CCP 2001. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.
Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

I. Projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

1. Inégalité de Schwarz et cas d'égalité : cours classique.
Soit (a,b,c) vérifiant les conditions de l'énoncé. Il vient $0 = \|a-b\|^2 - \|a-c\|^2 = 2\big((c-b)|(a-\dfrac{b+c}{2})\big)$ d'où la conclusion par Pythagore.

2. Soit y_0 fixé quelconque dans F et soit $K = F \cap \overline{B}(x,R)$ avec $R = \|x-y_0\|$. On a clairement $\mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(x,K)$. Or K est compact en tant que fermé borné et l'application $y \longmapsto \|x-y\|$ est continue (lipschitzienne de rapport 1) et admet donc un minimum sur K. CQFD. <u>*La distance d'un point à un fermé est atteinte.*</u>

3. Soit désormais A un convexe fermé et deux points u_1 et u_2 de A en lesquels la distance de x à A est atteinte. Si $u_1 \neq u_2$, il vient d'après **1.**, $\|x-m\| < \|x-u_1\| = \mathrm{d}(x,A)$ avec $m = \dfrac{u_1+u_2}{2} \in A$ ce qui est impossible. CQFD.
<u>*La distance à un convexe fermé est atteinte en un unique point.*</u>

4. Soit α vérifiant les conditions de l'énoncé et soit y quelconque de A. Il vient :
$\|x-y\|^2 = \|x-\alpha\|^2 + \|y-\alpha\|^2 - 2\big(x-\alpha|y-\alpha\big) \geqslant \|x-\alpha\|$ donc $\alpha = P(x)$. CQFD.

5. Supposons qu'il existe $y \in A$ vérifiant les conditions de l'énoncé (ce qui assure $y \neq P(x)$) et soit, pour $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = P(x) + t\big(y - P(x)\big)$. Il vient $\mathcal{S}(t) = \|x - y(t)\|^2$.
Par ailleurs $\mathcal{S}(t) = \|x-P(x)\|^2 - 2\big(x-P(x)|y-P(x)\big)t + \|y-P(x)\|^2t^2$ donc atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en t_0 strictement positif puisque le coefficient de t est strictement négatif par hypothèse.
Donc $\mathcal{S}(t_0) < \mathcal{S}(0) = \|x-P(x)\|^2$. Or $\mathcal{S}(1) = \|x-y\|^2 > \|x-P(x)\|^2$ puisque $y \neq P(x)$ i.e. $\mathcal{S}(1) > \mathcal{S}(0)$.
Ainsi $t_0 \in]0,1[$ donc $y(t_0) \in A$ et $\|x-y(t_0)\|^2 = \mathcal{S}(t_0) < \mathcal{S}(0) = \|x-P(x)\|^2$ ce qui est contradictoire avec la définition de $P(x)$. En conclusion il n'existe aucun élément y de A tel que $\big(x-P(x)|y-P(x)\big) > 0$. CQFD.

6. Simple résumé des deux questions précédente : <u>*La projection $P(x)$ de x sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ est caractérisée par $\big(x-P(x)|y-P(x)\big) \leqslant 0$ pour tout $y \in A$.*</u>

7. En particulier puisque $P(y) \in A$, on a $\big(x-P(x)|P(y)-P(x)\big) \leqslant 0$ donc puisque $x - P(x) = \big(x-y\big) + \big(y-P(x)\big)$:
$\big(x-y|P(x)-P(y)\big) \geqslant \big(P(x)-y|P(x)-P(y)\big) = \|P(x)-P(y)\|^2 - \big(y-P(y)|P(x)-P(y)\big)$.
Or $\big(y-P(y)|P(x)-P(y)\big) \leqslant 0$ d'après **6.** puisque $P(x) \in A$. Ainsi $\|P(x)-P(y)\|^2 \leqslant \big(x-y|P(x)-P(y)\big)$.
Si $P(x) \neq P(y)$ il en découle par l'inégalité de Schwarz que $\|P(x)-P(y)\| \leqslant \|x-y\|$. Ce qui est encore vrai si $P(x) = P(y)$. Ainsi <u>*P est lipschitzienne de rapport 1.*</u>
Naturellement $P(x) = x$ si $x \in A$ donc $P(A) = A$ et a fortiori $P(\mathbb{R}^n) = A$.

8. Soit $x \notin A$. Supposons que $P(x) \in \overset{\circ}{A}$ et soit $R > 0$ tel que $B(P(x),R) \in A$. Alors $R \leqslant \|x-P(x)\|$ car $x \notin A$.
Soit $y_0 = P(x) + \dfrac{R}{2}\dfrac{x-P(x)}{\|x-P(x)\|}$. Alors $y_0 \in A$ et en outre $\|x-y_0\| = \left|1 - \dfrac{R}{2\|x-P(x)\|}\right| \|x-P(x)\|$.
Or $R \leqslant \|x-P(x)\|$ donc $\left|1 - \dfrac{R}{2\|x-P(x)\|}\right| = \left(1 - \dfrac{R}{2\|x-P(x)\|}\right) < 1$. Ainsi $\|x-y_0\| < \|x-P(x)\|$ ce qui est contradictoire avec la définition de $P(x)$. <u>*Si $x \notin A$ alors $P(x) \in A \setminus \overset{\circ}{A}$.*</u>

II. Théorème de Brouwer dans $\mathbb{R}^2$.

9. Soit x fixé quelconque dans B et soit F_x définie sur $\mathbb{R}$ par $F_x(t) = \|x + t\big(x-f(x)\big)\|^2 - 1$ i.e.
$F_x(t) = \|x-f(x)\|^2t^2 + 2\big(x|x-f(x)\big)t - (1-\|x\|^2)$. Supposons que f n'admette aucun point fixe, alors $F_x(t)$ est un trinôme du second degré et, comme $1 - \|x\|^2 \geqslant 0$, ce trinôme admet une unique racine positive ou nulle. D'où l'existence et l'unicité de la fonction ρ. CQFD.
En outre $\rho(x) == \dfrac{-\big(x|x-f(x)\big) + \sqrt{\Delta}(x)}{\|x-f(x)\|^2}$ avec $\Delta(x) = \big(x|x-f(x)\big)^2 + \|x-f(x)\|^2(1-\|x\|^2)$ ce qui prouve que ρ est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition d'applications classiquement $\mathcal{C}^2$. Naturellement $\rho(x) = 0$ si et seulement si $x \in S$.

10. Il vient $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \equiv 1$ donc par dérivation (licite puisque φ est $\mathcal{C}^2$) il vient $\begin{cases} \varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \equiv 0 \\ \varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \equiv 0 \end{cases}$ c'est à dire ${}^tM(x) \cdot \varphi(x) = 0$ pour tout $x \in B$ en notant $M(x)$ la matrice proposée.
Donc $\varphi(x) \in \operatorname{Ker} M(x)$. Or $\varphi(x) \neq 0$ puisque $\|\varphi(x)\| = 1$. Donc $M(x)$ est singulière. CQFD.

11. Soit $A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(x) & \alpha_{21}(x) \\ \alpha_{12}(x) & \alpha_{22}(x) \end{pmatrix}$ la matrice jacobienne de α. Il vient $\psi(x,t) = 1 + t\,\mathrm{tr}\,\big(A(x)\big) + t^2\,\mathrm{Det}\,\big(A(x)\big)$ donc $\beta(x) = \mathrm{tr}\,\big(A(x)\big)$ et $\gamma(x) = \mathrm{Det}\,\big(A(x)\big)$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ puisque α est de classe $\mathcal{C}^2$. CQFD.

En outre $\varphi(x)=x+\alpha(x)$ donc $M(x)=\begin{pmatrix}1+\alpha_{11}(x) & \alpha_{21}(x)\\ \alpha_{12}(x) & 1+\alpha_{22}(x)\end{pmatrix}$ et, d'après **10.**, $\psi(x,1)=0$. CQFD.

b. Pour t fixé, $x\longmapsto\psi(x,t)$ est continue sur B d'après **a.** donc J est bien définie. Il vient $J(0)=\displaystyle\iint_B \mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2=\pi$ et $J(1)=0$ d'après **a.**

c. Il vient $\displaystyle\iint_B \beta(x)\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2=\iint_b\Big(\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}\Big)\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2$. Par Fubini (licite car les fonctions sont continue sur B) :

$$\begin{aligned}\iint_B\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2&=\int_{x_2=-1}^{x_2=1}\left(\int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1+x_2^2}}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\,x_1\right)\mathrm{d}\,x_2\\&=\int_{x_2=-1}^{x_2=1}\left(\alpha_1\big(\sqrt{1-x_2^2},x_2\big)-\alpha_1\big(-\sqrt{1-x_2^2},x_2\big)\right)\mathrm{d}\,x_2.\end{aligned}$$

Or, pour tout $x_2\in[-1,1]$, $y=(-\sqrt{1-x_2^2},x_2)$ et $z=(\sqrt{1-x_2^2},x_2)$ appartiennent à S donc $\rho(y)=\rho(z)=0$ donc $\alpha(y)=\alpha(z)=0$ donc a fortiori $\alpha_1(y)=\alpha_1(z)=0$.
Ainsi $\displaystyle\iint_B\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2=0$ et de même $\displaystyle\iint_B\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2=0$. Donc finalement $\displaystyle\iint_B\beta(x)\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2=0$. CQFD.

d. Par Fubini comme ci-dessus, $I_1(g)=\displaystyle\int_{x_2=-1}^{x_2=1}\left(\int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1-x_2^2}}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\,\mathrm{d}\,x_1\right)\mathrm{d}\,x_2$.
L'intégrale interne se calcule par parties (licite car g est de classe $\mathcal{C}^2$) et vaut ainsi :

$$g_1(\sqrt{1-x_2^2},x_2)\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\sqrt{1-x_2^2},x_2)-g_1(-\sqrt{1-x_2^2},x_2)\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(-\sqrt{1-x_2^2},x_2)-\int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1-x_2^2}}g_1(x)\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1\partial x_2}(x)\,\mathrm{d}\,x_1.$$

En réutilisant Fubini en sens inverse pour la fonction $x\longmapsto g_1(x)\dfrac{\partial^2 g_2}{\partial x_1\partial x_2}(x)$ (qui est bien continue sur B puisque g est $\mathcal{C}^2$), on obtient la valeur cherchée pour $I_1(g)$. CQFD.
En notant que $\displaystyle\iint_B\gamma(x)\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2=I_1(\alpha)-I_2(\alpha)$ compte-tenu de la valeur de $\gamma(x)$ (Cf **a.**) et du fait que α est bien de classe $\mathcal{C}^2$ (Cf **9.**), il en découle puisque en outre $\dfrac{\partial^2\alpha_2}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{\partial^2\alpha_2}{\partial x_2\partial x_1}$ d'après le théorème de Schwarz du fait que α est bien $\mathcal{C}^2$, que $\displaystyle\iint_B\gamma(x)\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2=0$. CQFD.
Il découle immédiatement de ce qui précède (nullité des 2 intégrales doubles, expression de $\psi(x,t)$ et définition de $J(t)$) que J est constante ce qui est contradictoire avec $J(0)=\pi$ et $J(1)=0$. La contradiction porte sur la seule hypothèse faite à savoir f n'admet pas de point fixe, hypothèse qui nous a permis de définir la fonction ρ.
Le théorème de Brouwer pour une application $\mathcal{C}^2$ de B dans B est établi.

12. Résulte immédiatement de la généralisation du théorème de Weierstrass et de l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^2$.

13. Pour φ continue sur B, on pose dans la suite $N_\infty(\varphi)=\sup\limits_{x\in B}\|\varphi(x)\|$.
Pour $x\in B$ il vient $\|h_\varepsilon(x)\|=\dfrac{1}{1+\varepsilon}\|f_\varepsilon(x)\|\leqslant\dfrac{1}{1+\varepsilon}\big(\|f(x)\|+\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|\leqslant\dfrac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon}=1$. Donc $h_\varepsilon(B)\subset B$.
En outre $\|f(x)-h_\varepsilon(x)\|=\dfrac{\|(1+\varepsilon)f(x)-f_\varepsilon(x)\|}{1+\varepsilon}\leqslant\|(1+\varepsilon)f(x)-f_\varepsilon(x)\|\leqslant\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|+\varepsilon\|f(x)\|\leqslant2\varepsilon$.
L'espace des applications de classe $\mathcal{C}^2$ de B dans B est dense dans celui des applications continues de B dans B pour la norme uniforme.

14. Classiquement en remplaçant ε par $\dfrac{1}{n}$, on construit une suite (h_n) d'applications $\mathcal{C}^2$ de B dans B convergeant uniformément sur B vers f.
D'après le théorème de Brouwer particulier, chaque fonction h_n admet un point fixe x_n. Comme B est compact, la suite (x_n) admet une suite extraite (y_n) avec $y_n=x_{\varphi(n)}$ convergeant vers $\omega\in B$.
Comme f est continue sur B donc en ω, la suite $\big(f(y_n)\big)$ tend vers $f(\omega)$ et par ailleurs $h_{\varphi(n)}(y_n)=y_n$ tend vers ω.
Or $\|f(y_n)-h_{\varphi_n}(y_n)\|\leqslant N_\infty(f-h_{\varphi(n)})$ tend vers 0 car la suite $\big(h_{\varphi(n)}\big)$ converge uniformément vers f en tant que suite extraite de la suite (h_n) qui converge uniformément vers f. Ainsi $f(\omega)=\omega$. CQFD.
Toute application continue de B dans B admet un point fixe.

15. Il suffit de ramarquer que g est une application continue de B dans B.

16. A étant compact en tant que fermé borné, $f(A)$ est compact donc borné ainsi que $A\cup f(A)$ en tant qu'union de deux bornés. D'où l'existence de r. CQFD.

h est une application de $\overline{B}(O,r)$ dans A donc a fortiori dans $\overline{B}(O,r)$. En outre elle est continue puisque f et P le sont (Cf **7.**). D'après la question précédente, h admet un point fixe $\omega \in \overline{B}(O,r)$: $f\big(P(\omega)\big) = \omega$.
Pour conclure, il suffit de prouver que $\omega \in A$ car alors $P(\omega) = \omega$.

Supposons le contraire. Alors $P(\omega) \in A \setminus \overset{\circ}{A}$ d'après **8.**. Mais alors $f\big(P(\omega)\big) \in A$ puisque $f(A \setminus \overset{\circ}{A}) \subset A$. Or $f\big(P(\omega)\big) = \omega$. Donc $\omega \in A$. Contradiction. CQFD.
Le théorème de Brouwer général dans $\mathbb{R}^2$ est ainsi établi.

III. Quelques conséquence du théorème de Brouwer.

17. Supposons $g = -f$ continue. Alors g est une application continue de B dans S donc dans B et admet, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe ω qui appartient à S puisque g est à valeurs dans S. Ainsi $f(\omega) = -\omega$. Mais comme $f(x) = x$ sur S, il vient que $f(\omega) = \omega$. Donc $\omega = 0$ ce qui est impossible puisque $\omega \in S$. CQFD.
Le théorème de non rétraction continue est établi :
Il n'existe aucune application continue de B dans S qui fixe les points de S.

18. Comme $y \notin f(B)$, g est bien définie et est une application continue de B dans S et admet donc, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe ω qui appartient à S comme précédemment.
Donc $g(\omega) = \dfrac{y-\omega}{\|y-\omega\|}$ car $f(\omega) = \omega$ puisque $\omega \in S$. Ainsi $\dfrac{y-\omega}{\|y-\omega\|} = \omega$ avec $\omega \in S$.
Supposons désormais que $y \in B$. Notons déjà que $y \notin S$ car $S \subset f(B)$. Ainsi $\|y\| < 1$.
Or $y - \omega = \|y-\omega\|\omega$ donc $\big(y-\omega|\omega\big) \geqslant 0$ soit $\big(y|\omega\big) \geqslant \|\omega\|^2 = 1$.
Mais par ailleurs $|\big(y|\omega\big)| \leqslant \|y\|\|\omega\| = \|y\| < 1$. Contradiction CQFD.
Si f est continue sur B et fixe les points de S alors $B \subset f(B)$.

19. Seule la continuité de f en 0 n'est pas évidente. Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Comme h est continue sur le compact $S \times [0,1]$, elle y est uniformément continue. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que si x_1 et x_2 sont deux éléments de S tels que $\|x_1 - x_2\| \leqslant \alpha$ et t_1 et t_2 deux éléments de $[0,1]$ tels que $|t_1 - t_2| \leqslant \alpha$ alors $\|h(x_1,t_1) - h(x_2,t_2)\| \leqslant \varepsilon$.
Soit alors $x \in B \setminus \{0\}$ tel que $\|x\| \leqslant \alpha$. Il vient $\|h\big(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\big) - h\big(\frac{x}{\|x\|}, 1\big)\| \leqslant \varepsilon$ c'est à dire $\|f(x) - y\| \leqslant \varepsilon$ c'est à dire encore $\|f(x) - f(0)\| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi f est bien continue en 0 donc est une application continue de B dans S fixant les points de S ce qui contredit le théorème de non rétraction continue. CQFD.
S n'est pas continuement rétractile.

20. Comme $y \notin f\big(\overline{B}(O,r)\big)$, g_r est définie et continue sur $\overline{B}(O,r)$ à valeurs dans $S(O,r)$ donc admet, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe $u_r \in S(O,r)$. L'égalité $g_r(u_r) = u_r$ s'écrit $r\big(y - f(u_r)\big) = \|y - f(u_r)\|u_r$.
En multipliant scalairement cette égalité par u_r on obtient l'égalité cherchée puisque $\|u_r\| = r^2$. CQFD.
Supposons qu'il existe y non atteint par f. Alors $y \notin f\big(\overline{B}(O,r)\big)$ et donc il existe un tel u_r pour tout $r > 0$.
Or par hypothèse (non encore utilisée) $\big(f(u_r)|u_r\big) \geqslant 0$.
Ainsi pour tout $r > 0$, il existe $u_r \in S(0,r)$ tel que $\big(y|u_r\big) \geqslant r\|y - f(u_r)\|$.
Or $|\big(y|u_r\big)| \leqslant \|y\|\|u_r\| = r\|y\|$ donc $\|y - f(u_r)\| \leqslant \|y\|$ pour tout $r > 0$ donc $\Big\{f(u_r)\Big\}_{r>0}$ est borné.
Par ailleurs comme $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$ et comme $\|u_r\| = r$, il vient que $\lim\limits_{r\to+\infty} \|f(u_r)\| = +\infty$. contradiction.
Si f est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\big(f(x)|x\big) \geqslant 0$ pour tout x et $\|f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors f est surjective.

FIN