SESSION 2007

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices ***sont autorisées.***

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Groupes d'isométries sur $\mathbb{R}^n$

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique
- $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire **canonique** sur E : si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux vecteurs de E, on a $< x, y > = {}^t XY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où X et Y sont les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est donc une base orthonormale pour $<\cdot,\cdot>$)

- $\mathcal{L}(E)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes de E
- $(GL(E), \circ)$ le groupe des automorphismes de E

- $M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne
- $M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles de taille n
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$
- pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, ${}^t A$ est sa matrice transposée
- $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t AA = I_n$ où I_n est la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$

- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, ${}^tXAX > 0$.

Si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des réels, on note $\text{diag}(x_1, x_2, ..., x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, x_2, ..., x_n$ dans cet ordre.

Si p est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\|\cdot\|_p$ la **norme *p*** sur E :

si $x = (x_1, ..., x_n) \in E,\ \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

On note $\|\cdot\|_\infty$ la **norme infinie** sur E : si $x = (x_1, ..., x_n) \in E,\ \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

Une norme N sur E est dite **euclidienne** s'il existe un produit scalaire φ sur E tel que pour tout $x \in E,\ N(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$.

Objectifs

Si N est une norme sur E, on dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une ***N*-isométrie** si pour tout $x \in E,\ N(u(x)) = N(x)$.

On note $\text{Isom}(N)$ l'ensemble des N-isométries.

L'objectif du problème est de déterminer le nombre d'éléments de $\text{Isom}(N)$ dans le cas des normes euclidiennes puis des normes p.

I. Description des normes euclidiennes

1. Identité du parallélogramme

a. Montrer que si N est une norme euclidienne alors elle vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire pour tous vecteurs x et y de E, on a

$$\left(N(x+y)\right)^2 + \left(N(x-y)\right)^2 = 2\left[\left(N(x)\right)^2 + \left(N(y)\right)^2\right].$$

En déduire que la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.

b. Justifier que la norme $\|\cdot\|_2$ est euclidienne puis montrer que pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas euclidienne.

2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Si $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ sont deux vecteurs de E, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes associées. Montrer que si l'on pose $< x, y >_S = {}^tXSY$, alors $<\cdot,\cdot>_S$ définit un produit scalaire sur E.

3. Soit φ un produit scalaire sur E et S la matrice de coefficients $\left(\varphi(e_i,e_j)\right)$. Justifier que pour tous vecteurs x et y de E $\varphi(x,y) = {}^tXSY$ et que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a donc montré que $\varphi = <\cdot,\cdot>_S$.

Toute norme euclidienne peut donc s'écrire sous la forme $N_S : x \mapsto \sqrt{{}^tXSX}$ avec $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ où X désigne la matrice colonne associée à x.

II. Quelques généralités et exemples

Soit N une norme sur E.

4. Montrer que $\left(\mathrm{Isom}(N),\circ\right)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

5. Une caractérisation géométrique des *N*-isométries

On note $\Sigma(N) = \{x \in E,\ N(x) = 1\}$, la sphère unité pour N.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une N-isométrie si et seulement si $u\left(\Sigma(N)\right) = \Sigma(N)$.

Le groupe des N-isométries est donc l'ensemble des endomorphismes laissant stable la N-sphère unité.

6. Dans cette question uniquement $n = 2$ et donc $E = \mathbb{R}^2$.

On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \mathrm{Vect}\{e_1 - e_2\}$ où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et r la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Les endomorphismes s et r sont-ils des $\|\cdot\|_1$-isométries ?

7. Dans cette question uniquement $n = 3$ et donc $E = \mathbb{R}^3$.

Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$, ce qui définit une forme quadratique q.

a. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, déterminer une matrice symétrique $S \in M_3(\mathbb{R})$, telle que $q(x,y,z) = {}^tXSX$.

b. Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $S = PD{}^tP$.

c. Justifier alors que l'application $N_q : (x,y,z) \mapsto \sqrt{q(x,y,z)}$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

d. Déterminer la nature géométrique de la quadrique $\Sigma(N_q)$, la sphère unité pour la norme N_q et en donner une équation simple dans une nouvelle base.

e. Justifier que $\Sigma(N_q)$ est une surface de révolution, préciser un vecteur qui dirige son axe.

f. Déduire de la question **5**, par une considération géométrique, que $\mathrm{Isom}\left(N_q\right)$ a une infinité d'éléments.

III. Étude de Isom(N) lorsque N est une norme euclidienne

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $[u]_{\mathcal{B}}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Si N est une norme, on note $\mathrm{ISOM}(N) = \{[u]_{\mathcal{B}},\, u \in \mathrm{Isom}(N)\}$. L'ensemble $\mathrm{ISOM}(N)$ est par construction un groupe isomorphe à $\mathrm{Isom}(N)$, c'est « sa version matricielle ».

8. Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes

a. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, N_S la norme euclidienne associée et $<\cdot,\cdot>_S$ le produit scalaire associé. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que u est une N_S-isométrie si et seulement si pour tous vecteurs x et y de E, on a $<u(x),u(y)>_S = <x,y>_S$.

b. En déduire que u est une N_S-isométrie si et seulement si sa matrice A dans $\mathcal{B}$ vérifie ${}^t ASA = S$.

9. Reconnaître alors $\mathrm{ISOM}(\|\cdot\|_2)$. Que peut-on dire du nombre d'éléments de $\mathrm{ISOM}(\|\cdot\|_2)$? Justifier votre réponse.

10. Une application des polynômes interpolateurs

$\mathbb{R}_r[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r.
On se donne $r+1$ réels $x_0 < x_1 < \dots < x_r$.

On considère l'application linéaire u de $\mathbb{R}_r[X]$ vers $\mathbb{R}^{r+1}$ définie par $P \mapsto \big(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_r)\big)$.

a. Déterminer le noyau de u. En déduire que pour tous réels $y_0, y_1, \dots, y_r$, il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_r[X]$ tel que pour tout $i \in \{0,\dots,r\}$, $L(x_i) = y_i$ (un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur).

b. Application : soit n un entier naturel non nul et $u_1,\dots,u_n$ des réels strictement positifs, on pose $U = \mathrm{diag}(u_1,\dots,u_n)$ et $V = \mathrm{diag}(\sqrt{u_1},\dots,\sqrt{u_n})$. Montrer qu'il existe un polynôme L, à coefficients réels, tel que $V = L(U)$.

11. Racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

a. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S$. On dit que A est une racine carrée de S.

b. Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une autre racine carrée de S. Montrer qu'il existe un polynôme Q, à coefficients réels, tel que $A = Q(B)$. En déduire que A et B commutent.

c. Montrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est une matrice inversible.

d. Déduire des questions précédentes que $A = B$ (on pourra calculer $(A+B)(A-B)$).

Désormais, on note $\sqrt{S}$ **l'unique** racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ de S.

12. Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne

Soit N une norme euclidienne. Il existe donc une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in E,\ N(x) = N_S(x) = \sqrt{{}^t XSX}$ où X est le vecteur colonne associée à x.

a. Montrer que si $M \in O_n(\mathbb{R})$, la matrice $(\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$ appartient à $\mathrm{ISOM}\left(N_S\right)$.

b. Montrer que l'application ψ de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{ISOM}\left(N_S\right)$ définie par $M \mapsto \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M \sqrt{S}$ est une bijection.
Le groupe d'isométrie d'une norme euclidienne est-il fini?

IV. Étude du cardinal de Isom(*p*)

Dans cette partie p est un réel **strictement** supérieur à 1, on appelle **exposant conjugué** de p l'unique réel q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Pour alléger l'écriture, une ***p*-isométrie** désigne une isométrie pour la norme $\|\cdot\|_p$ et on note $\mathrm{Isom}(p)$ le groupe des p-isométries.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u^* désigne l'**adjoint** de u pour $<\cdot,\cdot>$. On rappelle que $u^* \in \mathcal{L}(E)$, est caractérisé par l'égalité suivante : pour tout $(x, y) \in E^2$, $< u(x), y > = < x, u^*(y) >$.

13. Endomorphismes de permutation signée

$\mathcal{P}_n$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$.

Soit $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et $\varepsilon = \left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\right) \in \{-1, +1\}^n$. On note $u_{\sigma,\varepsilon}$ l'endomorphisme de E qui vérifie pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$.

a. Montrer que $u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p-isométrie.

b. Écrire la matrice de $u_{\sigma,\varepsilon}$ dans la base canonique dans le cas où $n = 4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = (1, 1, -1, 1)$.

14. Inégalité de Holdër

a. Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $ab \leq \dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{q} b^q$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

b. En déduire que pour tous vecteurs x et y de E, on a $|< x, y >| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Ce résultat s'appelle **l'inégalité de Holdër (**on pourra d'abord démontrer l'inégalité lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$).

c. Que devient l'inégalité si $p = 2$?

Dans toute la suite, u désigne une p-isométrie. On note $\left(a_{ij}\right)$ les coefficients de la matrice $A = [u]_{\mathcal{B}}$.

15. Montrer que pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^p = 1$. En déduire la valeur de $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^p$.

16. Une formule clé de dualité

Soit $x \in E$. On note $\Sigma_q = \left\{ z \in E, \|z\|_q = 1 \right\}$.

a. Justifier l'existence du réel $\max\limits_{y \in \Sigma_q} |< x, y >|$.

b. Justifier que $\max\limits_{y \in \Sigma_q} |< x, y >| \leq \|x\|_p$.

Soit $i \in \{1, 2, ..., n\}$; si $x_i \neq 0$, on pose $y_i = \varepsilon_i |x_i|^{p-1} \|x\|_p^{1-p}$ où ε_i désigne le signe de x_i et si $x_i = 0$, on pose $y_i = 0$. On définit ainsi un vecteur $y = (y_1, ..., y_n)$.

Montrer que $|< x, y >| = \|x\|_p$ puis montrer l'égalité suivante : $\|x\|_p = \max\limits_{y \in \Sigma_q} |< x, y >|$.

17. En déduire que si u est une p-isométrie, u^* est une q-isométrie. Donner alors, en justifiant, la valeur de $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ji}|^q$.

18. On suppose de plus que $p \neq 2$.

a. Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ des réels dans $[0,1]$ vérifiant $\sum\limits_{k=1}^{r} {\alpha_k}^p = \sum\limits_{k=1}^{r} {\alpha_k}^q$. Montrer avec soin que pour tout $k \in \{1, 2, ..., r\}$, α_k ne prend qu'un nombre fini de valeurs à déterminer.

b. En déduire que pour tout i et j dans $\{1, 2, ..., n\}$, $|a_{ij}|$ ne peut prendre que 2 valeurs différentes que l'on précisera (on rappelle que les a_{ij} sont les coefficients de la matrice d'une p-isométrie).

19. Conclusion

Montrer alors que lorsque $p \neq 2$, Isom(p) est un groupe fini dont on déterminera le cardinal. On remarquera en particulier que ce cardinal est indépendant de p.

Commentaire : Les p-isométries pour $p \neq 2$ sont seulement en nombre fini, contrairement aux isométries euclidiennes qui forment un groupe infini mais compact (pas très difficile à montrer). Sur $\mathbb{R}^n$, la géométrie euclidienne est donc plus riche que celle des normes p pour $p \neq 2$.

Fin de l'énoncé