Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

I. Détermination de Rac(A) dans quelques exemples.

Exemple 1 : Cas où A possède n valeurs propres distinstes.

1. Comme A possède n valeurs propres réelles deux à deux distinctes, A est R-diagonalisable (cours classique) i.e. il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Il vient alors que $R^2 = A$ si et seulement si (puisque P est inversible) $P^{-1}R^2P = D$ soit si et ssi $\left(P^{-1}RP\right)^2 = D$. $\square$
Ainsi $Rac(A) = P\ Rac(D)\ P^{-1}$.

2. a. Soit S une racine carrée de D. On a $SS^2 = S^2S$ $(= S^3)$ donc $SD = DS$. $\square$

2. b. Comme S commute avec D, tout sous-espace propre de D est stable par S. Or comme les valeurs propres de D sont deux à deux distinctes, les sous-espaces propres de D sont des droites. Il en découle que les n droites propres de D sont stables par S ce qui prouve que S est diagonale. $\square$

2. c. On a evidemment $s_i^2 = \lambda_i$. $\square$

2. d. Si A admet une valeur propre strictement négative, il en découle que $Rac(A)$ est l'ensemble vide. $\square$

2. e. Il découle de ce qui précède que si toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles alors :
$Rac(D) = \left\{\operatorname{diag}(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n})\right\}$. $\square$

3. Compte tenu de ce qui précède A admet au moins une racine carrée si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles et alors $Rac(A) = \left\{P\operatorname{diag}(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n})P^{-1}\right\}$.
Il y en a alors donc 2^n si les valeurs propres sont toutes strictement positives et 2^{n-1} si 0 est valeur propre. $\square$

4. Notons déjà que comme A est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable.
En outre en faisant la somme des deux dernières colonnes on constate que 0 est valeur propre et que $(0, 1, 1)$ est vecteur propre associé.
En exploitant cette remarque, on remplace dans le polynôme caractéristique la dernière colonne par elle-même plus la seconde ce qui permet de factoriser X. On se ramène alors classiquement à un déterminant d'ordre 2 (une fois qu'on a factorisé par X, on remplace la deuxième ligne par elle-même moins la troisième). Il vient ainsi très rapidement que le polynôme caractéristique est $X(X^2 - 17X + 16) = X(X-1)(X-16)$.
On peut d'ailleurs vérifier que la trace de A est bien égale à 17.
Un calcul immédiat montre que $(1, 1, -1)$ est vecteur propre relatif à 1.
Soit par calcul direct soit par produit vectoriel (puisque A est ortho-diagonalisable) il vient que $(2, -1, 1)$ est vecteur propre relatif à 16.

Ainsi les racines carrées de A sont les 4 matrices $P\operatorname{diag}(0, \varepsilon_2, 4\varepsilon_3)\,{}^tP$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. $\square$
$(P^{-1} = {}^tP$ car P est orthogonale, ce qui permet déconomiser le calcul de P^{-1}.)

Exemple 2 : Cas où A est la matrice nulle.

5. a. $f^2 = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Il en découle immédaitement par le théorème du rang que $\operatorname{rg} f \leqslant \dfrac{n}{2}$. $\square$

5. b. Remarquons une faute dans l'énoncé : il faut lire "un" vecteur u_i et non pas "le" vecteur : les vecteurs en question formant un sosu-espace affine de dimension $n - r \geqslant \dfrac{n}{2}$.

Remarquons aussi que la complétion d'une base de $\operatorname{Im} f$ en une base de $\operatorname{Ker} f$ est bien possible car $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ (et bien sûr le théorème de la base incomplète).

Soit alors une famille $\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}, \beta_1, \ldots, \beta_r\right)$ de n réels telle que $\sum\limits_{i=1}^{i=n-r} \alpha_i e_i + \sum\limits_{j=1}^{r} \beta_j u_j = 0 \quad (1)$.

En appliquant f, et en tenant compte du fait que $f(e_i) = 0$ pour tout i, il vient que $\sum\limits_{j=1}^{r} \beta_j e_j = 0$.

Comme la famille $\left(e_j\right)_{j=1,\ldots,r}$ est libre on obtient que les β_j sont nuls.

En reportant dans (1) il vient que $\sum\limits_{i=1}^{i=n-r} \alpha_i e_i = 0$ donc que les α_i sont nuls egalement puisque la famille $\left(e_i\right)_{i=1,\ldots,n-r}$ est libre.
Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est-elle libre donc une base de $\mathbb{R}^n$ puisque de cardinal n. $\square$
La matrice de f dans cette base est la matrice bloc $M_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

6. a. Il découle de ce qui précède que si M est de carré nul alors soit $M = 0$ soit M est semblable à une matrice de type M_r avec $r \leqslant \dfrac{n}{2}$. Réciproquement si $r \leqslant \dfrac{n}{2}$ un calcul facile prouve que $M_r^2 = 0$ $\underline{(\text{car } r \leqslant n/2)}$ donc que toute matrice semblable à M_r est de carré nul.
En conclusion les racines carrées de la matrice nulle sont la matrice nulle et les matrices semblables à une matrice M_r avec $r \leqslant \dfrac{n}{2}$. $\square$

6. b. En particulier les matrices carrées d'ordre 4 de carré nul sont la matrice nulle et les matrices semblables à M_1 ou à M_2. $\square$

Exemple 3 : Cas où A est la matrice identité.

7. b. On a $R^2 = I_n$ donc $\det R = \pm 1$ ce qui prouve que R est inversible (d'ailleurs d'inverse elle-même). $\square$

7. b. R est annulé par le polynôme $X^2 - 1$ scindé à racines siples sur R donc R-diagonalisable et les valeurs propres sont à rechercher parmi $\{-1, 1\}$. Donc R est semblable à une matrice $J_p = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ avec p fois 1 $(0 \leqslant p \leqslant n)$. $\square$

8. Réciproquement on a bien sûr $J_p^2 = I_n$ donc également pour toute matrice semblable.
Ainsi les racines carrées de l'identité sont les matricess emblables à l'une des $n+1$ matrices J_p avec $0 \leqslant p \leqslant n$. $\square$
En d'autres termes ce sont les symétries par rapport à un sous-espace parallèllement à un sous-espace supplémentaire.

Exemple 3 : Cas où A est une matrice symétrique réelle.

9. Une matrice symétrique n'admet pas forcément de racine carrées comme le prouve l'exemple de la matrice (-1) avec $n = 1$! $\square$

10. Soit M symétrique réelle positive. Elle est, par théorème de cours, ortho-diagonalisable donc $M = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i puisque M est positive. Soit alors $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$.
La matrice $R = P\Delta\,{}^tP$ est alors symétrique. En outre elle est positive puisque semblable à Δ donc à valeurs propres positives ou nulles. Enfin on a $R^2 = \big(P\Delta P^{-1}\big)\big(P\Delta P^{-1}\big) = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = M$.
Ainsi une matrice symétrique positive admet-elle au moins une racine carrée également symétrique positive. $\square$

II. Étude topologique de Rac(A).

Commençons par noter que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, on pourra utiliser (pour ce qui est des propriétés topologiques) n'importe quelle norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'elles sont toutes équivalentes.

11. En tant qu'application bilinéaire sur un prduit de deux espaces de dimension finie, le produit matriciel est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il en découle que l'application $M \longmapsto M^2$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Ainsi $Rac(A)$ est-elle une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{A\}$ par une application continue. $\square$

12.a. Il est immédiat que $\{S_q\}_{q \in \mathbb{N}} \subset Rac(I_2)$ ce qui prouve que $Rac(I_2)$ est non borné. $\square$

12.b.D'une manière générale, pour $n \geqslant 3$, soit M_q la matrice bloc $\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & S_q \end{pmatrix}$.
Un calcul par blocs montre que $M_q \in Rac(I_n)$. Or $N(M_q) = q$ donc $Rac(I_n)$ est une partie non bornée pour tout $n \geqslant 2$. $\square$

12.c.Supposons qu'il existe une norme $|| \ ||$ sur-multiplicative sur $GL_n(\mathbb{R})$.
On aurait en particulier $||I_n|| = ||M_q^2|| \geqslant ||M_q||^2$ pour tout entier q. Ce qui est impossible car en vertu de l'équivalence des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $||M_q|| \xrightarrow[q \to +\infty]{} +\infty$. $\square$

III. Intérieur de Rac(A).

13.a. $B_\infty(a, r) = \prod_{i=1}^{p}]a_i - r, a_i + r[$. $\square$

13.b.Si $A \subset B$ il est immédiat que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ puisque $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert inclus dans A donc dans B. Il en découle que si F <u>ou</u> G est d'intérieur vide, il en va a fortiori de $F \bigcap G$. $\square$

14.a.On sait qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines (immédiate conséquence par exemple du théorème de division euclidienne qui prouve que a est racine de P si et seulement si $X - a$ divise P).
Donc le polynôme nul est le seul polynôme à une variable tel que $Z(P)$ soit infinii. $\square$

14.b.$Z(P)$ est la droite d'équation $y = 2x - 1$ et $Z(Q)$ la parabole d'équation $y = x^2$. Ces deux ensembles sont donc infinis. $\square$

15.a. On raisonne par récurrence sur p, le résultat étant vrai pour $p = 1$ d'après 14.a. Supposons le vrai jusqu'au rang p avec $p \geqslant 1$ et soit $P \in \Gamma_{p+1}$ tel que P s'annule sur $I_1 \times \cdots \times I_{p+1}$ avec I_i partie infinie de $\mathbb{R}$.
Supposons que P soit non nul i.e. qu'il existe $(a_1, \ldots, a_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que $P(a_1, \ldots, a_{p+1}) \neq 0$.
Pour $\alpha \in I_1$ notons Q_α le polynôme à p variables défini par $Q_\alpha(x_2, \ldots, x_{p+1}) = P(\alpha, x_2, \ldots, x_{p+1})$.
Ce polynôme s'annule sur $I_2 \times \cdots \times I_{p+1}$ donc est nul par hypothèse de récurrence.
En particulier $Q_\alpha(a_2, \ldots, a_{p+1}) = P(\alpha, a_2, \ldots, a_{p+1}) = 0$ pour tout $\alpha \in I_1$.
Soit alors R le polynôme à une variable défini par $R(x) = P(x, a_2, \ldots, a_{p+1})$. Ce polynôme est nul pour tout $\alpha \in I_1$ et admet donc une infinité de racines donc est nul. En particulier $R(a_1) = P(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}) = 0$. Contradiction qui prouve que le résultat est vrai au rang $p + 1$. $\square$

15.b.Immédiate conséquence de la question précédente et de la question 13a. $\square$

15.c.Ainsi si P n'est pas le polynôme nul alors $Z(P)$ est d'intérieur vide. $\square$

16.a.Soit $M = \big(m_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Alors les coefficients de M^2 sont des polynômes $Q_{i,j}$ à p^2 variables $m_{i,j}$.
Notons $P_{i,j} = Q_{i,j} - a_{i,j}$. Il vient alors que $Rac(A) = \bigcap\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} Z(P_{i,j})$. $\square$

16.b.En remarquant que les polynômes $Q_{i,j}$ sont non nuls et donc également les polynômes $P_{i,j}$ (et cela pour toute matrice A) il découle de la question 15. que l'intérieur de $Rac(A)$ est vide pour toute matrice A. $\square$

FIN