Corrigé pour serveur UPS de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

GÉNÉRALITÉS.

1. En identifiant $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $E_n = \mathbb{R}^n$, il vient ${}^tYY = \|Y\|_2^2$ donc ${}^tYY = 0$ si et seulement si $Y = 0$. □

Soit $X \in E_p$ tel que ${}^tAAX = 0$. Comme ${}^tAA \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$, le produit à gauche par ${}^tX$ est licite. Ainsi ${}^tX{}^tAAX = 0$ i.e. ${}^t(AX)(AX) = 0$ donc $AX = 0$ compte-tenu de la question précédente. Ce qui prouve que $\text{Ker}({}^tAA) \subset \text{Ker}\,A$.
Par ailleurs l'inclusion inverse est évidente. En conclusion $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}\,A$.
Or, comme ${}^tAA \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ le théorème du rang prouve que $\text{rg}({}^tAA) = p - \dim\ \text{Ker}({}^tAA)$.
De même puisque $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on a $\text{rg}(A) = p - \dim\ \text{Ker}(A)$.
Ainsi $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$. □

2. Notons C_k la k^ieme colonne de A. Le terme situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de ${}^tAA$ est ${}^tC_iC_j$. Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormée on a ${}^tC_iC_j = (x_i|x_j)$. Ainsi $G(x_1, x_2, \ldots, x_p) = {}^tAA$. □

Ainsi $\text{rg}\big(G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) = \text{rg}({}^tAA)$. Or $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$ (Cf 1.b) et $\text{rg}(A) = \text{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Donc $\text{rg}\big(G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) = \text{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. □

3. Comme $p = n$, on a d'une part $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2$ et d'autre part la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si $\det(A) = 0$.
Il en découle que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ et qu'elle st libre si et seulement $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$. □

4 Il vient $G(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$.
En écrivant que son déterminant est positif ou nul (Cf question 3) on obtient l'inégalité demandée. □

Il y a une faute d'énoncé : il faut lire “sur un même cercle de centre 0” (trois points quelconques d'une sphère sont toujours sur un même cercle !). Dans ce cas la famille $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est liée (vecteurs coplanaires) donc on a l'égalité dans l'inégalité de l'énoncé. □

5. $G(a+b, y) = \begin{pmatrix} \|a+b\|^2 & (a+b|y) \\ (a+b|y) & \|y\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|a\|^2 + \|b\|^2 & (b|y) \\ (b|y) & \|y\|^2 \end{pmatrix}$ donc $\Gamma(a+b, y) = \big(\|a\|^2 + \|b\|^2\big)\|y\|^2 - (b|y)^2$.
Il vient de même $\Gamma(a, y) = \|a\|^2\|y\|^2$ et $\Gamma(b, y) = \|b\|^2\|y\|^2 - (b|y)^2$.
Donc si $(a|b) = (a|y) = 0$ alors $\Gamma(a+b, y) = \Gamma(a, y) + \Gamma(b, y)$. □

Avec les notations de l'énoncé, on a $(x - z|z) = (x - y|y) = 0$ donc :
$\Gamma(x, y) = \Gamma((x - z) + z, y) = \Gamma(x - z, y) + \Gamma(z, y) = \Gamma(x - z, y)$. □
(la famille (z, y) est liée donc $\Gamma(z, y) = 0$).

Si on désigne par H la projection orthogonale de B sur (AC), la question précédente montre que :
$\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \Gamma(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC})$. Or $\Gamma(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}) = \|\overrightarrow{HB}\|^2\|\overrightarrow{AC}\|^2$.
Ainsi $\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ est l'aire du parallélogramme défini par les trois points A, B et C. □

6. Si le parallélépipède $ABCD$ est rectangle, la matrice de Gram associée est diagonale de déterminant le produit des carrés des normes des trois vecteurs ce qui est bien le carré du volume. □

Cette question est ridicule. Elle suggère de calculer le volume d'un parallélépipède en utilisant la matrice de Gram. Par rapport à la méthode classique qui consiste à calculer simplement le produit mixte $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ (calcul des coordonnées des trois vecteurs puis calcul du déterminant) elle exige en outre le calcul de 6 produits scalaires (soit 18 multiplications et 12 additions) ainsi que le calcul d'une racine carrée ! □

POINTS ÉQUIDISTANTS SUR UNE SPHÈRE EUCLIDIENNE.

Commençons par remarquer que si le problème $P(m, t)$ admet une solution alors $|t| \leqslant 1$ d'près l'inégalité de Schwarz.

7. $\|x_i - x_j\|^2 = 2(1 - t)$. □

La matrice J est de rang 1 donc son noyau est de dimension $m - 1$ donc 0 est valeur propre d'ordre au moins $m - 1$. Donc $\chi_J(X) = X^{m-1}(X - \lambda)$. La somme des racines vaut donc λ. Mais par ailleurs elle est égale à la trace de J comme on le voit en évaluant directement χ_J à partir de la matrice J. Ainsi $\lambda = m$.
Donc $\chi_J(X) = \det(XI - J) = X^{m-1}(X - m)$. □

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est solution de $P(m, t)$ alors $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est la matrice d'ordre m dont tous les coefficients sont égaux à t sauf ceux de la diagonale égaux à 1. Donc $G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (1 - t)I + tJ$.

C'est donc la valeur en $1-t$ du polynôme caractéristique de la matrice $-tJ$ lequel est égal, par le même raisonnement que ci-dessus, à $X^{m-1}(X+mt)$.
Donc $\Gamma(x_1,x_2,\ldots,x_m)=(1-t)^{m-1}(1-t+mt)=(1-t)^{m-1}\big(1+(m-1)t\big)$. $\square$

8.a Supposons que $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ soit libre et solution de $P(m,t)$. Alors, d'après la question 3.b, $\Gamma(x_1,x_2,\ldots,x_n)>0$ donc, en vertu de la question précédente, $(1-t)^{m-1}\big(1+(m-1)t\big)>0$.
Or $|t|\leqslant 1$ comme noté en préambule de la partie, donc $1-t\geqslant 0$. L'inégalité ci-dessus implique alors $1-t>0$ et $1+(m-1)t>0$ c'est à dire $\dfrac{-1}{m-1}<t<1$. En outre on a $m\leqslant n$ puisque la famille est libre. $\square$

8.b Supposons désormais que $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ soit liée et solution de $P(m,t)$. Alors (question 3.a)$\Gamma(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ donc $(1-t)^{m-1}\big(1+(m-1)t\big)=0$. Or par hypothèse $t\neq 1$ donc $t=\dfrac{-1}{m-1}$.
Or la famille $(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1})$ est bien sûr solution de $P(m-1,t)$. Si elle était liée on aurait $t=\dfrac{-1}{m-2}$ ce qui n'est pas puisque $t=\dfrac{-1}{m-1}$. Donc elle est libre. Donc $m-1\leqslant n$.
En conclusion $t=\dfrac{-1}{m-1}$ et $m\leqslant n+1$. $\square$

8.c Supposons qu'il existe cinq tels vecteurs y_i. Ils sont non nuls pour que les angles soient définis.
La famille $(x_1,x_2,\ldots,x_5)$ avec $x_i=y_i/\|y_i\|$ est alors solution de $P(5,\cos\theta)$ et est naturellement liée puisque la dimension est 3. Ce qui implique $5\leqslant 4$. Donc une telle famille n'existe pas. $\square$
Remarque : La question est mal posée. Inutile de préciser que l'angle θ est obtus : comme la famille est forcément liée, $\cos\theta<0$ d'après 8.b.

9. Comme $m\geqslant 3$ par hypothèse, on a $m=3$ d'après 8.b. Donc $t=\cos\theta=-1/2$ toujours d'après 8.b, en notant θ l'angle commun $(\overrightarrow{OA_i},\overrightarrow{OA_j})$ pour $i\neq j$. Donc si les points A_1,A_2,A_3 existent, ils sont situés sur le cercle de centre 0 et de rayon 1 et forment un triangle équilatéral. Réciproquement trois tels points conviennent clairement. $\square$

10 Commençons par remarquer que comme $n=3$ et que $t\neq -1/2$, si une solution au problème $P(m,t)$ existe, on a forcément $m=3$ (et la famille est libre).

10.a Encore une maladresse d'énoncé : il faut lire “le” sous-espace supplémentaire orthogonal H et non pas “un”. Ceci dit le résultat est immédiat d'après la question précédente. $\square$

10.b Les trois vecteurs x_i sont bien unitaires car, comme $y_i\perp u$ et $\|y_i\|=\|u\|=1$, on a $\|x_i\|^2=a^2+b^2=1$.
Par ailleurs si $i\neq j$ il vient $(x_i|x_j)=a^2(y_i|y_j)+b^2=t$.
Enfin la famille (x_1,x_2,x_3) est libre. En effet si $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ est telle que $\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i x_i=0$ il vient :
$a\Big(\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i y_i\Big)+b\Big(\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i\Big)u=0$.
En effectuant les produits scalaires successivement avec u, y_1 et y_2, on obtient (car a et b sont non nuls) :

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\dfrac{\lambda_2}{2}-\dfrac{\lambda_3}{2}=0\\ -\dfrac{\lambda_1}{2}+\lambda_2-\dfrac{\lambda_3}{2}=0\end{cases}$$

La somme des trois équations fournit $\lambda_1+\lambda_2=0$.
Il en découle à l'aide la première équation que $\lambda_3=0$.
En reportant dans les deux premières on obtient $\lambda_1=\lambda_2=0$.
Dons la famille est bien libre.

En conclusion la famille (x_1,x_2,x_3) est une famille libre solution de $P(3,t)$. $\square$

10.c Dans cette question notons $x_i=\overrightarrow{OA_i}$.
Si les trois points existent alors (x_1,x_2,x_3) est solution de $P(3,\cos\alpha)$. Si la famille est liée alors $\alpha=2\pi/3$ d'après 8.b. Si la famille est libre alors $\alpha\in]0,2\pi/3[$ d'après 8.a.
Réciproquement si $\alpha=2\pi/3$ les trois points existent bien d'après la question 9 : il suffit de choisir trois points sur la sphère formant un triangle équilatéral de centre 0.
De même si $\alpha\in]0,2\pi/3[$ les trois points existent d'après la question 10.b.
En conclusion il existe trois tels points si et seulement si $\alpha\in]0,2\pi/3]$. $\square$

THÉORÈMES D'APOLLONIUS.

11. <u>Première solution</u> : $G(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ est la matrice de $(\ |\ )$ dans la base $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ et de même $G(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ est la matrice de $(\ |\ )$ dans la base $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. La formule de changement de base pour les applications bilinéaires symétriques fournit alors $G(b_1,b_2,\ldots,b_n)={}^tPG(a_1,a_2,\ldots,a_n)P$.
Or P est orthogonale en tant que matrice de passage entre bases orthonormales. Donc ${}^tP=P^{-1}$. $\square$

Seconde solution : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale pour $(\ |\ )$ et soient A et B les matrices de passage de $\mathcal{B}$ aux bases $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.
Alors $B = AP$ (matrice de deux changements de base successifs), $G(b_1, b_2, \ldots, b_n) = {}^tBB$ et de même $G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = {}^tAA$.
Donc $G(b_1, b_2, \ldots, b_n) = {}^tBB = {}^tP{}^tAAP = {}^tPG(a_1, a_2, \ldots, a_n)P = P^{-1}G(a_1, a_2, \ldots, a_n)P$. □

Les deux matrices étant semblables ont même trace d'où $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_1|a_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}(b_i|b_i)$. □

12.a Il est immédiat de vérifier que $<\ ,\ >$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. □
Remarquons que C est le cercle unité pour la structure euclidienne définie par $<\ ,\ >$.

12.b Les vecteurs ae_1 et be_2 sont deux diamètres conjugués particuliers de C. □

12.c Dans le repère (O, e_1, e_2) la courbe C admet l'équation implicite $f(x,y) = 0$ avec $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$. Or $f(M_0) = 0$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de M_0 et $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0) = 2\big(\dfrac{x_0}{a^2}, \dfrac{y_0}{b^2}\big) \neq 0$ (car $M_0 \in C$ donc on ne peut avoir $x_0 = y_0 = 0$).
D'après le théorème des fonctions implicites, il en découle que C admet une tangente en M_0 normale à $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)$ donc d'équation $\dfrac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$ soit encore $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$ puisque $M_0 \in C$. □
La parallèle à cette tangente passant par O a pour équation $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 0$ i.e. $< \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM} >= 0$. □

Soit M'_o un des deux points d'intersection de D et de C. Alors $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM'_0})$ est bien une base orthonormale de $<\ ,\ >$ puisque les deux vecteurs sont unitaires (car M_0 et M'_0 appartiennent à C) et orthogonaux puisque $< \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM'_0} >= 0$ d'après la question précédente. □

12.d $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et (ae_1, be_2) sont deux couples de diamètres conjugués donc deux bases orthonormales pour $<\ ,\ >$.
Donc $(\overrightarrow{OM}|\overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM'}|\overrightarrow{OM'}) = (ae_1|ae_1) + (be_2, be_2)$ d'après la question 11 soit $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$. □

Le carré de l'aire du parallélogramme défini par $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ est, d'après la question 5.c, $\Gamma(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.
Or, d'après la question 11, les matrices $G(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et $G(ae_1, be_2)$ sont semblables.
Donc $\Gamma(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \Gamma(ae_1, be_2) = a^2b^2$. □
Ce qui prouve au passage que cette aire est constante.

ÉTUDE D'UNE ISOMÉTRIE AFFINE.

13. Commençons par remarquer que comme les deux familles $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ont même matrice de Gram, les deux familles ont bien le même rang p (question 2).
Par ailleurs pour la même raison, on a $\|x_i\| = \|y_i\|$ pour tout i.
Pour ces deux raisons l'existence d'un automorphisme orthogonal échangeant les deux familles n'est pas impossible a priori.

Remarquons que $(x_1, \ldots, x_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ et $(y_1, \ldots, y_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de E_n adaptées respectivement aux décompositions $E_n = V \oplus V^\perp$ et $E_n = W \oplus W^\perp$.

13.a Soit u l'endomorphisme défini dans l'énoncé (et non pas "un" endomorphisme comme il est dit).
Pour montrer qu'il conserve le produit scalaire, il suffit (formule de polarisation) de prouver qu'il conserve la norme c'est à dire que $\|\sum\limits_{i}^{p} a_i x_i + \sum\limits_{i=p+1}^{n} a_i e_i\|^2 = \|\sum\limits_{i}^{p} a_i y_i + \sum\limits_{i=p+1}^{n} a_i e'_i\|^2$.

Or le membre de gauche est égal à $\|\sum\limits_{i}^{p} a_i x_i\|^2 + \sum\limits_{i=p+1}^{n} a_i^2$ d'après le théorème de Pythagore et le fait que $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $V^\perp$.
De même le membre de droite est égal à $\|\sum\limits_{i}^{p} a_i y_i\|^2 + \sum\limits_{i=p+1}^{n} a_i^2$.
Or $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$ pour tout couple (i,j) puisque les deux famille ont même maatrice de Gram.
Donc $\|\sum\limits_{i}^{p} a_i x_i\|^2 = \|\sum\limits_{i}^{p} a_i y_i\|^2$ d'où la conclusion. □

13.b Pour tout i entre 1 et n on a $x_i \in V$ donc $u(x_i) \in u(V) = W$ et $y_i \in W$ donc $y_i - u(x_i) \in W$.

Supposons désormais $i \geqslant p+1$. Alors pour tout j entre 1 et p on a $y_j = u(x_j)$ donc :
$(y_i - u(x_i)|y_j) = \underbrace{(y_i|y_j)}_{=0} - (u(x_i)|u(x_j)) = \underbrace{(x_i|x_j)}_{=0}$ par conservation du produit scalaire. Donc $y_i - u(x_i) \in W^\perp$.
En conclusion si $i \geqslant p+1$ alors $y_i - u(x_i) = 0$. □

13.d Ainsi l'endomorphisme u transforme bien la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en la famille $(y_1, y_2, \dots, y_n)$.
En outre il conserve le produit scalaire comme noté précédemment, donc il s'agit bien d'un automorphisme orthogonal. $\square$

Remarque 1 : on vient de prouver qu'une condition suffisante pour qu'il existe un automorphisme orthogonal échangeant deux familles de n vecteurs dans un espace euclidien de dimension n est que ces deux familles aient même matrice de Gram. Or la condition est clairement nécessaire ! Il s'agit donc là d'une condition nécessaire et suffisante.

Remarque 2 : il est immédiat de voir qu'il y a unicité si et seulement si les deux familles sont de rang n.

14.a $2(x_i|x_j) = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - \|x_i - x_j\|^2 = \|\overrightarrow{A_1A_i}\|^2 + \|\overrightarrow{A_1A_j}\|^2 - \|\overrightarrow{A_jA_i}\|^2$.
De même $2(y_i|y_j) = \|\overrightarrow{B_1B_i}\|^2 + \|\overrightarrow{B_1B_j}\|^2 - \|\overrightarrow{B_jB_i}\|^2$.
Donc $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$ pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et n. $\square$

14.b Ainsi les deux familles $(x_1, x_2, \dots, x_n$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ont même matrice de Gram. Donc il existe un automorphisme orthogonal u transformant la première famille en la seconde.
Soit l'application affine f définie par $f(A_1) = B_1$ et $\overrightarrow{f} = u$ en notant $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire sous-jacente.
Alors f est une isométrie affine telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i. $\square$

FIN