

# ROYAUME DU MAROC

Ministère Chargé de l'Enseignement  
Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement  
Supérieur, de la Formation des Cadres  
et de la Recherche Scientifique

## Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs Session 2000

### ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde  
L'usage de la calculatrice est *interdit*

**L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,  
comporte 4 pages.  
L'usage de la calculatrice est interdit .**

*Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*

## Définitions et notations

On considère un espace vectoriel  $E$ , de dimension finie  $n \geq 2$ , sur le corps  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).  $\mathcal{L}(E)$  désigne l'algèbre des endomorphismes de  $E$  ; si  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ , l'endomorphisme composé  $u \circ v$  sera noté simplement  $uv$ ,  $[u, v]$  désignera l'endomorphisme  $uv - vu$  et l'identité se notera  $Id$ .

Si  $u$  est un endomorphisme de  $E$ , on note  $\text{Tr}(u)$  la trace de  $u$  et  $\text{Sp}(u)$  l'ensemble des valeurs propres de  $u$ .  $\mathcal{T}$  désigne l'ensemble des endomorphismes de  $E$  de trace nulle. Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ , on note  $E_u(\lambda)$  le sous-espace propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  on pose  $u^0 = Id$  et si  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ,  $u^k = uu^{k-1}$ . On rappelle qu'un endomorphisme  $u$  est dit nilpotent s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0$  (endomorphisme nul).

On définit l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ (u, v) &\longmapsto [u, v] \end{aligned}$$

et pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_u : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\longmapsto [u, v] \end{aligned}$$

Pour  $(m, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ , on note  $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , à  $m$  lignes et  $p$  colonnes.  $I_m$  est la matrice identité d'ordre  $m$ . Enfin,  $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  désigne la matrice carrée d'ordre  $n$  de terme général  $\alpha_i \delta_{ij}$  où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kroneker ( on rappelle que  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  ).

## 1<sup>ère</sup> Partie

### A- Quelques propriétés de $\Phi_u$

1. Montrer que  $\mathcal{T}$  est un hyperplan de  $\mathcal{L}(E)$ .
2. Montrer que  $\Phi$  est une application bilinéaire antisymétrique.
3. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme qui n'est pas une homothétie.

- (a) Montrer que  $\text{Vect}(\{Id, u, \dots, u^{n-1}\})$  est inclus dans  $\text{Ker } \Phi_u$  et que  $\dim(\text{Ker } \Phi_u) \geq 2$ .
- (b) Montrer que si  $v \in \text{Ker } \Phi_u$ , alors  $v(E_u(\lambda)) \subset E_u(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ .

4. Montrer que l'image de  $\Phi$  est incluse dans  $\mathcal{T}$  et que pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{Im } \Phi_u \subset \mathcal{T}$ .  
Existe-t-il  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $[u, v] = Id$  ? Peut-on avoir  $\text{Im } \Phi_u = \mathcal{T}$  ?
5. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
  - (a) Montrer que  $u$  est une homothétie si et seulement si pour tout  $x \in E$ , la famille  $(x, u(x))$  est liée.
  - (b) En déduire que  $\text{Ker } \Phi_u = \mathcal{L}(E)$  si et seulement si  $u$  est une homothétie.
6. (a) Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  ; montrer par récurrence sur  $k$  que  $(\Phi_u)^k(v) = \sum_{p=0}^k (-1)^p C_k^p u^{k-p} v u^p$ .  
(b) En déduire que si  $u$  est nilpotent, alors  $\Phi_u$  l'est aussi.

### B- Détermination de l'image de $\Phi$

Soit  $u$  un endomorphisme non nul de  $E$  de trace nulle.

1.  $u$  peut-il être une homothétie ?
2. Montrer qu'il existe  $e_1 \in E$  tel que la famille  $(e_1, u(e_1))$  soit libre.
3. En déduire l'existence d'une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que la matrice  $A$  de  $u$  dans cette base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t X \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$

où  $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$  et  $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ .

4. On suppose  $A_1 = UV - VU$  avec  $(U, V) \in (\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}))^2$ 
  - (a) Montrer qu'on peut trouver  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que la matrice  $U - \alpha I_{n-1}$  soit inversible.
  - (b) On pose  $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$  et  $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^t R \\ S & V \end{pmatrix}$  avec  $(R, S) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$  ; établir l'équivalence :

$$A = U'V' - V'U' \iff [{}^t X = -{}^t R(U - \alpha I_{n-1}) \text{ et } Y = (U - \alpha I_{n-1})S].$$

5. Montrer alors par récurrence sur  $n$  que l'image de  $\Phi$  est égale à  $\mathcal{T}$ .

### C- Détermination de $\text{Tr}(\Phi_u)$

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice de  $u$  dans cette base. Pour  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ ,  $u_{i,j}$  désigne l'endomorphisme de  $E$  tel que :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, u_{i,j}(e_k) = \delta_{jk} e_i.$$

1. Rappeler pourquoi  $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{L}(E)$ .
2. Calculer, pour tout  $(i, j, k, l) \in \{1, 2, \dots, n\}^4$ , le produit  $u_{i,j} u_{k,l}$  et montrer que l'on a :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{k=1}^n a_{j,k} u_{i,k}.$$

3. En déduire  $\text{Tr}(\Phi_u)$ .

2<sup>ème</sup> PartieA- Cas où  $u$  est diagonalisable

Dans cette question on suppose que  $u$  est diagonalisable.

On pose  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $m_i$  désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$  de  $u$ .

1. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ . Pour simplifier les notations dans cette question, on pose  $u(e_i) = \mu_i e_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

(a) Montrer que

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 : \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j)u_{i,j}.$$

(b) En déduire que  $\Phi_u$  est diagonalisable et préciser  $\text{Sp}(\Phi_u)$ .

2. Montrer que

$$\text{Ker } \Phi_u = \{v \in \mathcal{L}(E) / \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i)\}.$$

3. En déduire que  $\text{Ker } \Phi_u$  est isomorphe à  $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$ .  
Quel est le rang de  $\Phi_u$  ?

4. On suppose en plus que  $u$  a  $n$  valeurs propres distinctes.

Quel est la dimension de  $\text{Ker } \Phi_u$  ? Quel est le polynôme minimal de  $u$  ?

En déduire que  $\text{Ker } \Phi_u = \text{Vect}(Id, u, \dots, u^{n-1})$ .

B- Cas où  $\dim E=2$ 

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  qui n'est pas une homothétie,  $\dim E=2$ .

1. Montrer que  $\text{Ker } \Phi_u = \text{Vect}(Id, u)$  (on pourra utiliser une base de  $E$  de la forme  $(e, u(e))$  dont on justifiera l'existence).
2. Montrer que le polynôme caractéristique de  $\Phi_u$  est de la forme  $X^2(X^2 + \beta)$  avec  $\beta \in \mathbb{K}$ .
3. Si  $\beta = 0$ , l'endomorphisme  $\Phi_u$  est-il diagonalisable ?
4. On suppose  $\beta \neq 0$  ; étudier la diagonalisabilité de  $\Phi_u$  selon que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
5. On suppose  $\Phi_u$  diagonalisable.

(a) Montrer que  $\text{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$  où  $\lambda$  est un scalaire non nul .

Dans la suite de la question,  $v$  (respectivement  $w$ ) désigne un vecteur propre de  $\Phi_u$  associé à la valeur propre  $\lambda$  (respectivement  $-\lambda$ ).

(b) L'endomorphisme  $v$  peut-il être inversible ? Calculer  $\text{Tr}(v)$  puis  $v^2$ .

(c) Détermination de  $\text{Sp}(u)$  :

- Pour quelles valeurs du vecteur  $e$  la famille  $(e, v(e))$  est-elle une base de  $E$  ?
- Vérifier que la matrice de  $u$  dans une telle base est triangulaire inférieure puis en déduire que  $\text{Sp}(u) = \{\frac{\text{Tr}(u)-\lambda}{2}, \frac{\text{Tr}(u)+\lambda}{2}\}$ . Que peut-on alors dire de  $u$  ?

(d) Montrer que  $E = \text{Ker } v \oplus \text{Ker } w$  puis en déduire que  $u$  est diagonalisable.

**C- Cas où  $\Phi_u$  est diagonalisable**

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $\Phi_u$  soit diagonalisable et  $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$ . Soit  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  une base de  $\mathcal{L}(E)$  formée de vecteurs propres de  $\Phi_u$  de sorte que  $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Soit enfin  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  et  $x \in E$  un vecteur propre associé.

1. Calculer  $u(v_i(x))$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\beta_i$  et  $v_i(x)$ .
2. Montrer que l'application  $\Psi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow E$ ,  $v \mapsto v(x)$  est linéaire surjective.
3. Montrer alors que  $u$  est diagonalisable.

**3<sup>ème</sup> Partie**

Soit  $\lambda$  une valeur propre **non nulle** de  $\Phi_u$  et  $v$  un vecteur propre associé ; on désigne par  $P_u$  le polynôme caractéristique de  $u$ .

1. (a) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{K}$ ,  $v(u - xId) = (u - (x + \lambda)Id)v$ .  
 (b) Qu'en déduit-on sur  $P_u$  si  $\det v \neq 0$ .  
 (c) Montrer alors que l'endomorphisme  $v$  n'est pas inversible.
2. Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$  ; qu'en déduit-on si  $v^p \neq 0$  pour un certain  $p \in \mathbb{N}^*$  ?
3. Conclure que  $v$  est un endomorphisme nilpotent.

**Dans la suite on suppose que  $\dim \text{Ker } v = 1$**

4. (a) Montrer que pour tout  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\text{Im } v^p$  est stable par les endomorphismes  $u$  et  $v$ .  
 (b) Soit  $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  ; en considérant les endomorphismes  $v_1$  et  $u_1$  induits par  $v$  et  $u$  sur  $\text{Im } v^p$ , montrer que  $\dim(\text{Im } v^p) = 1 + \dim(\text{Im } v^{p+1})$ .  
 (c) Dédurre de ce qui précède que  $v^{n-1} \neq 0$  et  $v^n = 0$ .
5. Soit  $e \in E$  tel que  $v^{n-1}(e) \neq 0$  ; montrer que la famille  $\mathcal{B} = (e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$  est une base de  $E$  et écrire la matrice de l'endomorphisme  $v$  dans cette base.
6. On pose  $\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{L}(E) / wv - vw = \lambda v\}$ .  
 (a) Montrer que  $\mathcal{A}$  contient un endomorphisme  $w_0$  dont la matrice relativement à la base  $\mathcal{B}$  est  $\text{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \dots, (n-1)\lambda)$ .  
 (b) Montrer que  $\mathcal{A}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{L}(E)$  dont on précisera la direction.  
 (c) Déterminer la dimension ainsi qu'une base de la direction de  $\mathcal{A}$ .
7. Quelle est alors la forme de la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  de l'endomorphisme  $u$  ?
8. On suppose dans cette question que la matrice de  $u$  dans une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  est de la forme  $\text{diag}(\alpha, \alpha + \lambda, \alpha + 2\lambda, \dots, \alpha + (n-1)\lambda)$  ; décrire par leur matrice dans la base  $\mathcal{B}'$  les éléments de l'espace  $E_{\Phi_u}(\lambda)$  ; quelle est sa dimension ?

FIN DE L'ÉPREUVE