

Exemples d'utilisation du théorème de Courant–Fischer

## 1<sup>ère</sup> Partie

### A- Étude d'une matrice

$$1. M = U {}^tU = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (u_1 \quad \dots \quad u_n) = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2^2 & & u_2 u_n \\ \vdots & & & \vdots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \dots & u_n^2 \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$ , on a :  $m_{i,j} = u_i u_j$  et  $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n u_i^2$ .

- La  $j$ -ème colonne de  $M$  est  $u_j U$ .
- On sait que le rang d'une matrice est égal à celui de ses colonnes, or toutes les colonnes de  $M$  sont proportionnelles à  $U$ , donc leur rang vaut 1, d'où  $\text{rg}(M) = 1$ .
- $\text{rg}(M) = 1 \neq n$ , donc  $M$  n'est pas inversible en particulier 0 est une valeur propre de  $M$ , d'autre part  $MY = 0 \Leftrightarrow {}^t Y U {}^t U Y = 0 \Leftrightarrow \|{}^t U Y\| = 0 \Leftrightarrow {}^t U Y = 0$  d'où le sous-espace propre associé est égale à  $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t U Y = 0\}$ . Sa dimension est  $n - 1$  car c'est un hyperplan de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle  $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $Y \longmapsto {}^t U Y$ .
- $MU = U {}^t U U$ , donc  ${}^t U U$  est une autre valeur propre de  $M$  avec  $U$  est un vecteur propre, et dont la dimension du sous-espace propre associé ne peut pas dépasser 1, puisque déjà celui associé à 0 est de dimension  $n - 1$ , donc sa dimension est 1, engendré par  $U$ .
- La matrice  $M$  est orthogonalement semblable à la matrice diagonale  $D = \text{diag}({}^t U U, 0, \dots, 0)$ , car les sous-espaces associée respectivement aux valeurs propres  ${}^t U U$  et 0 sont  $\text{Vect}(U)$  et  $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t U Y = 0\} = \text{Vect}(U)^\perp$  de dimension 1 et  $n - 1$ .

### B- Théorème de Courant–Fischer

- Parceque toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.
- $R_A(e_k) = \frac{\langle A e_k, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} = \frac{\langle f(e_k), e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} = \lambda_k$ , pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  car  $f(e_k) = \lambda_k e_k$ .
- $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , donc  $f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$ , d'où  $\langle f(v), v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$  et  $\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$ .
- On a  $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ , d'où  $\lambda_1 \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 \leq \langle f(v), v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \langle v, v \rangle$ ,  
donc  $\lambda_1 \leq R_A(v) \leq \lambda_n \quad \forall v \neq 0$ , d'où  $\lambda_1 \leq \min_{v \neq 0} R_A(v)$  et  $\lambda_n \geq \max_{v \neq 0} R_A(v)$ , d'autre part  
 $R_A(e_1) = \lambda_1$ , d'où  $\lambda_1 \geq \min_{v \neq 0} R_A(v)$  et  $R_A(e_n) = \lambda_n$  d'où  $\lambda_n \geq \max_{v \neq 0} R_A(v)$ .  
Donc :  $\lambda_1 = \min_{v \neq 0} R_A(v)$  et  $\lambda_n = \max_{v \neq 0} R_A(v)$ .

5. Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $w \in V_k \implies w = \sum_{i=1}^k x_i e_i \implies \langle f(w), w \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2$  et  $\langle w, w \rangle = \sum_{i=1}^k x_i^2$ , d'où  $R_A(w) = \frac{\langle f(w), w \rangle}{\langle w, w \rangle} \leq \lambda_k \quad \forall w \in V_k \setminus \{0\}$ , d'où  $\lambda_k \geq \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$  or  $e_k \in V_k \setminus \{0\}$  et  $R_A(e_k) = \lambda_k$ , d'où  $\lambda_k = \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$ .
6. (a) Supposons  $\dim(F_1 \cap \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)) = 0$ , alors  $\dim(F_1 \oplus \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)) = k + (n - k + 1) = n + 1$ , impossible puisque  $(F_1 \oplus \text{Vect}(e_k, \dots, e_n))$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  qui est de dimension  $n$ , d'où  $\dim(F_1 \cap \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)) \neq 0$  et par suite  $\dim(F_1 \cap \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)) \geq 1$ .
- (b)  $w \in F_1 \cap \text{Vect}(e_k, \dots, e_n) \implies w = \sum_{i=k}^n x_i e_i \implies \langle f(w), w \rangle = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2$  et  $\langle w, w \rangle = \sum_{i=k}^n x_i^2$ , d'où  $R_A(w) = \frac{\langle f(w), w \rangle}{\langle w, w \rangle} \geq \lambda_k$ .
- (c) D'après 5.) on a :  $\lambda_k = \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$  et  $V_k \in \mathcal{F}_k$ , d'où  $\lambda_k \geq \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left( \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \right)$ , et d'après 6.b)  $\lambda_k \leq R_A(w) \leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \quad \forall F \in \mathcal{F}_k$ , d'où  $\lambda_k \leq \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left( \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \right)$ , d'où l'égalité.
7. (a) L'application  $\psi_A : v \mapsto \langle Av, v \rangle$  est continue sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  en tant que produit scalaire de deux fonctions continues car linéaires  $v \mapsto Av$  et  $v \mapsto v$  et on en déduit la continuité de l'application  $R_A$  sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  car rapport de deux fonctions continues  $v \mapsto \langle Av, v \rangle$  et  $v \mapsto \langle v, v \rangle$  avec un dénominateur qui ne s'annule jamais.
- (b) Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , on cherche à les relier par un chemin qui ne passe pas par l'origine.
- 1<sup>er</sup> cas  $0 \notin [A, B]$  alors le chemin  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  fera bien l'affaire.  
$$t \longmapsto tA + (1-t)B$$
  - 1<sup>er</sup> cas  $0 \in [A, B]$ , on se fixe un élément  $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  tel que  $0 \notin [A, C]$  et  $0 \notin [C, B]$ , on relie alors  $A$  à  $C$  puis  $C$  à  $B$ .
- D'où l'ensemble  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  est connexe par arcs et l'image de l'application  $R_A$  est aussi un ensemble connexe par arcs de  $\mathbb{R}$ , donc un intervalle car les seuls connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont ses intervalles.
- (c) D'après ce qui précède  $\{R_A(v), v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\}$  est un intervalle, or  $\lambda_1 = \min_{v \neq 0} R_A(v)$  et  $\lambda_n = \max_{v \neq 0} R_A(v)$ . D'où  $\{R_A(v), v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\} = [\lambda_1, \lambda_n]$

## 2<sup>ème</sup> Partie

1. Soit  $B$  une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$ .  
supposons  $B$  définie positive et soit  $\lambda$  une valeur propre de  $B$  et  $X$  un vecteur propre associé, alors  ${}^t X B X = \lambda \|X\|^2 > 0$  d'où  $\lambda > 0$   
Inversement, supposons  $B$  admet deux valeurs propres  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ , comme  $B$  est symétrique alors elle orthogonalement diagonalisable, c'est à dire  $\exists P$  inversible telle que  $B = {}^t P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P$ , d'où  $\forall X \neq 0$  on a :  ${}^t X B X = {}^t X {}^t P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} P X = {}^t Y Y > 0$   
où  $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} P X \neq 0$  car  $X \neq 0$ , d'où  $B$  est définie positive.  
Conclusion :  $B$  est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

2. (a)  $A$  est définie positive, donc pour  ${}^tX = (1, 0) \neq 0$  on a :  $a = {}^tXAX > 0$  d'autre part  $\det(A) = ac - b^2 > 0$  car c'est le produit des valeurs propres de  $A$ .
- (b) Tout calcul fait :  ${}^tXAX = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \left( (x + \frac{b}{a}y)^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2})y^2 \right) = a \left( (x + \frac{b}{a}y)^2 + (\frac{ac-b}{a^2})y^2 \right) > 0$ . Donc  $A$  est définie positive.
3. (a) Montrer que  $\langle g(x), y \rangle = \langle p \circ f(x), y \rangle = \langle f(x), p(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$  car  $p$  projecteur orthogonal sur  $H$  et  $y \in H$  et de même  $\langle x, g(y) \rangle = \langle x, f(y) \rangle$  or  $f$  est symétrique d'où  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ , donc  $\langle g(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$ , et alors  $g$  est un endomorphisme autoadjoint de  $H$ .
- (b) Soit  $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$  base propre orthonormée de  $H$  associée à  $g$  dont les valeurs propres sont  $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  on pose :  $V'_k = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_k)$ , comme précédemment on montre que  $\mu_k = \max_{v \in V'_k \setminus \{0\}} R_A(v)$ , or  $V'_k \in \mathcal{F}_k$  et
- $$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left( \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \right), \text{ d'où } \lambda_k \leq \mu_k.$$
- (c) Soit  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .
- i. Supposons  $\dim(F \cap H) < k$ , donc  $\dim(F + H) = \dim F + \dim H - \dim(F \cap H) = n + k - \dim(F \cap H) > n$ , impossible puisque  $F \cap H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$  qui est de dimension  $n$  d'où  $\dim(F \cap H) \geq k$ .
- ii.  $g(v) = p(f(v))$ , donc  $g(v) - f(v) \in H^\perp$ , or  $v \in H$ , d'où  $\langle g(v) - f(v), v \rangle = 0$  et donc  $\langle g(v), v \rangle = \langle f(v), v \rangle$ , en particulier
- $$\langle g(v), v \rangle \leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle f(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle} \quad \forall v \in G \setminus \{0\}, \text{ d'où}$$
- $$\max_{v \in G \setminus \{0\}} \frac{\langle g(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle} \leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle f(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$
- iii. En passant au min dans l'inégalité précédente et en utilisant le théorème de Courant-Fischer à gauche pour  $g$  et à droite pour  $f$  et vu que  $G$  est de dimension  $k$  et  $F$  de dimension  $k+1$ , on conclut que  $\mu_k \leq \lambda_{k+1}$ .
4. (a)  $A_{n-1}$  n'est autre que la matrice de  $g$ , elle est symétrique car  $g$  est auto-adjoint.
- (b) Application directe de ce qui précède on a  $\lambda_k \leq \mu'_k \leq \lambda_{k+1}$  puisque les  $\mu'_k$  sont aussi valeurs propres de  $g$ .
- (c) Si la matrice  $A$  est définie positive, alors toutes ses valeurs propres  $\lambda_k$  sont strictement positives il en sera de même pour les valeurs propres  $\mu'_k$  de la matrice  $A_{n-1}$ , or  $A_{n-1}$  est symétrique donc orthogonalement diagonalisable, d'où  $\exists P$  inversible telle que  $A_{n-1} = {}^tP$
- $$P \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & & \mu'_n \end{pmatrix} P, \text{ d'où } \forall X \neq 0 \text{ on a :}$$
- $${}^tX A_{n-1} X = {}^tX {}^tP \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & & \mu'_n \end{pmatrix} P X = {}^tY Y > 0 \text{ où}$$
- $$Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu'_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & & \sqrt{\mu'_n} \end{pmatrix} P X \neq 0 \text{ car } X \neq 0, \text{ d'où } A_{n-1} \text{ est définie positive.}$$
5. (a) Si  $A$  est définie positive alors toutes les matrices  $A_k$  sont aussi définie positive d'après la question précédente, donc leurs déterminants sont tous strictement positifs.

(b) Le résultat est déjà vérifié pour  $n = 2$ .

Supposons le résultat vrai pour  $n - 1$ , on peut donc déjà affirmer que  $A_{n-1}$  est définie positive, d'où  $\mu'_k > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n - 1$ , en particulier  $\lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$ , or

$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$ , d'où  $\lambda_1 > 0$ , ainsi  $A$  est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, donc définie positive.

#### 6. Un exemple d'utilisation :

(a) Montrer que, pour tout  $t \in [0, 1]$ , la matrice  $M(t)$  est symétrique définie positive.

(b) En déduire que la matrice  $\forall X \neq 0^t X M_1 X = {}^t X (\int_0^1 M(t) dt) X = \int_0^1 {}^t X M X dt > 0$  car  ${}^t X M X > 0$ , d'où  $M_1$  est définie positive.

### 3<sup>ème</sup> Partie

#### A- Une deuxième application

- (a)  $\forall F \in \mathcal{F}_k, \quad \forall v \in F \setminus \{0\}$  on a :  $R_{A'}(v) = R_A(v) + R_E(v)$  d'où

$$\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_{A'}(v) = \max_{v \in F \setminus \{0\}} (R_A(v) + R_E(v)) \leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) + \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_E(v) \leq$$

$$\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) + \max_{v \neq 0} R_E(v) = \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) + \mu_n \text{ d'où}$$

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_{A'}(v) \leq \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) + \mu_n \text{ et donc } \lambda'_k \leq \lambda_k + \mu_n, \text{ d'autre part,}$$

$\forall F \in \mathcal{F}_k, \quad \forall v \in F \setminus \{0\}$  on a :  $R_{A'}(v) = R_A(v) + R_E(v) \geq R_A(v) + \mu_1$ , en passant une première fois au max sur  $v \in F \setminus \{0\}$  puis une deuxième fois au min sur  $F \in \mathcal{F}$  on obtient l'autre égalité d'où pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on a :  $\lambda_k + \mu_1 \leq \lambda'_k \leq \lambda_k + \mu_n$ .

(b) D'après la question précédente on a :  $\mu_1 \leq \lambda'_k - \lambda_k \leq \mu_n$ , d'où  $|\lambda'_k - \lambda_k| \leq \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$ , montrons alors que  $\|A - A'\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|(A - A')X\|}{\|X\|} = \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$ , en effet  $A - A' = E$  est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormale,  $(e'_1, \dots, e'_n)$  associée aux valeurs propres  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ , d'où  $|\mu_k| \leq \max(|\mu_1|, |\mu_n|) = r$ , et  $\forall X \neq 0$  on a  $X = \sum_{k=1}^n x_k e'_k$ , d'où  $X = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k e'_k$  en particulier  $\|EX\|^2 = \sum_{k=1}^n \mu_k^2 x_k^2 \leq r^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 = r^2 \|X\|^2$ , d'où  $\|A - A'\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|EX\|}{\|X\|} \leq r$ , d'autre part  $\|A - A'\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|EX\|}{\|X\|} \geq \frac{\|Ee'_1\|}{\|e'_1\|} = |\mu_1|$  et  $\|A - A'\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|EX\|}{\|X\|} \geq \frac{\|Ee'_n\|}{\|e'_n\|} = |\mu_n|$ , d'où  $\|A - A'\| \geq \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$  d'où l'égalité.
- Soit  $A \in S_n^+$ , on cherche  $\varepsilon > 0$  tel que :  $\|A - A'\| \leq \varepsilon \implies A' \in S_n^+$ , en effet :

$$\|A - A'\| \leq \varepsilon \implies |\lambda'_k - \lambda_k| \leq \varepsilon - \varepsilon \geq \lambda'_k - \lambda_k \implies \lambda_k - \varepsilon \geq \lambda'_k \implies \min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k - \varepsilon \geq \lambda'_k,$$

si on prend  $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k > 0$ , alors  $\lambda'_k \geq \frac{1}{2} \min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k > 0, \quad \forall 1 \leq k \leq n$ , ainsi toutes les valeurs propres de  $A'$  qui est symétrique sont strictement positives, d'où  $A'$  est définie positive.

#### B- Une dernière application

- Les matrices  $R$  et  $S$  sont orthogonales, d'où

$${}^t R R = I_n \text{ et } {}^t S S = I_{n-1}, \text{ d'où } {}^t Q Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t S \end{pmatrix} {}^t R R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t S S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n, \text{ d'où la matrice } Q \text{ est orthogonale.}$$
- Simple calcul, en utilisant les relations :  ${}^t R M R = \begin{pmatrix} {}^t U U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, {}^t R A R = \begin{pmatrix} \alpha & {}^t a \\ a & A_{n-1} \end{pmatrix}$  et  ${}^t S A_{n-1} S = \text{diag}(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

3. On a  $A_\varepsilon - A = \varepsilon M$ , donc  $A_\varepsilon$  jouera le rôle de  $A'$  et  $\varepsilon M$  celui de  $E$ , dont les valeurs propres sont  $\mu_1 = 0$  et  $\mu_n = \varepsilon^t U U$ .
4. (a) C'est un résultat du cours puisque la matrice  $Q$  est orthogonale.

(b) le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  ${}^t Q A Q$  s'obtient en faisant le produit scalaire de la  $i$ -ème ligne de  ${}^t Q$  avec la  $j$ -ème colonne de  $A Q = A C_j$ , donc ce coefficient est

$${}^t C_i A C_j = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j = 1 \\ \alpha_i & \text{si } i = j \geq 2 \\ \beta_i & \text{si } i = 1, j \geq 2 \text{ ou } j = 1, i \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Soit } X = \sum_{i=1}^n y_i C_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ alors } {}^t X A X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j {}^t C_i A C_j = \alpha y_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i^2 + 2 \sum_{j=2}^n \beta_j y_1 y_j.$$

(c) De manière analogue on a :  ${}^t X A_\varepsilon X = (\alpha + \varepsilon^t U U) y_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i^2 + 2 \sum_{j=2}^n \beta_j y_1 y_j = {}^t$

$$X A X + \varepsilon^t U U y_1^2.$$

$$\text{Ainsi } R_{A_\varepsilon}(X) = \frac{{}^t X A_\varepsilon X}{\langle X, X \rangle} =$$

$$\frac{{}^t X A X + \varepsilon^t U U y_1^2}{\langle X, X \rangle} = R_A(X) + \varepsilon^t U U \frac{y_1^2}{\langle X, X \rangle}.$$

(d) Choisir  $X \in F$  tel que :  $F \in \mathcal{F}_2$  avec  $y_1 = 0$ .

FIN DE L'ÉPREUVE