Corrigé CCP PSI Mathématiques 2 2003

PARTIE I

1. Pour tout x de $[-1,1]$, $\cos(\arccos x) = x$

Pour tout réel θ , $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ et $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

On a alors, pour tout x de $[-1,1]$: $t_0(x) = \cos 0 = 1$, $t_1(x) = \cos(\arccos x) = x$ et

$t_2(x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$, $t_3(x) = 4\cos^3(\arccos x) - 3\cos(\arccos x) = 4x^3 - 3x$.

2. En résolvant les équations $t_i(x) = 0$ pour tout entier i compris entre 0 et 4, on obtient :

t_0 n'a pas de racine réelle tandis que t_1 a une unique racine 0.

t_2 a deux racines réelles $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } -\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$. t_3 a trois racines réelles $\boxed{0, \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } -\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

D'autre part, la fonction t_1 est croissante sur $[-1,1]$ et pour tout x de $[-1,1]$, $t_2'(x) = 4x$ et $t_3'(x) = 3(4x^2 - 1)$ ce qui donne les tableaux de variations suivants :

x	-1		0		1
$t_2(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
$t_3(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

On constate que pour tout entier i compris entre 1 et 3 $\boxed{\sup_{[-1,1]} t_i = 1 \text{ et } \inf_{[-1,1]} t_i = -1}$

3. On a $t_n(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \arccos x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

Mais $\arccos x \in [0,\pi]$ et $0 \leqslant \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \leqslant \pi \Leftrightarrow 0 \leqslant 2k+1 \leqslant 2n \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant n - \dfrac{1}{2}$ ce qui équivaut, puisque k est un entier à $k \in [\![0..n-1]\!]$.

Les racines de t_n sont donc les $\boxed{x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \text{ où } k \in [\![0..n-1]\!]}$.

Or, pour tout $k \in [\![0..n-1]\!]$, $x_{n-1-k} = \cos\left(\dfrac{(2n-2k-1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = -x_k$.

Les racines de t_n sont bien deux à deux opposées.

4. 4.1. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = e^{i\frac{p\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{p\pi}{n}}\right)^k = e^{i\frac{p\pi}{2n}} \frac{1 - \left(e^{i\frac{p\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{p\pi}{n}}}$ car on a une somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\frac{p\pi}{n}} \neq 1$ et de premier terme égal à 1.

Ceci donne après simplifications : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = \frac{i(1-(-1)^p)}{2\sin\left(\dfrac{p\pi}{2n}\right)}}$.

4.2. En prenant les parties réelles des 2 membres de l'égalité précédente, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos p\theta_k = 0$.

Or, pour tout k de $[\![0..n-1]\!]$, θ_k appartient à $[0, \pi]$ et $x_k = \cos\theta_k$ donc $x_k = \arccos\theta_k$.

Finalement, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos p\theta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(p \arccos x_k)$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = 0}$.

5. Notons comme l'énoncé l'indique pour tout x de $[-1, 1]$, $\theta = \arccos x$. Alors, pour $n \geqslant 1$, en utilisant la relation $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$:

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos\theta = 2xt_n(x)$$

6. Montrons par récurrence sur n:

$$\boxed{(H_n) : \text{" } t_n \text{ est la restriction à } [-1,1] \text{ d'un polynôme } T_n \text{ de degré } n \text{ "}}$$

(H_0) et (H_1) sont vraies en prenant $T_0 = 1$ et $T_1 = X$.

Supposons pour (H_n) et (H_{n+1}) soient vraies.

Alors, en notant $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, d'après la relation établie au **5.**, on a pour tout x de $[-1, 1]$, $t_{n+2}(x) = T_{n+2}(x)$. De plus XT_{n+1} est de degré $n+2$ tandis que T_n est de degré n. Ces degrés sont différents, donc T_{n+2} est de degré $n+2$ ce qui montre que (H_{n+2}) est vraie.

Si on note c_n le coefficient dominant de T_n, la relation valable pour $n \geqslant 1$, $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ donne pour tout $n \geqslant 1$, $c_{n+1} = 2c_n$. Comme $c_1 = 1$, on obtient pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{c_n = 2^{n-1}}$.

7. L'ensemble $\{\theta_k,\ k \in [\![0..n-1]\!]\}$ est constitué de n réels 2 à 2 distincts de $[0, \pi]$. Or $x \mapsto \cos x$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Donc $\{x_k,\ k \in [\![0..n-1]\!]\}$ est un ensemble de n réels distincts. Chaque x_k est racine de T_n est de degré n. On a donc toutes les racines de T_n et $\boxed{T_n \text{ n'a pas de racine complexe non rélle}}$.

PARTIE II

1. La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $]-1, 1[$.

Comme f est continue sur le segment $[-1, 1]$, elle est bornée par un réel noté M.

On a $\forall x \in [0, 1[,\ |\varphi(x)| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{1-x}}$.

De plus $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégralle sur $[0, 1[$ donc φ est intégrable sur $[0, 1[$. On démontre de même qu'elle l'est sur $]-1, 0]$ et donc $\boxed{x \mapsto \dfrac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est intégrable sur }]-1, 1[}$.

2. 2.1. $I_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a\to 1^-\\ b\to -1^+}} [\arcsin x]_b^a$. Donc $\boxed{I_0 = \pi}$

$I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a\to 1^-\\ b\to -1^+}} \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right]_b^a$. D'où $\boxed{I_1 = 0}$

2.2. $x \mapsto \cos x$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone de $]0,\pi[$ dans $]-1,1[$.
En effectuant le changement de variable $x = \cos\theta$, on obtient :

$$I_n = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos^n\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}}(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \cos^n\theta\mathrm{d}\theta$$

Une intégration par parties donne pour $n \geqslant 2$:

$$I_n = [\cos^{n-1}\theta\sin\theta]_0^{\pi} + (n-1)\int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos^{n-2}\theta\mathrm{d}\theta$$

En remplaant $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$ dans la dernière intégrale, on obtient pour $n \geqslant 2$, $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ ce qui donne $\boxed{I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}}$.

2.3. En appliquant la relation précédente avec $n = 2$ et $n = 4$,

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{2} \qquad I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{8}}$$

De plus comme $I_1 = 0$, on a $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = 0}$.

3. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$.

3.1. Pour f et g dans $\mathcal{C}$, $< f,g > = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
$< f,g >$ est bien définie d'après **II.1.** appliqué à fg qui appartient à $\mathcal{C}$.
$(f,g) \mapsto < f,g >$ est bilinéaire et symétrique.
Soit $f \in \mathcal{C}$. On a $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive)
Si $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$, comme $x \to \dfrac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$, on a $\forall x \in]-1,1[\,,\ \dfrac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ d'où $\forall x \in]-1,1[\,,\ f(x) = 0$.
De plus, comme f est continue en 1, $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$ et de même, on démontre que $f(-1) = 0$. Finalement $\forall x \in [-1,1]\,,\ f(x) = 0$.
On a montré que $\boxed{(f,g) \mapsto < f,g > \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{C}}$

3.2. Soit p et q deux entiers distincts de $[\![0..n]\!]$.
En utilisant de nouveau le changement de variable $\theta = \arccos x$, on a :

$$< t_p, t_q > = \int_0^{\pi} t_p(\cos\theta)t_q(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \cos p\theta\cos q\theta\mathrm{d}\theta$$

ce qui donne

$$< t_p, t_q >= \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \cos\left(\frac{p+q}{2}\theta\right)\mathrm{d}\theta + \int_0^\pi \cos\left(\frac{p-q}{2}\theta\right)\mathrm{d}\theta\right) = 0$$

La famille $(t_p)_{0\leq p\leq n}$ est donc orthogonale. De plus ces éléments sont non nuls. On a donc une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathcal{R}_n$ qui est de dimension $n+1$. On peut donc conclure que $\boxed{(t_p)_{0\leq p\leq n} \text{ est une base de } \mathcal{R}_n}$.

Le même changement de variable donne $\|t_p\| = \sqrt{\int_0^\pi \cos^2 p\theta \mathrm{d}\theta} = \sqrt{\int_0^\pi \frac{\cos 2p\theta + 1}{2}\mathrm{d}\theta}$ ce qui donne $\boxed{\|t_0\| = \sqrt{\pi} \text{ et pour } p \neq 0,\ \|t_p\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

3.3. Soit $n \geqslant 1$ et $k \in [\![0..n-1]\!]$. $x \mapsto x^k$ appartient à $\mathcal{R}_{n-1}$.

Il existe donc $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ tels que pour tout x de $[-1,1]$, $x^k = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j t_j(x)$.

Alors $\int_{-1}^1 \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j < t_j, t_n >$ et comme t_n est orthogonal à tous les vecteurs de la famille $(t_j)_{0\leq j\leq n-1}$, on a $\boxed{\int_{-1}^1 \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 0}$

4. On note (1) $\quad \int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = a_0 P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4.1. Si (1) est satisfaite pour tout P de $\mathcal{R}_5$, en prenant successivement $P(x) = 1$, $P(x) = x$ et $P(x) = x^2$, on obtient le système $\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = \pi \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 = 0 \\ \frac{3}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

La seconde équation donne $a_0 = a_2$. En reportant dans la troisième, on trouve $a_0 = a_2 = \frac{\pi}{3}$ puis avec la première, on aboutit à $\boxed{a_0 = a_1 = a_2 = \frac{\pi}{3}}$.

4.2. Avec ces valeurs: $a_0\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + a_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 2 \times \frac{9}{16} \times \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{8} = I_4 = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ et $a_0\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + a_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = 0 = I_5 = \int_{-1}^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

L'égalité (1) est donc vraie pour tout P de la forme $P(x) = x^k$ où $k \in [\![0..5]\!]$. (Le cas $k = 3$ se montre comme les deux autres). Si P appartient à $\mathcal{R}_5$, il existe $(p_0, \ldots, p_5) \in \mathbb{R}^6$ tel que pour tout x de $[-1,1]$, $P(x) = \sum_{k=0}^{5} p_k x^k$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{5} p_k \int_{-1}^{1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{5} p_k \left(a_0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k + a_1 0^k + a_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \right) \\
&= a_0 \sum_{k=0}^{5} p_k \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k + a_1 \sum_{k=0}^{5} a_k 0^k + a_2 \sum_{k=0}^{5} p_k \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \\
&= a_0 P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

5. 5.1. Notons g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = \dfrac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$.

g est continue positive sur $]0,1]$.

On a $g(x) \underset{0}{\sim} x^{\frac{7}{2}}$ donc g est prolongeable par continuité en 0 et g est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.

D'autre part, $g(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$ donc g aussi.

Finalement $\boxed{g \text{ est intégrable sur }]0,1[}$.

5.2. $x \mapsto 2x-1$ est une bijection strictement croissante de $]0,1[$ dans $]-1,1[$. On peut donc effctuer le changement de variable $t = 2x-1$ dans $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$. On obtient : $J = \dfrac{1}{16}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^4}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$. On peut appliquer la formule (1) avec $P(t) = (1+t)^4$.

Ainsi $J = \dfrac{1}{16} \times \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{(2-\sqrt{3})^4}{16} + 1 + \dfrac{(2+\sqrt{3})^4}{16}\right)$ et $\boxed{J = \dfrac{35\pi}{128}}$

PARTIE III

On note (2) $\qquad \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x_k)$.

1. Si l'égalité (2) est satisfaite pour toutes les fonctions $x \mapsto x^i$ où i est un entier de $[\![0..n-1]\!]$, on a :

$$\forall i \in [\![0..n-1]\!], \qquad \sum_{k=0}^{n-1} x_k^i a_k = \int_{-1}^{1} \frac{x^i}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

Ainsi le n-uplet $(a_0, \dots, a_{n-1})$ est solution d'un système de n équations dont la matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a pour terme général $\boxed{b_{ij} = x_{j-1}^{i-1}}$. Le déterminant de ce système est donc un déterminant de van der Mond qui est non nul car $x_0, \dots, x_{n-1}$ sont deux à deux distincts.

2. 2.1. Soit les formes linéaires φ_1 et φ_2 définies sur $\mathcal{R}_{n-1}$ par :

$$\varphi_1(P) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \qquad\qquad \varphi_2(P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x_k)$$

Par hypothèse, pour tout k de $[\![0..n-1]\!]$, $\varphi_1(t_k) = \varphi_2(t_k)$.

Or $(t_k)_{0\le k\le n-1}$ est une base de $\mathcal{R}_{n-1}$.

Donc pour tout P de $\mathcal{R}_{n-1}$, $\varphi_1(P) = \varphi_2(P)$ c'est à dire $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x_k)}$.

(On aurait aussi pu raisonner comme à la question **II.4.2** en décomposant P dans la base $(t_k)_{0\le k\le n-1}$)

2.2 Les questions **III.1** et **III.2.1** assurent que si le n-uplet $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ existe, il est unique.

De plus, par hypothèse : $\forall i \in [\![0..n-1]\!]$, $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k t_i(x_k) = \int_{-1}^{1} \frac{t_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =< t_0, t_i >$.

Avec les valeurs trouvées au **II.3.2** et **II.3.3**, l'hypothèse faite équivaut à $(a_0, \ldots, a_n)$ solution de :

$$(S)\begin{cases} a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \pi \\ \forall i \in [\![1..n-1]\!], \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k t_i(x_k) = 0 \end{cases}$$

Comme pour tout i de $[\![1..n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_i(x_k) = 0$, on peut dire que le n-uplet $\left(\dfrac{\pi}{n}, \ldots, \dfrac{\pi}{n}\right)$ est solution de (S).

Ainsi $\boxed{\text{si on prend tous les } a_k \text{ égaux à } \dfrac{\pi}{n}, \text{ (2) est vérifiée pour tout } P \text{ de } \mathcal{R}_{n-1}}$.

2.3. Soit P dans $\mathcal{R}_{2n-1}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe deux éléments Q et R de $\mathcal{R}$ tels que pour tout x de $[-1, 1]$, $P(x) = Q(x)t_n(x) + R(x)$.

De plus R appartient à $\mathcal{R}_{n-1}$. On en déduit que Q appartient aussi à $\mathcal{R}_{n-1}$.

Comme pour tout k de $[\![0..n-1]\!]$, $t_n(x_k) = 0$, on a aussi $P(x_k) = R(x_k)$.

En écrivant $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q_k x^k$, le résultat de **II.3.3** implique que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{Q(x)t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 0$.

Comme (2) est vérifiée pour R car R appartient à $\mathcal{R}_{n-1}$, on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k R(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x_k) = S_n(P)$$

3. 3.1. Soit $P \in \mathcal{R}$ de degré d.

Si $d \le 2n-1$, alors P appartient à $\mathcal{R}_{2n-1}$ et P vérifie (2). Donc $D_n(P) = 0$.

Notons n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{d+1}{2}$. Si $n \ge n_0$, $D_n(P) = 0$ et :

$$
\begin{aligned}
|D_n(f)| &= |D_n(f) - D_n(P)| = \left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x) - P(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k (f(x_k) - P(x_k)) \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} \frac{|f(x) - P(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n} |a_k| |f(x_k) - P(x_k)| \\
&\leq \|f - P\|_\infty \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) = 2\pi \|f - P\|_\infty
\end{aligned}
$$

car tous les a_k sont positifs et égaux à $\dfrac{\pi}{n}$.

3.2. Soit $\varepsilon > 0$.
D'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe P dans $\mathcal{R}$ tel que $\|f - P\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2\pi}$.
D'après **III.3.2**, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $|D_n(f)| \leq 2\pi \|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$.
Donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \ /\ n \geq n_0 \Longrightarrow \|D_n(f)\| \leq \varepsilon$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n(f) = 0$ c'est à dire $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x}$.

4. 4.1. Notons $u_k = \dfrac{1}{k!}$. On a pour $k \geq 1$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{1}{k+1}$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = 0$.
D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général $\dfrac{1}{k!}$ converge.

Notons $R_m = \displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Alors

$$
\begin{aligned}
R_m &= \frac{1}{(m+1)!} + \sum_{k=m+2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(m+1)!} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)k!} \\
&\leq \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{m+2} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{m+2} R_m
\end{aligned}
$$

On a donc $\left(1 - \dfrac{1}{m+2}\right) R_m \leq \dfrac{1}{(m+1)!}$ d'où $R_m \leq \dfrac{m+2}{(m+1)(m+1)!}$.
Or $\dfrac{1}{m.m!} - \dfrac{m+2}{(m+1)(m+1)!} = \dfrac{(m+1)^2 - m(m+2)}{m(m+1)(m+1)!} = \dfrac{1}{m(m+1)(m+1)!} \geq 0$.
On a donc $\boxed{R_m \leq \dfrac{1}{m.m!}}$.

4.2. On sait que pour tout réel x, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$. Pour tout x de $[-1, 1]$:

$$|e^x - P(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq R_m \leq \frac{1}{m.m!}$$

On a bien $\boxed{\|f - P\|_\infty \leq \frac{1}{m.m!} \text{ en prenant } P(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}}$.

4.3. Prenons $m = 7$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{7} \frac{x^k}{k!}$

D'après la question **III.3.1**,

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x - S_4(f)\right| = |D_4(f)| \leq 2\pi\|f - P\|_\infty \leq \frac{2\pi}{7.7!} \leq \frac{1}{7!} \leq 10^{-3}$$

Donc $\boxed{S_4(f) \text{ est une valeur approchée de } \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

4.4. $S_4(f) = \frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k}$ avec $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right)$.

Une valeur approchée de $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ à 10^{-3} près est $\boxed{3{,}977}$.