C.C.P. MP Math 2 2000

Partie 1 - Matrices réductibles ou irréductibles

Question 1-1 -
a.1) Pour un vecteur de la base canonique : $(e_1, \cdots, e_N)$ de $\mathbb{R}^N$

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad 1 \leq i \leq N \qquad P_\sigma \times P_{\sigma'}(e_i) = P_\sigma\left(e_{\sigma'(i)}\right) = e_{\sigma\circ\sigma'(i)} \quad \text{donc} \quad \boxed{P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}}$$

a.2) Pour $\sigma' = \sigma^{-1}$ dans la relation précédente, puisque $P_{Id_{W_N}} = I_N$ on a : $\boxed{P_\sigma \times P_{\sigma^{-1}} = I_N}$

a.3) L'image de la base canonique par l'endomorphisme associé à P_σ est une base constituée des mêmes vecteurs dans un autre ordre (permutés par σ).

C'est donc encore une base orthonormale pour le produit scalaire usuel.

$\boxed{P_\sigma \text{ matrice de changement de bases orthonormales est donc orthogonale}}$

Autre méthode :

Calculons $\left({}^tP_\sigma \times P_\sigma\right)_{i\,j} = \sum\limits_{1 \leq k \leq N} ({}^tP_\sigma)_{i\,k}\,(P_\sigma)_{k\,j} = \sum\limits_{1 \leq k \leq N} (P_\sigma)_{k\,i}\,(P_\sigma)_{k\,j} = \sum\limits_{1 \leq k \leq N} \delta_{k\,\sigma(i)}\delta_{k\,\sigma(j)}$

Si $k \neq \sigma(i)$ ou $k \neq \sigma(j)$ le terme qu'on somme est nul. Il est donc nul pour $i \neq j$ (σ injective)

Pour $i = j$ il n'y a qu'un seul terme non nul dans la somme, qui vaut 1. $\boxed{{}^tP_\sigma \times P_\sigma = I_N}$

Une matrice de permutation est donc **orthogonale**.

b) On peut comme ci-dessus, calculer $b_{i\,j}$ dans le produit des trois matrices.

Autre rédaction :

Appellons $E_{i\,j}$ la matrice carrée élémentaire, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{ème}$ ligne, $j^{ème}$ colonne qui vaut 1. Alors $\boxed{P_\sigma = \sum\limits_{1 \leq j \leq N} E_{\sigma(j)\,j}}$

Avec les **opérations élémentaires** sur les lignes et les colonnes d'une matrice carrée M :

$M \times E_{i\,j}$ correspond à $C_i \to C_j$ et $E_{i\,j} \times M$ correspond à $L_j \to L_i$

Puisque : $P_{\sigma^{-1}} = \sum\limits_{1 \leq j \leq N} E_{\sigma^{-1}(j)\,j} = \sum\limits_{1 \leq i \leq N} E_{i\,\sigma(i)}$ en posant $j = \sigma(i)$ donc $i = \sigma^{-1}(j)$

on a dans $B = (P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma$ la superposition des opérations élémentaires :

Pour j de 1 à N $C_{\sigma(j)} \to C_j$
Pour i de 1 à N $L_{\sigma(i)} \to L_i$
donc $\boxed{\forall\,(i,j) \in (W_N)^2 \qquad b_{i\,j} = a_{\sigma(i)\,\sigma(j)}}$

c) **Si** A **est réductible** :

il existe (S,T) de parties **non vides** de W_N formant une partition, telles que $\left\{\begin{array}{l}\forall s \in S\\ \forall t \in T\end{array}\right. \quad a_{s\,t} = 0$

Considérons S et T ordonnées, et définissons une permutation σ envoyant chaque élément de $\{1, \cdots, N\}$ sur l'élément de même rang de (S,T) pris successivement dans l'ordre.

Si $p = card(S)$ $\sigma(\{1, \cdots, p\}) = S$ et $\sigma(\{p+1, \cdots, N\}) = T$

Alors, dans $B = (P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma$ $\left\{\begin{array}{lll} j \geq p+1 & \text{alors} & \sigma(j) \in T\\ i \leq p & \text{alors} & \sigma(i) \in S\end{array}\right.$ et $b_{i\,j} = a_{\sigma(i)\,\sigma(j)} = a_{s\,t} = 0$

donc B est décomposable en blocs : $B = \begin{pmatrix} F & 0_{p\,N-p}\\ G & H\end{pmatrix}$

Réciproquement : si B a la forme indiquée et qu'on pose $S = \sigma(\{1, \cdots, p\})$ et $T = \sigma(\{p+1, \cdots, N\})$, il constituent une partition de W_N et $\left\{\begin{array}{l}\forall s \in S\\ \forall t \in T\end{array}\right. \quad a_{s\,t} = a_{\sigma(i)\,\sigma(j)} = b_{i\,j} = 0$ car $i \leq p$ et $j \geq p+1$

Question 1-2 : Considérons $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^{N-P}$

a) Ce qui revient à décomposer les matrices colonnes en blocs $U = \begin{pmatrix} U_1\\ U_2\end{pmatrix}$ où $U_1 \in \mathbb{R}^P$ et $U_2 \in \mathbb{R}^{N-P}$

Alors $(\ C.X = U\ ) \Longleftrightarrow (\ F.X_1 = U_1$ et $H.X_2 = U_2 - G.X_1) \Longleftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} X_1 = F^{-1}.U_1\\ X_2 = H^{-1}.\left[U_2 - G.X_1\right]\end{pmatrix}}$

b) Si A est réductible et inversible, $\det\left((P_\sigma)^{-1} \times A \times P_\sigma\right) = \det(A)$

donc B décomposable en blocs a des blocs inversibles sur la diagonale.

On peut donc résoudre le système en résolvant deux systèmes **plus petits** en taille, on détermine S et T puis F et H et leurs inverses.

Note :

$\det(P_\sigma) = \pm 1$ puisqu'elle est orthogonale, on peut même assurer que $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ, puisque le déterminant est une forme antisymétrique, et qu'il vaut 1 sur la base canonique

Question 1-3 : On va montrer que A est réductible si et seulement si $non(P)$ est vraie

a) Si A est réductible : il existe (S,T) partition de W_N, telle que $\left\{\begin{array}{l}\forall i\in S\\ \forall j\in T\end{array}\right. \quad a_{i\,j}=0$

Il existe donc $(i,j)\in W_N^2$ (on le prend dans $S\times T$ qui est non vide car S et T non vides)

tel que $\left\{\begin{array}{l}a_{i\,j}=0\\ \text{et quelque soit } s\in W_N \text{ et la suite d'indices } i_1,i_2,\cdots,i_s \text{ le produit } a_{i\,i_1}a_{i_1\,i_2}\cdots a_{i_s\,j}=0\end{array}\right.$

En effet si le produit est non nul, chacun des termes est non nul donc successivement :

avec $i\in S$ et $a_{i\,i_1}\neq 0$ $\quad i_1\notin T$ donc $i_1\in S$,

puis $i_1\in S$ et $a_{i_1\,i_2}\neq 0$ $\quad i_2\notin T$ donc $i_2\in S$, etc jusqu'à $j\in S$, or $j\in T$: **absurde**.

D'où $non(P)$ est vraie : $\boxed{\text{la condition } (P) \text{ est suffisante pour assurer } A \text{ irréductible.}}$

b) Si A est irréductible, suivant l'énoncé posons, pour i momentannément fixé

$$X_i=\left\{ j\in W_N \quad j\neq i \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l}a_{i\,j}\neq 0 \quad \text{ou } \exists s\geq 1\\ \exists\,(i_1,i_2,\cdots,i_s) \ ,\ a_{i\,i_1}a_{i_1\,i_2}\cdots a_{i_s\,j}\neq 0\end{array}\right. \right\}$$

Lemme : Montrons que $\boxed{\text{si pour un } i \text{ fixé } \forall j\neq i \quad a_{i\,j}=0 \quad \text{alors } A \text{ est réductible}}$

Si $\forall j\neq i$ $\quad a_{i\,j}=0$ alors la $i^{\text{ème}}$ ligne de A vaut : $L_i=(0\cdots 0\ a_{i\,i}\,0\cdots 0)$

avec $\sigma=\tau_{1\,i}$ transposition échangeant 1 et i

on a $B=(P_\sigma)^{-1}\times A\times P_\sigma=\begin{pmatrix} a_{i\,i} & 0 & \cdots & 0\\ G & & H & \end{pmatrix}$ donc A est **réductible**.

Donc **par l'absurde** : $\boxed{X_i\neq\emptyset}$ Enfin i est dans le complémentaire de X_i $\boxed{i\notin X_i}$

Supposons $X_i\neq W_N\setminus\{\,i\}$ et considérons $S=X_i\cup\{\,i\}$ et $T=W_N\setminus S$

C'est une partition de W_N constituée de parties non vides.

Pour $\left\{\begin{array}{l}k\in S=X_i\cup\{\,i\}\\ l\in T\end{array}\right.$ supposons $a_{k\,l}\neq 0$

1^{er} cas : $k=i$ alors $(a_{i\,l}\neq 0)\Longrightarrow(l\in X_i)$

$2^{\text{ème}}$ cas : $k\in X_i$ on a deux sous-cas :

$\left\{\begin{array}{l}\text{si } a_{i\,k}\neq 0 \text{ alors } a_{i\,k}.a_{k\,l}\neq 0 \text{ donc } l\in X_i\\ \text{si } \exists\,(i_1,i_2,\cdots,i_s) \quad a_{i\,i_1}a_{i_1\,i_2}\cdots a_{i_s\,k}\neq 0 \quad \text{alors } a_{i\,i_1}a_{i_1\,i_2}\cdots a_{i_s\,k}a_{k\,l}\neq 0 \text{ donc } l\in X_i\end{array}\right.$

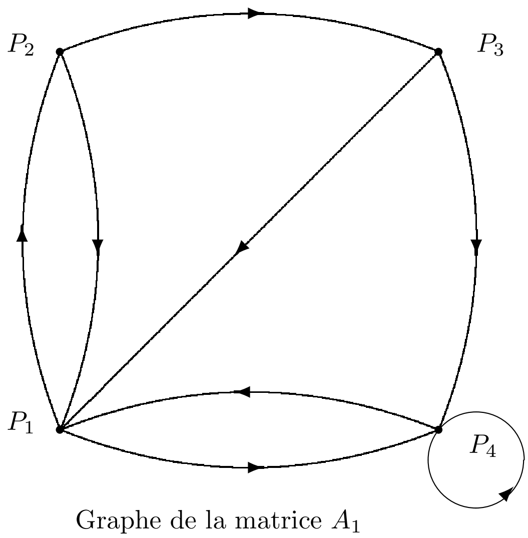
La conséquence est dans tous les cas contraire à l'hypothèse, donc $\left\{\begin{array}{l}\forall k\in S\\ \forall l\in T\end{array}\right. \quad a_{k\,l}=0$

Mais alors A serait **réductible**, ce qui n'est pas. Donc : $\boxed{\forall i\in W_N \quad X_i=W_N\setminus\{\,i\}}$

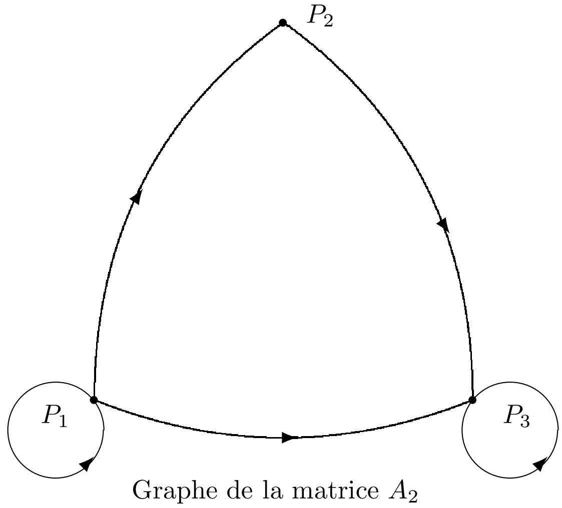
Ainsi (P) est vraie, car pour $j\neq i$ $\quad j\in X_i$

Question 1-4 : La traduction graphique de (P) est : pour tout couple de points **distincts** (P_i,P_j)

- il existe une flèche joignant P_i à P_j
- ou il existe un chemin orienté, succession de flèches allant de P_i à P_j en passant par $P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_s}$



Graphe de la matrice A_1



Graphe de la matrice A_2

On constate ainsi que $\boxed{A_1 \text{ est irréductible et } A_2 \text{ est réductible.}}$

Note : les bouclettes correspondant à $a_{i\,i}\neq 0$ sont ici sans signification.

Partie 2 - Matrices à diagonales dominantes

Question 2-1 : *Un théorème d'Hadamard*

Supposons $U \neq 0$ et i_0 un entier tel que : $|u_{i_0}| = \max\{|u_1|, \cdots, |u_N|\}$

Alors $|u_{i_0}| \neq 0$, et avec la $i_0^{ème}$ composante de $A.U = 0$ on a : $\sum\limits_{1 \le j \le N} a_{i_0\,j}\, u_j = 0$

d'où l'on tire : $a_{i_0\,i_0}\, u_{i_0} = -\sum\limits_{j \neq i_0} a_{i_0\,j}\, u_j$

$$\text{et donc } : |a_{i_0\,i_0}| = \frac{1}{|u_{i_0}|}\left|\sum_{j\neq i_0} a_{i_0\,j}\, u_j\right| \le \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0\,j}|\, \frac{|u_j|}{|u_{i_0}|} \le \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0\,j}|$$

Ce qui est exclu pour A à diagonale **strictement dominante**.

Ainsi $(A.U = 0) \Longrightarrow (U = 0)$ donc $\boxed{Ker(A) = \{0\}}$

Un endomorphisme **injectif** en dimension finie est bijectif d'où $\boxed{\det(A) \neq 0}$

Question 2-2 :

a) Pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$ on a $|a_{i\,i}| \ge \sum\limits_{j\neq i} |a_{i\,j}|$ (diagonale faiblement dominante)

Donc ($a_{i\,i} = 0) \Longrightarrow (\forall j \neq i \quad a_{i\,j} = 0)$ ce qui (voir le Lemme question 1-3 b)) entraine A réductible.

Ainsi : $\boxed{\forall i \in \{1, \cdots, N\} \qquad |a_{i\,i}| > 0}$

b) Avec les mêmes notations qu'en 2-1 , $\boxed{\text{supposant } U \neq 0}$

Puisque la diagonale est faiblement dominante :

$$\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0\,j}| \le |a_{i_0\,i_0}| = \frac{1}{|u_{i_0}|}\left|\sum_{j\neq i_0} a_{i_0\,j}\, u_j\right| \le \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0\,j}|\,\frac{|u_j|}{|u_{i_0}|} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0\,j}|\left[1 - \frac{|u_j|}{|u_{i_0}|}\right] \le 0}$$

Or tous ces termes sont positifs ou nuls. Il sont donc **tous nuls**.

Soit $S = \{i \in \{1, \cdots, N\} \quad |u_i| = |u_{i_0}|\}$ et $T = \{j \in \{1, \cdots, N\} \quad |u_j| < |u_{i_0}|\}$ son complémentaire.

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in S \times T} \quad \text{on retrouve} \quad \sum_{k\neq i} |a_{i\,k}| \le |a_{i\,i}| = \frac{1}{|u_{i_0}|}\left|\sum_{k\neq i} a_{i\,k}\, u_k\right| \le \sum_{j \neq i} |a_{i\,k}|\,\frac{|u_k|}{|u_{i_0}|}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{k\neq i} |a_{i\,k}|\left[1 - \frac{|u_k|}{|u_i|}\right] \le 0 \quad \text{et} \quad \forall k \neq i \quad |a_{i\,k}|\left[1 - \frac{|u_k|}{|u_i|}\right] = 0 \quad \text{pour} \quad j \in T \quad \text{alors} \quad \boxed{a_{i\,j} = 0}$$

Si S et T sont non vides, cela entraine A réductible. Ce qu'on a exclu.

Mais $S \neq \emptyset$ car $i_0 \in S$ donc $T = \emptyset$ et $\boxed{S = \{i \in \{1, \cdots, N\} \quad |u_i| = |u_{i_0}|\} = \{1, \cdots, N\}}$

Tous les coefficients de la colonne U sont égaux en valeurs absolues.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Enfin pour } \textbf{l'indice } i \text{ tel que } |a_{i\,i}| > \sum\limits_{j\neq i} |a_{i\,j}| \\ \text{on retrouve } |a_{i\,i}| = \dfrac{1}{|u_{i_0}|}\left|\sum\limits_{k\neq i} a_{i\,k}\, u_k\right| \le \sum\limits_{j\neq i} |a_{i\,k}|\,\dfrac{|u_k|}{|u_{i_0}|} = \sum\limits_{j\neq i} |a_{i\,j}| \end{array}\right\} \text{ce qui est impossible}$$

Donc $\boxed{U = 0}$ et comme précédemment A est injective et $\boxed{\det(A) \neq 0}$

Question 2-3 : *Cas particuliers d'un résultat de Gerschgörin*

a) A **symétrique et réelle** est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ par matrice diagonalisante orthogonale.

Son polynôme caractéristique admet N racines réelles comptées avec leurs multiplicités.

Soit $\lambda \in Sp(A) \subset \mathbb{R}$, $U \neq 0$ un vecteur propre associé et i_0 tel que : $|u_{i_0}| = \max\{|u_1|, \cdots, |u_N|\}$

on retrouve : $(a_{i_0\,i_0} - \lambda)\, u_{i_0} = -\sum\limits_{j\neq i_0} a_{i_0\,j}\, u_j$ d'où : $\boxed{|a_{i_0\,i_0} - \lambda| \le \sum\limits_{j \neq i_0} |a_{i_0\,j}|}$

Or par faible dominance : $\sum\limits_{j\neq i_0} |a_{i_0\,j}| \le |a_{i_0\,i_0}| = a_{i_0\,i_0}$ qui est un réel positif

donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(|a_{i_0\,i_0} - \lambda| \le a_{i_0\,i_0}) \Longrightarrow \boxed{(\lambda \in [0, 2\, a_{i_0\,i_0}])}$

Toutes les valeurs propres sont donc des réels positifs : A est **positive**.

b) On a vu : (irréductible et à diagonale faiblement dominante)$\Longrightarrow$(inversible)

Si A est inversible : $\det(A) \neq 0$ et c'est le produit des valeurs propres : elles sont donc non nulles.

$$\left.\begin{array}{c} A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \text{ telle que } \forall i \in W_N \ \ a_{i\,i} \ge 0 \ \text{, à diagonale} \\ \text{faiblement dominante et irréductible ou inversible} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{A \text{ symétrique définie positive}}$$

Partie 3 - Matrices à termes non diagonaux négatifs

Question 3-1 :
a) Pour $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et **définie positive**, $\forall v \neq 0 \quad (Av \,|\, v) > 0$

Résultat du cours :

$A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}^N$ par changement de bases orthonormales pour le produit scalaire usuel, passant de la base canonique à une base $(u_1, \cdots, u_N)$ de vecteurs propres.
Pour A de plus définie positive, les valeurs propres $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq N}$ sont strictement positives.
Pour tout vecteur $v \neq 0$, en le décomposant sur $(u_1, \cdots, u_N)$: $v = \sum\limits_{1 \leq j \leq N} x_j\, u_j$

ainsi $Av = \sum\limits_{1 \leq j \leq N} x_j\, Au_j = \sum\limits_{1 \leq j \leq N} x_j\, \lambda_j\, u_j$ et donc $\boxed{(Av \,|\, v) = \sum\limits_{1 \leq j \leq N} \lambda_j\, (u_j)^2}$

Pour $v = e_i$ de la base canonique : Ae_i est la $i^{ème}$ colonne de A et donc $\boxed{\begin{array}{c}\forall i \in \{1, \cdots, N\} \\ (Ae_i \,|\, e_i) = a_{i\,i} > 0\end{array}}$

La propriété (2) se conservant : $\boxed{(A \text{ est une } S\text{-matrice}) \Longleftrightarrow (A \text{ est une } L\text{-matrice, définie positive})}$

b) Si A est une M-matrice, alors $\forall\, (i, j) \in {W_N}^2$ tels que $\boxed{i \neq j, \text{ on a } a_{i\,j} < 0}$ donc (2)

Notons $R = A^{-1}$ alors $\boxed{\forall\, (i, j) \quad r_{i\,j} \geq 0}$ et $A.\, R = I_N$

d'où $(A.\, R)_{i\,i} = 1 = \sum\limits_{1 \leq j \leq N} a_{i\,j}\, r_{j\,i}$ ainsi : $a_{i\,i}\, r_{i\,i} = 1 - \sum\limits_{j \neq i} a_{i\,j}\, r_{j\,i} \geq 1$ ($a_{i\,j} \leq 0 \quad r_{i\,j} \geq 0$)

donc $a_{i\,i}\, r_{i\,i} \geq 1$ ce qui entraine $a_{i\,i} > 0$ d'où la propriété (1) : $\boxed{\forall i \in W_N \quad a_{i\,i} > 0}$

$\boxed{(A \text{ est une } M\text{-matrice}) \Longleftrightarrow (A \text{ est une } L\text{-matrice})}$

c) Puisqu'on a (2), il suffit de montrer que A est définie positive.
On applique la **question 2-3** : une L-matrice à diagonale faiblement dominante a des valeurs propres positives, et si elle est irréductible, strictement positives.

Question 3-2 Par convention, pour toute matrice carrée : $\boxed{A^0 = I_N}$

a) On admet : $(S(Q) < 1) \Longleftrightarrow (Q^n \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to \infty)$

Par commutabilité de I_N et Q on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left[\sum\limits_{0 \leq k \leq n} Q^{\,k}\right] (I_N - Q) = I_N - Q^{n+1}$

et $S(Q) < 1$ donc $1 \notin Sp(Q)$ ainsi $\det(I_N - Q) \neq 0$ et $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} Q^{\,k} = \left(I_N - Q^{n+1}\right)(I_N - Q)^{-1}$

d'où : $\boxed{(\, S(Q) < 1) \Longrightarrow \left(\text{ la série } \sum Q^{\,k} \text{ est convergente de somme totale } (I_N - Q)^{-1}\right)}$

Réciproquement : si la série de matrices converge, la suite associée tend vers 0 (condition usuelle de convergence avec Q^n différence de deux sommes partielles) donc $S(Q) < 1$

D'où **l'équivalence**.

b) A est une L-matrice, donc $\forall i \in W_N \quad a_{i\,i} > 0$ et $\boxed{\det(D) = \prod\limits_{0 \leq i \leq n} a_{i\,i} > 0}$

$D^{-1} = diag(\dfrac{1}{a_{i\,i}})$ Si on pose $B = D^{-1}.\, C$ avec $A = D - C$ alors $\boxed{A = D.\, (I_N - B)}$

On suppose : $S(B) < 1$, avec la question précédente : $\left[\sum\limits_{0 \leq k}^{\infty} B^{\,k}\right] (I_N - B) = I_N$

et $(I_N - B)$ est **inversible**, avec $\boxed{(I_N - B)^{-1} = \sum\limits_{0 \leq k}^{\infty} B^{\,k}}$

B est à coefficients positifs, comme D^{-1} et C , donc $\forall k \in N \quad B^k$ est à coefficients positifs,
par somme et passage à la limite composante par composante :

$\boxed{\text{tous les éléments de } (I_N - B)^{-1} \text{ sont positifs ou nuls}}$

c) $A = D.\, (I_N - B)$ est donc **inversible** et $A^{-1} = (I_N - B)^{-1}\, D^{-1}$ a donc tous ses éléments ≥ 0

$\boxed{(A \text{ est une } L\text{-matrice et } S(B) < 1) \Longrightarrow (A \text{ est une } M\text{-matrice})}$

Question 3-3 :
a) $\det(D) = \prod\limits_{0 \leq i \leq n} a_{i\,i} > 0$ et $\det(D^{-\frac{1}{2}}) = \prod\limits_{0 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{a_{i\,i}}}$ donc A et $D^{-\frac{1}{2}}$ sont inversibles : $\widehat{A}$ est **inversible** et $\left(\widehat{A}\right)^{-1} = D^{\frac{1}{2}}.\, A^{-1}.\, D^{\frac{1}{2}}$ est à coefficients **positifs ou nuls**.

$\widehat{A}_{i\,j}$ peut se calculer avec le produit des trois matrices, dont deux diagonales, ou avec $\widehat{A}_{i\,j} = \left(\hat{A}\, e_j \mid e_i\right) = \left(A\, D^{-\frac{1}{2}}\, e_j \mid D^{-\frac{1}{2}} e_i\right)$ puisque la matrice $D^{-\frac{1}{2}}$ est symétrique dans une base orthonormale, l'endomorphisme est autoadjoint.

$\boxed{\forall\,(i,j) \quad \widehat{A}_{i\,j} = \frac{1}{\sqrt{a_{i\,i}}}\frac{1}{\sqrt{a_{j\,j}}}\, a_{i\,j}}$ en particulier $\boxed{\widehat{A}_{i\,i} = 1 \ \text{ et } \ (i \neq j) \Longrightarrow \widehat{A}_{i\,j} < 0}$

Donc : $\boxed{\widehat{A} \text{ est une } M\text{-matrice}}$ et la partie diagonale de $\widehat{A}$ est $\widehat{D} = I_N$

De plus : $\widehat{A} = D^{-\frac{1}{2}}.\, A.\, D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}.\, [D.\ (I_N - B)]\,.\, D^{-\frac{1}{2}} = I_N - D^{\frac{1}{2}}.\, B.\, D^{-\frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{la décomposition } \ \widehat{A} = I_N - \widehat{B} \ \text{ est la décomposition du } \mathbf{3\text{-}2} \text{ a) appliquée à } \widehat{A}}$

On retrouve que : $\forall m \in \mathbb{N} \qquad I_N = \left(I_N - \widehat{B}\right) \left[\sum_{0 \le k \le m} \widehat{B}^{\,k}\right] + \widehat{B}^{\,m+1}$

et on peut multiplier à gauche par $\left(I_N - \widehat{B}\right)^{-1}$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \qquad \left(\widehat{A}\right)^{-1} = \left(I_N - \widehat{B}\right)^{-1} = \left[\sum_{0 \le k \le m} \widehat{B}^{\,k}\right] + \left(I_N - \widehat{B}\right)^{-1}.\, \widehat{B}^{\,m+1}}$$

b) $\widehat{B} = D^{\frac{1}{2}}.\, B.\, D^{-\frac{1}{2}}$ produit de matrices à coefficients positifs, est aussi à coefficients positifs.

rappel : $(i \neq j) \Longrightarrow (a_{i\,j} < 0)$ donc $\forall\,(i,j) \quad c_{i\,j} \ge 0$ et $b_{i\,j} \ge 0$

De même ses puissances successives et leur somme : $\boxed{\text{tous les éléments de } G_m \text{ sont } \ge 0}$

De plus : $G_m = \left(\widehat{A}\right)^{-1} - \left(\widehat{A}\right)^{-1}.\, \widehat{B}^{\,m+1}$ et les coefficients de cette dernière étant positifs,

on peut noter : $\boxed{G_m \ll \left(\widehat{A}\right)^{-1}}$ au sens où coefficient par coefficient : $[G_m]_{i\,j} \le \left[\left(\widehat{A}\right)^{-1}\right]_{i\,j}$

c) Pour tout (i,j) fixé, on a donc une suite de réels croissante et majorée : elle converge dans $\mathbb{R}$.

La suite $(G_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente, la série $\sum \widehat{B}^{\,k}$ est convergente, donc avec **3-2** a) $\boxed{S(\widehat{B}) < 1}$

Mais B et $\widehat{B}$ sont **semblables** (avec la matrice de passage $D^{\frac{1}{2}}$) donc ont même spectre : $\boxed{S(B) < 1}$

Avec **3-1** b) , **3-2** c) et **3-3** c) : $\boxed{(A \text{ est une } L\text{-matrice et } S(B) < 1) \Longleftrightarrow (A \text{ est une } M\text{-matrice})}$

Question 3-4 :

a) Si A est une S-matrice, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, à valeurs propres strictement positives,

donc $\boxed{\det(A) > 0}$ (produit des valeurs propres du polynôme caractéristique scindé)

Avec **3-1** a) : A est une L-matrice, donc $\forall i \in W_N \quad a_{i\,i} > 0$ et $\boxed{\det(D) = \prod_{0 \le i \le n} a_{i\,i} > 0}$

Puisque $A = D.\ (I_N - B)$ on obtient : $\boxed{(I_N - B) \text{ inversible, et } A^{-1} = (I_N - B)^{-1}.\, D^{-1}}$

b1) $\widehat{A}$ et A sont **congruentes** donc représentent la même forme quadratique dans deux bases différentes : elles sont simultannément définies positives.

On peut détailler, mais c'est superflu :

> $\widehat{A}$ est dans $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$, donc a N valeurs propres réelles, comptées avec leurs multiplicités.
> Soit $v \neq 0$ un vecteur propre associé à λ :
> $\left(\widehat{A}\, v = \lambda\, v\right) \Longrightarrow \left(A.\, D^{-\frac{1}{2}}\, v = \lambda\, D^{\frac{1}{2}}\, v\right) \Longrightarrow \left(A\, w = \lambda\, D\, w \ \text{ en posant } \ w = D^{\frac{1}{2}}\, v \neq 0\right)$
> mais pour $w \neq 0 \qquad (A\, w \mid w) > 0$ donc $(\lambda\, D\, w \mid w) = \lambda \left[\sum_{1 \le i \le N} a_{i\,i}\, w_i^2\right] > 0$
> ainsi $\boxed{\text{toutes les valeurs propres } \lambda \text{ de } \widehat{A} \text{ sont strictement positives}}$

b2) On admet que si $Q \ge 0$ alors il existe $\mu \in Sp(Q)$ tel que $\mu = S(Q)$. C'est donc le cas pour B : il existe $\boxed{\mu \ge 1}$ valeur propre de B donc de $\widehat{B}$ (semblables)

Mais $\widehat{A} = I_N - \widehat{B}$ donc $\boxed{\lambda = (1 - \mu) \le 0 \text{ est une valeur propre de } \widehat{A}}$. Ce qui contredit **3-4** b1).

Donc $\boxed{S(B) < 1}$ et avec **3-1** a) :

(A est une S-matrice) $\Longrightarrow$ (A est une L-matrice, définie positive et $S(B) < 1$)

D'où, avec **3-2** c) : $\boxed{(A \text{ est une } S\text{-matrice}) \Longrightarrow (A \text{ est une } M\text{-matrice})}$.