

Exercice 1

- a) Si $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\forall n \geq 1, u_n > 0, \quad u_n \sim \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n^3} \text{ converge (série de Reimann)}$$

Donc, par le thm de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

On a : $u_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2})$, et donc, par télescopage, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Et par suite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

- b) La série entière $\sum \frac{1}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$.

$$\text{Donc pour tout } x, xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$$

En particulier pour $x = 2$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} 2^n = 2e^2$$

Exercice 2

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction paire, 2π -périodique telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, \pi]$

- a) f étant paire, donc $b_n = 0$ pour tout n

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \geq 1, \text{ on a : } a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \stackrel{IPP}{=} \underbrace{\frac{2}{\pi} \left[x^2 \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} 2x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} 2x \sin(nx) dx \\ &\stackrel{IPP}{=} \frac{-4}{n\pi} \left[-x \frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} - \underbrace{\frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0} \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

la série de Fourier de f est :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}$$

- b) Comme f est continue et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} , alors par le théorème de Dérichlet de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction f , en particulier :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx).$$

$$\text{Pour } x = 0, \text{ on a : } 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n, \text{ donc}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\text{Pour } x = \pi, \text{ on a : } \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(n\pi), \text{ donc :}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Par $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}\right) \pi^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

c) Par le théorème de Parseval, on a :

$$\frac{\pi^2}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{90}$$

Problème

I- Découverte des fonctions tests

1. Soit A une partie de \mathbb{R} ,

\Rightarrow) Si A est bornée dans \mathbb{R} , alors il existe $r > 0$ tel que $A \subset [-r, r]$, donc

$\overline{A} \subset \overline{[-r, r]} = [-r, r]$ et par suite \overline{A} est bornée.

On sait que \overline{A} est toujours fermée, et puisque \mathbb{R} est de dimension finie, on déduit que \overline{A} est une partie compacte de \mathbb{R} .

\Leftarrow) Si \overline{A} est une partie compacte de \mathbb{R} , alors A est bornée dans \mathbb{R} et puisque $A \subset \overline{A}$, on déduit que A est bornée dans \mathbb{R} .

2. Quelques exemples :

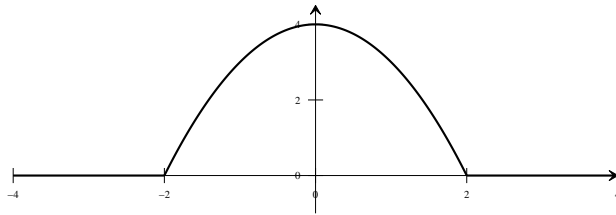
a. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application paire telle que :

$$u(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Il est clair que l'application u est continue sur \mathbb{R} et que $u(x) \neq 0$ si et seulement si $x \in]-2, 2[$, donc $\text{Supp}(u) = [-2, 2]$

u est donc à support compact, mais u n'est pas une fonction test car u n'est pas dérivable en 2 ($D_g(u)(2) = -4 \neq 0 = D_d(u)(2)$)

Représentation graphique de u :



b. La fonction sin est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} , mais son support est non borné car $(x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi)_n$ est une suite de points de support de sin telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Donc l'application sin n'est pas une fonction test.

3. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

a. h est C^∞ sur \mathbb{R}^* (par opérations) avec $h^{(k)}(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$.

Pour $x > 0$, $h'(x) = \frac{1}{x^2} \exp(-\frac{1}{x})$, on pose $P_1(X) = X^2$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $h^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x})$ pour tout $x > 0$, alors :

$$h^{(k+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P'_k\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} P_k\left(\frac{1}{x}\right) \right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x > 0$$

Par le principe de récurrence la suite polynomiale $(P_k)_k$ vérifie : $P_{k+1}(X) = -X^2 P'_k + X^2 P_k$ et $\deg(P_{k+1}) = \deg(P_k) + 2$.

Donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j=0}^{k-1} (\deg(P_{j+1}) - \deg(P_j)) = \sum_{j=0}^{k-1} 2 = 2k$ et par suite $\deg(P_k) = 2k$ car $\deg(P_0) = 0$ ($P_0 = 1$)

Conclusion :

$$\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}, h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \text{ et } \deg(P_k) = 2k$$

La fonction h est continue sur \mathbb{R} , et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* et de plus

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} P_k\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) + 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h^{(k)}(x) = 0.$$

par le principe de récurrence, via le théorème du prolongement de la dérivée, on déduit que h est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h^{(k)}(0) = 0$.

- b. La fonction h est de classe C^∞ sur \mathbb{R} mais n'est pas à support compact car $h(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc h n'est pas une fonction test.
 h n'est pas développable en série entière au voisinage de 0 en effet : si h est développable en série entière sur un voisinage de 0, alors, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \quad \text{car } h^{(k)}(0) = 0 \text{ pour tout } k,$$

ce qui est impossible car h n'est pas identiquement nulle sur $]0, r[$.

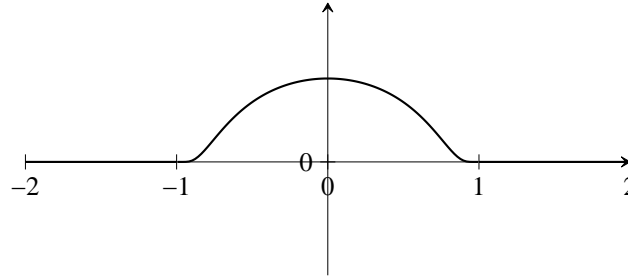
4. Soit la fonction φ définie par $\varphi(x) = h(-(x+1)(x-1))$

- a. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \neq 0 \Leftrightarrow h(-(x+1)(x-1)) \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$. Donc, $\text{Supp}(\varphi) = [-1, 1]$.
 La fonction φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} comme composée de deux fonctions de classe C^∞ et puisque son support est compact, l'application est donc une fonction test.

Variations de la fonction φ :

x		-1		+1	
$-(x-1)(x+1)$	-	0	+	0	-
$\varphi(x)$	0		$e^{-\frac{1}{(x-1)(x+1)}}$		0

$$\varphi'(x) = -2xh'(-(x^2-1)) \text{ où } h'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} > 0 \text{ pour tout } x > 0$$



- b. La fonction $x \rightarrow h(-(x-3)(x-8))$ est une fonction test dont le support est $[3, 8]$.
 La fonction $x \rightarrow h(-(x-1)(x-2)) + h(-(x-5)(x-6))$ est une fonction test car elle est de classe C^∞ et dont son support est $[1, 2] \cup [5, 6]$

5. Si une fonction est à support compact, alors celle-ci est nulle au voisinage de ∞ , donc de limite nulle à l'infini.
 6. Construction d'une suite régularisante :

- a. Comme la fonction φ est continue sur \mathbb{R} et à support compact (la fonction est nulle en dehors de $[-1, 1]$), alors φ est intégrable sur \mathbb{R} et $\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{-1}^{+1} \varphi > 0$ car φ est continue et strictement positive sur $] -1, 1[$.

Posons $c = \int_{-1}^{+1} \varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi$ et $\rho(x) = \frac{1}{c} \varphi(x)$ pour tout x , alors ρ , comme φ , est une fonction test dont le support est $[-1, 1]$ et que ρ est une fonction intégrable sur \mathbb{R} avec $\int_{\mathbb{R}} \rho = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'application ρ_n est de classe C^∞ (opérations sur les fonctions de classe C^∞) sur \mathbb{R} . De plus

$$\rho_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow \rho(nx) \neq 0 \Leftrightarrow nx \in]-1, 1[\Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$$

$$\text{donc } \text{Supp}(\rho_n) =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[.$$

$$\text{La fonction } \rho_n \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \rho_n = n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho(nx) dx = \int_{-1}^1 \rho(t) dt = 1.$$

En conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ρ_n est une fonction test et que $\int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1$.

II- Approximation uniforme sur \mathbb{R} par des fonctions de classe C^∞ ou par des fonctions tests

7. L'approximation polynomiale ne convient plus

Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur \mathbb{R} tout entier.

- a. Soit $\varepsilon = 1 > 0$, comme $(p_n)_n$ est de Cauchy pour la norme de convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que : $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \geq N \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - P_m(x)| \leq \varepsilon = 1$. En particulier pour $m = N$, on a le résultat demandé.

Pour $n \geq N$, la fonction polynomiale $P_n - P_N$ est bornée sur \mathbb{R} , donc constante, et par suite $\deg(P_n - P_N) \in \{-\infty, 0\}$.

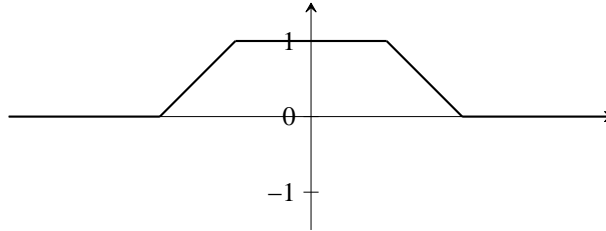
- b. D'après la question 7.a), il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N, \exists C_n \in \mathbb{R}; \quad \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) - P_N(x) = C_n$. Comme la suite $(P_n)_n$ converge simplement vers f sur \mathbb{R} , il en résulte que la suite $(C_n)_n$ converge. Si $C = \lim_n C_n$, alors $C = \lim_n C_n = \lim_n (P_n(x) - P_N(x)) = f(x) - P_N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et par suite $f(x) = P_N(x) + C$ pour tout x .

Conclusion : $f = P_N + C$ est donc une fonction polynôme sur \mathbb{R} .

8. Approximation d'une fonction continue à l'infini par une suite de fonctions continues à support compact :
Pour $n \in \mathbb{N}$, z_n est une fonction définie sur \mathbb{R} paire telle que :

$$z_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, n[\\ -x + n + 1 & \text{si } x \in [n, n + 1[\\ 0 & \text{si } x \in [n + 1, +\infty[\end{cases}$$

- a. Représentation graphique de z_n :



Limite simple de la suite (z_n) :

Comme z_n est paire pour tout entier n , il suffit d'étudier la convergence pour $x \geq 0$.

Soit $x \geq 0$, pour tout entier $n \geq E(x) + 1$, on a alors $x \in [0, n[$ et par suite $z_n(x) = 1$ et donc $\lim_n z_n(x) = 1$.

En conclusion : la suite de fonctions $(z_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante 1.

La convergence de la suite n'est pas uniforme, car pour $x_n = n + 1$, on a $|z_n(x_n) - 1| = 1$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

- b. Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} , nulle à l'infini

Montrons que g est bornée sur \mathbb{R} :

Soit $\varepsilon = 1 > 0$, comme $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, il existe $a > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq a$ on a $|g(x)| \leq 1$, donc g est bornée sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

g étant continue sur \mathbb{R} , en particulier g est continue sur le compact $[-a, a]$ et par suite g est bornée sur $[-a, a]$.

En conclusion : g est bien bornée sur \mathbb{R} .

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\alpha_n = \sup_{|x| \geq n} |g(x)|$

- c. Etude de la monotonie de la suite $(\alpha_n)_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\{|g(x)|, |x| \geq n + 1\} \subset \{|g(x)|, |x| \geq n\}$, il en résulte que

$$\alpha_{n+1} = \sup\{|g(x)|, |x| \geq n + 1\} \leq \sup\{|g(x)|, |x| \geq n\} = \alpha_n.$$

Donc la suite $(\alpha_n)_n$ est monotone décroissante. De plus $(\alpha_n)_n$ est minorée par 0, donc converge dans \mathbb{R} .

Montrons que $\lim_n \alpha_n = 0$:

soit $\varepsilon > 0$, puisque $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, il existe $c > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq c, |g(x)| \leq \varepsilon$

En particulier pour $n \geq c$, on a : $\forall x, |x| \geq n \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon$ et par suite pour tout $n \geq c, 0 \leq \alpha_n = \sup_{|x| \geq n} |g(x)| \leq \varepsilon$.

En définitive :

$$\lim_n \alpha_n = 0.$$

- d. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = g z_n$:

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) - g_n(x) = g(x)(z_n(x) - 1)$, et que pour $x \geq 0, z_n(x) - 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, n[\\ -x + n & \text{si } x \in [n, n + 1[\\ -1 & \text{si } |x| \geq n + 1 \end{cases}$ (on n'oublie pas que la fonction z_n est paire).

D'autre part $\|g_n - g\|_\infty = \max(\sup_{x \in [-n, n]} |g(x) - g_n(x)|, \sup_{|x| \geq n} |g(x) - g_n(x)|) = \sup_{|x| \geq n} |g(x) - g_n(x)|$ car $g(x) - g_n(x) = 0$ pour $x \in [-n, n]$

Mais pour

$$|x| \geq n, |g(x) - g_n(x)| = |g(x)| |z_n(x) - 1| \leq |g(x)| (|z_n(x)| + 1) \leq \alpha_n (|z_n(x)| + 1) \leq 2\alpha_n.$$

En conclusion :

$$\|g_n - g\|_\infty \leq 2\alpha_n.$$

- e. Comme la suite $(\alpha_n)_n$ converge vers 0 (indépendamment de x), il en résulte, d'après l'inégalité précédente, que $(g_n)_n$ converge uniformément vers g sur \mathbb{R} tout entier. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est une fonction continue sur \mathbb{R} de support $[-n-1, n+1]$ qui est compact.

En conclusion : Toute fonction g continue sur \mathbb{R} , nulle à l'infini est limite uniforme de suite de fonctions continue sur \mathbb{R} à support compact.

f est une fonction continue sur \mathbb{R} et g continue sur \mathbb{R} et à support compact :

$$\exists R > 0, \text{ Supp}(g) \subset [-R, R]$$

9. Convolution :

- a. Pour x un réel fixé, l'application $t \mapsto g(t)f(x-t)$ est continue sur \mathbb{R} (par opérations) et nulle sur $]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$, donc intégrable sur \mathbb{R} .

On pose $g * f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt$

- b. Pour x fixé, l'application $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur \mathbb{R} , et nulle sur $]-\infty, -R-x[\cup]R-x, +\infty[$, donc intégrable sur \mathbb{R} .

On note $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$.

On fait le changement de variable $t \mapsto u = x - t$ qui est un C^1 -difféomorphisme, dans l'intégrale $f * g(x)$, on aura :

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)(-du) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)du = g * f(x). \end{aligned}$$

10. Support d'une convolution :

- a. Ici on suppose de plus que f est à support compact : $\exists S > 0$ tel que $\text{Supp}(f) \subset [-S, S]$

Si $x > S + R$, alors $(f * g)(x) = \int_{-S}^S f(t)g(x-t)dt$ car f est nulle en dehors de $[-S, S]$. Si $t \in [-S, S]$, alors $x - t \in [-S + x, S + x]$ et comme $x > R + S$, on a $x - t > R + \underbrace{S - t}_{\geq 0}$, donc $g(x - t) = 0$ et par suite

$$(f * g)(x) = 0.$$

Si $x < -R - S$, alors $(f * g)(x) = (g * f)(x) = \int_{-R}^R f(x)g(t)dt$ car g est nulle en dehors de $[-R, R]$ Si $t \in [-R, R]$, alors $x - t \in [-R + x, R + x]$ et comme $x < -R - S$, on a $x - t < -R - \underbrace{S - t}_{\leq 0} \leq -S$, donc $f(x - t) = 0$ et

$$\text{par suite } (f * g)(x) = 0.$$

En conclusion : $f * g$ est à support compact.

- b. Supposons f n'est pas à support compact, montrons que $f * g$ n'est pas nécessairement à support compact. Prendre par exemple g positive non nulle et $f = 1$.

11. Dérivation d'une convolution :

- a. Soit a un réel strictement positif et $x \in [-a, a]$, on a :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-R}^R f(x-t)g(t)dt \text{ car } g \text{ est nulle en dehors de } [-R, R].$$

Avec le changement de variable affine $t \mapsto u = x - t$, on a : $f * g(x) = - \int_{x+R}^{x-R} f(u)g(x-u)du = \int_{x-R}^{x+R} f(u)g(x-u)du$.

Pour $u \in [-a - R, x - R]$, on a : $-u > R - x$ et puis $x - u > R$, donc $g(x - u) = 0$.

De même pour $u \in]x + R, a + R]$, on a : $-u < -x - R$ et puis $x - u < R$, donc $g(x - u) = 0$

En conclusion :

$$f * g(x) = \int_{x-R}^{x+R} f(u)g(x-u)du = \int_{-a-R}^{a+R} f(u)g(x-u)du.$$

- b. On suppose de plus que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} , alors l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} \times [-a - R, a + R] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto f(t)g(x - t) \end{aligned}$$

est continue et admet une dérivée partielle par rapport à x : de plus l'application $(x, t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) = f(t)g'(x - t)$ qui est continue sur $\mathbb{R} \times [-a - R, a + R]$, donc par le théorème de dérivation sous le signe

intgrale, la fonction $f * g$ est de classe C^1 et $(f * g)'(x) = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g'(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g'(x-t)dt$ car g' est aussi a support compact avec $Supp(g') \subset [-R, R]$ (g est toujours nulle en dehors de $[-R, R]$, donc aussi $g'...$).

En conclusion : $(f * g)' = f * g'$.

Par le principe de réduction on démontre que si g est calsse C^∞ alors $f * g$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$ pour tout entier k .

12. Application à l'approximation :

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f * \rho_n(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\rho_n(t)dt - f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\rho_n(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_n(t)dt \text{ car } \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)dt = 1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))\rho_n(t)dt \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (f(x-t) - f(x))\rho_n(t)dt \text{ car } Supp(\rho_n) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \end{aligned}$$

$$\text{D'où } |f * \rho_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (f(x-t) - f(x))\rho_n(t)dt \right| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-t) - f(x)|\rho_n(t)dt.$$

b. On suppose ici f est de plus uniformément continue, soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que : $\forall y, z \in \mathbb{R}, |y - z| \leq \eta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon$ (*).

Posons $n_0 = E(\eta) + 1 \geq 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0$, et pour tous $x \in \mathbb{R}, t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, on a : $|(x-t) - x| = |t| \leq \frac{1}{n} \leq \eta$ et par (*), on déduit que $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon$.

$$\text{Doù } |f * \rho_n(x) - f(x)| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-t) - f(x)|\rho_n(t)dt \leq \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho_n(t)dt = \varepsilon \text{ pour tout } x \text{ et tout entier } n \geq n_0.$$

En conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |f * \rho_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ c'est à dire la suite de fonctions $(f * \rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction f .

c. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} a support compact.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f * \rho_n$ est aussi a support compact (question 10) et comme ρ_n est de classe C^∞ sur \mathbb{R} (Questions 4 et 6), on a $f * \rho_n$ est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} et par suite $f * \rho_n$ est une fonction test. La fonction f est nulle a l'infini, car f est support compact, donc f est uniformément continue sur \mathbb{R} . Par la question 12, la suite de fonction $(f * \rho_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

III. Théorème de Whitney

13. Soit f une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} , posons $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$ ensemble des zeros de f .

On a alors $Z(f) = f^{-1}\{0\}$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue.

14. Une première tentative de preuve...infructueuse

Soit F une partie fermée de \mathbb{R} .

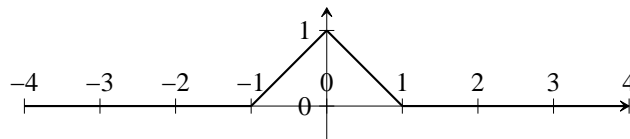
Cherchons $Z(d_F)$ où $d_F(x) = d(x, F)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in Z(d_F) \Leftrightarrow d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F} = F$ car F est fermée, donc $Z(d_F) = F$.

Si l'application d_F est C^∞ sur \mathbb{R} , alors le théorème de Whitney est démontré.

Représentation de d_F dans le cas de $F =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$:

$$\text{on a } d_F(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in [0, 1] \\ x+1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



d_F ne vérifie la propriété car d_F n'est pas dérivable sur \mathbb{R} , donc d_F n'est pas de classe C^∞ .

15. Utilisation de fonction test

i) On suppose que F est le complémentaire de $]a, b[$ avec $a < b$, donc $F =]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$:

On considère la fonction f telle $f(x) = h(-(x-a)(x-b))$ où h est la fonction définie dans la question 3, alors f est une fonction test (f est de classe C^∞ et a support compact : $Supp(f) = [a, b]$), avec $Z(f) = F$. Donc le théorème est démontré.

ii) On suppose que F est le complémentaire de $]a, b[\cup]c, d[$ avec $a < b < c < d$:

On considère la fonction f telle $f(x) = h(-(x-a)(x-b)) + h(-(x-c)(x-d))$ où h est la fonction définie dans la question 3, alors f est une fonction test (f est de classe C^∞ et a support compact : $Supp(f) = [a, b] \cup [c, d]$), avec $Z(f) = F$. Donc le théorème est démontré .

16. Démontrons le Théorème dans le cas général :

Soit F une partie fermée de \mathbb{R} , notons par Ω le complémentaire de F dans \mathbb{R} , alors Ω est un ouvert de \mathbb{R} . Soit $(]a_k, b_k[)_{k \in I}$ une partition de Ω , où I est une partie non vide de \mathbb{N} et $a_k < b_k$ pour tout k , on a : $\Omega = \bigcup_{k \in I}]a_k, b_k[$.

Si I est fini, la fonction f telle que $f(x) = \sum_{k \in I} h(-(x-a_k)(x-b_k))$ pour tout x , est une fonction de classe C^∞

a support compact($Supp(f) \subset \bigcup_{k \in I} [a_k, b_k]$.) avec $Z(f) = F$. Donc la théorème est démontré.

Si I est infini, on se ramène à $I = \mathbb{N}$ et on considère la fonction

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \text{ où } h_k(x) = h(-(x-a_k)(x-b_k)) \text{ pour tout } x,$$

on a : f est de classe C^∞ et que $Z(f) = F$.

