Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

CCP 2003 MP, Maths 1

• **Partie I**

1. a) $e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k$ donc, en prenant la partie réelle :

$\cos n\theta = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2j} (\cos\theta)^{n-2j}(i\sin\theta)^{2j} = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} (\cos\theta)^{n-2j}\,(1-\cos^2\theta)^j.$

Posons $T(x) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j}\, x^{n-2j}\,(1-x^2)^j$. T est un polynôme à coefficients réels tel que $\cos n\theta = T(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. De plus, dans la somme qui définit T, le terme d'indice j est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\binom{n}{2j}$; comme $\sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2j} > 0$, le degré de T est exactement n.

b) Si T et U sont deux polynômes vérifiant $(*)$, $(T-U)(\cos\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donc $T-U$ possède une infinité de racines, donc $T-U=0$.

2. a) $\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta$, donc $T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta\, T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta)$, donc pour tout $x \in [-1,\,1]$, $T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x)$.
Remarque : cette égalité est en fait valable pour tout réel x car deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux.

b) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ puis, avec le a), $T_2(x) = 2x^2 - 1$ et $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.

c) Le a) et une récurrence évidente montrent que le coefficient dominant de T_n est 1 si $n = 0$ et 2^{n-1} si $n \geqslant 1$.

3. a) On suppose ici $n \geqslant 1$. $T_n(\cos\theta_k) = \cos(n\theta_k) = \cos(k\pi + \pi/2) = 0$. Comme les θ_k appartiennent à $[0,\pi]$ et sont tous distincts, les $\cos\theta_k$ sont aussi tous distincts ; T_n étant de degré n, les $\cos\theta_k$ sont les seules racines de T_n et sont des racines simples ; compte tenu du 2.c), on en déduit la factorisation demandée de T_n.

b) $\|T_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,\,1]} |T_n(x)| = \sup\limits_{\theta\in\mathbb{R}} |T_n(\cos\theta| = \sup\limits_{\theta\in\mathbb{R}} |\cos n\theta| = 1.$

D'autre part, $T_n(c_k) = T_n\left(\cos\dfrac{k\pi}{n}\right) = \cos k\pi = (-1)^k$, d'où les deux autres propriétés demandées.

• **Partie II**

4. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,\,1[$ car elle est positive et $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} b - \operatorname{Arcsin} a \leqslant \pi$ pour tout $[a,b] \subset\,]-1,\,1[$. $\left|\dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leqslant \dfrac{\|h\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}}$, donc $t \longmapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est aussi intégrable sur $]-1,\,1[$.

5. a) Par positivité stricte de l'intégrale pour les fonctions continues, h est nulle sur $]-1,\,1[$; par continuité en -1 et en 1, h est nulle sur $[-1,\,1]$.

b) L'application $\langle\ ,\ \rangle$ est bien définie sur $E\times E$ d'après 4., elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale et évidemment symétrique et positive ; plus précisément, elle est définie positive d'après a), c'est donc un produit scalaire sur E.

6. La définition de $\langle\ ,\ \rangle$ et le changement de variable $t = \cos\theta$ donnent :

$\langle T_n, T_m\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)\,T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi T_n(\cos\theta)\,T_m(\cos\theta)\;\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos n\theta\,\cos m\theta\,\mathrm{d}\theta.$

D'où $\langle T_n, T_m\rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \big(\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta\big)\;\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } m=n=0 \\ \pi/2 & \text{si } m=n\geqslant 1 \\ 0 & \text{si } m\neq n. \end{cases}$

$(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc une famille orthogonale de $n+1$ vecteurs non nuls de l'e.v. E_n, qui est de dimension $n+1$; c'est par conséquent une base orthogonale de E_n.

7. a) E_n est un sous-e.v. de dimension finie de l'espace préhilbertien $\big(E, \langle\ ,\ \rangle\big)$ donc, par théorème, la distance de f à E_n est atteinte en un unique élément de E_n, à savoir le projeté orthogonal de f sur E_n.

b) La famille $\left(\dfrac{T_k}{\|T_k\|_2}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n donc, d'après le cours et les questions 6. et 7.a) :

$$t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle \frac{T_k}{\|T_k\|_2}\,, f \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|_2} = \frac{1}{\pi}\Big(\langle T_0, f\rangle\,T_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\langle T_k, f\rangle\,T_k\Big).$$

8. $f = t_n(f) + \big(f - t_n(t)\big)$ et $t_n(f) \perp f - t_n(f)$ donc $\|f\|_2^2 = \|t_n(f)\|_2^2 + \|f - t_n(f)\|_2^2 = \|t_n(f)\|_2^2 + d_2(f, E_n)^2$.

Mais d'après 7.b) et l'expression de la norme en base orthonormale, $\|t_n(f)\|_2^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$, d'où le résultat.

9. a) $\sum \dfrac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont, selon 8., majorées par $\|f\|_2^2$; elle est donc convergente.

b) $\|T_n\|_2^2 = \frac{\pi}{2}$ pour $n \geqslant 1$, donc la série $\sum \langle f, T_n\rangle^2$ est aussi convergente, et en particulier son terme général tend vers 0 ; autrement dit, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

10. a) $\|h\|_2^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{h(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \|h\|_\infty^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \|h\|_\infty^2 \big[\operatorname{Arcsin} t\big]_{-1}^{1} = \pi\,\|h\|_\infty^2$, d'où le résultat.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme p tel que $\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon/\sqrt{\pi}$, d'où il résulte, d'après a), que $\|f - p\|_2 \leqslant \varepsilon$.

Fixons un tel p et notons N son degré. Pour $n \geqslant N$, p appartient à E_n, donc $\|f - t_n(f)\|_2 \leqslant \|f - p\|_2 \leqslant \varepsilon$.

Cela démontre, par retour à la définition, que la suite $\big(\|f - t_n(f)\|_2\big)$ converge vers 0, ou encore que la suite $\big(t_n(f)\big)$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_2$.

11. a) Il suffit de faire tendre n vers l'infini dans l'égalité du 8., puisque $d_2(f, E_n) = \|f - t_n(f)\|_2$.

b) Pour une telle fonction h, le a) donne $\|h\|_2 = 0$, c'est-à-dire $h = 0$.

• **Partie III**

12. a) - Le polynôme nul appartient à K, donc K n'est pas vide.

- K est l'image réciproque du fermé $\big]-\infty, \|f\|_\infty\big]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $Q \longmapsto \|f - Q\|_\infty$ de E_n dans $\mathbb{R}$, donc K est fermée.
- Pour tout $Q \in K$, $\|Q\|_\infty \leqslant 2\,\|f\|_\infty$ par inégalité triangulaire, donc K est bornée.

b) E_n est de dimension finie, donc par théorème toute partie de E_n fermée et bornée est compacte.

13. a) - $K \subset E_n$, donc $d_\infty(f, E_n) \leqslant d_\infty(f, K)$.

- Pour $Q \in E_n \setminus K$, $\|f - Q\|_\infty > \|f\|_\infty \geqslant d_\infty(f, K)$. On a donc $\|f - Q\|_\infty \geqslant d_\infty(f, K)$ pour tout $Q \in E_n$, et par suite $d_\infty(f, K) \leqslant d_\infty(f, E_n)$.

b) L'application $Q \longmapsto \|f - Q\|_\infty$ de K dans $\mathbb{R}$ est continue ; comme K est compact et non vide, elle admet un minimum global. Soit P un élément de K en lequel ce minimum est atteint, on a :
$$\|f - P\|_\infty = \min_{Q\in K} \|f - Q\|_\infty = \inf_{Q\in K} \|f - Q\|_\infty = d_\infty(f, K) = d_\infty(f, E_n).$$

14. b) On a établi cette propriété en **I**.3.b) ; les points recherchés sont les $x_k = \cos \dfrac{(n+1-k)\pi}{n+1}$, avec $k \in [\![0, n+1]\!]$.

15. a) $Q(x_i) - P(x_i) = Q(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - P(x_i) = Q(x_i) - f(x_i) + \|f - P\|_\infty \geqslant \|f - P\|_\infty - \|f - Q\|_\infty > 0$.

b) Les inégalités du a) et le théorème des valeurs intermédiaires montrent que le polynôme $Q - P$ possède au moins $n+1$ racines ; comme son degré est au plus n, c'est le polynôme nul, donc $Q = P$. Cela contredit l'hypothèse initiale sur Q.

On a donc $\|f - Q\|_\infty \geqslant \|f - P\|_\infty$ pour tout $Q \in E_n$; autrement dit P est un PMA d'ordre n de f.

16. - D'abord, q_n appartient à E_n, puisque T_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n.

- Ensuite, $f(x) - q_n(x) = 2^{-n}\,T_{n+1}(x)$ donc, selon 14.b), $f - q_n$ équioscille sur $n+2$ points.
- D'après 15., q_n est un PMA d'ordre n de la fonction $f : x \longmapsto x^{n+1}$.

17. Soit P un tel polynôme ; gardons les notations du 16. et posons $r_n(x) = x^{n+1} - P(x)$.
$r_n \in E_n$ donc d'après 16., $\|f - q_n\|_\infty \leqslant \|f - r_n\|_\infty$, , ce qui se réécrit $2^{-n}\,\|T_{n+1}\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$.

18. a) Notons α le coefficient dominant de f et posons $P = f - 2^{-n}\alpha T_{n+1}$. Par construction, P appartient à E_n ; de plus, $f - P = 2^{-n}\alpha T_{n+1}$, qui équioscille sur $n+2$ points, donc P est un PMA d'ordre n de f.

b) L'application à f de la formule du a) fournit le PMA d'ordre 2 $x \longmapsto 5x^3 + 2x - 3 - \frac{5}{4}\,(4x^3 - 3x) = \dfrac{23}{4}\,x - 3$.
