



## EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

## MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

*Les calculatrices sont autorisées.*

\* \* \*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

\* \* \*

### QUELQUES APPLICATIONS DES MATRICES DE GRAM À LA GÉOMÉTRIE

Dans tout le problème,  $E$  est un espace vectoriel euclidien de dimension  $n \geq 2$  et on note  $(\mid)$  un produit scalaire sur  $E$  et  $\| \cdot \|$  la norme associée.

Si  $x_1, x_2, \dots, x_p$  sont  $p$  vecteurs de  $E$ , on appelle matrice de GRAM de  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , notée  $G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ , la matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  de terme général  $(x_i \mid x_j)$  pour  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq p$  :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} (x_1 \mid x_1) & (x_1 \mid x_2) & \dots & (x_1 \mid x_p) \\ (x_2 \mid x_1) & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (x_p \mid x_1) & \cdot & \dots & (x_p \mid x_p) \end{pmatrix}$$

on notera  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_p)$  son déterminant :  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_p) = \det G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ .

Si  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ , le noyau de  $A$  est, par définition,

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$$

Par ailleurs, on note :

pour  $n$  entier  $n \geq 2$ ,  $E_n$  l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique à la fois considéré comme espace vectoriel euclidien et espace affine euclidien.

## I. GÉNÉRALITÉS

### 1. Résultat préliminaire

- Que peut-on dire d'une matrice  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  vérifiant  ${}^t Y Y = 0$  ?
- Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , montrer que  $\text{Ker}({}^t A A) \subset \text{Ker} A$  puis en déduire que  $\text{rang}({}^t A A) = \text{rang} A$ .

### 2. On donne $x_1, x_2, \dots, x_p$ $p$ vecteurs de $E$ .

Si  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $E$ , et si  $A$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  dont les colonnes sont les composantes des vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_p$  dans la base  $\mathcal{B}$ , montrer que  $G(x_1, x_2, \dots, x_p) = {}^t A A$ .

Quel lien existe entre le rang de la matrice  $G(x_1, x_2, \dots, x_p)$  et le rang de la famille de vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  ?

### 3. Dans cette question, $p = n$ .

- Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pour que la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  soit liée.
- Montrer que la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est libre si, et seulement si,  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ .

### 4. Application

L'angle géométrique d'un couple  $(u, v)$  de vecteurs non nuls de  $E_n$  est le réel  $\alpha \in [0, \pi]$

vérifiant :  $\cos \alpha = \frac{(u | v)}{\|u\| \|v\|}$ .

Si  $A, B$  et  $C$  sont trois points de  $E_3$  situés sur la sphère de centre  $O$  et de rayon 1, si on désigne par  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  l'angle géométrique des couples respectifs  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}), (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$  et  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ , montrer en utilisant une matrice de GRAM que :

$$1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Que se passe-t-il dans le cas où les points  $A, B$  et  $C$  sont sur un même cercle ?

### 5. Interprétation géométrique de la matrice de GRAM

- Si  $a, b$  et  $y$  sont trois vecteurs de  $E$  tels que le vecteur  $a$  soit orthogonal à la fois au vecteur  $b$  et au vecteur  $y$ , trouver une relation entre les déterminants  $\Gamma(a+b, y)$ ,  $\Gamma(a, y)$  et  $\Gamma(b, y)$ .
- Si  $(x, y)$  est une famille libre de deux vecteurs de  $E_2$ , si  $F = \text{vect}\{y\}$  et si  $z$  est le projeté orthogonal du vecteur  $x$  sur  $F$ , montrer que  $\Gamma(x, y) = \Gamma(x-z, y)$ .

- c. En déduire que si  $A, B$  et  $C$  sont trois points non alignés de  $E_2$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$  est l'aire du triangle  $ABC$  (donc,  $\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$  est l'aire du parallélogramme « formé par  $A, B$  et  $C$  »).
6. De la même façon on montre que si  $A, B, C$  et  $D$  sont quatre points non coplanaires de  $E_3$ ,  $\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})}$  est le volume du parallélépipède « formé par  $A, B, C$  et  $D$  » que l'on désignera par parallélépipède  $ABCD$ .  
On ne demande pas de prouver ce résultat.
- a. Vérifier que ce résultat permet de retrouver la formule usuelle du volume du parallélépipède rectangle.
- b. A l'aide de ce résultat écrire un petit algorithme en français qui, avec la donnée des coordonnées des points  $A, B, C$  et  $D$ , calcule le volume du parallélépipède  $ABCD$  ou affiche que les points sont coplanaires.  
On pourra considérer que l'algorithme suppose connu le calcul du déterminant.
- c. Après avoir entré cet algorithme dans la calculatrice, indiquer les résultats qu'elle donne dans chacun des cas suivants :
- i.  $A = (1, 2, 0)$ ,  $B = (1, -1, 3)$ ,  $C = (-1, -2, 0)$  et  $D = (3, -1, 0)$ .
  - ii.  $A = (1, -1, 2)$ ,  $B = (3, 4, -7)$ ,  $C = (0, 3, 0)$  et  $D = (0, 2, 1)$ .
  - iii.  $A = (8, 0, \frac{3}{2})$ ,  $B = (0, 1, -1)$ ,  $C = (-\frac{1}{2}, 2, 0)$  et  $D = (3, 3, 0)$ .

## II. POINTS ÉQUIDISTANTS SUR UNE SPHÈRE EUCLIDIENNE

Dans cette partie,  $m$  est un entier naturel,  $m \geq 2$ , et  $t$  est un réel,  $t \neq 1$ .

La famille de  $m$  vecteurs distincts  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  de l'espace  $E$ , de dimension  $n \geq 2$ , est solution du problème  $P(m, t)$  si :

tous les vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont de norme 1

et

pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers distincts entre 1 et  $m$ ,  $(x_i | x_j) = t$ .

7. Résultats préliminaires
- a. Montrer que si  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  est solution du problème  $P(m, t)$  alors, pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers distincts entre 1 et  $m$ ,  $\|x_i - x_j\|$  est constant.
- b. Sans aucun calcul de déterminant, donner en le justifiant, le polynôme caractéristique de la matrice  $J \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  dont tous les éléments sont égaux à 1.
- c. En déduire que si  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  est solution du problème  $P(m, t)$ , alors  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_m) = (1-t)^{m-1}(1+(m-1)t)$ .
8. Conditions nécessaires
- a. Montrer que, pour que  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  soit une famille libre de vecteurs solution du problème  $P(m, t)$ , il est nécessaire que  $t \in \left[ \frac{-1}{m-1}, 1 \right[$  et que  $m \leq n$ .

- b. Montrer que, pour que  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  soit une famille liée de vecteurs solution du problème  $P(m, t)$ , il est nécessaire que  $t = \frac{-1}{m-1}$  et que  $m \leq n+1$  (on pourra montrer qu'alors, la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$  est libre).

c. Application

Existe-t-il dans  $E_3$  cinq vecteurs distincts qui deux à deux forment un même angle obtus  $\theta$ , c'est-à-dire tel que  $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$  ?

9. Exemple du cas  $n = 2$

Déterminer pour  $m \geq 3$ , une famille  $(A_1, A_2, \dots, A_m)$  de points de  $E_2$ , telle que la famille de vecteurs  $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_m})$  soit solution du problème  $P(m, t)$  en précisant le couple  $(m, t)$ . Placer ces points sur une figure.

10. Exemple du cas  $n = 3$

On suppose que  $n = 3$  et  $t \in \left] \frac{-1}{2}, 1 \right[$ .

On pose  $a = \sqrt{\frac{2-2t}{3}}$  et  $b = \sqrt{\frac{2t+1}{3}}$ .

- a. Soit  $u$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  et  $H$  un sous espace supplémentaire orthogonal de  $\text{vect}\{u\}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , justifier qu'il existe une famille  $(y_1, y_2, y_3)$  de vecteurs de  $H$  solution du problème  $P(3, \frac{-1}{2})$ .
- b. Si on pose alors pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $x_i = a y_i + b u$ , montrer que  $(x_1, x_2, x_3)$  est une famille libre de vecteurs solution au problème  $P(3, t)$ .
- c. A quelle condition nécessaire portant sur  $\alpha \in ]0, \pi[$ , existe-t-il trois points  $A_1, A_2$  et  $A_3$  de la sphère de centre  $O$  et de rayon 1 de  $E_3$  tels que les trois angles géométriques des couples  $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$ ,  $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_3})$  et  $(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$  soient égaux à  $\alpha$  ?

Remarque : on demande de ne pas utiliser le résultat de la question 4.

### III. THÉORÈMES d'APOLLONIUS

On rappelle que si  $\mathcal{B} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  est une base de  $E$  et si  $f$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E \times E$ , la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice symétrique  $S$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :  $S = (f(a_i, a_j))$ . Par ailleurs, si  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs de  $E$  où  $X$  et  $Y$  sont les matrices de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  représentant leurs composantes dans la base  $\mathcal{B}$ , on a  $f(x, y) = {}^t X S Y$ .

11. Soit  $\langle , \rangle$  un autre produit scalaire sur  $E$ , on considère  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  et  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  deux bases orthonormales de  $E$  pour ce produit scalaire. On note  $P$  la matrice de passage de la base  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  vers la base  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Montrer que, pour le produit scalaire  $(\mid)$ ,  $G(b_1, b_2, \dots, b_n) = P^{-1} G(a_1, a_2, \dots, a_n) P$

puis justifier que  $\sum_{i=1}^n (a_i \mid a_i) = \sum_{i=1}^n (b_i \mid b_i)$ .

**12.** Dans  $E_2$ , de repère orthonormé  $(O, e_1, e_2)$ , on considère l'ellipse  $C$  d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels strictement positifs.}$$

**a.** Justifier que l'on définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\langle U, V \rangle = \frac{u v}{a^2} + \frac{u' v'}{b^2}$  si  $U = (u, u')$  et  $V = (v, v')$  dans la base  $(e_1, e_2)$ .

**b.** Deux vecteurs  $U$  et  $V$  de  $E_2$  sont des diamètres conjugués de  $C$  si  $(U, V)$  est une base orthonormale pour le produit scalaire  $\langle \mid \rangle$ .

Donner un exemple simple de deux diamètres conjugués de  $C$ .

**c.** Dans cette question, on demande de faire une figure.

Soit  $M_0$  un point de coordonnées  $(x_0, y_0)$  de  $C$ , montrer en utilisant un vecteur gradient,

que l'équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C$  en  $M_0$  est  $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$ . En déduire que

la droite  $D$  qui passe par  $O$  et parallèle à  $T$  a pour équation cartésienne  $\langle \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM} \rangle = 0$ .

Si on note  $M_0'$  un point d'intersection de  $D$  et  $C$ , montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{OM_0}$  et  $\overrightarrow{OM_0'}$  sont des diamètres conjugués de  $C$ .

**d.** Si  $M$  et  $M'$  sont deux points de  $C$  tels que les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OM'}$  soient des diamètres conjugués de  $C$ , démontrer les deux théorèmes d'Apollonius suivants :

**i.**  $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$  (précision :  $OM^2 = (\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM})$ ).

**ii.** L'aire du parallélogramme « formé par  $O, M$  et  $M'$  » est constante égale à  $a b$ .

#### IV. RECHERCHE D'UNE ISOMÉTRIE AFFINE

**13.** On note  $O(E_n)$  le groupe des automorphismes orthogonaux de  $E_n$ .

Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  deux familles de vecteurs de  $E_n$  vérifiant

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

On veut montrer qu'il existe  $u \in O(E_n)$  vérifiant : pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $u(x_i) = y_i$ .

On note  $p = \text{rang}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{rang}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , et on considère que les vecteurs sont numérotés de sorte que  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_p)$  soient deux familles libres de vecteurs.

On pose alors  $V = \text{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_p\} = \text{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots, x_n\}$ ,

$$W = \text{vect}\{y_1, y_2, \dots, y_p\} = \text{vect}\{y_1, y_2, \dots, y_p, \dots, y_n\},$$

on note  $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $V^\perp$   
 et  $(e'_{p+1}, e'_{p+2}, \dots, e'_n)$  une base orthonormale de  $W^\perp$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  défini par :

pour  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$   $u(x_i) = y_i$  et pour  $i \in \{p+1, p+2, \dots, n\}$   $u(e_i) = e'_i$ .

- a. Montrer que  $u$  conserve le produit scalaire.
  - b. Pour tout entier  $i \in \{p+1, p+2, \dots, n\}$ , montrer que  $y_i - u(x_i) \in W \cap W^\perp$ .
  - c. Conclure.
- 14.** On donne  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  et  $(B_1, B_2, \dots, B_n)$  deux familles de points de  $E_n$  vérifiant pour tout couple d'entiers  $(i, j)$  compris entre 1 et  $n$ ,  $\|\overrightarrow{A_i A_j}\| = \|\overrightarrow{B_i B_j}\|$  et on veut montrer qu'il existe une isométrie affine  $f$  de  $E_n$  vérifiant pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $f(A_i) = B_i$ .
- a. Si on pose pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_i = \overrightarrow{A_1 A_i}$  et  $y_i = \overrightarrow{B_1 B_i}$ , montrer que, pour tout couple d'entiers  $(i, j)$  compris entre 1 et  $n$ ,  $(x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j)$ .
  - b. Conclure.

**Fin de l'énoncé**