

Concours Communs Polytechniques - Session 2009

Corrigé de l'épreuve d'algèbre

Valeurs propres, symétrie orthogonale et résultant de deux polynômes

Corrigé par M.TARQI

PREMIER EXERCICE

1. Soit λ une valeur propre de u , alors il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ et par composition, on obtient $P(u)(x) = P(\lambda)x$, donc $P(\lambda)$ est une valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$.
2. (a) D'après l'égalité précédente, on obtient $P(\lambda)x = 0$ et comme $x \neq 0$, alors $P(\lambda) = 0$.
(b) Non, Si E est de dimension finie n , le polynôme $P = (X^n - 1)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de l'identité, alors que -1 qui est une racine de P , n'est une valeur propre de l'identité.
3. Comme la dimension est impaire, le spectre de u est non vide. D'autre part le polynôme $X^3 - X^2 + X - 1$, annulateur de u , admet 1 comme la seule racine réelle, donc le spectre de u est $\{1\}$.

DEUXIÈME EXERCICE

1. Les vecteurs $u = (1, 0, -2)$ et $v = (0, 1, -3)$ forment une base de Π et comme w est un vecteur normal à Π , alors (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Il est clair que $s(u) = u$, $s(v) = v$ et $s(w) = -w$, donc :

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w) , alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$S = PS'P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

PROBLÈME : RÉSULTANT DE DEUX POLYNÔMES

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1. Cas où u est bijective

- (a) Soient (A, B) et (A', B') deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} u(\lambda(A, B) + (A', B')) &= u(\lambda A + A', \lambda B + B') \\ &= P(\lambda A + A') + Q(\lambda B + B') \\ &= \lambda(PA + QB) + (PA' + QB') \\ &= \lambda u(A, B) + u(A', B') \end{aligned}$$

Donc u est bien est une application linéaire.

- (b) Si u est une bijection, alors le polynôme constant 1 est atteint et une seule fois, donc il existe un unique élément (A, B) de E tel que $PA + QB = 1$, donc d'après le théorème de Bézout les polynômes P et Q sont premiers entre eux.
- (c) Soit $(A, B) \in \ker u$, alors $PA + QB = 0$ ou encore $PA = -QB$ et comme P et Q sont premiers entre eux alors si $B \neq 0$ P diviserait B , ce qui est absurde en raison de degrés. De même $A = 0$, donc u est injective et comme les deux espaces ont la même dimension, alors u est bijective.

2. Matrice de u

- (a) On a $\forall 0 \leq i \leq q-1, u(X^i, 0) = X^i P = \sum_{k=0}^p a_k X^{k+i}$ et $\forall 0 \leq j \leq p-1, u(0, X^j) = X^j Q = \sum_{k=0}^q b_k X^{k+j}$. La matrice de u par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est donc $M_{P,Q}$.
- (b) D'après la question 1., les polynômes P et Q sont premiers entre eux si et seulement si u est bijective ou encore

$$\det \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \det M_{P,Q} = \text{Res}(P, Q) \neq 0.$$

3. Racine multiple

- (a) Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple si et seulement si P et P' ont une racine commune, ou encore $\text{Res}(P, P') = 0$
- (b) *Application* : Le polynôme $X^3 + aX + b$ admet une racine double si et seulement si $\text{Res}(X^3 + aX + b, 3X^2 + a) = 0$, ou encore

$$\begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27b^2 + 4a^3 = 0.$$

II. APPLICATIONS

4. Équation de Bézout

- (a) Calculons le résultant de P et Q . On a :

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc les deux polynômes sont premiers entre eux.

- (b) Il faut résoudre le système $M_{P,Q}Z = 1$, avec $Z = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ et $1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
On trouve donc, après les calculs, $Z = (1, -1, -1, 0, 1, 2, 1)$, ce qui donne le couple :

$$\begin{aligned} (A_0, B_0) &= (1, 0) - (X, 0) - (X^2, 0) + (0, X) + 2(0, X^2) + (0, X^3) \\ &= (1 - X - X^2, X + 2X^2 + X^3) \end{aligned}$$

- (c) Soit (A, B) un couple de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $PA + QB = 1$. Par soustraction on obtient :

$$P(A - A_0) = Q(B_0 - B) \quad (*)$$

Comme Q et P sont premiers entre eux, alors Q divise $A - A_0$ et par suite il existe un polynôme R_1 tel que $A - A_0 = RQ$, donc $A = A_0 + RQ$, puis en remplaçant dans $(*)$, on obtient $B = B_0 - RP$.

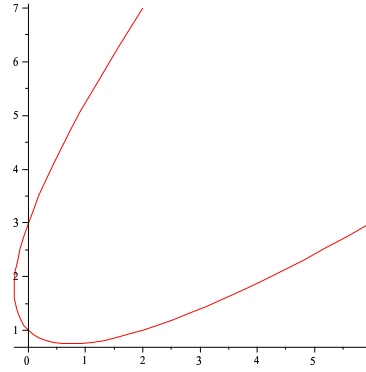
Inversement tout couple de la forme $(A, B) = (A_0 + RQ, B_0 - RP)$ vérifie $PA + QB = 1$.

5. Équation d'une courbe

- (a) Tableau de variation :

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
$x'(t)$		$-$	0	$+$		
$x(t)$	$+\infty$	\searrow	$-\frac{1}{4}$	\nearrow	$+\infty$	
$y(t)$	$+\infty$		\searrow	$\frac{3}{4}$	\nearrow	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$		
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	1	∞	0	1		

L'allure de Γ :



- (b) Le point $M(x, y)$ appartient à la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = P(t) \\ y(t) = Q(t) \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

si et seulement si il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x = P(t_0)$ et $y = Q(t_0)$, donc $A(t_0) = B(t_0) = 0$, c'est-à-dire A et B ont une racine commune.

$M(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si les polynômes $A = X^2 + X - x$ et $B = X^2 - X + 1 - y$ ont une racine commune, c'est-à-dire $\text{Res}(A, B) = 0$. Or

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 1-y & 0 \\ 1 & -x & -1 & 1-y \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0.$$

- (c) Le rang de q est 1, donc la courbe c'est une conique sans centre ; c'est une parabole.

6. Si x_0 est solution de $P = X^2 - 3$, et si P et Q ont une racine commune, alors $y = x_0 \pm \sqrt{7}$. Mais une condition nécessaire et suffisante, pour que les polynômes P et Q_y ont une racine commune, c'est que :

$$\text{Res}(P, Q_y) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & y^2 - 7 & 0 \\ 0 & -3 & -2y & y^2 - 7 \\ 1 & 0 & 1 & -2y \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y^4 - 20y + 16 = 0$$

On prend donc le polynôme $X^4 - 20X + 16$. Les autres racines sont $\sqrt{3} - \sqrt{7}, -\sqrt{3} - \sqrt{7}$ et $-\sqrt{3} + \sqrt{7}$.

• • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr