CONCOURS NATIONAL COMMUN - SESSION 2000 - MP

ROYAUME DU MAROC

N.B : L'énoncé comportait un certain nombre de fautes de frappe (par exemple, des inégalités strictes au lieu d'inégalité larges...)

PARTIE 1 :

A : Quelques propriétés de Φ_u

1) $\mathcal{T}$ est le noyau de la forme linéaire non nulle "Tr", c'est donc un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ (cf cours).

2)
- Φ est linéaire par rapport à la première variable : $\forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, $\forall(u_1,u_2,v) \in \mathcal{L}(E)^3$, on a : $\Phi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)v - v(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1(u_1 v - v u_1) + \lambda_2(u_2 v - v u_2) = \lambda_1 \Phi(u_1, v) + \lambda_2 \Phi(u_2, v)$.
- De plus, $\forall(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\Phi(v,u) = -\Phi(u,v)$, donc Φ est antisymétrique.
- Φ est donc aussi linéaire par rapport à la seconde variable ;
  c'est donc bien une application bilinéaire antisymétrique.

3) **a)** $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k \in \text{Ker}(\Phi_u)$ de façon évidente (u^k commute avec u !) , et, $\text{Ker}(\Phi_u)$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, $\text{Vect}(\{Id, u, ..., u^{n-1}\}) \subset \text{Ker}(\Phi_u)$. Puisque u n'est pas une homothétie, $\{Id, u\}$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$, donc $\dim(\text{Ker}(\Phi_u) \geqslant 2$.

b) Si $v \in \text{Ker}(\Phi_u)$, alors v commute avec u, donc laisse stable les sous-espaces propres de u (résultat du cours).

4)
- Si $w \in \text{Im}(\Phi)$, il existe $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $w = uv - vu$. On a alors :
  $\text{Tr}(w) = \text{Tr}(uv) - \text{Tr}(vu) = 0$, donc $w \in \mathcal{T}$ et $\text{Im}(\Phi) \subset \mathcal{T}$.
- $\text{Im}(\Phi_u) \subset \mathcal{T}$ pour la même raison.
- On ne peut donc pas avoir $[u,v] = Id$, puisque $\text{Tr}(Id) \neq 0$.
- On ne peut pas avoir $\text{Im}(\Phi_u) = \mathcal{T}$, car sinon, $\mathcal{T}$ étant un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$, on aurait $\dim(\text{Ker}(\Phi_u)) = 1$. Or cela est impossible d'après 3.a, lorsque u n'est pas une homothétie, et, lorsque u est une homothétie, $\text{Ker}(\Phi_u) = \mathcal{L}(E)$, donc c'est impossible aussi dans ce cas.

5) **a)**
- Si u est une homothétie, alors il est clair que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
- Réciproquement, supposons que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Soit alors $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
  Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(e_i, u(e_i))$ est liée, donc il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.
  On a alors, pour $i \neq j$: $u(e_i + e_j) = u(e_i) + u(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$. $u(e_i + e_j)$ étant colinéaire à $e_i + e_j$ (et la famille (e_i, e_j) étant libre), on en déduit $\lambda_i = \lambda_j$.
  Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda e_i$ pour tout i, et, par suite, $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$, et u est une homothétie.

b)
- Si u est une homothétie, tout endomorphisme v de E commute avec u, donc appartient à $\text{Ker}(\Phi_u)$, d'où $\text{Ker}(\Phi_u) = \mathcal{L}(E)$.
- Si $\text{Ker}(\Phi_u) = \mathcal{L}(E)$, alors, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $uv = vu$. En particulier, si $x \neq 0$, si H est un hyperplan de E supplémentaire de $\mathbb{K}x$, et si v est la symétrie par rapport à $\mathbb{K}x$ parallèlement à H, on a : $uv(x) = u[v(x)] = u(x)$, d'où $v[u(x)] = u(x)$,
  donc $u(x)$ est invariant par v et, par suite, est colinéaire à x.
  Ainsi, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée (le cas $x = 0$ étant évident), donc u est une homothétie d'après la question précédente.

6) **a)** – Pour $k=0,1$, la formule proposée est évidente.

– Supposons la démontrée à l'ordre $k \geqslant 1$. Alors $(\Phi_u)^{k+1}(v) = \sum_{p=0}^{k}(-1)^p \mathrm{C}_k^p \Phi_u\big(u^{k-p}vu^p\big)$

$= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p \mathrm{C}_k^p \big(u^{k+1-p}vu^p - u^{k-p}vu^{p+1}\big) = \sum_{p=0}^{k}(-1)^p \mathrm{C}_k^p \big(u^{k+1-p}vu^p\big) - \sum_{p=0}^{k}(-1)^p \mathrm{C}_k^p \big(u^{k-p}vu^{p+1}\big)$

$= \sum_{p=0}^{k+1}(-1)^p \mathrm{C}_k^p \big(u^{k+1-p}vu^p\big) - \sum_{p=0}^{k+1}(-1)^{p-1} \mathrm{C}_k^{p-1} u^{k-p+1}vu^p\big)$

(en ayant posé $\mathrm{C}_k^{-1} = \mathrm{C}_k^{k+1} = 0$)

$= \sum_{p=0}^{k+1}(-1)^p \Big(\mathrm{C}_k^p + \mathrm{C}_k^{p-1}\Big)\big(u^{k+1-p}vu^p\big) = \sum_{p=0}^{k+1}(-1)^p \mathrm{C}_{k+1}^p \big(u^{k+1-p}vu^p\big)$

(d'après la formule du triangle de Pascal)

ce qui est le résultat voulu à l'ordre $k+1$.

b) Supposons u nilpotent. E étant de dimension n, on a $u^n = 0$ d'où, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$:

$(\Phi_u)^{2n}(v) = \sum_{p=0}^{2n}(-1)^p \mathrm{C}_{2n}^p u^{2n-p}vu^p$

$= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \mathrm{C}_{2n}^p u^{2n-p}vu^p + \sum_{p=n+1}^{2n}(-1)^p \mathrm{C}_{2n}^p u^{2n-p}vu^p$

$= u^n \Big[\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \mathrm{C}_{2n}^p u^{n-p}vu^p\Big] + u^n \Big[\sum_{p=n+1}^{2n}(-1)^p \mathrm{C}_{2n}^p u^{2n-p}vu^{p-n}\Big]$

$= 0$

Ainsi, $(\Phi_u)^{2n} = 0$, et Φ_u est nilpotent.

B : Détermination de l'image de Φ

1) Si u est une homothétie de rapport λ, alors $\mathrm{Tr}(u) = n\lambda$, donc, si u est une homothétie de trace nulle, c'est l'endomorphisme nul, ce qui est exclu ici.

2) D'après A.5, puisque u n'est pas une homothétie, il existe e_1 tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.

3) En posant alors $e_2 = u(e_1)$, (e_1, e_2) est libre donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $(e_3, \ldots, e_n)$ tels que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ soit une base de E. Dans cette base, la matrice de u est donc de la forme $\begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{bmatrix}$, avec $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (et X, Y, A_1 comme dans l'énoncé).

4) **a)** $U - \alpha I_{n-1}$ inversible $\Leftrightarrow$ α non racine du polynôme caractéristique de U.
$\mathbb{K}$ étant infini, on peut donc trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ qui convient.

b) Le calcul du produit par blocs donne : $U'V' - V'U' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^tR -^t RU \\ US - \alpha S & UV - VU \end{bmatrix}$.
Puisque $A_1 = UV - VU$, on a donc bien l'équivalence :

$$A = U'V' - V'U' \;\Leftrightarrow\; {}^tX = -{}^tR(U - \alpha I_{n-1}) \text{ et } Y = (U - \alpha I_{n-1})S$$

5) – On a déjà vu que $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathcal{T}$.

– Montrons l'inclusion inverse par récurrence sur n.
  – *Pour n=2 :* Soit E de dimension 2, et a un endomorphisme de E de trace nulle ($a \in \mathcal{T}$). D'après la question précédente, il existe une base de $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice A de u est égale à : $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & a \end{pmatrix}$. u étant de trace nulle, on a $a = 0$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut alors écrire : $A = UV - VU$ avec, par exemple : $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  Si on note u et v les endomorphismes de E dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont U et V, on aura bien $a = \Phi(u, v)$ donc $a \in \text{Im}(\Phi)$.
  Ainsi, on a bien : $\mathcal{T} \subset \text{Im}(\Phi)$ dans le cas $n = 2$.

  – Supposons le résultat acquis pour tout espace vectoriel de dimension $n-1$. Cela signifie que, si A_1 est une matrice de trace nulle d'ordre $n-1$, il existe des matrices carrées d'ordre $n-1$, U_1 et V_1, telles que $A_1 = U_1V_1 - V_1U_1$.
  Soit donc E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et a un endomorphisme de E de trace nulle. D'après ce qui précède, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle a a une matrice A de la forme : $\begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{bmatrix}$, avec les mêmes notations qu'auparavant.
  Mais $\text{Tr}(A) = 0 + \text{Tr}(A_1)$, donc on a $\text{Tr}(A_1) = 0$. A_1 étant une matrice carrée d'ordre $n-1$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe des matrices carrées d'ordre $n-1$, U_1 et V_1, telles que $A_1 = U_1V_1 - V_1U_1$. Soit alors α tel que $U_1 - \alpha I_{n-1}$ soit inversible, et posons $R =^t (U_1 - \alpha I_{n-1})^{-1}X$ et $S = (U_1 - \alpha I_{n-1})^{-1}Y$.
  Alors, d'après les calculs précédents, en posant $U = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V_1 \end{bmatrix}$, on aura bien : $A = UV - VU$.
  Si on note u et v les endomorphismes de E dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont U et V, on aura bien $a = \Phi(u, v)$ donc $a \in \text{Im}(\Phi)$.
  Ainsi, on a bien établi : $\mathcal{T} \subset \text{Im}(\Phi)$ à l'ordre n. CQFD

C : Détermination de la trace de Φ_u

1) u_{ij} est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est E_{ij}, avec $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Il est bien connu que les matrices $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (base canonique), donc, par isomorphisme, les $(u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ forment une base de $\mathcal{L}(E)$.

2) – Pour tout $m \in [\![1, n]\!]$, on a : $u_{ij}u_{kl}(e_m) = u_{ij}\big(\delta_{lm}e_k\big) = \delta_{lm}\delta_{jk}e_i = \delta_{jk}u_{il}(e_m)$.
Cela étant valable pour tout $m \in [\![1, n]\!]$, on a : $u_{ij}u_{kl} = \delta_{jk}u_{il}$.

– On a $A = \sum\limits_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}E_{kl}$ d'où $u = \sum\limits_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}u_{kl}$, d'où :

$$\Phi_u(u_{ij}) = uu_{ij} - u_{ij}u = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}u_{kl}u_{ij} - \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}u_{ij}u_{kl}$$
$$= \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}\delta_{li}u_{kj} - \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}\delta_{jk}u_{il}$$
$$= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_{ki}u_{kj} - \sum_{1\leqslant l\leqslant n} a_{jl}u_{il}$$

3) La coordonnée de $\Phi_u(u_{ij})$ sur u_{ij} est donc égale à $a_{ii} - a_{jj}$.

Donc : $\text{Tr}(\Phi_u) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{ii} - a_{jj}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ii} - a_{jj}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(na_{ii} - \text{Tr}(u)) = n\text{Tr}(u) - n\text{Tr}(u)$

soit : $\text{Tr}(\Phi_u) = 0$.

PARTIE 2 :

A : Cas où u est diagonalisable

1) **a)** Il suffit de reprendre le résultat de I.C.2, puisque l'on a ici, avec les mêmes notations, $a_{ki} = \delta_{ki}\mu_i$, pour obtenir $\underline{\Phi_u(u_{ij}) = (\mu_i - \mu_j)u_{ij}}$.

b) Ainsi, les $(u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ forment une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de vecteurs propres de Φ_u ; donc $\underline{\Phi_u \text{ est diagonalisable}}$ et $\mathrm{Sp}(\Phi_u) = \{\mu_i - \mu_j\ ,\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$.

2) Notons $F = \{v \in \mathcal{L}(E)\ /\ \forall i \in [\![1,p]\!]\ v\big(E_u(\lambda_i)\big) \subset E_u(\lambda_i)\}$.

- Si $v \in F$, alors, pour tout $x_i \in E_u(\lambda_i)$, $v(x_i) \in E_u(\lambda_i)$ d'où $uv(x_i) = \lambda_i v(x_i)$ et aussi $vu(x_i) = v(\lambda_i x_i) = \lambda_i v(x_i)$, d'où $uv = vu$ sur les $E_u(\lambda_i)$. Ces sous-espaces étant supplémentaires par hypothèse, on en déduit $uv = vu$, i.e $v \in \mathrm{Ker}(\Phi_u)$.
- Réciproquement, si $v \in \mathrm{Ker}(\Phi_u)$, u et v commutent, donc v laisse stable les sous-espaces propres de u (résultat du cours), donc $v \in F$. On a donc bien, finalement : $\underline{F = \mathrm{Ker}(\Phi_u)}$.

3) Si $v \in \mathrm{Ker}(\Phi_u)$, v laisse stable les $E_u(\lambda_i)$ pour $i \in [\![1,p]\!]$. On peut donc considérer les endomorphismes v_i induits par v sur $E_u(\lambda_i)$, et définir l'application : $\Psi : \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{Ker}(\Phi_u) & \rightarrow & \mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p)) \\ v & \mapsto & (v_1, \ldots, v_p) \end{array}\right.$

Alors :
- Ψ est linéaire (facile).
- Ψ est bijective, car, si $(v_1, \ldots, v_p) \in \mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$, il existe un et un seul endomorphisme v dont la restriction à chaque $E_u(\lambda_i)$ soit égale à v_i (cf. cours sur la détermination d'une application linéaire, les $E_u(\lambda_i)$ étant supplémentaires), et on a alors $v \in \mathrm{Ker}(\Phi_u)$ d'après la question précédente.

  Ainsi, Ψ est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(\Phi_u)$ sur $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_1 p))$.
- Donc $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi_u)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(m_i)^2$ (car chaque $(E_u(\lambda_i)$ est de dimension m_i, u étant diagonalisable, donc $\dim\mathcal{L}(E_u(\lambda_i)) = (m_i)^2$), et, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathcal{L}(E)) - \dim(\mathrm{Ker}(\Phi_u)) = n^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(m_i)^2$.

4) – Si u possède n valeurs propres distinctes, on a alors $p = n$ et $m_i = 1$ pour tout i, donc $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi_u)) = n$.
- Le polynôme minimal Π_u de u ayant pour racines les valeurs propres de u (cf. cours) et étant de degré inférieur ou égal à n (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), on a : $\Pi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.

  En particulier, $\Pi_u = \chi_u$ et Π_u est de degré n.
- Le système $(Id, u, \ldots, u^{n-1})$ est donc libre (car sinon il existerait un polynôme annulateur de u de degré inférieur ou égal à $n-1$ ce qui contredit le résultat précédent).
  Donc $\mathrm{Vect}(Id, u, \ldots, u^{n-1})$ est de dimension n.
  Puisque $u^k \in \mathrm{Ker}(\Phi_u)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (u^k commute avec u !), $\mathrm{Ker}(\Phi_u)$ contient $\mathrm{Vect}(Id, u, \ldots, u^{n-1})$, et, étant de dimension n, on a donc : $\underline{\mathrm{Ker}(\Phi_u) = \mathrm{Vect}(Id, u, \ldots, u^{n-1})}$.

B : Cas où $\dim(E) = 2$

1) Si u n'est pas une homothétie, il existe $e \in E$ tel que $(e, u(e))$ soit libre (d'après I.B.2), et ce sera donc une base de E puisque, ici, $\dim(E) = 2$.

Soit $v \in \text{Ker}(\Phi_u)$, i.e v commute avec u. $(e, u(e))$ étant une base de E, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $v(e) = \alpha e + \beta u(e)$.
On a alors : $vu(e) = uv(e) = \alpha u(e) + \beta u^2(e)$.
Ainsi, $v = \alpha Id + \beta u$, car cette égalité est vraie pour les vecteurs de la base $(e, u(e))$.
Donc $v \in \text{Vect}(Id, u)$, soit $\text{Ker}(\Phi_u) \subset \text{Vect}(Id, u)$. L'inclusion inverse étant évidente, on a bien : $\underline{\text{Ker}(\Phi_u) = \text{Vect}(Id, u)}$.

2) Φ_u est un endomorphisme de l'e.v $\mathcal{L}(E)$, de dimension 4. Son polynôme caractéristique est donc de degré 4. D'autre part, $\text{Ker}(\Phi_u)$ étant de dimension 2 (cf. question précédente), 0 est valeur propre de Φ_u d'ordre de multiplicité supérieure ou égale à 2. Donc ce polynôme caractéristique est de la forme $X^2(X^2 + \alpha X + \beta)$. On a alors $-\alpha = \text{Tr}(\Phi_u) = 0$, donc ce polynôme caractéristique est de la forme $X^2(X^2 + \beta)$.

3) Si $\beta = 0$, le polynôme caractéristique de Φ_u est égal à X^4. Donc Φ_u a pour seule valeur propre 0, d'ordre de multiplicité 4. Si Φ_u était diagonalisable, il serait donc nul, ce qui est exclu (car u n'est pas une homothétie, par hypothèse).
{on peut aussi dire que 0 est valeur propre d'ordre 4 alors que la dimension du sous-espace propre associé, c'est-à-dire $\text{Ker}(\Phi_u)$, est égale à 2 }.

4) Supposons $\beta \neq 0$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de β, le polynôme caractéristique de Φ_u est égal à : $X^2(X - \lambda)(X + \lambda)$. Le sous-espace propre de Φ_u associé à la valeur propre 0 (i.e $\text{Ker}(\Phi_u)$) étant de dimension supérieure ou égale à 2 d'après cf. I.A.3,il sera exactement de dimension 2 (car sa dimension est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de 0) et les sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\pm\lambda$ étant de dimension égale à 1, il en résulte que $\underline{\Phi_u \text{ est diagonalisable}}$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors, si $\beta > 0$, Φ_u est diagonalisable pour les mêmes raisons que ci-dessus.
- Enfin, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\beta < 0$, alors Φ_u n'est pas diagonalisable, ni même trigonalisable, son polynôme caractéristique n'étant pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

5) **a)** cf question précédente.

b)
- On a, par définition : $\Phi_u(v) = \lambda v$ soit $uv - vu = \lambda v$. Si v était inversible, on aurait alors : $u - vuv^{-1} = \lambda Id$. Or, $\text{Tr}(vuv^{-1}) = \text{Tr}(uv^{-1}v) = \text{Tr}(u)$, donc on aurait $\text{Tr}(\lambda Id) = 0$, ce qui est exclu car $\lambda \neq 0$.
- $uv - vu = \lambda v$ implique $\lambda\text{Tr(v)} = \text{Tr}(uv) - \text{Tr}(vu) = 0$, d'où : $\underline{\text{Tr}(v) = 0}$.
- v étant un endomorphisme d'un e.v de dimension 2, son polynôme caractéristique est égal à : $X^2 - \text{Tr}(v)X + \det(v)$. Or, d'après ce qui précède, $\det(v) = \text{Tr}(v) = 0$, donc le polynôme caractéristique de v est égal à X^2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, c'est un polynôme annullateur de v, donc $\underline{v^2 = 0}$.

c)
- Ker$v$ est de dimension 1 (car v n'est pas injective et est non nul). On peut donc trouver un vecteur e tel que $e \notin \text{Ker}v$. Alors le système $(e, v(e))$ est libre (ce sera donc une base de E) car : si α est tel que $v(e) = \alpha e$, alors $0 = v^2(e) = \alpha v(e) = \alpha^2 e$, d'où $\alpha = 0$ et $v(e) = 0$, ce qui est contradictoire.
- Dans une telle base,la matrice V de v est : $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de u dans cette même base, on a : $UV - VU = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$, et l'égalité $UV - VU = \lambda V$ implique $b = 0$ et $d - a = \lambda$. Ainsi, $U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a+\lambda \end{pmatrix}$. Donc U est triangulaire inférieure ; ses valeurs propres sont a et $a + \lambda$, et $\text{Tr}(u) = 2a + \lambda$; les valeurs propres de u sont donc bien $\dfrac{\text{Tr}(u) - \lambda}{2}$ et $\dfrac{\text{Tr}(u) + \lambda}{2}$.

– u ayant alors 2 valeurs propres distinctes, $\underline{u \text{ est diagonalisable}}$.

d) – Ker$v$ et Ker$w$ sont de dimension 1. Pour montrer que $E = \text{Ker}v \oplus \text{Ker}w$, il suffit donc de montrer que $\text{Ker}v \cap \text{Ker}w = \{0\}$. Par l'absurde, si on avait $\text{Ker}v \cap \text{Ker}w \neq \{0\}$, on aurait $\text{Ker}v = \text{Ker}w$ (ce sont deux droites), d'où $w(v(e)) = 0$ et la matrice de w dans la base $(e, v(e))$ serait de la forme : $W = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. L'égalité $UW - WU = -\lambda w$ donne alors $UW - WU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c\alpha + \beta\lambda & \end{pmatrix} = -\lambda W$, d'où $\alpha = 0$ et on aurait $W = \beta V$, soit $w = \beta v$, ce qui est exclu car v et w sont des vecteurs propres de Φ_u associés à des valeurs propres distinctes, donc le système (v, w) est libre.

– Soit x un vecteur non nul de Ker$v$. L'égalité $uv - vu = \lambda v$ implique $v[u(x)] = 0$, donc $u(x) \in \text{Ker}v$. Ker$v$ étant une droite vectorielle, il existe α tel que $u(x) = \alpha x$. Ainsi, Ker$v$ est une droite formée de vecteurs propres de u, et il en est de même de Ker$w$.
Ces deux sous-espaces étant supplémentaires, on peut en déduire que $\underline{u \text{ est diagonalisable}}$ (mais on le savait déjà, cf. question précédente !).

C : Cas où Φ_u est diagonalisable

1) On a : $uv_i - v_iu = \beta_i v_i$, d'où $u[v_i(x)] = v_i[u(x)] + \beta_i v_i(x) = v_i(\lambda x) + \beta_i v_i(x)$ d'où :
$u[v_i(x)] = (\lambda + \beta_i)v_i(x)$.

2) – La linéarité de Ψ est immédiate.

– Soit $y \in E$. Puisque $x \neq 0$, il existe une base de E de la forme $(x, e_2, \dots, e_n)$. On sait alors qu'il existe un et un seul endomorphisme v de E tel que $v(x) = y$ et $v(e_i) = 0$ pour $i \geqslant 2$. On a alors $\Psi(v) = y$, donc $\underline{\Psi \text{ est surjective}}$.

3) $(v_1, v_2, \dots, v_{n^2})$ formant une base de $\mathcal{L}(E)$, son image $(v_1(x), v_2(x), \dots, v_{n^2}(x))$ par Ψ, linéaire surjective, est un système générateur de E. On peut donc en extraire une base de E, par exemple $(v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))$ (pour simplifier les notations). Puisque $v_i(x) \neq 0$, la question 1. montre que les $v_i(x)$, pour $i[\![1, n]\!]$, sont des vecteurs propres de u (de valeurs propres associées $\lambda + \beta_i$).
E possède donc une base de vecteurs propres de u, donc $\underline{u \text{ est diagonalisable}}$.

PARTIE 3 :

1) **a)** On a : $uv - vu = \lambda v$, d'où immédiatement l'égalité annoncée.

b) On a alors : $\det(v)\det(u - xId) = \det(u - (x + \lambda)Id)\det(v)$ d'où,
puisque $\det(v) \neq 0$, $P_u(x) = P_u(x + \lambda)$.

c) Mézalor, P_u serait un polynôme périodique de période $\lambda \neq 0$, donc serait constant (car, par exemple, $P_u(k\lambda) = P_u(0)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc $P_u - P_u(0)$ a une infinité de racines). Cela est impossible (car P_u de degré n), donc, par l'absurde, $\det(v) = 0$ et $\underline{v \text{ n'est pas inversible}}$.

2) – Procédons par récurrence sur k :

- La relation est évidemment vérifiée pour $k = 1$ (et aussi pour $k = 0$ ...).
- Si on a $\Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$, alors $\Phi_u(v^{k+1}) = uv^{k+1} - v^{k+1}u = uvv^k - v^{k+1}u$, et, puisque $uv = vu + \lambda v$: $\Phi_u(v^{k+1}) = (vu + \lambda v)v^k - v^{k+1}u = \lambda v^{k+1} + v(uv^k - v^ku) = \lambda v^{k+1} + v\Phi_u(v^k) = \lambda(k+1)v^{k+1}$ (en utilisant l'hypothèse de récurrence), ce qui est l'égalité cherchée à l'ordre $k+1$.

– Si $v^p \neq 0$, l'égalité $\Phi_u(v^p) = p\lambda v^p$ signifie que v^p est un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre $p\lambda$.

3) Il existe donc nécessairement $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^p = 0$ car, sinon, d'après ce qui précède, Φ_u aurait une infinité de valeurs propres, ce qui est impossible puisqu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$, de dimension finie. Ainsi : $\underline{v \text{ est nilpotent}}$.

4) **a)** $\mathrm{Im}v^p$ est évidemment stable par v (résultat du cours).

Soit $y \in \mathrm{Im}v^p$: il existe $x \in E$ tel que $y = v^p(x)$. Puisque $uv^p - v^p u = p\lambda v^p$, on a $u[v^p(x)] = v^p[u(x) + p\lambda x]$, donc $u[v^p(x)] \in \mathrm{Im}v^p$, et $\mathrm{Im}v^p$ est $\underline{\text{stable par } u}$

b) D'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}v^p) = \mathrm{rg}(v_1) + \dim(\mathrm{Ker}(v_1))$. Or l'image de $\mathrm{Im}v^p$ par v_1 est égale à $\mathrm{Im}v^{p+1}$, donc $\mathrm{rg}(v_1) = \dim(\mathrm{Im}v^{p+1})$.
D'autre part, $\mathrm{Ker}(v_1) = \mathrm{Ker}v \cap \mathrm{Im}v^p$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(v_1)) \leqslant 1$.
On a donc : $\mathrm{rg}(v^p) \leqslant 1 + \mathrm{rg}(v^{p+1})$. Or $\mathrm{rg}(v) = n-1$, d'où $\mathrm{rg}(v^2) \geqslant n-2$ etc... $\mathrm{rg}(v^{n-1}) \geqslant 1$. Or $v^n = 0$ (puisque v est nilpotent et E de dimension n), donc $\mathrm{Im}(v^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}v$. $\mathrm{Ker}v$ étant de dimension 1, on a en fait $\mathrm{Im}(v^{n-1}) = \mathrm{Ker}v$. Par suite, $\mathrm{Ker}v \subset \mathrm{Im}(v^p)$ pour tout p, d'où $\mathrm{Ker}(v_1) = \mathrm{Ker}v$ et $\mathrm{rg}(v^p) = 1 + \mathrm{rg}(v^{p+1})$.

c) cf. ci-dessus.

5) Puisque $v^{n-1} \neq 0$, il existe bien $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Pour montrer que la famille $(e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est une base de E, il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soient donc des scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v^i(e) = 0$. En appliquant v^{n-1} à cette égalité, puisque $v^p = 0$ pour $p \geqslant n$, il vient $\alpha_0 v^{n-1}(e) = 0$, d'où $\alpha_0 = 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v^i(e) = 0$. En appliquant alors v^{n-2} à cette égalité, on trouve de la même façon $\alpha_1 = 0$ etc...
On obtient ainsi $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, d'où le résultat.

La matrice de v dans la base précédente sera donc de la forme : $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6) **a)** Soit $W_0 = \mathrm{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \ldots, (n-1)\lambda)$. $W_0 V$ s'obtient en multipliant les lignes de V par $0, \lambda, 2\lambda, \ldots, (n-1)\lambda$ et VW_0 s'obtient en multipliant les colonnes de V par $0, \lambda, 2\lambda, \ldots, (n-1)\lambda$. On vérifie alors facilement que l'on a bien : $W_0 V - VW_0 = \lambda V$.

b) $w \in \mathcal{A}$ si et seulement si $wv - vw = \lambda v$. Or $w_0 v - v w_0 = \lambda v$, donc, en soustrayant les deux égalités, on obtient : $w \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (w - w_0)v - v(w - w_0) = 0$, soit $w \in \mathcal{A} \Leftrightarrow w - w_0 \in \mathrm{Ker}(\Phi_v)$.
Ainsi, $\mathcal{A}$ est le-sous espace affine de $\mathcal{L}(E)$ passant par w_0 et de direction $\mathrm{Ker}(\Phi_v)$.

c) On va montrer que : $\mathrm{Ker}(\Phi_v) = \mathrm{Vect}(Id, v, \ldots, v^{n-1})$.

– L'inclusion $\mathrm{Vect}(Id, v, \ldots, v^{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(\Phi_v)$ est évidente, puisque v commute avec tous les v^k.

– Soit $w \in \mathrm{Ker}(\Phi_v)$. $\mathcal{B}$ étant une base de E, il existe des scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que $w(e) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v^i(e)$. On a alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $w[v^k(e)] = v^k[w(e)] = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v^i([v^k(e)])$.
Les endomorphismes w et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v^i$ coïncident donc sur $\mathcal{B}$, donc sont égaux, ce qui prouve que $w \in \mathrm{Vect}(Id, v, \ldots, v^{n-1})$, d'où l'inclusion réciproque.

– Enfin, il est facile de prouver (comme à la question 5.) que $(Id, v, \ldots, v^{n-1})$ est un système libre ; c'est donc une base de $\mathcal{A}$.

7) D'après ce qui précède, si $w \in \mathcal{A}$, sa matrice W dans $\mathcal{B}$ est de la forme : $W = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \ldots & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}$.

et la matrice de u sera de la forme $W_0 + W$.

8) Par définition, $E_{\Phi_u}(\lambda) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ uv - vu = \lambda v\}$.
Pour trouver les éléments de $E_{\Phi_u}(\lambda)$, on peut se contenter de faire un simple calcul matriciel, mais il est plus rapide d'utiliser les résultats de II.A.
Notons donc $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, et $\mu_i = \alpha + (i-1)\lambda$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Les μ_i sont les éléments de la diagonale de la matrice de u dans $\mathcal{B}'$, ce sont donc les valeurs propres de u. Étant distinctes (car $\lambda \neq 0$), u est diagonalisable, donc, d'après II.A., $E_{\Phi_u}(\lambda)$ a pour base les u_{ij} tels que $\mu_i - \mu_j = \lambda$, soit $i - j = 1$. Ainsi, une base de $E_{\Phi_u}(\lambda)$ est formée de $u_{21}, u_{32}, \ldots, u_{n,n-1}$.
Donc $\dim(E_{\Phi_u}(\lambda) = n-1$, et les matrices dans la base $\mathcal{B}'$ des éléments de $E_{\Phi_u}(\lambda)$ sont de la forme :

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ v_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & v_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

FIN