

---

# Concours commun marocain 2004

## *maths I - MP*

### Partie I. Exemples et résultats généraux

#### 1. Un premier exemple

- (a) l'équation différentielle en question est :  $(\mathcal{E}_{f_1}) : y' - y = -e^x$ , dont la solution s'écrit  $y = y_H + y_0$  où  $y_H$  solution générale de l'équation homogène :  $(\mathcal{E}_H) : y' - y = 0$  et  $y_0$  solution particulière de  $(\mathcal{E}_{f_1})$ . On a  $y_H(x) = \lambda e^x$  et à l'aide de la méthode de la variation de la constante, on pose  $y_0(x) = \lambda(x)e^x$ , on injecte cette solution dans l'équation et on trouve  $\lambda'(x) = -1$ , d'où  $y_0(x) = -xe^x$ . Donc  $y(x) = (-x + \lambda)e^x$ . Cette équation ne possède aucune solution bornée au voisinage de  $+\infty$ .
- (b) i. De même on a : l'équation différentielle en question est :  $(\mathcal{E}_{f_\alpha}) : y' - y = -e^{\alpha x}$ , dont la solution s'écrit  $y = y_H + y_0$  où  $y_H$  solution générale de l'équation homogène :  $(\mathcal{E}_H) : y' - y = 0$  et  $y_0$  solution particulière de  $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$ . On a  $y_H(x) = \lambda e^x$  et à l'aide de la méthode de la variation de la constante, on pose  $y_0(x) = \lambda(x)e^x$ , on injecte cette solution dans l'équation et on trouve  $\lambda'(x)e^x = -e^{\alpha x}$ , d'où  $y_0(x) = -\frac{1}{\alpha-1}e^{\alpha x}$ . Donc  $y(x) = -\frac{1}{\alpha-1}e^{\alpha x} + \lambda e^x$ .
- ii. Donc une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que cette équation admet des solutions bornées au voisinage de  $+\infty$  est que  $\alpha < 0$ , en prenant  $\lambda = 0$  mais cette solution n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$ .

#### 2. Résultats généraux

- (a) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  est un espace affine de dimension 1.
- (b) Soit  $y$  une solution de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$ , donc  $(y(x)e^{-x})' = (y'(x) - y(x))e^{-x} = -f(x)e^{-x}$ , d'où  $y(x)e^{-x} = \lambda - \int_0^x e^{-t}f(t) dt$  et donc  $y = y_\lambda : x \mapsto e^x \left( \lambda - \int_0^x e^{-t}f(t) dt \right)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (c) Si on suppose que la solution  $y_\lambda$  est bornée au voisinage de  $+\infty$ , alors  $\lambda - \int_0^x e^{-t} f(t) dt = y_\lambda(x) e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$  est convergente et vaut  $\lambda$ .
- (d) L'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  peut avoir au maximum une solution bornée au voisinage de  $+\infty$ , en prenant  $\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ , à condition que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$  soit convergente.
- (e) i. Pour tout réel  $x$ , on a : 
$$Y_f(x) = e^x \left( \lambda_f - \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right) = e^x \left( \int_x^0 e^{-t} f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt.$$
- ii. La solution  $Y_f$  n'est pas nécessairement bornée au voisinage de  $+\infty$  si on prend par exemple  $f(t) = e^{\frac{t}{2}}$ , dans ce cas  $Y_f(x) = 2e^{\frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
- (f) i. Si  $f$  est bornée par une constante  $M$ , alors  $|\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt| \leq \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt \leq M \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = M e^{-x}$ , donc l'intégrale  $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$  est bien définie donc  $Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$  est bien définie et bornée aussi par  $M$ , comme l'équation admet au maximum une solution bornée alors c'est l'unique solution bornée, sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$ .
- ii. Si  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ , alors  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R} : x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ . Ainsi  $\forall x > A$  on a :  $|f(t)| < \varepsilon, \forall t \geq x$  donc  $|Y_f(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt \leq \varepsilon e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \varepsilon$ , d'où  $Y_f$  possède aussi une limite nulle en  $+\infty$ .
- iii. Si maintenant  $f$  tend vers 0 en  $-\infty$ , alors  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A < 0$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R} : x < A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ . Ainsi  $\forall x < A$  on a :  $|f(t)| < \varepsilon, \forall x \leq t \leq A$ , donc  $|Y_f(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt = e^x \int_x^A e^{-t} |f(t)| dt + e^x \int_A^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt$ , or  $e^x \int_A^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow -\infty$ , car  $\int_A^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt$  est une constante qui ne dépend pas  $x$  et  $e^x \int_x^A e^{-t} |f(t)| dt \leq e^x \int_x^A e^{-t} \varepsilon dt = \varepsilon e^x (e^{-x} - e^{-A}) = \varepsilon (1 - e^{x-A}) \leq \varepsilon$ , et donc  $Y_f$  possède une limite nulle en  $-\infty$ .

### 3. Un autre exemple

$$(a) \sum_{n \geq 0} |u_{n,p}(x)| = \frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n \geq 0} \frac{((2p+2)x)^n}{n!} = \frac{e^{(2p+2)x}}{(2p+1)!} \text{ finie } \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} |u_{n,p}(x)| =$$

$$\sum_{p \geq 0} \frac{e^{(2p+2)x}}{(2p+1)!} = e^x \sum_{p \geq 0} \frac{(e^x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = e^x sh(x) \text{ aussi finie et donc,}$$

pour tout réel  $x$ , la suite double  $(u_{n,p}(x))_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable.

(b) Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ , est alors infini

$$\text{et sa somme est } \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} u_{n,p}(x) = \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!} \frac{x^n}{n!} =$$

$$\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \sum_{n \geq 0} \frac{((2p+2)x)^n}{n!} = \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} e^{(2p+2)x} = e^x \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p (e^x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = e^x \sin(e^x).$$

(c) l'intégrale  $\int_0^A e^{-t} u(t) dt = \int_0^A \sin(e^t) dt = \int_1^{B=e^A} \frac{\sin(x)}{x} dx$  est alors une intégrale classique convergente car de même nature que la série alternée  $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ . On a effectué le changement de variable  $x = e^t$ .

(d) Pour tout réel  $x$ , on a :  $\int_x^{+\infty} e^{-t} u(t) dt = \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$  en effectuant le changement de variable  $\theta = e^t$ .

(e)  $Y_u(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} u(t) dt$  est déjà bornée en  $+\infty$  car  $\int_0^A e^{-t} u(t) dt$  converge, il reste donc à l'étudier en  $-\infty$ . faisons une intégration par partie dans l'intégrale  $|\int_{e^x}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta| = |[-\frac{\cos \theta}{\theta}]_{e^x}^{+\infty} + \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\cos \theta}{\theta^2} d\theta| = |\frac{\cos e^x}{e^x} + \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\cos \theta}{\theta^2} d\theta| \leq \frac{1}{e^x} + \int_{e^x}^{+\infty} \frac{1}{\theta^2} d\theta = \frac{2}{e^x}$ , d'où  $|Y_u(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} u(t) dt| = |e^x \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta| \leq 2$  donc la solution  $Y_u$  de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_u)$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

## Partie II. Cas d'une fonction intégrable

### A- Cas où $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

1. La fonction  $G$  est continue, car primitive, bornée et tend vers 0 en  $-\infty$  car  $f$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc sa limite en  $+\infty$  ne peut qu'être finie et donc  $f$  ne peut qu'être bornée par une constante  $M$ , d'où  $\forall A \geq x$ , on a :  $\int_x^A e^{-t} |f(t)| dt \leq M e^{-x}$ . Donc, pour tout réel  $x$ , la fonction  $t \mapsto e^{-t} f(t)$  est intégrable sur  $[x, +\infty[$ .

3. Et dans ce cas :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |Y_f(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-x} |f(t)| dt = \int_x^{+\infty} |f(t)| dt$ , donc  $Y_f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  par  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  et tend vers 0 en  $+\infty$  car  $\int_x^{+\infty} |f(t)| dt$  tend vers 0 en  $+\infty$ .
4. D'autre part  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} G'(t) dt = e^x [e^{-t} G(t)]_x^{+\infty} + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} G(t) dt = -G(x) + Y_G(x)$   
car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} G(t) = 0$ , puisque  $G$  est bornée et donc  $Y_f$  tend vers 0 en  $-\infty$  car  $G$  et  $Y_G$  tendent vers 0 en  $-\infty$ .
5. On a  $f$  intégrable  $\mathbb{R} \Rightarrow |f|$  intégrable  $\mathbb{R}$ , donc de façon pareille on montre que la solution  $Y_{|f|}$  de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_{|f|})$  est bornée et tend vers 0 en  $\pm\infty$ .
6. On a :  $Y_{|f|}(t) = Y'_{|f|}(t) + |f(t)|$ , or  $Y'_{|f|}$  intégrable car  $Y_f$  tend vers 0 en  $\pm\infty$  et  $|f|$  intégrable donc  $Y_{|f|}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  et par suite  $Y_f$  est aussi intégrable sur  $\mathbb{R}$  puisque  $|Y_f| \leq Y_{|f|}$ .
7. Effectuons une intégration par parties, donc :  $\int_{-\infty}^{+\infty} Y_f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt dx = \left[ e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{-x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ , car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = 0$ , puisque la fonction  $t \mapsto e^{-t} f(t)$  est intégrable et  $|e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$
8.  $\forall (f, g) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on a :  $\Phi(f + \lambda g)(x) = Y_{f + \lambda g}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt + \lambda \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t) dt = Y_f(x) + \lambda Y_g(x) = \Phi(f)(x) + \lambda \Phi(g)(x)$ , d'o  
 $\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda \Phi(g)$  et par suite  $\Phi$  est linéaire, de plus d'après les questions précédentes si  $g$  est une fonction réelle continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ , alors  $Y_g = \Phi(g)$  l'est aussi, donc  $\Phi : g \mapsto Y_g$  est un endomorphisme de  $E$ , d'autre part :  
 $N_1(Y_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y_g(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} Y_{|g(t)|} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = N_1(g)$ , d'o  
 $\Phi$  est continue avec  $\|\Phi\| = \sup_{g \neq 0} \frac{N_1(\Phi(g))}{N_1(g)} \leq 1$ , de plus, pour  $g \geq 0$  on a :  $Y_g \geq 0$ , d'o  $N_1(Y_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ , d'o  $\|\Phi\| \geq 1$  et donc  $\|\Phi\| = 1$ .

## B- Cas où l'intégrale de $f$ sur $\mathbb{R}$ converge

1. La fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , car c'est une primitive, et en plus admet une limite nulle en  $+\infty$  par construction de  $F$  et une limite finie

en  $-\infty$  car l'intégrale converge, donc bornée et tend vers 0 en  $+\infty$ .

2. Mme raisonnement que celui de la question II.A.4) En déduire que la solution  $Y_f$  de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  est bornée et tend vers 0 en  $+\infty$ .
3. Ainsi on a :  $Y_f = F - Y_F$ , or  $F$  borne et tend vers 0 en  $-\infty$ , donc  $Y_F$  aussi et donc  $Y_f$  vrifie la mme chose.
4. Mme raisonnement que celui de la question II.A.7).

### Partie III. Cas d'une fonction périodique

1.  $f$  est  $2\pi$ -périodique continue, donc borne sur  $\mathbb{R}$ , d'o  $Y_f$  aussi, or l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_f)$  possède au maximum une solution bornée qui est donc la fonction  $Y_f$ .

2. On effectue le changement de variable  $u = t - 2\pi$  donc  $y_F(x + 2\pi) = e^{x+2\pi} \int_{x+2\pi}^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = e^{x+2\pi} \int_x^{+\infty} e^{-t-2\pi} f(t-2\pi) dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = Y_f(x)$ , donc  $Y_f$  est  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$ , comme produit de deux fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

3. Les coefficients de FOURIER complexes de  $Y_f$  sont donnés par la formule :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z} : \quad c_k(Y_f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(1-ik)x} \left( \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{e^{(1-ik)t}}{1-ik} \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{(1-ik)x}}{1-ik} e^{-x} f(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi(1-ik)} \left( e^{2\pi} \int_{2\pi}^{+\infty} e^{-t} f(t) dt - \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right) + \frac{c_k(f)}{1-ik} = \frac{c_k(f)}{1-ik} \\ &\text{car } e^{2\pi} \int_{2\pi}^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \text{ en effectuant le changement de} \\ &\text{variable } u = t - 2\pi \text{ et utilisant le fait que } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique. D'o} \\ \forall k \in \mathbb{Z} : \quad c_k(Y_f) &= \frac{c_k(f)}{1-ik}. \end{aligned}$$

4. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $c_k(f_n) = \frac{c_k(f_1)}{(1-ik)^{n-1}}$ .

(b) Parceque  $Y_f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  borne.

- (c)  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \left( |c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)| \right) = M \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \frac{|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|}{M} \right)$  est finie  
car c'est la série de FOURIER de  $f_1$  en  $x_0$  o  $M = |f_1(x_0)| =$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x)| .$$

- (d) D'après le théorème de DIRICHLET, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a :
- $$\begin{aligned} |f_n(x) - c_0(f_n)| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_k(f_n) e^{ikx} \right| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |c_k(f_n)| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} |c_{-k}(f_n)| + |c_k(f_n)| \quad \text{car } |1+ \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{|c_{-k}(f_n)|}{|1+ik|^{n-1}} + \frac{|c_k(f_n)|}{|1-ik|^{n-1}} \\ &\leq \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|) \end{aligned}$$
- $|ik| = \sqrt{1+k^2} \geq 2$  et  $|1-ik| = \sqrt{1+k^2} \geq 2$ . de plus  $c_0(f_n) = c_0(f)$  d'o le rsultat.
- (e) Le mode de convergence de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est le mme que celui de la suite gometrique  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1}$

FIN DE L'ÉPREUVE