CCP PSI1 2007
un corrigé

Les calculatrices étant autorisées, les réponses aux questions “calculatoires” seront données sans explication (ceci signifiant que le calcul a été fait à la machine).

1 Les suites α et β.

1.1. On a

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_4 = 9$$

1.2. On procède par récurrence sur n pour montrer que

$$\forall n \geq 2,\ \alpha_n \in \mathbb{N}^*$$

- $\alpha_2 = 1 \in \mathbb{N}^*$. Le résultat est donc vrai au rang 2.
- Soit $n \geq 2$ tel que $\alpha_n \in \mathbb{N}$. On a

$$\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1} \in \mathbb{Z}$$

De plus $\alpha_n \geq 1$ donc $\alpha_{n+1} \geq n+1-1 \geq n \geq 2$ et donc $\alpha_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et le résultat est vrai au rang $n+1$.

Comme $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{N}$, on a donc prouvé que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \in \mathbb{N}$$

2.1. On a

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 2,\ \beta_4 = 9$$

2.2. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \Big((-1)^k n(n-1)\dots(k+1) \Big)$$

et β est un entier relatif comme somme de tels entiers.

2.3. On a

$$\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (n+1)! \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = (-1)^{n+1}$$

2.4. $\beta_0 = \alpha = 1$ et les suites α et β vérifient la même relation de récurrence d'ordre 1. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \beta_n$$

3.1. La suite de terme général $z_k = \frac{(-1)^k}{k!}$ vérifie les hypothèses de la règle spéciale (signe alterné, décroissance en module et convergence vers 0). La série correspondante a donc un reste d'ordre n, ρ_n, du signe de $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. On a donc $\rho(n)$qiu est positif si n est impair et négatif si n est pair.

3.2. La règle spéciale indique aussi que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\rho_n| \leq \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

c'est à dire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n!|\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

L'inégalité est stricte car $\frac{1}{k!}$ est strictement décroissante et donc on a une inégalité stricte dans le résultat sur les reste s provenant de la règle spéciale

3.3. On a $\frac{\beta_n}{n!} + \rho_n = e^{-1}$ et donc

$$\forall n \geq 1,\ |\beta_n - n!e^{-1}| = |-n!\rho_n| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

D'après le dernier rappel du préambule, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.

4.1. Sur $]-1,1[$, on a

$$f(0) = 1,\ f'(x) - \frac{x}{1-x} f(x) = 0$$

Comme $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est continue sur $]-1,1[$, le théorème de Cauchy-Lipschitz cas linéaire s'applique et f existe et est unique (on a ici un problème de Cauchy).
En écrivant que $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$, on obtient que $x \mapsto -x - \ln(1-x)$ est une primitive sur $]-1,1[$ de $x \mapsto \frac{x}{1-x}$. Il existe alors une constante c telle que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = c\exp\left(-x - \ln(1-x)\right) = \frac{ce^{-x}}{1-x}$$

Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $c = 1$ et donc que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

4.2. L'expression précédente montre, par théorèmes généraux, que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Remarque : on peut aussi montrer par récurrence sur n que $f \in C^n(]-1,1[)$ est vraie pour tout n en utilisant seulement l'équation différentielle.

4.3. On a donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x)f(x) = e^{-x}$$

En dérivant $n+1$ fois cette relation par formule de Leibnitz on obtient (avec un abus de notation)

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (1-x)^{(k)} f^{(n+1-k)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x}$$

$(1-x)^{(k)}$ étant nul pour $k \geq 2$, ceci devient

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}$$

4.4. Appliquons cette relation en $x = 0$:

$$f^{(n+1)}(0) = (n+1)f^{(n)}(0) + (-1)^{n+1}$$

Les suites (β_n) et $(f^{(n)}(0))$ ont même premier terme et vérifient le même relation de récurrence d'ordre 1 : elles sont égales et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = f^{(n)}(0)$$

2 La suite γ.

1. $\mathcal{S}_1$ possède un unique élément (l'identité) et

$$\gamma_1 = 0$$

Dans $\mathcal{S}_2$, il y a l'identité et la transposition $< 1,2 >$. On donc

$$\gamma_2 = 1$$

2. L'identité de $[|1,3|]$ a trois points fixes.
Les transpositions $<1,2>$, $<1,3>$ et $<2,3>$ ont un point fixe.
Les cycles $<1,2,3>$, $<1,3,2>$ n'ont pas de point fixe et on a donc

$$\gamma_3 = 2$$

.

3.1. τ a deux points fixes si et seulement deux éléments sont permutés et deux autres laissés fixes c'est à dire si et seulement si τ est une transposition. Il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ telles permutations.

3.2. τ possède un unique point fixe a si et seulement si τ permute circulairement les éléments de $[|1,4|] \setminus \{a\}$ (deux choix possibles). Comme on a quatre choix pour a, il y a $8 = 2 * 4$ telles permutations.

3.3. Si un élément possède trois points fixes, il en a quatre et c'est l'identité. Il y a 24 éléments dans $\mathcal{S}_4$. On a donc

$$\gamma_4 = 24 - 6 - 8 - 1 = 9$$

4.1. On a card$(\mathcal{S}_n = n!$.

4.2. Une permutation possédant exactement k points fixes est caractérisée par le choix de ces points fixes (k parmi n) et une permutation sans points fixes des $n-k$ restant (γ_{n-k} choix). Ainsi, il y a $\binom{n}{k}\gamma_{n-k}$ permutations ayant k points fixes.

4.3. $\mathcal{S}_n$ est la réunion disjointe des ensembles $T_{n,k}$ des élements de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes. En passant au cardinal, on a donc

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_{n-k}$$

Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on a donc (avec un changement d'indice $j = n-k$)

$$n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \gamma_j$$

5.1. On a bien sûr $\gamma_n \leq n!$ (il y a moins de permutations sans point fixe que de permutations) et donc

$$0 \leq \frac{\gamma_n}{n!}|x|^n \leq |x|^n$$

est borné si $|x| \leq 1$. Par lemme d'Abel, la série entière a un rayon de convergence au moins égal à 1.

5.2. g est, par définition, développable en série entière de rayon de convergence au moins 1, exp est développable en série entière de rayon de convergence infini. h est donc développable en série entière de rayon de convergence au moins égal à $\min(1,+\infty) = 1$ et son développement s'obtient par produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1,1[,\ h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{j=0}^{n} \frac{\gamma_j}{j!(n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \gamma_j = 1$$

5.3. On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[,\ h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

et donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = f(x)$$

On en déduit (si une fonction est développable, son développement est le développement de Taylor) que

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{\beta_n}{n!} x^n$$

Comme $\frac{\beta_n}{n!} \to e^{-1}$, la suite $\frac{\beta_n}{n!} x^n$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$. Le rayon de convergence vaut exactement 1.

5.4. Le calcul de la question précédente et l'unicité du développement en série entière indique que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \gamma_n$$

5.5. $\beta_n/n! \to e^{-1}$ est le terme général d'une série divergente. g n'est donc pas définie en 1.

5.6. De la même façon, g n'est pas définie en -1 (série grossièrement divergente).

5.7. On a

$$\gamma_8 = \alpha_8 = 14833$$

3 Sur $\delta_n = e^{-1} n! - \beta_n$.

1.1. On a

$$|J_n| \leq e \int_0^1 x^n\ dx = \frac{e}{n}$$

et, par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$$

1.2. (v_n) est une suite alternée, de limite nulle en l'infini. En outre

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \int_0^1 e^x (x^n - x^{n+1})\ dx \geq 0$$

car $\forall x \in [0,1],\ e^x(x^n - x^{n+1}) \geq 0$ (et les bornes sont dans le bon sens). On peut donc appliquer la règle spéciale pour affirmer que $\sum (v_n)$ converge.

2.1. L'égalité de Taylor avec reste intégrale indique que si u est une fonction de classe C^{n+1} sur l'intervalle I et si $a \in I$ alors

$$\forall x \in I,\ u(x) = u(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} u^{(n+1)}(t)\ dt$$

En appliquant ceci avec $u = \exp$, $I = \mathbb{R}$ et $a = 0$, on obtient

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\ dt$$

2.2. Pour $x = -1$, on a donc

$$e^{-1} = \frac{\beta_n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^{-1} (-1-t)^n e^t\ dt$$

Le changement de variable $u = 1 + t$ donne alors

$$\delta_n = n! e^{-a} - \beta_n = e^{-1} v_n$$

3. Comme $\sum(v_n)$ converge, il en est de même de $\sum(\delta_n)$.
Une intégration par parties donne

$$\int_0^1 x^n e^x \, dx = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x \, dx$$

et donc $J_n = e - nJ_{n-1}$. Comme $J_n \to 0$, on a donc $nJ_{n-1} \to e$ et ainsi

$$J_n \sim \frac{e}{n+1}$$

$|v_n| = J_n$ est le terme général d'une série divergente et $\sum(\delta_n)$ n'est donc pas non plus absolument convergente.

4.1. Avec l'équivalent précédent, on a

$$\frac{|\delta_n|}{n} = e^{-1}\frac{J_n}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme d'une série absolument convergente.

4.2.1 $u : x \mapsto e^x \ln(1-x)$ est continue sur $[0,1[$. On a un unique problème d'intégrabilité au voisinage de 1. Or,

$$u(1-t) = e^{1-t}\ln(t) \sim e\ln(t) = o_0(1/\sqrt{t})$$

par croissances comparées. Par comparaison aux fonctions de Riemann, u est intégrable au voisinage de 1. Elle l'est donc sur $[0,1[$ et a fortiori l'intégrale A existe.

4.2.2 On a

$$\forall x \in [0,1[,\ -e^x \ln(1-x) = \sum_{k\geq 1} \frac{e^x x^k}{k}$$

– $f_k : x \mapsto \frac{e^x x^k}{k}$ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur ce segment.
– $\sum(f_k)$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $x \mapsto -e^x\ln(1-x)$ qui est continue sur $[0,1[$.
– On a

$$\int_0^1 |f_k(x)| \, dx = \frac{J_k}{k} \sim \frac{e}{k^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Le théorème d'interversion somme-intégrale s'applique et donne

$$A = \sum_{k\geq 1} \int_0^1 \frac{e^x x^k}{k} \, dx = \sum_{k\geq 1} \frac{J_k}{k}$$

Comme $J_n = e|\delta_n|$, on a donc

$$\sum_{k\geq 1} \frac{|\delta_k|}{k} = \frac{A}{e}$$

4.3. $\frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} = o(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente.
Le changement de variable $u = 1-x$ donne

$$A = -e\int_0^1 e^{-u}\ln(u) \, du = -e\int_0^1 \sum_{n\geq 0} \frac{(-u)^n \ln(u)}{n!} \, du$$

- $g_n : u \mapsto \frac{(-u)^n \ln(u)}{n!}$ est une fonction continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$ (négligeable devant $1/\sqrt{u}$ au voisinage de 0 par croissances comparées).
- $\sum(g_n)$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $u \mapsto e^{-u}\ln(u)$ qui est continue sur $]0,1]$.

- Une intégration par parties donne, pour $a > 0$,

$$\int_a^1 u^n \ln(u)\, du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \ln(u)\right]_a^1 - \frac{1}{n+1} \int_a^1 u^n\, du$$

En faisant tendre a vers 0 et en multipliant par $1/n!$, on obtient

$$\int_0^1 |g_n(u)|\, du = -\int_0^1 \frac{u^n \ln(u)}{n!}\, du = \frac{1}{(n+1)^2 n!}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Le théorème d'interversion somme-intégrale s'applique et donne

$$A = -e \sum_{n\geq 0} \int_0^1 g_n(u)\, du = e \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$$

On a finalement

$$\sum_{k\geq 1} \frac{|\delta_k|}{k} = \frac{A}{e} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$$

4.4. $\frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$ est le terme général d'une suite alternée vérifiant les hypothèses de la règle spéciale.

On a donc

$$\left| \sum_{n\geq N} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^2 N!}$$

Pour $N = 4$, on a $\frac{1}{(N+1)^2 N!} = \frac{1}{600}$ et donc

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{600} \quad \text{pour} \quad \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!} = \frac{229}{288}$$