Concours National Commun - Session 2002

Corrigé de l'épreuve des mathématiques II
Filière MP

Étude de l'équation matricielle $Z - M^*ZM = S$ où $\rho(M) < 1$.

Corrigé par M.TARQI

$1^{ère}$ **partie**

1. Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
   • On a $N_\infty(A) = 0$ si et seulement si $a_{ij} = 0$ pour tout couple (i,j), ou encore si et seulement si $A = 0$,
   • $N_\infty(\lambda A) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}| = |\lambda| N_\infty(A)$,
   • et on a aussi :
   $$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|.$$
   D'où
   $$N_\infty(A+B) \leq N_\infty(A) + N_\infty(B)$$
   Donc N_∞ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   De même on a :
   • $N(A) = 0$ si et seulement si $a_{ij} = 0$ pour tout couple (i,j), donc $N(A) = 0$ si et seulement si $A = 0$,
   • $N(\lambda A) = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| = |\lambda| N(A)$,
   • et l'inégalité :
   $$\max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| + \max_{1\leq i,j\leq n} |b_{ij}|$$
   entraîne
   $$N(A+B) \leq N(A) + N(B)$$
   Donc N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. (a) Les composantes de AX sont $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ pour $1 \leq i \leq n$, donc
   $$\|AX\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \max_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = N_\infty(A)\|X\|_\infty.$$

   (b) Soit $C = AB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on a $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, et
   $$\begin{aligned} N_\infty(C) &= \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \max_{1\leq j\leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| = N_\infty(A)N_\infty(B). \end{aligned}$$

Cette inégalité n'est pas valable pour la norme N, comme le montre l'exemple des matrices $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, en effet, on a :

$$N(AB) = N\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2 > N(A)N(B) = 1 \times 1.$$

3. (a) Puisque toutes les normes sont équivalentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit de montrer que la suite $(BA_kC)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers BAC pour la norme N_∞, en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$N_\infty(BA_kC - BAC) = N_\infty(B(A_k - A)C) \leq N_\infty(B)N_\infty(A_k - A)N_\infty(C),$$

comme la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A, la suite $(BA_kC)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice BAC.

(b) Nous avons pour tout couple (i, j),

$$|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \leq N(A_k - A),$$

et on a aussi

$$N_\infty(A_k - A) \leq n \max_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right|,$$

donc la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si pour tout couple (i, j), la suite $(a_{ij}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers a_{ij}.

(c) Il existe $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $M = PDP^{-1}$ et par suite suite pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = P\text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k)P^{-1}$, donc la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour $i = 1, 2, .., n$ $|\lambda_i| < 1$ ou encore $\rho(M) < 1$.

4. (a) On a $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $I_2N = NI_2$, et $N^2 = 0$ alors la formule de binôme s'applique et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$T^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \alpha^{k-i} N^i = \alpha^k I_2 + k\alpha^{k-1}N = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1}\beta \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix}.$$

Donc la suite $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|\alpha| < 1$ ou bien $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

(b) Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est non diagonalisable, alors M admet une seule valeur propre α et il existe un scalaire $\beta \neq 0$ et une matrice inversible tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \;\; M^k = P\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^k P^{-1},$$

donc la suite M^k converge si et seulement si $|\alpha| < 1$, c'est-à-dire $\rho(M) < 1$ et dans ce cas elle converge vers la matrice nulle.

(c) D'après ce qui précède la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(M) < 1$.

5. (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On a $\|M^kX\|_\infty \leq N_\infty(M^k)\|X\|_\infty$, donc si la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, alors la suite de vecteurs $(M^kX)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul.

(b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$, alors il existe une vecteur X, non nul, tel que $MX = \lambda X$ et par conséquent pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^kX = \lambda^kX$, ainsi si $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, la suite $(M^kX)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul et par conséquent la suite géométrique de scalaires $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc $|\lambda| < 1$, d'où $\rho(M) < 1$.

$2^{ème}$ **partie**

1. Il est clair que $(C^*SC)^* = C^*SC$ et que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^*C^*SCX = (CX)^*S(CX) \geq 0$, donc la matrice C^*SC est symétrique et positive.
2. (a) On a $(UU^*)^* = UU^*$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^*UU^*X =< U^*X, U^*X >\geq 0$, donc la matrice UU^* est symétrique et positive.
   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $UU^*X = 0$, alors $X^*UU^*X =< U^*X, U^*X >= 0$, et donc $U^*X = 0$.
   La réciproque est claire.
   (c) Si $UU^* = VV^*$, alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $UU^*X = VV^*X$, donc $< U, X > U =< V, X > V$ et par la suite U et V sont colinéaires.
   Inversement si $V = \lambda U$, alors la condition $UU^* = VV^*$ entraîne $|\lambda| = 1$, ainsi $UU^* = VV^*$ si et seulement si $V = U$ ou $V = -U$.
3. (a) La matrice A étant symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique A est $(X - a)(X^2 - 11x + 24)$ donc les valeurs sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 8$ et $\lambda_3 = a$.
   (b) Notons E_{λ_i} le souse espace propre associé à la valeur propre λ_i ($i = 1, 2, 3$). On a évidement $E_{\lambda_3} = \text{Vect}\{U_3\}$ avec $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 3x \\ 2x + 7y = 3y \end{array} \right.$, donc $E_3 = \text{Vect}\{U_1\}$ avec $U_1 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$, de même le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 8x \\ 2x + 7y = 8y \end{array} \right.$, donc $E_3 = \text{Vect}\{U_2\}$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$.
   On vérifie que la base $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$ est bien orthonormée.
   (c) Posons $S = \lambda_1 U_1 U_1^* + \lambda_2 U_2 U_2^* + \lambda_3 U_3 U_3^*$, alors $S(U_i) = \lambda_i U_i$ pour $i = 1, 2, 3$, donc R et S coincident dans la base $\mathcal{B}$, donc elles sont égales.
   (d) A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives c'est-à-dire $a \geq 0$, et elle est définie positive si et seulement si $a > 0$.
4. (a) D'après le théorème spectrale toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable dans une base orthonomée de vecteurs propres, d'où l'existence d'une telle base.
   Posons $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i \varepsilon_i$, alors pour tout j de $\{1, 2, ..., n\}$,
   $$S\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i \varepsilon_i^* \varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < \varepsilon_i, \varepsilon_j > \varepsilon_i = \lambda_j < \varepsilon_j, \varepsilon_j > \varepsilon_j = \lambda_j \varepsilon_j = R\varepsilon_j$$
   et donc $S = R$.
   (b) Les λ_i sont les valeurs propres de R et les ε_i sont les vecteurs propres respectivement associés aux λ_i.
   (c) La matrice A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives, c'est-à-dire $\forall i, \lambda_i \geq 0$, et elle est définie positive si et seulement si $\forall i, \lambda_i > 0$.

5. D'après la question précédente il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ et des scalaires $\lambda_i \geq 0$ tels que $R = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i \varepsilon_i^*$, donc si on pose $U = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i$, on obtient l'égalité :
$$R = \sum_{i=1}^{n} U_i U_i^*.$$
6. Il est clair que si $RX = 0$, $X^*RX = 0$. Inversement, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $XRX^* = 0$, alors en utilisant la question précédente on obtient
$$XRX^* = \sum_{i=1}^{n} X^*U_iU_i^*X = \sum_{i=1}^{n} < U_i^*X, U_i^*X >= 0,$$
donc pour tout i, $U_i^*X = 0$ est donc $U_iU_i^*X = 0$ et par suite $RX = \sum_{i=1}^{n} U_iU_i^*X = 0$.

3ème **partie**

A-

1. Soient $Z, Z' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\varphi(Z + \lambda Z') = Z + \lambda Z' - M^*(Z + \lambda Z')M = \varphi(Z) + \lambda\varphi(Z'),$$
donc φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $Z \in \ker\varphi$, alors $Z = M^*ZM$, donc l'égalité en question est vérifiée pour $p = 1$, supposons $Z = (M^*)^pZM^p$ et en tenant compte de la relation $Z = M^*ZM$, on obtient
$$Z = (M^*)^p(M^*ZM)M^p = (M^*)^{p+1}ZM^{p+1},$$
d'où le résultat.
3. (a) M et M^* ont le même ensemble de valeurs propres et par conséquent $\rho(M^*) = \rho(M)$.
   (b) Soit $Z \in \ker\varphi$. On a $\forall p \in \mathbb{N}$, $Z = (M^*)^pZM^p$, et comme $\rho(M^*) = \rho(M) < 1$, alors les suites $(M^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $((M^*)^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0, donc
$$Z = \lim_{p\to\infty}(M^*)^pZM^p = 0,$$
ainsi φ est injective.
4. (a) φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ injective, donc il est surjective et par conséquent il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$\varphi(Z) = Z - M^*ZM = B.$$
   (b) L'égalité est vraie pour $k = 0$, car $A - M^*AM = B$, supposons qu'elle est vraie pour k et montrons la pour $k + 1$, en effet, on a :
$$(M^*)^kAM^k - (M^*)^{k+1}AM^{k+1} = (M^*)^kBM^k$$
en multipliant à gauche par M^* et à droite par M, on obtient l'égalité demandée pour $k + 1$.
   (c) L'égalité précédente montre que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{p}\left[(M^*)^kAM^k - (M^*)^{k+1}AM^{k+1}\right] = \sum_{k=0}^{p}(M^*)^kBM^k$$
d'où
$$A - (M^*)^{p+1}AM^{p+1} = \sum_{k=0}^{p}(M^*)^kBM^k.$$

(d) D'après la question précédente, on a :

$$A - \sum_{k=0}^{p} (M^*)^k B M^k = (M^*)^{p+1} A M^{p+1}.$$

Cette égalité montre que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} (M^*)^k B M^k$ converge et de somme A, puisque on a $\lim_{p\to\infty} (M^*)^{p+1} B M^{p+1} = 0$.

B-

1. (a) On a $\triangle - M^*\triangle M = S$, donc par transposition $\triangle^* - M^*\triangle^* M = S^* = S$ et par unicité $\triangle^* = \triangle$, donc $\triangle$ est symétrique.

   (b) On sait que $\triangle = \sum_{p=0}^{\infty} (M^*)^p S M^p$, donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

   $$X^*\triangle X = \sum_{p=0}^{\infty} X^*(M^*)^p S M^p X = \sum_{p=0}^{\infty} ((M^p X)^*) S M^p X \geq 0.$$

   Donc $\triangle$ est une matrice positive.

   (c) D'après la deuxième partie, on sait que $\triangle X = 0$ si et seulement si $X^*\triangle X = 0$. Soit maintenant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X^*\triangle X = 0$, donc l'égalité

   $$\triangle - M^*\triangle M = S$$

   entraîne que

   $$-(MX)^*\triangle MX = X^*\triangle X - (MX)^*\triangle MX = X^* S X \geq 0$$

   et par conséquent $(MX)^*\triangle MX = 0$, donc $X^*SX = 0$ ou encore $SX = 0$. On fait le même raisonnement mais cette fois pour MX, puisque $(MX)^*\triangle MX = 0$, on obtient ainsi $SMX = 0$ et on poursuit le raisonnement par récurrence sur k.
   Inversement, supposons que $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ $SM^kX = 0$, mais le théorème de Cayly-Hamilton montre que $M^n \in \mathrm{Vect}\{I_n, M, ..., M^{n-1}\}$, donc $SM^nX = 0$, puis par récurrence on montre que pour tout entier naturel $k \geq n$, $SM^kX = 0$. D'autre part, on a

   $$\triangle X = \sum_{k=0}^{\infty} (M^*)^k S M^k X = 0.$$

   D'où l'équivalence demandée.

2. (a) D'après la dernière question $RX = 0$ si et seulement si pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $UU^*M^kX = 0$ ou encore $U^*M^kX = 0$, c'est-à-dire $< (M^*)^k U, X >= 0$.

   (b) D'après ce qui précède R est positive. Supposons que $(U, M^*U, ..., M^{n-1}U)$ est libre et soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $RX = 0$, alors les conditions $< (M^*)^k U, X >= 0$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$ montrent que $X \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^\perp = \{0\}$, donc $X = 0$ et par suite R est définie positive.
   Inversement, soit $X \in (\mathrm{Vect}\{U, M^*U, ..., M^{n-1}U\})^\perp$, alors pour tout entier naturel $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $< (M^*)^k U, X >= 0$, donc $X = 0$ car R est définie positive et par conséquent $(\mathrm{Vect}\{U, M^*U, ..., M^{n-1}U\})^\perp = \{0\}$, c'est-à-dire $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\{U, M^*U, ..., M^{n-1}U\}$ et ceci montre que la famille $\{U, M^*U, ..., M^{n-1}U\}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. (a) i. Soit $k \in \{1, 2, ..., n\}$. On a d'abord $C^* E_1 = a_0 E_n$ et pour tout $k \geq 2$, on a :

$$C^* E_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = E_{k-1} + a_{k-1} E_n$$

ii. $C^* E_n - E_{n-1} = E_{n-1} + a_{n-1} E_n - E_{n-1} = a_{n-1} E_n \in \text{Vect}\{E_n\}$. Supposons la propriété est vraie à l'ordre k avec $p \leq n-2$, alors $(C^*)^p E_n - E_{n-p} = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i E_{n-i+1}$, donc

$$\begin{aligned} (C^*)^{p+1} E_n - E_{n-p-1} &= C^* \left[\sum_{i=1}^{p} \alpha_i E_{n-i+1} + E_{n-p} \right] - E_{n-p-1} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i C^* E_{n-i+1} + C^* E_{n-p} - E_{n-p-1} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (E_{n-i} + a_{n-i} E_n) + E_{n-p-1} + a_{n-p-1} E_n - E_{n-p-1} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (E_{n-i} + a_{n-i} E_n) + a_{n-p-1} E_n \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3) \in \text{Vect}\{E_{n-p}, ..., E_n\}$.

iii. La matrice représentant le système de vecteurs $(E_n, C^* E_n, ..., (C^*)^{n-1} E_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ & & & & \vdots \\ & 1 & & * & * \\ 1 & * & \dots & * & * \end{pmatrix}$$

donc elle est inversible et par conséquent la famille $(E_n, C^* E_n, ..., (C^*)^{n-1} E_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(b) D'après la question **B-2.(b)** de cette partie Ω est définie positive.

(c) On a $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Vect}\{E_n, C^* E_n, ..., (C^*)^{n-1} E_n\}$, donc il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ tels que $U = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i (C^*)^i E_n$, donc $U = Q(C^*) E_n = (Q(C))^* E_n$ avec $Q(X) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$.

Nous avons $UU^* = (Q(C))^* E_n E_n^* Q(C)$, donc en multipliant l'égalité $\Omega - C^* \Omega C = E_n E_n^*$, à gauche par $(Q(C))^*$ et à droite par $Q(C)$, on obtient

$$(Q(C))^* \Omega Q(C) - (Q(C))^* C^* \Omega C Q(C) = (Q(C))^* E_n E_n^* Q(C) = UU^*$$

et comme C et $Q(C)$ commutent alors :

$$(Q(C))^* \Omega Q(C) - C^* [(Q(C))^* \Omega Q(C)] C = (Q(C))^* E_n E_n^* Q(C) C = UU^*$$

donc par unicité, on a nécessaiteemnt $R = (Q(C))^* \Omega Q(C)$.

(d) Il est clair que si $\triangle = \sum_{i=1}^{n} (Q_i(C))^* \Omega Q_i(C)$, alors $\triangle - C^* \triangle C$ est symétrique et positive.

Inversement, Supposons $S = \triangle - C^* \triangle C$ est symétrique et positive, posons alors $S = \sum_{i=1}^{n} U_i U_i^*$. Pour chaque $i \in \{1, 2, ..., n\}$ il existe un polynôme Q_i de degré inférieure ou égal à $n-1$ tel que $R_i = (Q_i(C))^* \Omega Q_i(C)$ et $R_i - C^* R_i C^* = U_i U_i$. Donc $\sum_{i=1}^{n} R_i - C^* (\sum_{i=1}^{n} R_i) C = \sum_{i=1}^{n} U_i U_i^* = S$, donc, toujours par l'unicité de Δ, on a

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} (Q_i(C))^* \Omega Q(C).$$

•••••••••••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr