ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 5 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 5 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Notations et rappels

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel réel de dimension finie n. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si u et v sont des éléments de $\mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv et l'identité se notera I_E.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $u^0 = I_E$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = uu^{k-1}$; on rappelle que u est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$; on note enfin $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices réelles carrées d'ordre n ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et, si $p = n$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres réelles de A et $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ et α_n sont des réels, on note $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dans cet ordre.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I. PRÉLIMINAIRES

1. Soient α un réel et f_α la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$.

   1-1. Montrer que la fonction f_α vérifie l'équation différentielle $(1+x)y' - \alpha y = 0 \quad (1)$.

   1-2. On cherche des solutions de (1) qui soient développables en série entière au voisinage de l'origine. Soit donc $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme S_a vérifie l'équation différentielle (1) sur l'intervalle $]-r, r[$ où $r = \min(1, R)$.

   (a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $(k+1)a_{k+1} = (\alpha - k)a_k$.

   (b) Pour tout entier $k \geqslant 1$, exprimer le coefficient a_k en fonction de a_0, α et k.

   (c) Calculer le rayon de convergence ρ de la série entière ainsi obtenue lorsque $a_0 = 1$ et justifier que sa somme coïncide avec f_α sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

   1-3. On note $(b_k)_{k\in N}$ la suite des coefficients du développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$; montrer que $\quad b_0 = 1,\ 2b_0b_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, q \geqslant 2,\ \sum\limits_{k=0}^{q} b_k b_{q-k} = 0.$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent ; on pose $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \,;\ \ u^k = 0\}$.

   2-1. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

   2-2. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

   2-3. En déduire que $p \leqslant n$ et que $u^n = 0$.

   2-4. Quel est le polynôme minimal de u ?

II. ÉTUDE D'ÉQUATIONS DU TYPE $X^2 = A$ DANS $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

A- Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Calculer les valeurs propres de u et justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de u avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Déterminer, pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, le vecteur e_i de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et vérifiant $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

3. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice D de u relativement à cette base, puis trouver une relation entre A et D.

4. Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $B^2 = A$, on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.

   4-1. Vérifier que $v^2 = u$ et que $uv = vu$.

   4-2. Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $uv(e_i)$ et en déduire que $v(e_i)$ est colinéaire à e_i.

   4-3. Conclure que la matrice V de v relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale de la forme $V = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et en déduire les valeurs possibles de α_1, α_2 et α_3.

5. Trouver alors toutes les solutions, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de l'équation $X^2 = A$. Combien y'en a-t-il ?

B- Quelques résultats généraux

Dans les questions 1., 2. et 3. ci-dessous, u désigne un endomorphisme nilpotent de E et $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \,;\ u^k = 0\}$.

1. On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$.

   1-1. Calculer v^{2p} et $v^{2(p-1)}$, puis en déduire que $p \leqslant \frac{n+1}{2}$.

   1-2. Donner alors un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que l'équation $X^2 = M$ n'ait pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On pose $w = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k$ où les b_k sont les termes de la suite de la question 1-3. des préliminaires.

   Justifier que $w^2 = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} b_i b_j u^{i+j}$ et en déduire que $(\pm w)^2 = I_E + u$.

3. Dans cette question, on suppose que $p = n$; on a donc $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. On considère un endomorphisme g de E tel que $g^2 = I_E + u$.

   3-1. Soit $x_1 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_1) \neq 0$. Justifier que $(x_1, u(x_1), \ldots, u^{n-1}(x_1))$ est une base de E et qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1)$.

   3-2. Vérifier que $gu = ug$ et montrer que $g = \alpha_0 I_E + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$.

   3-3. Justifier que la famille $(I_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre puis, en calculant g^2 de deux façons, montrer que $\alpha_0^2 = 1,\ 2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$ pour $2 \leqslant q \leqslant n-1$ (si $n \geqslant 3$).

   3-4. Montrer alors qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\alpha_k = \varepsilon b_k$, et en déduire que $g = \pm w$.

4. **Application :** Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme trigonalisable ; on admet qu'il existe deux endomorphismes d et ν de E avec d diagonalisable, ν nilpotent et vérifiant

$$u = d + \nu, \quad \nu d = d\nu.$$

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(d)$, on note E_λ le sous-espace propre de d associé à λ : $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(d - \lambda I_E)$.

On suppose de plus que les valeurs propres de u sont strictement positives : $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

5-1. Montrer que E_λ est stable par ν et que l'endomorphisme ν_λ induit par ν sur E_λ est nilpotent.

5-2. Montrer que $\mathrm{Sp}(d) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et en déduire que d est inversible.

5-3. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $r \geqslant 1$, les valeurs propres deux à deux distinctes de d. Justifier que $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ et donner, pour tout $x = x_1 + \ldots + x_r \in E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$, l'expression de $d(x)$.

5-4. Construire un endomorphisme δ de E tel que $\delta^2 = d$ et vérifiant $\nu\delta = \delta\nu$.

5-5. Vérifier que δ est inversible et que l'endomorphisme $\nu\delta^{-2}$ est nilpotent.

5-6. En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que l'endomorphisme $w = P(\nu\delta^{-2})$ vérifie $w^2 = I_E + \nu\delta^{-2}$ puis construire $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$.

III. Racine carrée d'une matrice symétrique positive

On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, A est dite positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$; elle est dite définie positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXAX > 0$.

On notera S_n^+ (resp. S_n^{++}) l'ensemble des matrices réelles positives (resp. définies positives) d'ordre n.

1. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tMM$ est symétrique et positive. Qu'obtient-on si M est symétrique ?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

2-1. Montrer que A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

2-2. Montrer que A est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

3. Soit $A \in S_n^+$.

3-1. En diagonalisant convenablement la matrice A, construire une matrice $B \in S_n^+$ telle que $B^2 = A$. Que peut-on dire de B si $A \in S_n^{++}$?

3-2. Soit $B \in S_n^+$ telle que $B^2 = A$; on muni $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et on note f et g les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés à A et B respectivement. On rappelle que f et g sont autoadjoints positifs et que $g^2 = f$.

(a) Justifier que , pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est stable par g. On note alors g_λ l'endomorphisme induit par g sur $E_\lambda(f)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

(b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, g_λ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(g_\lambda) = \{\sqrt{\lambda}\}$, puis préciser l'expression de g_λ.

(c) Justifier que $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ et en déduire que l'endomorphisme g est complètement déterminé ; conclure que B est unique.

Dans la suite, B **se notera** $\sqrt{A}$**.**

3-3. Montrer que $\sqrt{A}$ est un polynôme en A.

4. **Applications :** Soient A et C deux matrices symétriques éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4-1. Si A et C sont positives, montrer que la matrice $\sqrt{A}C\sqrt{A} \in S_n^+$ et en déduire que $\mathrm{Tr}\,(AC) \geqslant 0$.

4-2. On suppose que A est définie positive ; montrer que la matrice AC est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier par un contre-exemple que ce résultat peut être faux si l'on suppose seulement A positive.

5. Soient A et B deux éléments de S_n^+ qui commutent.

5-1. vérifier que AB est symétrique et que les matrices $\sqrt{A}$ et $\sqrt{B}$ commutent.

5-2. Calculer $\left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)^2$ et en déduire que la matrice AB est un élément de S_n^+.

5-3. Montrer que $\sqrt{A}\sqrt{B} \in S_n^+$ et que $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$.

6. On définit l'application $\Phi : \; X \longmapsto \sqrt{X}$ de S_n^+ dans lui même.

6-1. Montrer que S_n^+ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6-2. Justifier que Φ est une bijection et exprimer Φ^{-1} puis justifier que Φ^{-1} est continue.

On cherche à montrer que Φ est continue ; pour cela on considère une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S_n^+ qui converge vers $A \in S_n^+$.

6-3. Montrer que la suite réelle $(\mathrm{Tr}\,(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, puis en déduire que la suite $(\sqrt{A_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. On admettra que $(M,N) \longmapsto \mathrm{Tr}\,({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6-4. Montrer que la suite $(\sqrt{A_k})_{k\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence dans S_n^+ et conclure. On admettra que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, toute suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence est convergente.

7. Dans cette question, on admet que S_n^{++} est un ouvert de S_n^+.

7-1. Soit $A \in S_n^{++}$; montrer que $H \longmapsto AH + HA$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7-2. Montrer que l'application $\Psi : \; \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \; X \longmapsto X^2$ est différentiable et exprimer sa différentielle en tout point A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7-3. Montrer que Ψ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de S_n^{++} sur lui même.

FIN DE L'ÉPREUVE