CCP PSI2 2007
durée : 4 heures
calculatrices autorisées

Notations.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.
Pour n entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients réels.
On note $\det(A)$ le déterminant d'une matrice carrée A et ${}^tB$ la transposée d'une matrice B quelconque.
Etant donnée une matrice A, la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.
Lorsque $A = (a)$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on identifie A avec le réel a.

Pour tout entier naturel, on note $n!$ la factorielle de n, avec la convention $0! = 1$.
Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$:
- on note $[|p, n|]$ l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq n$.
- on rappelle la notation $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien sera noté $(u|v)$.

Objectifs.

Dans ce problème, on définit la matrice de Gram d'une famille finie de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.
La première partie porte sur des calculs de déterminants, la valeur d'un des déterminants calculés servant à illustrer la quatrième partie.
Dans la deuxième partie, on définit les matrices de Gram et on en étudie quelques propriétés.
Les troisième et quatrième parties sont des applications de la deuxième partie.

PARTIE I.

Les résultats de cette partie ne serviront que dans la partie IV.

I.1. Déterminant d_p.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in [|0, n|]$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$ avec $(i, j) \in [|1, n-p+1|] \times [|1, n-p+1|]$. On note $d_p = \det(A_p)$.

I.1.1. Expliciter les entiers r et s tels que $a_{i,j} = \binom{r}{s}$ pour les quatre coefficients $a_{1,1}, a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$.

I.1.2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$ calculer les déterminants d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.

I.1.3. On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i.

I.1.3.1 Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes : pour i variant de $n-p+1$ à 2, on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$). Déterminer le coefficient d'indice (i, j) de la nouvelle ligne L_i.

I.1.3.2 En déduire une relation entre d_p et d_{p+1}, puis en déduire d_p.

I.2. Déterminants D_n et Δ_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le déterminant de la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à n.**
On note $D_n = \det((i+j)!)$. Avec les mêmes notations, on note $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)$ pour $(i, j) \in [|0, n|] \times [|0, n|]$.

I.2.1. Calculer les déterminants D_0, D_1, D_2, Δ_0, Δ_1 et Δ_2.
I.2.2. Donner une relation entre D_n et Δ_n.
I.2.3. En déduire Δ_n puis D_n.

PARTIE II.

A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

II.A.1. Soit $C = (c_{i,j})$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier $i \in [|1, n|]$, on note X_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne i qui vaut 1.

II.A.1.1 Pour $(i, j) \in [|1, n|] \times [|1, n|]$, déterminer le produit ${}^tX_iCX_j$.

II.A.1.2 En déduire que $C = 0$ si et seulement si pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXCY = 0$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = (e_i|e_j)$ le produit scalaire de e_i et e_j.

Pour tout vecteur u de E, on note avec la même lettre majuscule U la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}$.

II.A.2. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, justifier l'égalité $(x|y) = {}^tXAY$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une autre base de E et soit $A' = (a'_{i,j})$ la matrice carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a'_{i,j} = (e'_i|e'_j)$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

II.A.3. Pour tout vecteur u de E, on note U' la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}'$.

II.A.3.1 Soit x un vecteur de E. Donner une relation entre les matrices X, X' et P.

II.A.3.2 Justifier l'égalité $A' = {}^tPAP$.

II.A.3.3 Que devient l'égalité précédente lorsque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale ?

II.A.3.4 Montrer que la matrice A est inversible et que $\det(A) > 0$.

II.A.3.5 Déduire des résultats précédents que si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est une famille libre de vecteurs d'un espace préhilbertien réel, la matrice $B = ((\varepsilon_i|\varepsilon_j))$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(\varepsilon_i|\varepsilon_j)$, vérifie $\det(B) > 0$.

B. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$, on considère n vecteurs **quelconques** $u_1, \ldots, u_n$. Soit $M = ((u_i|u_j))$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(u_i|u_j)$. A toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on associe le vecteur $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iu_i$.

II.B.1. Dans cette question on suppose $n = 2$.

II.B.1.1 Montrer que $\det(M) \geq 0$.

II.B.1.2 A quelle condition sur $\det(M)$ la famille (u_1, u_2) est-elle libre ?

On revient au cas général où n est quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

II.B.2. Exprimer les coefiicients de la matrice MX en fonction des produits scalaires $(u_i|v)$.

II.B.3. En déduire l'égalité ${}^tXMX = \|v\|^2$ où $\|v\|$ est la norme du vecteur v.

II.B.4. Soit λ une valeur propre (complexe) de la matrice M. Justifier que λ appartient à $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda \geq 0$.

II.B.5. Montrer que $MX = 0$ si et seulement si v est le vecteur nul.

II.B.6. On suppose que la matrice M est inversible, déduire de la question précédente que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

<u>Définition</u> : étant donné n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$, on appelle matrice de Gram des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$, la matrice $G(v_1, \ldots, v_n) = ((v_i|v_j))$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(v_i|v_j)$.

Il résulte de la partie II que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre si et seulement si $\det(G(v_1, \ldots, v_n)) \neq 0$; dans ce cas, on a $\det(G(v_1, \ldots, v_n)) > 0$.

PARTIE III.

Dans cette partie, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ supposé orienté, u_1, u_2, u_3 sont trois vecteurs unitaires de E. On note α, β, γ les réels de $[0, \pi]$ tels que $(u_1|u_2) = \cos(\alpha)$, $(u_2|u_3) = \cos(\beta)$, $(u_3|u_1) = \cos(\gamma)$ et on suppose que $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha \leq \pi$.

III.1. déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^2 - 2X\cos(\beta)\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1$.

III.2. En déduire une factorisation de $\det(G(u_1, u_2, u_3))$ en produit de deux facteurs.

III.3. Montrer que $\cos(\alpha)$ est compris entre $\cos(\beta - \gamma)$ et $\cos(\beta + \gamma)$.

III.4. Montrer que $\det(G(u_1, u_2, u_3)) = 0$ si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ou $\alpha = \beta + \gamma$.

III.5. On suppose que $\alpha = \beta = \gamma$ et on note $c = \cos(\alpha)$.

III.5.1 Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $G(u_1, u_2, u_3)$. En déduire ses valeurs propres.

III.5.2 Déterminer la plus petite valeur possible de c.

III.5.3 On prend $c = -\frac{1}{2}$.

III.5.3.1 Quelle est la valeur de $u_1 + u_2 + u_3$?

III.5.3.2 Déterminer le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $G(u_1, u_2, u_3)$. En utilisant **II.B.5**, retrouver la valeur de $u_1 + u_2 + u_3$.

PARTIE IV.

Soit n un entier naturel avec $n \geq 2$.
On considère n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$.

IV.1. Opérations sur les vecteurs d'une matrice de Gram. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

IV.1.1. Exprimer $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, \lambda v_n))$ en fonction de λ et de $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n))$

IV.1.2. Exprimer $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$ en fonction de $\det(G(v_1, \ldots, v_n))$.

IV.2. Soit $F = Vect(v_1, \ldots, v_n)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$.

IV.2.1. Soit w un vecteur de $\mathcal{H}$ orthogonal à F. Exprimer $\det(G(v_1, \ldots, v_n, w))$ en fonction de w et de $\det(G(v_1, \ldots, v_n))$.

IV.2.2. Soit $v \in \mathcal{H}$, on note $d(v, F)$ la distance du vecteur v au sous-espace vectoriel F. Montrer l'égalité $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)) = (d(v, F))^2 \det(G(v_1, \ldots, v_n))$.

IV.3. Calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

IV.3.1. Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier la convergence des intégrales $J_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$ et calculer leur valeur.

On rappelle (et on admettra) que $\mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)\, dt$.
On considère la base de $\mathbb{R}[X]$ formée des vecteurs e_k où $e_k = X^k,\ k \in \mathbb{N}$.

IV.3.2. Calculer les produits scalaires $(e_i|e_j)$.

IV.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes et de la partie **I**, la distance du vecteur e_n au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré $\leq n - 1$ de l'espace $\mathbb{R}[X]$.