ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 5 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 5 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions et notations

Quand on ouvre progressivement un robinet, on assiste à la superposition d'états périodiques (goutte à goutte) dont les périodes ne sont pas nécessairement multiples d'une même fréquence, contrairement à la théorie classique des Séries de FOURIER. *L'objet de ce problème est donc de donner un contexte dans lequel on puisse étudier des sommes de phénomènes périodiques de périodes quelconques.*

On travaille dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, qui est l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui même ; on notera aussi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des fonctions continues (resp. de classes $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$).

Soient $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $w \in \mathbb{R}$. On dira que f est w-périodique (ou que w est une période de f) si pour tout réel x, $f(x+w) = f(x)$.

On notera $\|.\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$; elle est définie, pour toute fonction réelle f bornée sur $\mathbb{R}$, par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

I. Valeur moyenne d'une fonction

On appellera **valeur moyenne** d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ la quantité suivante, quand elle existe :

$$\mu(f) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f(t)\,dt.$$

1. **Valeur moyenne d'une fonction périodique**

   (a) Calculer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes :

   $$C_1 : t \mapsto \cos t \quad S_2 : t \mapsto \sin 2t \quad C_0 : t \mapsto 1.$$

   Dans les deux questions suivantes, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, w-périodique, avec $w > 0$.

   (b) Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{nw} f(t)\,dt$, pour $n \geqslant 1$, est constante.

   (c) En déduire soigneusement la valeur de $\mu(f)$ sous forme d'une intégrale sur un segment.

2. **Transformations**

   (a) Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qui admettent une valeur moyenne est un espace vectoriel réel, et que l'application $\mu : f \mapsto \mu(f)$ est une forme linéaire sur cet espace.

(b) On considère un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$\tau_a : f \mapsto \tau_a(f) \quad \text{avec} \quad \tau_a(f) : t \mapsto f(t+a).$$

Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est une fonction bornée ayant une valeur moyenne, alors $\tau_a(f)$ aussi et que l'on a

$$\mu(\tau_a(f)) = \mu(f).$$

(c) Faire une étude similaire pour

$$\mathcal{N}_a : f \mapsto \mathcal{N}_a(f) \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}_a(f) : t \mapsto f(at).$$

(d) Que peut-on dire de la valeur moyenne d'une fonction impaire.

(e) Donner une expression simplifiée de la valeur moyenne d'une fonction paire.

3. **Valeur moyenne d'une fonction convergente**

On considère des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Calculer la valeur moyenne de $g : t \mapsto \frac{1}{1+|t|}$.

(b) On suppose que $f(t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$. Montrer que $\mu(f)$ existe et vaut 0.

(c) On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$ et en $-\infty$. Que dire de $\mu(f)$?

(d) On suppose enfin que f converge en $+\infty$ et en $-\infty$ vers deux limites ℓ_+ et ℓ_-. Exprimer $\mu(f)$.

4. **Valeur moyenne d'une fonction intégrable**

On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mu(f)$ existe et donner sa valeur.

5. **Valeur moyenne et fonctions bornées**

(a) La fonction $t \mapsto \sqrt{|t|}\cos t$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}$? Calculer sa valeur moyenne.

(b) On définit une fonction paire, continue par morceaux, par

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 1, \\ 1 & \text{si } 3^{2p} \leqslant t < 3^{2p+1} \text{ pour un certain } p \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } 3^{2p-1} \leqslant t < 3^{2p} \text{ pour un } p \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Calculer $3^{-n}\displaystyle\int_0^{3^n} \chi(t)\,dt$ puis en déduire que χ n'a pas de valeur moyenne.

II. Un produit scalaire

On veut définir un produit scalaire par la formule

$$(f|g) = \mu(f.g).$$

Nous allons construire progressivement des espaces de plus en plus gros pour lesquels ce produit scalaire est bien défini. Certains exemples de la première partie prouvent que l'on ne peut pas y faire figurer n'importe quelle fonction.

1. **Exemples**

On note de façon abrégée $C_w : t \mapsto \cos(wt)$ et $S_\eta : t \mapsto \sin(\eta t)$, pour $w \geqslant 0$ et $\eta > 0$ donnés.

(a) Calculer $(C_\alpha|C_\beta)$. On trouvera trois valeurs distinctes selon les cas.

(b) Donner sans démonstration les valeurs de $(S_\alpha|S_\beta)$ et de $(C_\alpha|S_\beta)$.

2. **Sommes finies de fonctions périodiques**

   On considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les C_w et S_η pour tous les $w \geqslant 0$ et $\eta > 0$.

   (a) Est-ce que la fonction $h : \ t \mapsto \cos t + \cos(\pi t)$ est périodique ?

   (b) Est-ce que h est un élément de $\mathcal{F}$? Et $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \cos(3^n t)$?

   (c) Montrer que $(f, g) \mapsto (f|g)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{F}$.

3. **Continuité**

   On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ qui tend vers 0 au sens de la norme uniforme, c'est à dire que

   $$\|f_n\|_\infty \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Montrer que $(f_n|f_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et en déduire que, pour tout $g \in \mathcal{F}$, $(f_n|g) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. **Limites uniformes**

   (a) *Produit scalaire et limites uniformes*
   On considère dans $\mathcal{F}$ une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$) qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue f (resp. g) . Montrer que la suite $\big((f_n|g_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   (b) Nommer un théorème qui assure que toute application w-périodique continue est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, tous w-périodiques.

5. **Une extension de** $(.|.)$

   On veut maintenant définir $(f|g)$ pour deux applications continues périodiques (de périodes arbitraires) ; pour cela on considère une application w-périodique f continue et une application η-périodique g continue elle aussi.

   On considère donc dans $\mathcal{F}$ une suite d'applications w-périodiques $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. η-périodiques $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$) qui converge vers f (resp. g) uniformément sur $\mathbb{R}$, et on pose

   $$(f|g) = \lim_{n\to+\infty} (f_n|g_n).$$

   (a) Montrer que cette quantité existe, et qu'elle ne dépend pas du choix des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{F}$.

   (b) Montrer que l'expression précédente est bilinéaire par rapport au couple (f, g) et que pour $g = f$, elle est positive ou nulle.

   (c) On suppose que la suite d'applications w-périodiques $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f, uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est w-périodique et que

   $$(f|f) = \mu(f^2) = \frac{1}{w}\int_0^w f^2.$$

   (d) Montrer que pour f continue et périodique, on a $(f|f) = 0$ seulement quand f est la fonction nulle.

6. **Groupe des périodes d'une fonction**

   (a) *Sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$
   On considère un sous-groupe G de $\mathbb{R}$ pour la loi $+$. On suppose que $G \neq \{0\}$ et on pose $\alpha = \inf G \cap]0, +\infty[$.

- Si $\alpha > 0$, montrer que $\alpha \in G$ et que $G = \alpha\mathbb{Z}$(*on pourra utiliser le critère de la borne inférieure*).
- Si $\alpha = 0$, montrer que G rencontre tout intervalle de la forme $]a, b[$ $(a < b)$ et conclure que G est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) *Application au groupe des périodes d'une fonction*
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note G_f l'ensemble, éventuellement réduit à $\{0\}$, des périodes de f.

- Montrer que G_f est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
- On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$, et périodique. Montrer que f possède une plus petite période strictement positive ou bien que f est constante.

7. **Théorème du mélange**

On considère deux fonctions f w-périodique et g η-périodique. f et g sont de plus continues.

(a) On suppose que w/η est un nombre rationnel.
Montrer que f et g possèdent une période commune τ, en déduire l'existence et une expression intégrale de $(f|g)$.

(b) On suppose que w/η est un nombre irrationnel.
À l'aide d'un résultat précédemment démontré dans ce problème, montrer que l'on a

$$(f|g) = \mu(f)\mu(g).$$

III. Une algèbre de fonctions presque-périodiques

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_n \cos(w_n t) + \beta_n \sin(w_n t))$ ou encore $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_n C_{w_n} + \beta_n S_{w_n})$, où les **suites des amplitudes** (α_n), (β_n) sont des familles sommables de réels, et la **suite des fréquences** (w_n) est une suite quelconque de réels distincts deux à deux.

1. **Structure d'algèbre**

(a) Que pouvez-vous dire de la convergence de la série de fonctions définissant un élément de $\mathcal{A}$? Conclure que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et montrer que $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel réel.

(b) Justifier que le produit de deux élément de $\mathcal{A}$ est encore dans $\mathcal{A}$: c'est donc une sous-algèbre de l'algèbre des applications continues.

2. **Structure préhilbertienne**

(a) Montrer que le produit scalaire de $\mathcal{F}$ se prolonge à $\mathcal{A}$. On précisera la valeur du carré scalaire de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_n C_{w_n} + \beta_n S_{w_n})$.

(b) Soit $f \in \mathcal{A}$. Quelles valeurs peuvent prendre $(f|C_{-w})$ et $(f|S_{-w})$ quand w varie dans $\mathbb{R}$?
L'écriture de $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_n C_{w_n} + \beta_n S_{w_n})$ *s'appelle son développement en série de* Fourier-Bohr.

(c) Étant donnés deux éléments f et g de $\mathcal{A}$, calculer $(f|g)$ en fonction des coefficients de leur développement de Fourier-Bohr. On admettra qu'il est possible de prendre pour f et g une même suite (w_n) des fréquences.

IV. LA FONCTION $\cos x + \cos(x\sqrt{2})$

Dans cette dernière section, plus expérimentale, on étudie un exemple célèbre de fonction presque-périodique. On définit une fonction de $\mathcal{F}$, la fonction $B:\ x \mapsto \cos x + \cos(x\sqrt{2})$.

1. **Près de $\sqrt{2}$**

   (a) Montrer que $(3+2\sqrt{2})^n = p_n + q_n\sqrt{2}$ définit deux suite d'entiers naturels (p_n) et (q_n).

   (b) Vérifier que $(3-2\sqrt{2})^n = p_n - q_n\sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire des expressions de $p_n,\ q_n,\ p_n^2 - 2q_n^2$, en tirer un équivalent de p_n et de q_n.

2. **Approximation rationnelle de $\sqrt{2}$**

   Montrer qu'ils existe des fractions p/q avec q arbitrairement grand et vérifiant

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{q^2\sqrt{2}} < \frac{1}{q^2}.$$

3. **Maxima de B**

   Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrer qu'il existe des entiers naturel k et k' arbitrairement grands tels que

$$|2k\pi\sqrt{2} - 2k'\pi| \leqslant \varepsilon.$$

   En déduire que la fonction B prend une infinité de fois des valeurs supérieures à $2 - \varepsilon$.

4. **Presque périodicité-la définition de** BOHR

   On étudie sur cet exemple de la fonction B la définition générale des applications quasi périodiques.
   On fixe un $\varepsilon > 0$. Avec les notations de la question **2.**, montrer que pour q assez grand on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad |B(x) - B(x + 2p\pi)| \leqslant \frac{2\pi}{q} \leqslant \varepsilon.$$

   On a ainsi montré que B possède des “quasi-périodes” c telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad |B(x) - B(x + c)| \leqslant \varepsilon.$$

FIN DE L'ÉPREUVE