

Formule de Weierstrass et constante d'Euler.

9. a. Notons $\varphi : (x,t) \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ et $\varphi_x : t \longmapsto \varphi(x,t)$.
Pour tout réel x , la fonction φ_x est continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$ et intégrable en $+\infty$ car $\varphi_x(t) = o\big(\frac{1}{t^2}\big)$. Au voisinage de 0^+ on a $\varphi_x(t) \sim t^{x-1} > 0$ donc, par la règle des équivalents pour les intégrales de fonctions positives, φ_x est intégrable en 0^+ si et seulement si $x > 0$.
En conclusion le domaine de définition de la fonction Γ est $]0,+\infty[$. $\square$

9. b. $\Gamma(1) = 1$. $\square$
REMARQUE : par intégration par parties on obtient plus généralement $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n > 0$.

9. c Pour montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et dérivalble sous le signe intégral, il suffit de prouver que :
1/ Pour tout $x > 0$ la fonction φ_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.
2/ $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est définie sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
3/ Pour tout $t > 0$ la fonction $x \longmapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
4/ Pour tout $x > 0$ la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
5/ La fonction $(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est localement dominée en x par une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$.

La première propriété a été établie en a. et les propriétés 2, 3 et 4 sont claires avec $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \ln t \times \varphi(x,t)$.
Soit désormais un segment $K = [a,b]$ quelconque inclus dans $]0,+\infty[$. Alors pour $(x,t) \in K\times]0,+\infty[$ on a $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi_K(t)$ avec $\psi_K(t) = \ln t.e^{-t}.t^{a-1}$ pour $t \in]0,1]$ et $\psi_K(t) = \ln t.e^{-t}.t^{b-1}$ pour $t \geqslant 1$.
Cette fonction ψ_K est continue par morceaux (et même continue) et intégrable sur $]0,+\infty[$ car dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées et équivalente en 0^+ à $\ln t.t^{a-1}$ de signe fixe (négatif) et intégrable en 0 car elle-même dominée par $\dfrac{1}{t^c}$ avec $1-a < c < 1$. Ce qui prouve que la propriété 4 est satisfaite.

En conclusion Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\Gamma'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t.e^{-t}.t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t$. $\square$

REMARQUE : par itération claire on prouve que γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $\Gamma^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (lnt)^n.e^{-t}.t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t$.

10.a. Commençons par remarquer les fonction f_n sont continues sur $]0,+\infty[$.
On sait que par concavité de la fonction logarithme on a $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$ donc que $\ln(1-y) \leqslant -y$ pour tout $y < 1$. Donc $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\big(1-\dfrac{t}{n}\big)\right) \leqslant e^{-t}$ pour $t \in]0,n[$ par croissance de la fonction exponentielle.
Cette inégalité est encore vraie pour $t = n$ car $0 \leqslant e^{-n}$.
Il en découle que $f_n(t) \leqslant e^{-t}$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in]0,+\infty[$. $\square$

10.b. Remarquons que la suite (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $t \longmapsto e^{-t}$ car, pour t fixé, on a $f_n(t) = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ pour n assez grand (en fait $n > t$).
Il en découle que la suite (g_n) définie par $g_n(t) = f_n(t)t^{x-1}$ où x est un réel strictement positif fixé converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\varphi_x(t)$.
Ainsi la suite de fonctions $\big(g_n(t)\big)$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue $\varphi_x(t)$. En outre cette suite est dominée par la fonction intégrable $\varphi_x(t)$ elle-même d'après le a. et le fait que $t^{x-1} > 0$. Le théorème de la convergence dominée prouve alors que :
$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}\,t = \Gamma(x) \quad \forall x > 0. \quad \square$$

11.a. Soit x fixé dans $]0,+\infty[$. La fonction $u \longmapsto (1-u)^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $u \longmapsto u^{x-1}$ continue sur $]0,1]$. On peut donc intégrer par parties sur $[\varepsilon,1]$. Un calcul facile suivi d'un passage à la limite prouve alors que $I_n(x) = \dfrac{n}{x}I_{n-1}(x+1) \quad \forall x > 0 \quad \forall n \geqslant 1$. $\square$

11.b. Une itération évidente fournit alors $I_n(x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}I_0(x+n) = \dfrac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$. $\square$

11.c. Par changement de variable il vient $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n .t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t = n^x I_n(x)$. Il résulte alors des questions 10.b et 11.c que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)} \quad \forall x > 0$. □

12.a. Soit x fixé dans $]0,1[$. La formule de Gauss s'écrit aussi $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)} = x \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x}.\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

Comme $0 < x < 1$ on a $1-x > 0$ et donc $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n+1}(k-x)}{n!\; n^{1-x}} = (n+1-x).\frac{1}{n^{1-x}}.\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{k}\right)$.

donc $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-x}{n} \times \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$. Comme $\displaystyle\frac{n+1-x}{n}$ tend vers 1, cela prouve la convergence du produit infini et que $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \quad \forall x \in]0,1[$. □

12.b. La formule de la question 7.c s'écrit également $\sin \pi x = \pi x \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \quad \forall x \in]-1,1[$.

D'où la formule des compléments $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x} \quad \forall x \in]0,1[$. □

12.c. Le $\mathcal{C}^1$ difféormorphisme $t \longmapsto \sqrt{t} = u$ de $]0,+\infty[$ sur lui-me montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$.

Or la formule des compléments montre que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}\,u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

13.a. $u_n = -\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} = O(\dfrac{1}{n^2})$. □

13.b. $v_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$. □

14. On a vu que $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)} = x \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x}.\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = x \lim_{n\to+\infty} w_n(x)$.

Or $w_n(x) = e^{-x\ln n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{-x(1+1/2+\cdots+1/n-v_n)}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{xv_n}.\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}$.

Par ailleurs on sait (question 4.c) que le produit infini $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}$ converge et que la suite (v_n) converge vers γ donc que $e^{-v_n x}$ tend vers $e^{\gamma x}$ par continuité de l'exponentielle. Il en résulte la formule de Weierstrass :
$\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)} = x\, e^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k} \quad \forall x > 0$. □

15.a. D'après la question 3 et sa remarque, la formule de Weierstrass permet d'écrire :
$\ln\Big(\Gamma(x)\Big) = -\ln x - \gamma x - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right) = -lnx - \gamma x - \sum_{k=1}^{n} u_n(x) = -\ln x - \gamma x - S(x) \quad (1)$.
Or les fonction $u_n(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, la série $\sum u_n(x)$ y converge simplement et la série dérivée $-\sum \dfrac{x}{k(k+x)}$ converge localement normalement sur $]0,+\infty[$ car $\left|\dfrac{x}{k(k+x)}\right| \leqslant \dfrac{b}{k(k+a)} \sim \dfrac{b}{k^2}$ pour tout $x \in [a,b]$ avec $0 < a < b$. Cela prouve que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et qu'on peut dériver terme à terme de sorte que $S'x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{k(k+x)} \quad \forall x \in]0,+\infty[$.

Par ailleurs la fonction Γ étant de classe $\mathcal{C}^1$ et à valeurs positives on a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\ln\Big(\Gamma(x)\Big) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

En dérivant la relation (1) ci-dessus , il vient alors $\displaystyle\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{k(k+x)} \quad \forall x > 0$. □

15.b. En particulier pour $x = 1$ on obtient $\Gamma'(1) = -1 - \gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1}$.

Or $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ de sorte que par télescopage (en prenant une somme partielle) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 1$ et $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}\,t$ (Cf question 9.c). Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}\,t = -\gamma$. □

FIN