# Corrigé CNC 2007 MATHS1

A.CHABCHI Professeur en classe MP au lycée Ibn Taimyia - www.mathprepa.africa-web.org

**Commentaire :**

- Le but de l'épreuve est la résolution des "équations de Bessel modifiéés"
- Epreuve classique, surtout la première partie
- La troisième partie est très monotone et repésente presque la moitié du sujet, c'etait mieux de traiter une seule des deux équations de faire autres choses...
- Le fait d'exprimer les solutions de $(F_\lambda)$ en fonction de la fonction $\Gamma$ n'est exploité dans le probléme
- La majorité des questions sont directes, l'epreuve manque des questions de synthèse et de reflexion personnel

## PARTIE I

1. Soit $x$ un réel
   (a) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,1]$ et $t^{x-1}e^{-t} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ au $\mathcal{V}(0^+)$, donc elle est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-x<1$ càd $\boxed{x>0}$
   (b) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au $\mathcal{V}(+\infty)$, donc elle est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour toute valeur du réel $x$.
2. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si, elle l'est au $\mathcal{V}(0^+)$ et au $\mathcal{V}(+\infty)$. Selon la question1, cela est réalisé si et seulement $\boxed{x>0}$.
   Pour un complexe $z$, on a d'abord $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}$. Elle donc intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$ si et seulement si $\boxed{\mathrm{Re}(z)>0}$.
3. Pour $z\in\mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z)>0$, on note $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$
   (a) A l'aide d'une intégration par partie, on a $\Gamma(z+1) = \displaystyle\lim_{(A,B)\longrightarrow(0^+,+\infty)}\left(\left[-e^{-t}t^z\right]_A^B + z\int_A^B t^z e^{-t}dt\right) = z\Gamma(z)$.
   (b) Par récurrence sur $p$ :
      - Pour $p=1$, on a $\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$ c'est juste.
      - Soit $p\geq 1$, supposons le résultat vrai pour $p$, alors selon $(a)$, on a $\Gamma(\alpha+p+2) = (\alpha+p+1)\Gamma(\alpha+p+1)$, on conclu alors à l'aide de l'hypothèse de récurrence. D'où le résultat.
   (c) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue non nulle sur $]0,+\infty[$, donc $\Gamma(x)>0$.
   (d) On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ et puisque $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, par récurrence simple, on a $\Gamma(n+1) = n!$.
4. Soit $z\in\mathbb{C}$ .
   (a) Pour $\mathrm{Re}(z)>0$, on a d'abord $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$, puis il s'agit d'une intégration terme à terme dans la première intégrale : En effet on a :
      - La série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{t^{n+z-1}}{n!}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$.
      - La fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{t}$ est continue sur $]0,1]$.
      - La série des intégrales des modules $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{t^{n+z-1}}{n!}\right|dt = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\frac{1}{n+\mathrm{Re}(z)}$ est convergente

   Le résultat en découle alors.

(b) Soit $B$ une boule fermée ( donc compact et aussi convexe ) incluse dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, alors son image par le module $z \longmapsto |z|$ qui est continue est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \alpha \leq \beta$, $\forall\, z \in B$, $\alpha \leq |z| \leq \beta$, il vient que :

- $\forall\, z \in B$, $\forall\, n \geq E(\beta) + 1$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n!} \dfrac{1}{n+z}\right| \leq \dfrac{1}{n!} \dfrac{1}{n-\beta}$ et $\sum \dfrac{1}{n!} \dfrac{1}{n-\beta}$ est convergente, d'où la convergence normale, donc uniforme de $\displaystyle\sum_{n \geq E(\beta)+1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$ sur la boule $B$ (donc aussi sur tout compact) de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.
- Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $z \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n!} \dfrac{1}{n+z}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$

On conclut alors que $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=E(\beta)+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, puis il evident que la sommation finie $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{E(\beta)} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ , d'où la continuité de $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$

5. Soit $0 < a < b$.

(a) Pour $t > 0$ fixé, la fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ pour $t \geq 1$ et décroissante pour $t \leq 1$, il vient alors que

$$\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

(b) Découle de la monotonie de la fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ sur $[a, b]$, en utilisant le $(a)$.

(c) On devra vérifier les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale ( formule de Leibniz)

- D'abord la fonction $f : (x, t) \longmapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et y est aussi continue sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$.
- Pour $x \in [a, b]$, $t > 0$, on a $|f(x, t)| \leq e^{-t} \max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \phi(t)$ avec :
  - $\phi$ continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
  - Intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$ car négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$
  - Intégrable au $\mathcal{V}(0^+)$ car équivalente à $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1-a}}$ avec $1 - a < 1$
- Pour $x \in [a, b]$, $t > 0$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq e^{-t} |\ln(t)| \max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \psi(t)$ avec :
  - $\psi$ continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
  - Intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$ car négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$
  - Intégrable au $\mathcal{V}(0^+)$ car équivalente à $t \longmapsto \dfrac{-\ln(t)}{t^{1-a}} = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ avec $1 - \dfrac{a}{2} < 1$

Ainsi la fonction $\Gamma$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t} t^{x-1} dt$.

(d) Pour $x > 0$, on a $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \sim_{0^+} \dfrac{\Gamma(1)}{x} = \dfrac{1}{x}$ car $\Gamma$ est continue en 1.

## PARTIE II

1. On sait que la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $C^\infty$ sur $]-R, R[$ et se dérive infiniment sous le signe somme, en écrivant $y_\alpha(x) = x^\alpha \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on en déduit que $y_\alpha$ est de classe $C^\infty$ sur $]0, R[$ et se dérive terme à terme.
$y_\alpha$ est solution de $(F_\lambda)$ sur $]0, R[$ si et seulement si

$$x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2} + x \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} - \left(x^2 + \lambda^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0$$

Après avoir fait le changement $n' = n + 2$ dans la sommation $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2+\alpha}$ , il vient

$$x^{\alpha}\left(\left(\alpha^2-\lambda^2\right)a_0x^0+\left((1+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_1x^1+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left((n+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)x^n\right)=0$$

où encore après simplification par le terme non nul $x^{\alpha}$,

$$\left(\alpha^2-\lambda^2\right)a_0x^0+\left((1+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_1x^1+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left((n+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)x^n = 0 \text{ pour tout } x\in\left]0,R\right[$$

(valable en aussi en 0)

A ce stade, on ne peut utiliser directement l'unicité d'un développement en série entière puisque $[0,R[$ n'est pas un voisinage de zéro! Soit alors $y \in \left]-\sqrt{R},\sqrt{R}\right[$, on a alors $y^2\in[0,R[$, donc

$$\left(\alpha^2-\lambda^2\right)a_0y^0+\left((1+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_1y^2+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left((n+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)y^{2n}=0 \text{ pour tout } y\in\left]-\sqrt{R},\sqrt{R}\right[$$

Par unicité d'un DSE, et en tenant compte de $a_0\neq 0$, il vient $\left\{\begin{array}{c}\alpha^2=\lambda^2\\ \left((1+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_1=0\\ \forall\, n\geq 2,\ \left(\left((n+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)=0\end{array}\right.$ .

2. On suppose $\alpha=\lambda\geq 0$ et $a_0\neq 0$.

   (a) Puisque $\alpha=\lambda\geq 0$, alors la relation $\left((1+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_1=0$ donne $a_1=0$, puis la relation $\forall\, n\geq 2,\ \left(\left((n+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)=0$ assure que $\forall\, p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=0$.
   D'autres part $\forall\, p\geq 1,\ (2p+\alpha)^2-\alpha^2\neq 0$ car $\alpha\geq 0$, donc $a_{2p}=\dfrac{a_{2(p-1)}}{(2p+\alpha)^2-\alpha^2}=\dfrac{a_{2(p-1)}}{2^2p\,(p+\alpha)}$.
   Par récurrence sur $p\geq 1$, on aura $a_{2p}=\dfrac{a_0}{2^{2p}p!}\dfrac{1}{(p+\alpha)(p+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)}$. On conclut à l'aide de la question I-3-b.

   (b) On vu que pour tout $x>0$, $\Gamma(x)>0$, donc $a_{2p}\neq 0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
   Pour $z$ un complexe non nul, on note $u_p=\left|a_{2p}z^{2p}\right|$, alors
   $\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty}\dfrac{u_{p+1}}{u_p}=\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty}|z|^2\dfrac{\Gamma(\alpha+p+1)}{2^2(p+1)\Gamma(\alpha+p+2)}=\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty}|z|^2\dfrac{1}{2^2(p+1)(\alpha+p+1)}=0<1$. D'où la série $\sum\limits_{n\geq 0}a_nz^n=\sum\limits_{p\geq 0}a_{2p}z^{2p}$ converge pour tout complexe $z$. Ainsi le rayon cherché est $+\infty$.

   (c) On suppose $a_0 2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)=0$, puisque $\Gamma(\lambda+1)>0$ car $\lambda+1>0$, alors $a_0=\dfrac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)}$. De plus le rayon de $\sum a_nz^n$ est infini, alors pour tout $x>0$,
   $y_{\lambda}(x)=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)}\dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{2^{2p}p!\Gamma(\lambda+p+1)}x^{2p+\lambda}=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p+\lambda}$. CQFD
   On a aussi $y_{\lambda}(x)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\lambda}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p}$, et or $x\longmapsto\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p}$ est continue en 0, donc
   $$\boxed{y_{\lambda}(x)\sim_0\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}}$$

3. On suppose que $2\lambda\notin\mathbb{N}$, soit $p\geq 1$.

   (a) Le fait que $2\lambda\notin\mathbb{N}$, assure que $\forall\, p\geq 1,\ (-\lambda+n)^2-\lambda^2\neq 0$, donc comme dans le 2-$(a)$, on trouve que :

$\forall\ p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=0$ et $a_{2p}=\dfrac{a_0}{2^{2p}p!}\dfrac{1}{(p+\alpha)(p+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)}$, puis en prenant comme le 2-($b$) : $a_0 2^{-\lambda}\Gamma(-\lambda+1)=1$, puisque $-\lambda\notin\mathbb{Z}^{*-}$ (car sinon $2\lambda\in\mathbb{N}$), alors le fait de "noter" le produit non nul : $(-\lambda+p)(-\lambda+p+1)\ldots(-\lambda+1)$ par $\dfrac{\Gamma(-\lambda+p+1)}{\Gamma(-\lambda+1)}$, assure que $\Gamma(-\lambda+1)\neq 0$, donc $a_0=\dfrac{1}{2^{-\lambda}\Gamma(-\lambda+1)}$, on obtient que $x\longmapsto\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!\Gamma(-\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$ est aussi solution de $(F_\lambda)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

(b) Il est à noter d'abord que $\lambda\neq 0$ car $2\lambda\notin\mathbb{N}$, puis comme dans le 3($c$), on a $y_{-\lambda}(x)\sim_0\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\lambda}\dfrac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}$.
Ainsi $y_\lambda$ et $y_{-\lambda}$ ont des comportements non propotionnel au voisinage de zéro : l'une tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$, la famille $(y_\lambda,y_{-\lambda})$ est alors libre.
D'autres part $(F_\lambda)$ est une équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre deux et dont les coefficients sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^{*+}$ et aussi le coefficient de $y''$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc l'espace des solutions de $(F_\lambda)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ est $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, contenant la famille libre $(y_\lambda,y_{-\lambda})$, qui sera donc une base de cet espace. D'où la solution générale de $(F_\lambda)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ est : $x\longmapsto Ay_\lambda(x)+By_{-\lambda}(x)$ où $A$ et $B$ sont des constantes réelles.

## PARTIE III

### A - Etude de $(\mathbf{F_0})$

1. (a) Puisque $\alpha>-1$, alors $\forall\ k\geq 1,\ \alpha+2k\neq 0$ car sinon on aura $\alpha=-2k\leq -2$ qui est absurde. Par une récurrence simple sur $p\geq 1$, on obtient $a_{2p}(\alpha)=\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(\alpha+2k)^2}$

   (b) On a $a_{2p}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $a'_{2p}(\alpha)=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\left(\prod_{i\neq k}^{p}\frac{1}{(\alpha+2i)^2}\right)\frac{-2}{(\alpha+2k)^3}=a_{2p}(\alpha)\sum_{k=1}^{p}\frac{-2}{(\alpha+2k)}$,
   donc $\boxed{b_p=a'_{2p}(0)=-a_{2p}(0)H_p=-\dfrac{1}{(2^p p!)^2}H_p}$

   (c) A l'aide d'une comparaison entre série et intégrale classique, on a $H_p\sim_{+\infty}\ln(p)$, puisque $b_p$ ne s'annule jamais, en appliquant la règle de D'Alembert pour $z$ non nul fixé, on a :
   $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left|\frac{b_{p+1}z^{2(p+1)}}{b_p z^{2p}}\right|=0<1$, donc la série $\sum b_p z^{2p}$ converge pour tout complexe $z$, son rayon est alors infini.

2. (a) Il suffit de dériver la relation (1) par rapport à la variable $\alpha$ et de prendre ensuite $\alpha=0$.

   (b) On a $y_0$ et $x\longmapsto\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}b_p x^{2p}$ sont sommation de séries entières de rayon infini, elles sont alors de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et elles se dérivent infiniment terme à terme, donc pour $x>0$, on a
   $$x^2z_0''(x)+xz_0'(x)-x^2z_0(x)=x^2\left(y_0''(x)\ln(x)+2\frac{y_0'(x)}{x}-\frac{y_0(x)}{x^2}+\sum_{p=1}^{+\infty}2p(2p-1)b_px^{2p-2}\right)+$$
   $$+x\left(y_0'(x)\ln(x)+\frac{y_0'(x)}{x}+\sum_{p=1}^{+\infty}2pb_px^{2p-1}\right)-x^2\left(y_0(x)\ln(x)+\sum_{p=1}^{+\infty}b_px^{2p}\right)=$$
   $$\ln x\left[x^2y_0''(x)+xy_0'(x)-x^2y_0(x)\right]+2xy_0'(x)+\sum_{p=1}^{+\infty}4p^2b_px^{2p}-\sum_{p=1}^{+\infty}b_px^{2p+1}.$$
   Or $y_0$ est solution de $(F_0)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc $x^2y_0''(x)+xy_0'(x)-x^2y_0(x)=0$, par suite :
   $$x^2z_0''(x)+xz_0'(x)-x^2z_0(x)=2xy_0'(x)+\sum_{p=1}^{+\infty}4p^2b_px^{2p}-\sum_{p=1}^{+\infty}b_px^{2(p+1)}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{4p}{(2^{2p}p!)^2}x^{2p}+\sum_{p=1}^{+\infty}4p^2b_px^{2p}-$$
   $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}b_{p-1}x^{2p}$, puisque $b_0=0$, on peut alors commencer la dernière sommation à partir de $p=1$, il vient alors tenant compte du fait que $a_{2p}(0)=\dfrac{1}{(2^{2p}p!)^2}$ que :

$x^2 z_0'' (x) + x z_0' (x) - x^2 z_0 (x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(4pa_{2p} (0) + 4p^2 b_p - b_{p-1}\right) x^{2p} = 0$ selon le $2(a)$. $z_0$ est alors solution de $(F_0)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

3. On a $y_0$ est continue en 0, par contre $\lim_{x \to 0^+} z_0 (x) = -\infty$, donc la famille $(y_0, z_0)$ est libre, comme à la question II-3-$(b)$, c'est une base de solution. La solution générale de $(F_0)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ est alors $x \longmapsto A y_0 (x) + B z_0 (x)$ où $A$ et $B$ sont des constantes réelles.

**B - Etude de $(\mathbf{F_1})$**

1. Il s'agit de faire un "copier-coller" de la partie A
   (a) Puisque $\alpha \in ]0, 2[$, alors $\forall\ k \geq 1,\ \alpha + 2k \in ]2k, 2(k+1)[ \subset ]2, +\infty[$, donc $(\alpha + 2k)^2 - 1 \neq 0$. Par une récurrence simple sur $p \geq 1$, on obtient $c_{2p} (\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1}$.
   (b) On a $\alpha \longmapsto c_{2p} (\alpha)$ est dérivable sur $]0, 2[$ et on a :
   $c_{2p}' (\alpha) = \sum_{k=1}^{p} \left( \prod_{i \neq k} \frac{1}{(\alpha + 2i)^2 - 1} \right) \frac{-2(\alpha + 2k)}{\left((\alpha + 2k)^2 - 1\right)^2} = \sum_{k=1}^{p} -2 c_{2p} (\alpha) \frac{(\alpha + 2k)}{(\alpha + 2k)^2 - 1}$, donc
   $c_{2p}' (1) = -2 c_{2p} (1) \sum_{k=1}^{p} \frac{(1 + 2k)}{4k(k+1)} = -2 c_{2p} (1) \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) = -2 c_{2p} (1) (H_p + H_{p+1} - 1)$
   Or $c_{2p} (1) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{2^2 k (k+1)} = \frac{1}{2^{2p} p! (p+1)!}$. D'où le résultat.
   (c) Comme au A-1-$(c)$, le rayon de convergence demandé est $+\infty$.

2. (a) Il suffit de dériver la relation (2) par rapport à la variable $\alpha$, puis de prendre $\alpha = 1$.
   (b) On a $y_1$ et $x \longmapsto \sum_{p=1}^{+\infty} d_p x^{2p+1}$ sont sommation de séries entières de rayon infini, elles sont alors de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et elles se dérivent infiniment terme à terme, donc pour $x > 0$, on a
   $x^2 u_1'' (x) + x u_1' (x) - (1+x)^2 u_1 (x) = x^2 \left( 2 y_1'' (x) \ln (x) + 4 \frac{y_1' (x)}{x} - 2 \frac{y_1 (x)}{x^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} 2p(2p+1) d_p x^{2p-1} \right) +$
   $+x \left( 2 y_1' (x) \ln (x) + 2 \frac{y_1 (x)}{x} + \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+1) d_p x^{2p} \right) - \left(1 + x^2\right) \left( 2 y_1 (x) \ln (x) + \sum_{p=0}^{+\infty} d_p x^{2p+1} \right) =$
   $2 \ln x \left[ x^2 y_1'' (x) + x y_1' (x) - \left(1 + x^2\right) y_1 (x) \right] +$
   $+4 x y_1' (x) + \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+1)^2 d_p x^{2p+1} - \left(1 + x^2\right) \sum_{p=0}^{+\infty} d_p x^{2p+1}$.
   Or $y_1$ est solution de $(F_1)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc $x^2 y_1'' (x) + x y_1' (x) - \left(1 + x^2\right) y_1 (x) = 0$, par suite :
   $x^2 u_1'' (x) + x u_1' (x) - \left(1 + x^2\right) u_1 (x) = 4 x y_1' (x) + \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+1)^2 d_p x^{2p+1} - \sum_{p=0}^{+\infty} d_p x^{2p+1} - \sum_{p=0}^{+\infty} d_p x^{2(p+1)+1} =$
   $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(2p+1)}{p! (p+1)! 2^{2p+1}} x^{2p+1} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left( (2p+1)^2 - 1 \right) d_p x^{2p+1} - \sum_{p=1}^{+\infty} d_{p-1} x^{2p+1}$, puisque $d_0 = 0$, on peut alors commencer la sommation du milieu à partir de $p = 1$, il vient alors tenant compte du fait que $c_{2p} (1) = \frac{1}{2^{2p} p! (p+1)!}$ que :
   $x^2 u_1 (x) + x u_1 (x) - \left(1 + x^2\right) u_1 (x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left[ \left( (1 + 2p)^2 - 1 \right) d_p + 2(1 + 2p) c_{2p} (1) - d_{p-1} \right] x^{2p+1} + 2x =$
   $0 + 2x = 2x$, selon le $2(a)$. $u_1$ est alors solution de $(E_1)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

3. (a) On a $v_1 (x) = \frac{e_0}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} e_n x^{n-1}$, On suppose que le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 1} e_n x^{n-1}$ est $R > 0$ puis on se place dans $]0, R[$.

Alors $x^2 v_1''(x) + x v_1'(x) - \left(1+x^2\right) v_1(x) - 2x =$

$x^2 \left( \dfrac{2e_0}{x^3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) e_n x^{n-3} \right) + x \left( \dfrac{-e_0}{x^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) e_n x^{n-2} \right) -$

$\left(1+x^2\right) \left( \dfrac{e_0}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e_n x^{n-1} \right) - 2x =$

$\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \left(n(n-2) e_n - e_{n-2}\right) x^{n-1} - (e_0+2) x - e_1 = 0$, ici encore ? par "unicité d'un développement en série entière", on obtient :

$$\begin{cases} e_0 = -2 \\ e_1 = 0 \\ \forall\ n \geq 3,\ n(n-2) e_n - e_{n-2} = 0 \end{cases}.$$

Puis à l'aide d'une récurrence que $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $e_{2p+1} = 0$ et $e_{2p} = \dfrac{e_0}{2^{2p} p!\,(p+1)!} = -2c_{2p}(1)$, où $e_0 = -2 \neq 0$.

Ainsi $R = +\infty$ et $v_1$ est bien une solution de $(E_1)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

(b) On a $(F_1)$ est l'équation différentielle homogène associée $(E_1)$, puisque $z_1$ étant la différence de deux solutions de $(E_1)$, elle alors solution sur $\mathbb{R}^{*+}$ de $(F_1)$.

(c) Ici encore le comportement en $0^+$ des solutions $y_1$ et $z_1$ permet d'affirmer qu'elles ne sont pas proportionnelles. La famille $(y_1, z_1)$ est alors une base de solution de $(F_1)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

La solution générale de $(F_1)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ est alors $x \longmapsto Ay_1(x) + Bz_1(x)$ où $A$ et $B$ sont des constantes réelles.

$* * * * * *$ $\mathcal{FIN}$ $* * * * * *$