

# Concours National Commun - Session 2002

## Corrigé de l'épreuve de mathématiques I Filière MP

Quelques propriétés des fonctions presque-périodiques

Corrigé par M.TARQI

### I. VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION

#### 1. Valeur moyenne d'une fonction périodique

(a) Nous avons  $\int_{-A}^A \cos t dt = [-\sin t]_{-A}^A = -2 \sin A$ , d'où  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^A \cos t dt = 0$  et donc  $\mu(C_1) = 0$ .

De même  $\mu(S_2) = 0$  et  $\mu(C_0) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^A dt = 1$ .

(b) En utilisant la relation de Chasles, on obtient, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'égalité

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^{n\omega} f(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\omega}^{(k+1)\omega} f(t) dt$$

et par le changement de variable  $t = u + k\omega$ , on obtient :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\omega} f(u + k\omega) du = \int_0^{\omega} f(u) du,$$

donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \int_0^{\omega} f(t) du$ .

(c) Soit  $A$  un réel strictement positif, notons  $n = E(\frac{A}{\omega})$ , donc  $n\omega \leq A < (n+1)\omega$ . ( $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ ). D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A f(t) dt &= \int_{-A}^{-n\omega} f(t) dt + \int_{-n\omega}^{n\omega} f(t) dt + \int_{n\omega}^A f(t) dt \\ &= \int_{-A}^{-n\omega} f(t) dt + 2n \int_0^{\omega} f(t) dt + \int_{n\omega}^A f(t) dt \end{aligned}$$

$f$  étant continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\omega$ -périodique, donc il est bornée sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|f(t)| \leq M$ , avec  $M = \sup_{t \in [0, \omega]} |f(t)|$ , donc :

$$\left| \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(t) dt - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(t) dt \right| = \left| \frac{1}{2A} \int_{-A}^{-n\omega} f(t) dt + \left( \frac{n}{A} - \frac{1}{\omega} \right) \int_0^{\omega} f(t) dt + \frac{1}{2A} \int_{n\omega}^A f(t) dt \right|.$$

Or

$$\left| \frac{1}{2A} \int_{-A}^{-n\omega} f(t) dt \right| \leq \frac{M(A - n\omega)}{2A} \leq \frac{M\omega}{2A},$$

et

$$\left| \frac{1}{2A} \int_{n\omega}^A f(t) dt \right| \leq \frac{M(A - n\omega)}{2A} \leq \frac{M\omega}{2A},$$

et comme  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{A} - \frac{1}{\omega} \right) = 0$ , car  $\left| \frac{n\omega - A}{A\omega} \right| \leq \frac{1}{A}$ , donc  $f$  admet une valeur moyenne et

$$\mu(f) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(t) dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(t) dt.$$

## 2. Transformations

- (a) Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) / \mu(f) \text{ existe}\}$ . Il est clair que la fonction nulle est un élément de  $E$ , et si  $f$  et  $g$  sont dans  $E$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{2A} \int_{-A}^A (f + \lambda g)(t) dt = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(t) dt + \frac{\lambda}{2A} \int_{-A}^A g(t) dt,$$

donc  $f + \lambda g$  admet une valeur moyenne, c'est-à-dire  $f + \lambda g \in E$  et  $\mu(f + \lambda g) = \mu(f) + \lambda \mu(g)$ . Donc  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  et l'application  $\mu$  est une forme linéaire sur  $E$ .

- (b) Soient  $a \in \mathbb{R}$  fixé et  $A > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2A} \int_{-A}^A \tau_a f(t) dt &= \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(t+a) dt = \frac{1}{2A} \int_{-a-A}^{-a+A} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2A} \int_{-a-A}^{-A} f(t) dt + \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(t) dt + \frac{1}{2A} \int_A^{-a+A} f(t) dt. \end{aligned}$$

Mais

$$\left| \frac{1}{2A} \int_{-a-A}^{-A} f(t) dt \right| \leq \frac{M|a|}{2A}$$

et

$$\left| \frac{1}{2A} \int_A^{-a+A} f(t) dt \right| \leq \frac{M|a|}{2A},$$

avec  $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ , donc  $\tau_a(f)$  admet une valeur moyenne et  $\mu(\tau_a(f)) = \mu(f)$ .

- (c) Soit  $A > 0$ , alors pour tout  $a \neq 0$ , on a :

$$\frac{1}{2A} \int_A^{aA} f(at) dt = \frac{1}{2aA} \int_{-aA}^{aA} f(t) dt = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B f(t) dt$$

Avec  $B = aA$ , donc si  $a > 0$   $\mathcal{N}_a(f)$  admet une valeur moyenne et  $\mu(\mathcal{N}_a(f)) = \mu(f)$ .

De même, si  $a < 0$

$$\frac{1}{2A} \int_A^{aA} f(at) dt = \frac{1}{2(-a)A} \int_{aA}^{-aA} f(t) dt = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B f(t) dt$$

Avec  $B = -aA$ , donc dans ce cas aussi  $\mathcal{N}_a(f)$  admet une valeur moyenne et  $\mu(\mathcal{N}_a(f)) = \mu(f)$ .

Si  $a = 0$ ,  $\mu(N_0(f)) = \mu(f) = f(0)$ .

- (d) Si  $f$  est une fonction impaire, alors pour tout  $A > 0$ ,  $\int_{-A}^A f(t) dt = 0$  et donc  $\mu(f) = 0$ .

- (e) Pour une fonction paire, on a, pour tout  $A > 0$ ,  $\int_{-A}^A f(t) dt = 2 \int_0^A f(t) dt$ , et par

conséquent  $\mu(f) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} \int_0^A f(t) dt$ .

## 3. Valeur moyenne d'une fonction convergente

- (a) Soit  $A > 0$ , comme  $g$  est paire, alors :

$$\int_{-A}^A g(t) dt = 2 \int_0^A \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^A = \ln(1+A),$$

donc  $\mu(g) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+A)}{A} = 0$ .

(b) Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ , alors il existe  $A_0 > 0$  tel que  $\forall A \geq A_0, |f(t)| \leq \varepsilon$ .

Soit maintenant  $A \geq A_0$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2A} \left| \int_{-A}^A f(t) dt \right| &\leq \frac{1}{2A} \int_{-A}^{-A_0} |f(t)| dt + \frac{1}{2A} \left| \int_{-A_0}^{A_0} f(t) dt \right| + \frac{1}{2A} \int_{A_0}^A |f(t)| dt \\ &\leq \frac{A - A_0}{A} \varepsilon + \frac{1}{2A} \left| \int_{-A_0}^{A_0} f(t) dt \right| \end{aligned}$$

Donc  $\mu(f)$  existe et vaut 0.

(c) La fonction  $g = f - l$  vérifie la condition de la question précédente, et donc  $\mu(g) = \mu(f) - l = 0$ , c'est-à-dire  $\mu(f) = l$ .

(d) On a  $f = \varphi + \phi$  avec  $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$  et  $\phi(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$ . La fonction  $\varphi$  est paire de limite  $\frac{l_- + l_+}{2}$  en  $+\infty$  et  $\phi$  est impaire, donc

$$\mu(f) = \mu(\varphi + \phi) = \frac{l_- + l_+}{2}.$$

#### 4. Valeur moyenne d'une fonction intégrable

Si  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , alors  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(t) dt$  existe et finie, et par conséquent  $\mu(f)$  existe et  $\mu(f) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(t) dt = 0$ .

#### 5. Valeur moyenne et fonctions bornées

(a) Notons  $f(t) = \sqrt{|t|} \cos t$ . La suite  $(2n\pi)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers  $+\infty$  et la suite  $(f(2n\pi))_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers  $+\infty$ , donc  $f$  ne peut pas être bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $A > 0$ ,

$$\frac{1}{A} \int_{-A}^A f(t) dt = 2 \int_0^A f(t) dt = \frac{1}{A} [\sqrt{t} \sin t]_0^A - \frac{1}{A} \int_0^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \frac{\sin A}{\sqrt{A}} - \frac{1}{A} \int_0^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$

On a  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\sin A}{\sqrt{A}} = 0$ , puisque  $\left| \frac{\sin A}{\sqrt{A}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$  et l'inégalité

$$\frac{1}{A} \left| \int_0^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \right| \leq \frac{1}{A} \int_0^A \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

montre que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} \int_0^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = 0$ . Donc  $f$  admet une valeur moyenne et  $\mu(f) = 0$ .

(b) Soit  $n$  un entier naturel non nul, alors on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{3^{2n}} \chi(t) dt &= \sum_{p=0}^{n-1} \int_{3^{2p}}^{3^{2p+1}} \chi(t) dt = \sum_{p=0}^{n-1} (3^{2p+1} - 3^{2p}) \\ &= 2 \sum_{p=0}^{n-1} 3^{2p} = \frac{1}{4} (3^{2n} - 1). \end{aligned}$$

et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{2n}} \int_0^{3^{2n}} \chi(t) dt = \frac{1}{4}$ .

De même

$$\begin{aligned} \int_0^{3^{2n+1}} \chi(t) dt &= \int_0^{3^{2n}} \chi(t) dt + \int_{3^{2n}}^{3^{2n+1}} \chi(t) dt \\ &= \frac{1}{4} (3^{2n} - 1) + (3^{2n+1} - 3^{2n}) \\ &= 3^{2n+1} - \frac{3}{4} 3^{2n}, \end{aligned}$$

et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{2n+1}} \int_0^{3^{2n+1}} \chi(t) dt = \frac{3}{4}$ . Donc  $\chi$  n'a pas de valeur moyenne.

## II. UN PRODUIT SCALAIRE

### 1. Exemples

(a) Nous avons  $C_\alpha C_\beta = \frac{1}{2}(C_{\alpha-\beta} + C_{\alpha+\beta})$ , d'où :

- Si  $\alpha \neq 0$  ou  $\beta \neq 0$ , alors  $(C_\alpha | C_\beta) = \mu(C_\alpha C_\beta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$
- Si  $\alpha = \beta = 0$ ,  $(C_\alpha | C_\beta) = 1$ .

(b)  $(S_\alpha | S_\beta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$  et  $(C_\alpha | S_\beta) = 0$

### 2. Sommes finies de fonctions périodiques

(a) Supposons qu'il existe  $T > 0$  tel que  $h(t) = h(t + T)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , alors en particulier  $2 = h(0) = h(T) = \cos T + \cos(\pi T)$ , donc nécessairement  $\cos T = \cos(\pi T) = 1$  et par suite il existe des entiers relatifs  $k$  et  $k'$  tel que  $T = 2k\pi$  et  $\pi T = 2k'\pi$ , ceci est absurde puisque  $\pi \notin \mathbb{Q}$ .

(b)  $h = C_1 + C_\pi$ , donc  $h \in \mathcal{F}$ .

Puisque  $\forall t \in \mathbb{R}, |2^{-n} \cos(3^n t)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , alors la fonction  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(3^n t)$

est bien définie sur  $\mathbb{R}$ . Les éléments de  $\mathcal{F}$  sont de classes  $\mathcal{C}^\infty$ , en particulier ils sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ . On va montrer que  $f$  n'est pas dérivable en  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui permet de conclure que  $f \notin \mathcal{F}$ . En effet, supposons que  $f$  est dérivable en  $\frac{\pi}{2}$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall t \in \left] \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha \right[, \quad l - \varepsilon \leq \frac{f(t)}{t - \frac{\pi}{2}} \leq l + \varepsilon,$$

donc

$$\forall t \in \left] \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha \right[, \quad l - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2^{-k} \frac{\cos(3^k t)}{t - \frac{\pi}{2}} \leq l + \varepsilon.$$

Donc il existe un entier naturel  $n_0$  tel que

$$\forall t \in \left] \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha \right[, \quad \forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^n 2^{-k} \frac{\cos(3^k t)}{t - \frac{\pi}{2}} \leq l + \varepsilon,$$

et comme  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3^k t)}{t - \frac{\pi}{2}} = -3^n \sin\left(3^n \frac{\pi}{2}\right) = -3^n$ , alors quand  $t$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , on obtient l'inégalité

$$\forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon \leq -\sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq l + \varepsilon,$$

inégalité qui montre que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{3}{2}\right)^n$  est convergente, ce qui est absurde. En conclusion, la fonction  $f \notin \mathcal{F}$

(c) Il est clair que l'application  $(f, g) \mapsto (f|g)$  est une forme bilinéaire symétrique et positive (propriétés de l'intégrale). Soit maintenant  $f = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i C_{\omega_i} + \sum_{j=1}^q \beta_j S_{\eta_j}$

un élément de  $\mathcal{F}$  tel que  $\mu(f^2) = 0$ , où les  $\alpha_i, \beta_i$  sont non nuls.

Mais

$$\mu(f^2) = \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \beta_j^2,$$

donc  $\alpha_i = \beta_j = 0$  pour tout  $i$  et  $j$ , donc  $f$  est la fonction nulle. D'où le résultat.

### 3. Continuité

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $A > 0$ ,

$$\frac{1}{2A} \int_{-A}^A f_n^2(t) dt \leq \|f_n\|_\infty^2,$$

donc

$$\mu(f_n^2) \leq \|f_n\|_\infty^2,$$

et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n | f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n^2) = 0$ .

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $|(f_n | g)| \leq \sqrt{(f_n | f_n)} \sqrt{(g | g)}$ , en déduit que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n | f_n) = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n | g) = 0$ .

### 4. Limites uniformes

- (a) Les suites  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées dans  $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_\infty)$ ; soit  $M > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|f_n\|_\infty \leq M$  et  $\|g_n\|_\infty \leq M$ .

D'autre part, les deux suites sont de Cauchy dans  $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_\infty)$ , donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n, m \geq n_0$ , on a :

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \text{ et } \|g_n - g_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

Nous avons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(f_n | g_n) - (f_m | g_m) = (f_n - f_m | g_n) + (f_m | g_n - g_m)$$

Donc pour tout  $n, m \geq n_0$ , on a

$$\begin{aligned} |(f_n | g_n) - (f_m | g_m)| &\leq \|f_n - f_m\|_\infty \|g_n\|_\infty + \|f_m\|_\infty \|g_n - g_m\|_\infty \\ &\leq 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc la suite  $(f_n | g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , donc elle est convergente et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n | g_n)$  existe.

- (b) THÉORÈME DE WEIRSTRASS : Soit  $f$  une fonction numérique et  $\omega$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ . Alors quel que soit le nombre  $\varepsilon > 0$  donné, il existe un polynôme trigonométrique

$$P_\varepsilon = a_0 + \sum_{k=0}^n \left( a_k \cos \frac{2\pi}{\omega} x + b_k \sin \frac{2\pi}{\omega} x \right) \text{ vérifiant } |f(x) - P_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

### 5. Une extension de $(\cdot | \cdot)$

- (a) D'après ce qui précède ( Théorème de Weirstrass et la question 4.(a) )  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n | g_n)$  existe. Maintenant soient  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'autres suites qui convergent uniformément vers  $f$  et  $g$  respectivement, alors les suites  $(f_n - h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n - k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent uniformément vers 0, et donc l'inégalité

$$\begin{aligned} |(f_n | g_n) - (h_n | k_n)| &= |(f_n - h_n | g_n) + (h_n | g_n - k_n)| \\ &\leq \|f_n - h_n\|_\infty \|g_n\|_\infty + \|g_n - k_n\|_\infty \|h_n\|_\infty \end{aligned}$$

montre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} [(f_n | g_n) - (h_n | k_n)] = 0$ , car  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n | g_n)$  ne dépend pas du choix des suites  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , autrement dit l'application  $(f, g) \mapsto (f | g)$  est bien définie dans l'ensemble des fonctions continues périodiques.

- (b) Il est clair que l'application  $(f, g) \mapsto (f|g)$  est symétrique et positive ou nulle. Soient  $f, g, h$  des suites continues périodiques sur  $\mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Considérons des suites d'éléments de  $\mathcal{F}$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui convergent uniformément vers  $f, g$  et  $h$  respectivement, alors  $(f + \lambda g)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f + \lambda g$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$(f_n + \lambda g_n | h_n) = (f_n | h_n) + \lambda (g_n | h_n),$$

d'où, par passage à la limite,  $(f + \lambda g | h) = (f | h) + \lambda (g | h)$ .

- (c) D'après la question I.1.(b), on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(f_n | f_n) = \mu(f_n^2) = \frac{1}{w} \int_0^w f_n^2$ .  
D'autre part, l'inégalité

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f_n^2(t) - f^2(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty (\|f_n\|_\infty + \|f\|_\infty)$$

montre que la suite  $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f^2$  sur  $\mathbb{R}$ , car  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , et donc

$$(f | f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{w} \int_0^w f_n^2(t) dt = \frac{1}{w} \int_0^w \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^2(t) dt = \frac{1}{w} \int_0^w f^2(t) dt.$$

- (d) Soit  $f$  une fonction continue et  $w$ -périodique tel que  $(f | f) = 0$ , alors d'après la question précédente  $\int_0^w f^2(t) dt = 0$  et donc  $f = 0$  sur  $[0, w]$  et comme elle est périodique,  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ .

## 6. Groupe des périodes d'une fonction

- (a) • Si  $\alpha > 0$ , il résulte de la caractérisation de la borne supérieure qu'il existe  $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\alpha \leq x \leq \alpha + \frac{\alpha}{2} < 2\alpha$ . Si  $\alpha < x$ , alors il existe  $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\alpha \leq b < x < 2\alpha$ .

Donc, si on pose  $y = x - b$ , alors  $y \in G$  et  $0 < y < 2\alpha - b < \alpha$ , et ceci contredit la définition de  $\alpha$  et par suite,  $\alpha = x \in G$ , et donc  $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ .

Soit  $x \in G$ ; posons  $n = E(\frac{x}{\alpha})$ , on a :  $n\alpha \leq x < (n+1)\alpha$  et donc  $0 \leq x - n\alpha < \alpha$ .

Puisque  $x - n\alpha \in G$  et  $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ , alors  $x - n\alpha = 0$ , c'est-à-dire  $x = n\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$ .

Ceci montre que  $G = \alpha\mathbb{Z}$ .

- Si  $\alpha = 0$ , montrons que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . En effet, soit  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) un intervalle de  $\mathbb{R}$ , montrons que  $]a, b[ \cap G \neq \emptyset$ . Puisque  $b - a > 0$ , alors il existe  $x \in G$  tel que  $0 < x < b - a$ .

Posons  $n = E(\frac{a}{x})$ , on a  $nx \leq a < (n+1)x$ , donc

$$0 < (n+1)x - a = (nx - a) + x < x < b - a$$

et par conséquent  $a < (n+1)x < b$ . Comme  $(n+1)x \in G$ , alors  $(n+1)x \in ]a, b[ \cap G$ . On en déduit que  $]a, b[ \cap G \neq \emptyset$ , c'est-à-dire  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

- (b) •  $0 \in G_f$  et si  $w$  et  $w'$  sont périodes de  $f$ , alors  $w - w'$  est une période de  $f$ . Donc  $G_f$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .  
• Soit  $w = \inf G_f \cap \mathbb{R}_+^*$   
– Si  $w > 0$ , alors  $w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$  où  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $G_f$ . Donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t + w) = f(t + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t) = f(t),$$

ainsi  $f$  est  $w$ -périodique.

- Si  $w = 0$ , alors  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , et donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $G_f$  telle que  $t = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ .

Donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} w_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(0) = f(0),$$

ainsi  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

### 7. Théorème de mélange

- (a) Soit  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  tel que  $\frac{w}{\eta} = r$ , donc  $qw = r\eta$  et par conséquent pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t) = f(t + qw)$  et  $g(t) = g(t + p\eta) = g(t + qw)$ . Donc  $\tau = qw = p\eta$  est une période commune de  $f$  et  $g$ .

Maintenant soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de fonctions  $\tau$ -périodiques, qui convergent uniformément vers  $f$  et  $g$  respectivement, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$(f_n|g_n) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_n(t)g_n(t)dt,$$

et par conséquent ( la suite  $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $fg$  sur  $\mathbb{R}$ .)

$$(f|g) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n|g_n) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)g(t)dt.$$

- (b) Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de  $\mathcal{F}$  qui convergent uniformément vers  $f$  et  $g$  respectivement.

Posons

$$f_n(x) = a_0(n) + \sum_{k=1}^{\varphi(n)} \left( a_k(n) \cos \frac{2\pi k}{\omega} x + b_k(n) \sin \frac{2\pi k}{\omega} x \right)$$

et

$$g_n(x) = c_0(n) + \sum_{k=1}^{\phi(n)} \left( c_k(n) \cos \frac{2\pi k}{\eta} x + d_k(n) \sin \frac{2\pi k}{\eta} x \right).$$

On a  $\mu(f_n) = a_0(n)$  et  $\mu(g_n) = c_0(n)$ . D'autre part :

$$\begin{aligned} f_n(x)g_n(x) &= a_0(n)c_0(n) + a_0(n) \sum_{k=1}^{\phi(n)} \left( c_k(n) \cos \frac{2\pi k}{\eta} x + d_k(n) \sin \frac{2\pi k}{\eta} x \right) \\ &+ c_0(n) \sum_{k=1}^{\varphi(n)} \left( a_k(n) \cos \frac{2\pi k}{\omega} x + b_k(n) \sin \frac{2\pi k}{\omega} x \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\phi(n)} \sum_{l=1}^{\varphi(n)} [a_k(n)c_l(n) \cos \frac{2\pi k}{\omega} x \cos \frac{2\pi l}{\eta} x + a_k(n)d_l(n) \cos \frac{2\pi k}{\omega} x \sin \frac{2\pi l}{\eta} x \\ &+ b_k(n)c_l(n) \sin \frac{2\pi k}{\omega} x \cos \frac{2\pi l}{\eta} x + b_k(n)d_l(n) \sin \frac{2\pi k}{\omega} x \sin \frac{2\pi l}{\eta} x] \end{aligned}$$

Puisque  $\frac{\omega}{\eta} \notin \mathbb{Q}$ , alors  $(f_n|g_n) = a_0(n)c_0(n) = \mu(f_n)\mu(g_n)$ , donc

$$(f|g) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n|g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n)\mu(g_n) = \mu(f)\mu(g).$$

### III. UNE ALGÈBRE DE FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES

1. (a) Soit  $f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(w_n t) + \beta_n \sin(w_n t))$  un élément de  $\mathcal{A}$ . Nous avons pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha_n \cos(w_n t) + \beta_n \sin(w_n t)| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$ , donc la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n \cos(x_n t) + \beta_n \sin(w_n t))$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . D'autre les fonctions  $t \mapsto \alpha_n \cos(x_n t) + \beta_n \sin(w_n t)$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  et par conséquent  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ .
- Soient  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos(w_n t) + \beta_n \sin(w_n t))$  et  $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n \cos(\eta_n t) + \delta_n \sin(\eta_n t))$  deux éléments de  $\mathcal{A}$  et  $\lambda$  un nombre réel. Alors

$$(f + \lambda g)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos(w_n t) + \lambda \gamma_n \cos(\eta_n t) + \beta_n \sin(w_n t) + \lambda \delta_n \sin(\eta_n t))$$

cette somme s'écrit sous la forme  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(\varphi_n t) + b_n \sin(\varphi_n t))$  avec

$$\begin{cases} a_{2n} = \alpha_n, \\ a_{2n+1} = \lambda \gamma_n. \end{cases}, \quad \begin{cases} b_{2n} = \beta_n, \\ b_{2n+1} = \lambda \delta_n. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_{2n} = w_n, \\ \varphi_{2n+1} = \eta_n. \end{cases}$$

On vérifie aussi que les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des familles sommables et quitte à regrouper les termes ayant la même fréquence, on peut supposer que les  $\varphi_n$  sont distincts deux à deux. Ainsi on a montré que  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ .

- (b) Soient  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos(w_n t) + \beta_n \sin(w_n t))$  et  $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n \cos(\eta_n t) + \delta_n \sin(\eta_n t))$  deux éléments de  $\mathcal{A}$ . Les deux séries définissant  $f$  et  $g$  sont absolument convergentes, donc leur produit (produit de Cauchy)  $f(t)g(t)$  existe et  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t)$$

où

$$W_n(t) = \sum_{k=0}^n (\alpha_k \cos(w_k t) + \beta_k \sin(w_k t)) (\gamma_{n-k} \cos(\eta_{n-k} t) + \delta_{n-k} \sin(\eta_{n-k} t))$$



Mais

$$\begin{aligned}
W_n &= \sum_{k=0}^n (\alpha_k C_{w_k} + \beta_k S_{w_k}) (\gamma_{n-k} C_{\eta_{n-k}} + \delta_{n-k} S_{\eta_{n-k}}) \\
&= \sum_{k=0}^n [\alpha_k \gamma_{n-k} C_{w_k} C_{\eta_{n-k}} + \alpha_k \delta_{n-k} C_{w_k} S_{\eta_{n-k}} \\
&\quad + \beta_k \gamma_{n-k} S_{w_k} C_{\eta_{n-k}} + \beta_k \delta_{n-k} S_{w_k} S_{\eta_{n-k}}] \\
&= \sum_{k=0}^n [\frac{\alpha_k \gamma_{n-k}}{2} C_{w_k + \eta_{n-k}} + \frac{\alpha_k \gamma_{n-k}}{2} C_{w_k - \eta_{n-k}} \\
&\quad + \frac{\alpha_k \delta_{n-k}}{2} S_{w_k + \eta_{n-k}} - \frac{\alpha_k \delta_{n-k}}{2} S_{w_k - \eta_{n-k}} \\
&\quad + \frac{\beta_k \gamma_{n-k}}{2} S_{w_k + \eta_{n-k}} + \frac{\beta_k \gamma_{n-k}}{2} S_{w_k - \eta_{n-k}} \\
&\quad + \frac{\beta_k \delta_{n-k}}{2} C_{w_k - \eta_{n-k}} - \frac{\beta_k \delta_{n-k}}{2} C_{w_k + \eta_{n-k}}] \\
&= \sum_{k=0}^n [(\frac{\alpha_k \gamma_{n-k}}{2} - \frac{\beta_k \delta_{n-k}}{2}) C_{w_k + \eta_{n-k}} + (\frac{\alpha_k \gamma_{n-k}}{2} + \frac{\beta_k \delta_{n-k}}{2}) C_{w_k - \eta_{n-k}} \\
&\quad + (\frac{\alpha_k \delta_{n-k}}{2} + \frac{\beta_k \gamma_{n-k}}{2}) S_{w_k + \eta_{n-k}} + (\frac{\beta_k \gamma_{n-k}}{2} - \frac{\alpha_k \delta_{n-k}}{2}) S_{w_k - \eta_{n-k}}]
\end{aligned}$$

Les familles  $\left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k \gamma_{n-k}}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k \delta_{n-k}}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\left(\sum_{k=0}^n \frac{\beta_k \gamma_{n-k}}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left(\sum_{k=0}^n \frac{\beta_k \delta_{n-k}}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  sont semmables, donc en regroupant les termes ayant la même fréquence, on obtient un élément de  $\mathcal{A}$ , ainsi  $fg \in \mathcal{A}$ .

2. (a) Tout élément  $f$  de  $\mathcal{A}$  est limite uniforme d'une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$ , donc on peut prolonger le produit scalaire de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{A}$ , en posant :

$$(f|g) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n|g_n)$$

avec  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (\alpha_n C_{w_n} + \beta_n S_{w_n})$  et  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{k \rightarrow n} \sum_{k=0}^n (\gamma_n C_{\eta_n} + \delta_n S_{\eta_n})$

Soit  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_n C_{w_n} + \beta_n S_{w_n}))$  avec  $w_n \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donc

$$(f_n|f_n) = \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2), \text{ d'où}$$

$$(f|f) = \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

- (b) Soit  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (\alpha_n C_{w_n} + \beta_n S_{w_n})$  un élément de  $\mathcal{A}$ , alors

$$(f|C_{-w}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (\alpha_k (C_{w_k}|C_{-w}) + \beta_k (S_{w_k}|C_{-w}))$$

D'où

- $(f|C_{-w}) = 0$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|w| \neq |w_n|$ ,
- si'il existe  $n$  tel que  $|w_n| = |w|$ ,  $(f|C_{-w}) = \begin{cases} \alpha_n, & \text{si } w = 0, \\ \frac{\alpha_n}{2}, & \text{si } w \neq 0. \end{cases}$

De même si  $w = 0$ ,  $(f|S_0) = 0$  et si  $w \neq 0$ ,

- $(f|S_{-w}) = 0$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|w| \neq |w_n|$ ,
- si'il existe  $n$  tel que  $|w_n| = |w|$ ,  $(f|S_{-w}) = \begin{cases} \frac{\alpha_n}{2}, & \text{si } w = -w_n, \\ -\frac{\alpha_n}{2}, & \text{si } w = w_n. \end{cases}$

(c) Soient  $f = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k C_{w_k} + \beta_k S_{w_k})$  et  $g = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n C_{w_n} + \delta_n S_{w_n})$  deux éléments de  $\mathcal{A}$ , alors on peut vérifier que

$$(f|g) = \alpha_0 \gamma_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \gamma_n + \beta_n \delta_n).$$

#### IV. LA FONCTION $\cos x + \cos(x\sqrt{2})$

##### 1. Près de $\sqrt{2}$

(a) Pour  $n = 0$ ,  $p_0 = 1$  et  $q_0 = 0$ , supposons la propriété est vraie pour  $n$  et montrons la pour  $n + 1$ .

On a :

$$(3 + 2\sqrt{2})^{n+1} = (3 + 2\sqrt{2})(p_n + q_n\sqrt{2}) = p_{n+1} + q_{n+1}\sqrt{2},$$

avec  $p_{n+1} = 3p_n + 4q_n$  et  $q_{n+1} = 2p_n + 3q_n$ , donc la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) De même on peut montrer que  $(3 - 2\sqrt{2})^n = p_n - q_n\sqrt{2}$  avec  $p_n$  et  $q_n$  sont des entiers naturels.

(c) Nous avons

$$p_n = \frac{1}{2}((3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n) \quad \text{et} \quad q_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n),$$

donc

$$p_n \simeq \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2})^n \quad \text{et} \quad q_n \simeq \frac{1}{2\sqrt{2}}(3 + 2\sqrt{2})^n.$$

La relation

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = \frac{1}{(3 - 2\sqrt{2})^n} = p_n + q_n\sqrt{2},$$

montre que  $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$ .

##### 2. Approximation rationnelle de $\sqrt{2}$

Les deux suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendent vers l'infini, donc on peut les supposer non nulles à partir d'un certain rang  $n_0$ . Donc pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ , on a :

$$\left| p_n - q_n\sqrt{2} \right| = \frac{1}{p_n + \sqrt{2}q_n} \leq \frac{1}{q_n\sqrt{2}}$$

et donc

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{q_n^2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

On prend par exemple  $p = p_{n_0}$  et  $q = q_{n_0}$ .

##### 3. Maxima de B

Posons  $G = \{2k\pi\sqrt{2} - 2k'\pi / (k, k') \in \mathbb{Z}^2\}$ . Il est clair que  $G$  est un sous-groupe non trivial de  $(\mathbb{R}, +)$ , donc  $G = \alpha\mathbb{Z}$  ( $\alpha > 0$ ) ou bien  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Supposons  $G = \alpha\mathbb{Z}$ , alors, puisque  $2\pi\sqrt{2} \in \alpha\mathbb{Z}$ ,  $2\pi\sqrt{2} = n\alpha$ , de même  $2\pi = m\alpha$ , donc

$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ , et ceci est absurde. Donc  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$  et par conséquent il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $G$  de limite nulle, ainsi si on pose  $x_n = 2k_n\pi\sqrt{2} - 2k'_n\pi$ , alors pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$ , on a :

$$|2k_n\pi\sqrt{2} - 2k'_n\pi| \leq \varepsilon$$

La suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{Z}$ , ne peut pas être bornée, car sinon  $(k'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sera borné et dans ce cas  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  prendra un nombre fini de valeurs et ceci est absurde car  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . On remarque aussi que, pour chaque  $n$ ,  $k_n$  et  $k'_n$  sont de même signe, donc en remplaçant le couple  $(k_n, k'_n)$  par le couple  $(-k_n, -k'_n)$ , on peut supposer  $k_n > 0$  et  $k'_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Finalement on peut prendre par exemple  $k = k_{n_0}$  et  $k' = k'_{n_0}$ . On a :

$$\cos(2k_n\pi) = 1 + \cos(2k_n\pi\sqrt{2}) = 1 + \cos(2k_n\pi\sqrt{2} - 2k'_n\pi) = 1 + \cos(x_n),$$

donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} B(2k_n\pi) = 2$ , donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $B(2k_n\pi) \geq 2 - \varepsilon$ , et comme  $\{2k_n\pi/n \in \mathbb{N}\}$  est infini, alors  $B$  prend une infinité de fois des valeurs supérieures à  $2 - \varepsilon$ .

#### 4. Presque périodicité-la définition de BOHR

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $\left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{q^2\sqrt{2}}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} |B(x) - B(x + 2p\pi)| &= \left| \cos(x\sqrt{2}) - \cos(x\sqrt{2} + 2p\pi\sqrt{2}) \right| \\ &= \left| \cos(x\sqrt{2}) - \cos(x\sqrt{2} + 2(p - q\sqrt{2})\pi\sqrt{2}) \right| \\ &\leq 2\pi\sqrt{2} \left| p - q\sqrt{2} \right| \leq \frac{2\pi}{q}, \end{aligned}$$

car la fonction  $\cos$  est 1-lipschitzienne

• • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc  
E-mail : medtarqi@yahoo.fr