Teori Bilangan

«"Mathematics is the queen of the sciences and number theory is the queen of mathematics"»

Carl Friedrich Gauss

Dedi Nurjamil
Angga Nurohman
Sandy Ihsan Amarulloh

Teori Bilangan Dilengkapi Latihan Soal

Dedi Nurjamil, M. Pd.
Sandy Ihsan Amarulloh, S. Pd.
Angga Nurohman

Editor, Desain Cover, dan Tata Letak oleh: Angga Nurohman

Diterbitkan Oleh:

ISBN:

Cetakan Pertama, Agustus 2024

Prakata

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT. Salawat serta salam semoga terlimpah curah kepada nabi besar Muhammad SAW. Atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan buku yang berjudul **"Teori Bilangan"** ini.

Buku ini dilengkapi dengan soal-soal latihan pada setiap akhir bab dan terdapat satu bab berisi kumpulan soal dari berbagai sumber yang dicantumkan yang bertujuan untuk menguji pemahaman dan mengasah kemampuan pembaca akan setiap materi yang telah disajikan. Selain itu, penulisan buku ini bertujuan untuk menghasilkan bahan ajar teori bilangan yang sesuai dengan karakteristik mahasiswa Universitas Siliwangi, serta sesuai dengan karakteristik materi teori bilangan yang banyak memuat definisi, konsep, dan teorema.

Tak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu, sehingga buku ini dapat terselesaikan tepat waktu dan dapat digunakan sebagaimana mestinya. Penulis berharap buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa program studi Pendidikan Matematika di Universitas Siliwangi dan bagi pecinta ilmu pengetahuan pada umumnya.

Sebagai penutup, pepatah bijak mengatakan tak ada gading yang tak retak. Oleh karena itu, penulis menerima saran dan kritik dari pembaca yang bersifat membangun akan kami terima guna pengembangan buku ini secara berkelanjutan.

Tasikmalaya, 2024

Penulis

Daftar Isi

Sistem Numerasi

1.1 Pendahuluan

Teori tentang bilangan telah menarik perhatian ilmuan selama ribuan tahun, paling sedikit sejak 2500 tahun yang lalu. Sebagai salah satu cabang ilmu matematika, teori bilangan disebut sebagai Aritmetika lanjut (Advenced Aritmetics) karena berkaitan dengan sifat-sifat bilangan asli.

Sistem numerasi adalah sekumpulan lambang dan aturan pokok untuk menuliskan bilangan. Lambang yang menyatakan suatu bilangan dinamakan numeral atau lambang bilangan. Petunjuk mengenai awal manusia mengenal hitungan ditemukan oleh arkeolog Karl Absolom pada tahun 1930 dalam sebuah potongan tulang serigala yang diperkirakan berumur 30.000 tahun. Pada potongan tulang itu ditemukan goresan-goresan kecil yang tersusun dalam kelompok-kelompok yang terdiri atas lima, seperti $llll$ ||||| |||||. Sehingga tidak diragukan lagi bahwa orang-orang primitif sudah memiliki pengertian tentang bilangan dan mengerjakannya dengan metode ijir (tallies).

Jadi dapat kita buktikan bahwa orang terdahulu telah mengenal tulisan namun mereka tidak menggunakan angka untuk menghitung tetapi mereka menggunakan lambang-lambang yang telah mereka sepakati. Mereka menggunakan lambang itu untuk simbol dari perhitungan yang telah mereka lakukan.

Banyaknya suku bangsa di dunia mengakibatkan banyaknya sistem numerasi yang berbeda-beda. Oleh karena itu suatu bilangan dapat dinyatakan oleh bermacam-macam lambang bilangan, tetapi suatu lambang bilangan tertentu hanya menunjukkan pada satu bilangan saja.

Sampai sekarang kita telah mengenal bermacam-macam sistem numerasi, diantaranya sistem numerasi Ijir, Mesir Kuno, Babilonia, Alphabet Yunani, Cina-Jepang, Maya, Romawi, Attika, dan Hindu Arab.

1.2 Sistem Numerasi Ijir

Perhitungan yang paling terdahulu dan sederhana adalah perhitungan dengan memakai sistem korespondensi $1-1$, sistem ini dinamakan sistem numerasi Ijir (Tally). Caranya dengan memakai goresan atau memakai tongkat untuk satu objek yang dihitung.
Contoh sistem numerasi Ijir :

- Bila seseorang memiliki tiga ekor sapi maka ia akan menyusun tongkat sebanyak tiga buah, atau membuat goresan sebanyak tiga goresan, yaitu : ///

- Jika ada sebuah keluarga memiliki tiga ekor kambing lalu digabungkan dengan empat ekor kambing lainnya maka mereka menyusun tongkat sebanyak tujuh buah, atau mereka membuat goresan sebanyak tujuh goresan, yaitu : 𝍸 ||

1.3 Sistem Numerasi Mesir Kuno

Sekitar 3400 SM bangsa Mesir telah mengenal tulisan *Hieroglyphcs* (tulisan Mesir Kuno). Tulisan ini mereka tulis pada batu, papyrus, kayu, barang pecah belah dan lain sebagainya. Posisi atau tempat dari setiap lambang bilangan tidak mempengaruhi nilai dari suatu bilangan.
Lambang-lambangnya sebagai berikut:

𓏤	= 1	tongkat (stroke)
𓎆	= 10	tulang tumit (heel bone)
𓍢	= 100	gulungan surat (scroll)
𓆼	= 1000	bunga teratai (lotus flower)
𓂭	= 10 000	jari telunjuk (a pointing finger)
𓆐	= 100 000	ikan burbot (burbot fish)
𓁨	= 1000 000	orang astronis (astronished man)

Contoh 1.1. Contoh:

- 4 = 𓏤𓏤𓏤𓏤

- 22 = 𓎆𓎆𓏤𓏤 atau 𓎆𓏤𓏤𓎆

- 123 = 𓍢𓎆𓏤𓏤𓏤 atau 𓏤𓏤𓏤𓍢𓎆

1.4 Sistem Numerasi Babylonia

Bangsa Babylonia telah mengenal angka sekitar 2000 − 20 SM. Angka yang mereka gunakan hanya mempunyai dua lambang bilangan dasar yaitu :

$$\triangledown = 1 \text{ dan } \triangleleft = 10$$

Posisi dari setiap lambang bilangan tidak boleh diubah karena akan memengaruhi nilai dari bilangan tersebut. Sistem numerasi ini merupakan sistem numerasi aditif yang dipadukan dengan sistem posisi (nilai tempat). Tulisan Babylonia ini disebut juga *Cunieform* yang biasa ditulis pada tanah liat dengan menggunakan ujung tongkat. Beberapa aturan yang harus diperhatikan dalam penulisan sistem numerasi Babilonia, di antaranya:

1. Untuk menyederhanakan penulisan lambang bilangan, digunakan simbol pengurangan. Simbol tersebut adalah $\triangledown\ \triangleright$
2. Untuk bilangan yang lebih besar dari 60 digunakan bilangan dasar 60. Untuk menghindari kekeliruan dipakai tanda selang "^".

Contoh 1.2. Contoh:

- $23 = \triangleleft\ \triangleleft\ \triangledown\ \triangledown\ \triangledown$
- $37 = \triangleleft\ \triangleleft\ \triangledown\ \triangleright\ \triangledown\ \triangledown\ \triangledown$
  $\triangleleft\ \triangleleft$
- $62 = 1 \cdot 60 + 2 = \triangledown$^$\triangledown\ \triangledown$
- $4000 = 1 \cdot 60^2 + 6 \cdot 60 + 40$
  $= \triangledown$^$\triangledown\ \triangledown\ \triangledown$^$\triangleleft\ \triangleleft\ \triangleleft\ \triangleleft$
  $\triangledown\ \triangledown\ \triangledown$

1.5 Sistem Numerasi Alphabet Yunani

Sekitar tahun 450 SM bangsa Ionia dari Yunani telah mengembangkan suatu sistem numerasi yaitu Alphabet Yunani yang terdiri dari 27 huruf. Bilangan dasar yang mereka gunakan adalah 10. Huruf-huruf alphabet tersebut mempunyai nilai-nilai sebagai berikut :

Nilai	Lambang	Nama	Nilai	Lambang	Nama
1	α	alpha	60	ξ	xi
2	β	beta	70	o	omicron
3	γ	gamma	80	π	pi
4	δ	delta	90	κ	obselet kappa
5	ε	epsilon	100	ρ	rho
6	$\digamma$	obselet digamma	200	σ	sigma
7	ζ	zeta	300	τ	tau
8	η	eta	400	υ	upsilon
9	θ	theta	500	φ	phi
10	ι	iota	600	χ	chi
20	$\varkappa$	kappa	700	ψ	psi
30	λ	lambda	800	ω	omega
40	μ	mu	900	ϡ	obselet sampi
50	ν	nu			

Beberapa aturan yang harus diperhatikan dalam penulisan sistem numerasi Alphabet Yunani, diantaranya :

- Untuk menyatakan ribuan, di atas sembilan angka dasar yang pertama dari α sampai θ dibubuhi tanda aksen (‘).
- Untuk kelipatan 10.000 dinyatakan dengan meletakkan angka yang bersangkutan di atas tanda M.

Contoh 1.3. Contoh:

- $15 = \iota\varepsilon$
- $726 = \psi\kappa\digamma$
- $8000 = \eta'$
- $10000 = \overset{\alpha}{M}$

1.6 Sistem Numerasi Cina

Angka tradisional Cina – Jepang menggunakan pengelompokkan dengan bilangan dasar 10. Di samping itu sistem angka ini juga mempunyai sistem pengelompokkan perkalian (multiplikatif). Keunikan dari sistem numerasi Cina yaitu penulisannya dari atas ke bawah. Perhatikan tabel berikut.

Nilai	Notasi	Cina	Jepang
1	一	yī	ich
2	二	èr	ni
3	三	sān	san
4	四	sì	roku/yon
5	五	wǔ	go
6	六	liù	roku
7	七	qī	shici/nana
8	八	bā	hachi
9	九	jiǔ	kyū
10	十	shí	jū
10^2	百	bǎi	hyaku
10^3	千	qiān	sen
10^4	万	wàn	man
10^5	十万	shí wàn	ich man
10^6	百万	bǎi wàn	hyaku man
10^7	千万	qiān wàn	sen man

Tabel nilai, notasi, dan pelafalan bilangan Cina-Jepang

Bilangan wàn/man adalah unit dasar untuk bilangan yang lebih besar, dengan kata lain, bilangan besar sering dinyatakan dalam kelipatan 10000 (万) daripada kelipatan 1000 seperti dalam sistem internasional. Selain itu, terdapat perbedaan pula dalam penulisan 10^8. Perhatikan Tabel berikut.

Nilai	Cina		Jepang	
10^8	亿	yì	億	oku
10^9	十亿	shí yì	十億	jū oku
10^{10}	百亿	bǎi yì	百億	hyaku oku
10^{11}	千亿	qiān yì	千億	sen oku
10^{12}	兆	zhào	兆	chō

Contoh 1.4. Perhatikan contoh berikut,

- 29 =

二	dua	èr	ni
十	puluh	shí	jū
九	sembilan	jiŭ	kyū

Sehingga 29 dibaca *èr shí jiŭ* dalam bahasa Cina dan dibaca *ni jū kyū* dalam bahasa Jepang.

- 5624 =

五	lima	wŭ	go
千	ribu	qiān	sen
六	enam	liù	rokku
百	ratus	băi	kyaku
二	dua	èr	ni
十	puluh	shí	jū
四	empat	sì	yon

Sehingga 5624 dibaca *wŭ qiān liù băi èr shí sì* dalam bahasa Cina atau *gosen rokkukyaku ni jūgo* dalam bahasa Jepang.

- 4315 =

四	empat	sì	yon
千	ribu	qiān	sen
三	tiga	sān	san
百	ratus	băi	kyaku
十	puluh	shí	jū
五	lima	wŭ	go

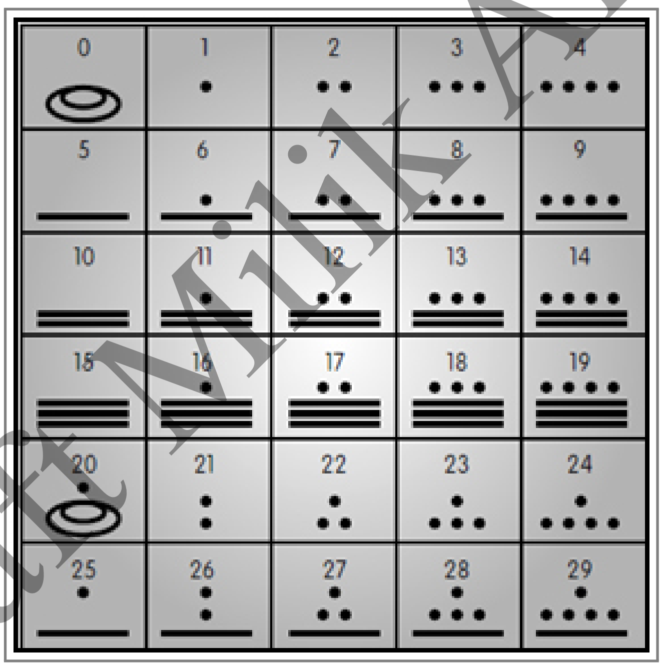
Pada contoh 4315, koefisien puluhnya yaitu satu/yī/ich (1/一) tidak ditulis. Bilangan tersebut ditulis empat ribu tiga ratus puluh lima yang artinya sepuluh ditambah dengan lima. Sehingga hanya dibaca *sì qiān sān băi shí wŭ* dalam bahasa Cina atau *yonsen sankyaku jūgo* dalam bahasa Jepang.

1.7 Sistem Numerasi Maya

Suku Maya adalah kelompok suku yang tinggal di Semenanjung Yukatan, Amerika Tengah yang berbatasan dengan Samudera Pasifik di sebelah barat, dan Laut Karibia di sebelah timur.

Suku yang pada zaman batu mencapai kejayaan di bidang teknologinya (250 M hingga 925 M), menghasilkan bentuk karya dan peradaban unik seperti bangunan *Chichen Itza*, pertanian *kanal drainase*, tanaman jagung, sumurnya yang disebut *"cenotes"*.

Sistem numerasi Maya ditemukan pertama kali oleh Franscisco de Cordoba pada tahun 1517 M di kota Mexico tepatnya di daerah Yukatan. Keistimewaan sistem numerasi Maya ini adalah telah memiliki lambang bilangan nol. Lambang dari sistem numerasi Maya ini berupa garis dan noktah. Simbol-simbol dasar yang dipakai dalam sistem numerasi maya adalah sebagai berikut:



Notasi Vigesimal Bangsa Maya

Ada beberapa aturan yang harus diperhatikan dalam penulisan sistem numerasi Maya, diantaranya:

- Untuk bilangan yang lebih kecil dari 19 dipakai bilangan dasar 20.
- Untuk bilangan-bilangan yang lebih besar lagi, maka menggunakan bilangan dasar: $(18 \cdot 20^0)$, $(18 \cdot 20^1)$, $(18 \cdot 20^3 \ldots,$ $(18 \cdot 20^n)$.
- Ditulis dari atas ke bawah.

Contoh 1.5. Perhatikan bahwa $2024 = 5 \cdot (18 \cdot 20^1) + 0 \cdot (18 \cdot 20^0) + 11 \cdot 20 + 4$. Maka notasi vigesimal Maya dari 2024 adalah

 $= 2024$

Contoh lain, notasi vigesimal Maya dari $43486 = 6 \cdot (18 \cdot 20^2) + 0 \cdot (18 \cdot 20^1) + 14 \cdot 20 + 6$ adalah

 $= 43486$

1.8 Sistem Numerasi Romawi

Sistem numerasi Romawi sudah ada sejak tahun 260 SM. Sistem numerasi Romawi yang ada sekarang merupakan modernisasi dari sistem yang lama. Misalnya lambang IV sistem lamanya ////. Sistem numerasi Romawi menggunakan bilangan dasar 10. Lambang-lambang dasarnya adalah:

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathrm{I} \\
10 &= \mathrm{X} \\
100 &= \mathrm{C} \\
1000 &= \mathrm{M} \\
5 &= \mathrm{V} \\
50 &= \mathrm{L} \\
500 &= \mathrm{D}
\end{aligned}
$$

Beberapa aturan yang harus diperhatikan dalam penulisan sistem numerasi Romawi, diantaranya:

1. Bila satu angka terdiri atas dua lambang dasar maka nilai bilangan yang ditunjukkan adalah:
   - Sama dengan jumlah nilai kedua bilangan itu jika lambang dari nilai yang paling tinggi terletak di sebelah kiri.
   - Sama dengan selisih nilai kedua bilangan itu jika lambang dari nilai yang paling tinggi terletak disebelah kanan.
   - Lambang bilangan yang sama jika ditulis berurutan paling banyak tiga angka.

2. Pengurangan mempunyai aturan sebagai berikut:
   - I hanya dapat dikurangkan dari V dan X.
   - X hanya dapat dikurangkan dari L dan C.
   - C hanya dapat dikurangkan dari D dan M.
3. Untuk menuliskan bilangan yang lebih besar dipakai sistem perkalian yang ditunjukkan dengan tanda tertentu, yaitu:
   - Sebuah strip (ruas garis) di atas lambang bilangan tertentu menunjukkan nilai yang sama dengan seribu kali nilai bilangan itu.
   - Dua buah strip di atas lambang bilangan tertentu menunjukkan nilai yang sama dengan sejuta kali bilangan itu.

Contoh 1.6. Contoh sistem numerasi Romawi:

- $\mathrm{VI} = 5 + 1 = 6$
- $\mathrm{IV} = 5 - 1 = 4$
- $40 = 50 - 10 = \mathrm{XL}$
- $49 = (50 - 10) + (10 - 1) = \mathrm{XLIX}$
- $\overline{\mathrm{X}} = 10 \cdot 1000 = 10\,000$
- $\overline{\overline{\mathrm{L}}} = 50 \cdot 1\,000\,000 = 50\,000\,000$

1.9 Sistem Numerasi Attika

Sistem numerasi ini pernah digunakan oleh orang-orang Yunani Kuno di daerah *Attika* dan berkembang sekitar abad ke−3 sebelum masehi. Angka ini dikenal sebagai *Angka Herodianika* karena pertama kali dijelaskan dalam naskah abad ke−2 oleh *Herodianos*, atau sebagai *Angka Akrofonik* karena simbol dasar berasal dari huruf pertama alfabet Yunani yang diwakili oleh simbol tersebut.
Angka Attika memakai bilangan dasar 10 (desimal) dan lambang-lambangnya adalah:

I		$= 10^0 = 1$
Δ	ΔΕΚΑ (Deka)	$= 10^1 = 10$
Η	ΗεΚΑΤΟΝ (Hekaton)	$= 10^2 = 100$
Χ	ΧΙΛΙΟΙ (khilioi)	$= 10^3 = 1000$
Μ	ΜΥΡΙΟΙ (myrioi)	$= 10^4 = 10\,000$

Lambang bilangan untuk nol belum ada, yang ada adalah lambang yang digunakan sebagai penyingkat yaitu " Γ " yang artinya 5. Jika digabungkan dengan simbol lain, maka artinya adalah lima kali dari lambang yang tertulis.

Contoh 1.7. Perhatikan contoh berikut.

- ΔΔΔΔΔ = 𐅄 = 50
- ΔΔΓII = 27
- 𐅄Γ = 55
- XXHΔΔΔIII = 2143
- 𐅈MXXX𐅅HHΔΔΓIIII = 63729

1.10 Sistem Numerasi Hindu Arab

Pada tahun 775 M wilayah kekuasaan Arab terpecah menjadi dua, yaitu wilayah bagian barat yang berpusat di *Cordoba* dan wilayah bagian timur yang berpusat di *Bagdad*. Dengan sendirinya perkembangan ilmu pengetahuan dan peradabannya berbeda termasuk tulisan arab dan numerasinya.
Sistem numerasi Arab yang kita kenal sekarang adalah adopsi dari numerasi Arab wilayah bagian timur. Keistimewaan dari numerasi Arab ini adalah telah menggunakan sistem posisi denganbilangan dasar 10. Walaupun penulisan dengan hurup Arab dari kanan ke kiri, tetapi untuk penulisan lambang bilangan tetap dari kiri ke kanan.
Angka arab barat adalah keturunan dari angka arab timur, sedangkan angka Arab timur sendiri diadopsi dari angka India dan sistem angka Hindu-Arab yang dikembangkan oleh matematikawan India, yang membaca urutan angka seperti "975" sebagai satu bilangan yang utuh.
Angka India kemudian diadopsi oleh matematikawan Persia di India, dan diteruskan lebih lanjut kepada orang-orang Arab di sebelah barat yang kemudian dikenal dengan sebutan angka arab timur, karena dipakai oleh orang-orang Arab bagian timur seperti Arab Saudi, Iraq, dan Levant. Bentuk angka-angka arab timur kemudian mengalami perubahan saat mereka diteruskan ke wilayah Afrika Utara. Melalui orang Arab di Afrika Utara tersebut akhirnya angka tersebut dikenal oleh orang-orang Eropa. Akhirnya mencapai bentuk Eropanya (bentuk yang sekarang) pada saat mencapai Afrika Utara, dan dari sana penggunaan mereka menyebar ke Eropa pada Abad Pertengahan. Dikarenakan sistem angka ini dikenalkan kepada bangsa Eropa oleh orang-orang Arab, maka dalam istilah bahasa Inggris angka ini dikenal dengan istilah angka Arab.

Arab Barat	Arab Timur
0	٠
1	١
2	٢
3	٣
4	٤
5	٥
6	٦
7	٧
8	٨
9	٩

Contoh 1.8. Contoh numerasi Arab:

- 234 = ٢٣٤
- 2864 = ٢٨٦٤
- 6589 = ٦٥٨٩

Latihan

1. Ubahlah bilangan-bilangan ke dalam sistem numerasi berikut ini:

12	234	1342	32417
24	135	3421	45325
45	654	4537	54321
45	456	6789	76589
65	897	9876	98765

   a. Sistem Numerasi Ijir (Tally);
   b. Sistem Numeasi Mesir Kuno;
   c. Sistem Numerasi Babylonia;
   d. Sistem Numerasi Alphabet Yunani;
   e. Sistem Numerasi Cina – Jepang;
   f. Sistem Numerasi Maya;
   g. Sistem Numerasi Romawi;
   h. Sistem Numerasi Attika;
   i. Sistem Numerasi Arab.

2. Selesaikan operasi di bawah ini.

   a. ωπη
   φξϵ +
   ——————
   ……

   c. DCCXXVIII
   DLII −
   ——————
   …………

   b. MDCCXXXI
   DCCCLXXIV +
   ——————
   ……………

   d. DCXLVIII
   CCXLIV ×
   ——————
   …………

3. Hasil pengurangan 𐅄ΔΔΔΓI oleh ΔΔΓIII adalah …

Bilangan

2.1 Pendahuluan

Bilangan dalam matematika seperti halnya titik, garis dan bidang merupakan konsep awal (*primitive concept*) yaitu unsur yang bersifat mendasar sering dipakai tetapi tidak pernah dapat didefinisikan dengan tepat. Sehingga apabila ditanyakan apakah bilangan itu jawabannya tak akan pernah tepat dan selalu menimbulkan perdebatan. Tetapi jika yang dinyatakan bilangan asli atau bilangan cacah maka jawabannya akan jelas dan pasti.

Bilangan adalah suatu unsur dalam matematika yang tidak dapat didefinisikan. Kita harus bisa membedakan antara bilangan dengan angka. Bilangan adalah nilai dalam lambang bilangan, sedangkan angka adalah lambang dari sebuah bilangan.

Contoh: bilangan *seratus tiga puluh enam*. Dalam Numerasi Hindu Arab ditulis 136 dan kita sebut sebagai sebuah bilangan. Bilangan tersebut terdiri dari tiga buah angka yaitu 1, 2, dan 3.

2.2 Bilangan Kardinal

Bilangan Kardinal adalah bilangan yang dipergunakan untuk menyatakan banyaknya suatu objek.

Contoh yang merupakan bilangan kardinal:

- Paman membeli 3 ekor sapi.
- Aku adalah anak bungsu, kakakku berjumlah 5 orang.
- Diketahui himpunan $\{1, 3, 5, \dots, 13\}$ banyaknya anggota dalam himpunan tersebut ada 7.

2.3 Bilangan Ordinal

Bilangan Ordinal adalah bilangan yang dipergunakan untuk menyatakan urutan (*rank*).

Contoh yang merupakan bilangan ordinal :

- SMAN 3 Bandung merupakan sekolah favorit pada tahun ini.

- Dia adalah anak ke−3 dari 5 bersaudara.
- Di kelasnya Irma mendapat juara *pertama*.

2.4 Bilangan Asli

Bilangan Asli (*Natural Number*) adalah bilangan yang dipergunakan untuk membilang atau menghitung satu-satu. Himpunan bilangan asli biasanya dinotasikan dengan $\mathbb{N}$, diambil dari huruf awal kata *Natural*, dimana $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$
Himpunan bilangan asli dapat digolongkan menjadi beberapa macam diantaranya adalah:

1. Bilangan genap positif, yaitu bilangan asli yang habis dibagi dua, artinya jika bilangan tersebut dibagi dua maka hasilnya tidak bersisa (bersisa nol).

   Ditulis: $\{2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}$
   Atau: $\mathsf{Genap} = \{x|x = 2n,$ dengan $n \in \mathbb{N}\}$.

2. Bilangan ganjil positif, yaitu bilangan asli yang tidak habis dibagi dua, artinya jika bilangan tersebut dibagi dua selalu bersisa satu.

   Ditulis: $\{1,\ 3,\ 5,\ \ldots\}$
   Atau: $\mathsf{Ganjil} = \{y|y = 2n - 1,$ dengan $n \in \mathbb{N}\}$

3. Bilangan prima positif Yaitu bilangan asli yang memiliki tepat dua faktor pembagi yang positif, artinya bilangan tersebut hanya habis dibagi oleh satu dan oleh bilangan itu sendiri.

   Ditulis: $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\ \ldots\}$

   Formula untuk menentukan bilangan prima diantaranya sebagai berikut:

   - Mersenne Prime Yaitu bilangan prima yang berbentuk $2^n - 1$, ditemukan dengan menggunakan komputer oleh *Laura Nickel* dan *Curt* berkebangsaan Amerika Serikat pada tahun 1979.
   - Bilangan Permat Yaitu bilangan prima yang berbentuk
     $F_n = 2^{2n} + 1$, berlaku untuk $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.
   - Prima Euleur, yaitu bilangan prima yang berbentuk:
     $n^2 - n + 41$ untuk $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 40$, dan
     $n^2 + n + 17$ untuk $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 15$
   - Legendre Yaitu bilangan prima yang berbentuk: $n^2 + n + 41$ untuk $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 39$, dan
     $n^2 + 29$ untuk $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 28$

- Escott Yaitu bilangan prima yang berbentuk:
  - $n^2 - 79n + 1601$ untuk $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 79.$
  - $n^3 + n^2 + 71$ untuk $n = -14,\ -13,\ -11,\ \ldots,\ 9,\ 10.$
  - $n^2 + n + 41$ untuk $n = -40,\ -39,\ -38,\ \ldots,\ -1$
- Miot Yaitu bilangan prima yang berbentuk: $n^2 - 2999n + 2248541$ untuk bilangan bulat $1460 < n < 1539$, dan
  $n^3 - n^2 - 17$ untuk $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 24.$
- Charbert Yaitu bilangan prima yang berbentuk $3n^2 + 3n + 1$ untuk $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 11.$

4. Bilangan tersusun (*Composite*), yaitu bilangan asli yang mempunyai faktor positif lebih dari dua buah, atau dengan kata lain bilangan komposit adalah bilangan asli yang bukan merupakan bilangan prima. Bilangan tersebut adalah $\{4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14, 15,\ \ldots\}$.

5. Bilangan 1, bukan merupakan bilangan tersusun juga bukan merupakan bilangan prima.

6. Bilangan sempurna, yaitu bilangan yang jumlah faktornya adalah sama dengan bilangan tersebut kecuali faktor yang sama dengan bilagan itu sendiri. Berdasarkan penelitian bilangan sempurna dapat dirumuskan sebagai berikut:

   $P = (2^{n-1})(2^n - 1)$ dengan n adalah bilangan asli dan $(2^n - 1)$ adalah bilangan prima.

   Contoh: 6 merupakan bilagan sempurna karena faktor- faktornya $1,\ 2,$ dan $3.$ Jika bilangan-bilangan tersebut dijumlahkan $1 + 2 + 3$ hasilnya adalah $6.$

2.5 Bilangan Cacah

Bilangan Cacah adalah gabungan antara bilangan asli dengan bilangan nol atau dengan kata lain, bilangan cacah adalah himpunan bilangan bulat yang tidak negatif, jadi bilangan cacah harus bertada positif.
Himpunan bilangan cacah ditulis 0, 1, 2, 3, ... Himpunan bilangan cacah memuat beberapa bilangan antara lain:

- Himpunan bilangan asli $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$
- Himpunan bilangan genap $Gn = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}$
- Himpunan bilangan ganjil $Gj = \{1,\ 3,\ 5,\ \ldots\}$

- Himpunan bilangan kuadrat $K = \{1,\ 4,\ 9,\ \ldots\}$
- Himpunan bilangan prima $P = \{2,\ 3,\ 5,\ ;7,\ \ldots\}$
- Himpunan bilangan komposit $T = \{4,\ 6,\ 8,\ \ldots\}$

2.6 Bilangan Bulat

Bilangan Bulat adalah gabungan antara bilangan cacah dengan bilangan bulat negatif. Himpunan bilangan bulat ditulis

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Himpunan semua bilangan bulat dalam matematika umumnya dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$ yang berasal dari kata *Zahlen* yaitu bahasa Jerman yang artinya bilangan.

2.7 Bilangan Rasional

Bilangan Rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat serta $b \neq 0$. Bilangan bulat merupakan bilangan rasional karena setiap bilangan bulat dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$. Tetapi tidak setiap bilangan rasional adalah bilangan bulat.
Bilangan rasional dapat berupa bilangan bulat, bilangan yang dapat dinyatakan dengan pecahan atau pecahan campuran, atau dalam bentuk desimal. Contoh bilangan rasional diantaranya:

- $4 = \frac{4}{;}1 = \frac{8}{2}$
- $1 = \frac{5}{5};$
- $.0, 3333 \cdots = \frac{1}{3};$
- $0 = \frac{0}{2024};$
- ...dan sebagainya.

2.8 Bilangan Irasional

Bilangan Irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ di mana a dan b keduanya merupakan bilangan bulat serta $b \neq 0$. Menurut sejarah penemu bilangan rasional adalah *Hippasus* dan *Metapontum* pada tahun 500 SM.

Sayangnya penemuan tersebut justru menyebabkan mereka dihukum mati karena dianggap penganut ajaran sesat.
Contoh bilangan irasional diantaranya

- $\sqrt{2} = 1,414213562...$;
- $\log 3$;
- bilangan π;
- bilangan e;
- ...dan sebagainya.

2.9 Bilangan Real

Bilangan Real merupakan gabungan dari bilangan rasional dengan bilangan irasional. Himpunan bilangan real sering dinyatakan dengan R. Dalam sistem bilangan real antara bilangan-bilangan real dengan titik-titik pada garis bilangan terdapat hubungan satu-satu sehingga pada garis bilangan tidak terdapat tempat yang kosong.
Dalam sistem bilangan real, tanda " = " merupakan relasi ekivalen, karena untuk setiap a, b dan c adalah bilangan asli memenuhi:

1. Sifat reflektif.
$$a = a$$
2. Sifat simetrik.
Jika $a = b$ maka $b = a$.
3. Sifat transitif.
Jika $a = b$ dan $b = c$, maka $a = c$.
4. Hukum trikotomi.
Untuk setiap bilangan a dan b, berlaku tepat salah satu diantara relasi $a < b$, $a = b$, atau $a > b$.

2.10 Bilangan Imajiner

Bilangan Imajiner dilambangkan dengan i adalah bilangan yang memiliki sifat $i^2 = -1$. Bilangan ini biasanya biasanya merupakan bagian dari bilangan kompleks.

Definisi 2.1. Didefinisikan $i^2 = -1$ atau $i = \sqrt{-1}$.

Dalam perhitungan, $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \neq \sqrt{ab}$, karena $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ dan $\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$. Sehingga

$$\begin{aligned} \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} &= i\sqrt{a} \cdot i\sqrt{b} \\ &= i^2\sqrt{ab} \\ &= (-1) \cdot \sqrt{ab} \\ &= -\sqrt{ab} \end{aligned}$$

Contoh 2.2. Contoh operasi bilangan imajiner:

- $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$
- $\sqrt{-20} = \sqrt{5 \cdot (-4)} = \sqrt{5(2i)^2} = 2i\sqrt{5}$
- $\sqrt{9} \cdot \sqrt{-4} = 3 \cdot 2i = 6i$
- $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
- $i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$

2.11 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk $z = a + bi$ dengan a adalah bilangan real dan bi adalah bilangan imaginer.

Definisi 2.3. Jika $z = a + bi$ maka $\mathrm{Re}(z) = a$ dan $\mathrm{Im}(z) = b$.

Definisi 2.4. Jika $\mathbb{C}$ adalah himpunan semua bilangan kompleks, maka

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = (a, b), \quad a \in \mathbb{R} \text{ dan } b \in \mathbb{R}\}$$

Definisi 2.5. Jika z_1 dan z_2 anggota $\mathbb{C}$ dengan $z_1 = (a_1,\ b_1)$ dan $z_2 = (a_2,\ b_2)$ maka

- $z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$
- $z_1 + z_2 = (a_1,\ b_1) + (a_2,\ b_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + b_1 a_2)$

Contoh 2.6. Tentukan bilangan real dan bilangan imajiner dari $z = 3 + 2i$.
Jawab. Menurut definisi 1.3., $\mathrm{Re}(z) = 3$ dan $\mathrm{Im}(z) = 2$.

Contoh 2.7. Jika $z_1 = (3, 5)$ dan $z_2 = (3, 4)$, hitunglah $z_1 + z_2$ dan $z_1 \cdot z_2$.
Jawab.

- $$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3,5) + (3,4) \\ &= (3+3,\ 5+4) \\ &= (6,9) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3,5) \cdot (3,4) \\ &= (3 \cdot 3 - 5 \cdot 4,\ 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3) \\ &= (9 - 20,\ 12 + 15) \\ &= (11, 27) \end{aligned}$$

Latihan

1. Buktikan semua kebenaran dari pernyataan berikut ini:

   a Jika a adalah bilangan genap, maka a^3 adalah bilangan genap.

   b Jika a adalah bilangan ganjil, maka a^3 adalah bilangan ganjil.

   c Jika n adalah bilangan bulat dan n^3 adalah bilangan genap, maka n adalah bilangan genap.

   d Tak ada bilangan rasional berbentuk $\sqrt[3]{2}$.

   e Jika a habis dibagi 3, maka a^3 habis dibagi 3.

   f Jika a tak habis dibagi 3, maka a^3 juga tak habis dibagi 3.

2. Untuk x, y, dan z adalah bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $x + y < z$, maka $x < z - y$.

3. Jika a dan b adalah bilangan bulat dengan $a > 0$, $b > 0$, dan $a < b$, buktikan bahwa:

   a $a^2 < b^2$.

   b $ab < b^2$.

   c $a^2 < ab$

4. Buktikan bahwa $a^2 + b^2 \geq 2ab$ untuk sembarang a, $b \in \mathbb{Z}$.

Bilangan Bulat

3.1 Pendahuluan

Teori bilangan adalah sebuah cabang matematika yang kaya, beragam, dan berpusat pada studi sifat-sifat dan hubungan antara bilangan. Meskipun teori bilangan dapat mencakup berbagai jenis bilangan, dari bilangan rasional hingga irasional dan seterusnya, buku ini akan secara khusus membahas bilangan bulat.
Mengapa Bilangan Bulat? Bilangan bulat adalah blok bangunan dasar dalam matematika. Mereka adalah bilangan yang kita gunakan dalam kehidupan sehari-hari, mulai dari menghitung objek hingga pengukuran dasar. Dalam konteks matematika yang lebih tinggi, bilangan bulat memainkan peran penting dalam banyak konsep dan teorema penting.
Sehingga mulai bab ini dan seterusnya, kita akan fokus mengeksplorasi hal-hal menarik dari bilangan bulat.

3.2 Bilangan Istimewa

Bilangan istimewa adalah kumpulan bilangan khusus yang memiliki sifat-sifat unik atau menarik dalam matematika. Beberapa bilangan istimewa yang umum ditemui antara lain:

1. Bilangan Genap
   Bilangan genap adalah bilangan bulat yang dapat dibagi habis oleh 2. Contoh bilangan genap adalah $2, 4, 6, 8$, dan seterusnya. (*Apakah bilangan genap boleh negatif?Apakah nol termasuk genap?*)

2. Bilangan Ganjil
   Bilangan ganjil adalah bilangan bulat yang tidak dapat dibagi habis oleh 2. Contoh bilangan ganjil adalah $1, 3, 5, 7$, dan seterusnya. (*Apakah bilangan ganjil boleh negatif?*)

3. Bilangan Prima
   Bilangan prima adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan hanya memiliki dua pembagi positif, yaitu 1 dan dirinya sendiri. Contoh bilangan prima

adalah $2, 3, 5, 7, 11$, dan seterusnya. Bilangan prima memiliki peran penting dalam teori bilangan dan kriptografi. (*Apakah bilangan prima boleh negatif?*)

4. Bilangan Komposit
   Bilangan komposit adalah bilangan bulat positif yang memiliki lebih dari dua pembagi positif. Dengan kata lain, bilangan komposit adalah bilangan bulat positif yang bukan bilangan prima. Contoh bilangan komposit adalah $4, 6, 8, 9, 10,$ dan seterusnya.

5. Bilangan Prima Mersenne
   Bilangan prima Mersenne adalah bilangan prima yang memiliki bentuk $2^p - 1$, di mana p adalah bilangan prima. Beberapa contoh bilangan prima Mersenne adalah

6. Bilangan Prima Twin
   Bilangan prima twin adalah sepasang bilangan prima yang selisihnya adalah 2. Contoh bilangan prima twin adalah $(3, 5)$, $(11, 13)$, dan $(17, 19)$.

7. Bilangan Kuadrat Sempurna
   Bilangan kuadrat sempurna adalah bilangan bulat positif yang merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat. Misalnya, $1, 4, 9, 16$, dan 25 adalah bilangan kuadrat sempurna.

8. Bilangan Fibonacci
   Deret Fibonacci adalah deret bilangan yang setiap angka selanjutnya merupakan jumlah dari dua angka sebelumnya dalam deret tersebut. Deret Fibonacci dimulai dengan 0 dan 1, sehingga deretnya adalah $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$, dan seterusnya.

9. Bilangan Perfect Number
   Bilangan perfect number adalah bilangan bulat positif yang merupakan jumlah dari semua pembagi positifnya, kecuali bilangan itu sendiri. Contoh bilangan perfect number adalah $6; (1 + 2 + 3 = 6)$ dan $28; (1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28)$.

10. Bilangan Abundant Number
    Bilangan abundant number adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari jumlah dari semua pembagi positifnya, kecuali bilangan itu sendiri. Contoh bilangan abundant number adalah $12; (1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12)$ dan $20; (1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22 > 20)$

Bilangan istimewa ini memiliki sifat-sifat khusus yang menarik dan sering kali menjadi fokus dalam penelitian matematika dan ilmu pengetahuan lainnya. Beberapa dari sifat-sifat ini masih menjadi subjek penelitian dan masalah terbuka dalam matematika modern.

3.3 Well Ordering Principle

Well-Ordering Principle (WOP) atau Prinsip Terurut Sempurna merupakan salah satu dari enam aksioma dasar dalam teori himpunan **Zermelo-Fraenkel (ZF)**, yang menyusun dasar matematika modern berdasarkan himpunan. **Prinsip Terurut Sempurna** menyatakan bahwa setiap himpunan non-kosong dari bilangan asli memiliki elemen terkecilnya. Dengan kata lain, setiap himpunan bilangan asli selalu memiliki elemen terkecilnya yang berada pada posisi paling awal. Secara formal, Prinsip Pengeurutan Baik dinyatakan sebagai berikut:
Setiap himpunan non-kosong A dari bilangan asli pasti memiliki elemen terkecil.
Beberapa hal penting yang perlu dicatat tentang WOP adalah:

1. Prinsip Pengeurutan Baik (WOP) sering digunakan dalam pembuktian matematika, khususnya yang melibatkan bilangan asli dan induksi matematika.

2. WOP adalah aksioma dalam teori himpunan dan dianggap sebagai bagian penting dari fondasi matematika modern.

3. Prinsip Terurut Baik dan Prinsip Induksi Matematika (PIM) secara bersama-sama membentuk metode induksi matematika yang kuat untuk membuktikan pernyataan yang berlaku untuk himpunan bilangan asli.

4. Meskipun WOP berlaku untuk himpunan bilangan asli, gagasan serupa juga dapat diterapkan pada beberapa struktur terurut lainnya.

Contoh penerapan WOP adalah dalam pembuktian "Prinsip Dasar Aritmatika," di mana WOP digunakan untuk menunjukkan bahwa setiap bilangan asli memiliki faktorisasi prima yang unik.
Prinsip Terurut Sempurna (Well-Ordering Principle) berlaku pada berbagai himpunan dan struktur terurut. Di bawah ini, contoh dua himpunan di mana WOP berlaku:

1. Himpunan Bilangan Asli ($\mathbb{N}$)

   Prinsip Terurut Sempurna diterapkan secara umum pada himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ untuk menyatakan bahwa setiap himpunan non-kosong dari bilangan asli memiliki elemen terkecil. Artinya, setiap himpunan yang tidak kosong dari bilangan asli pasti memiliki elemen terkecilnya sendiri. Misalnya, himpunan $\{3, 5, 1, 9, 2\}$ memiliki elemen terkecil yaitu 1.

Contoh: Perhatikan himpunan bilangan asli $\mathcal{A} = 3, 6, 9, 12, ...$ Himpunan ini adalah himpunan bilangan asli yang kelipatan 3. Dalam himpunan ini, elemen terkecil adalah 3. Oleh karena itu, WOP berlaku untuk himpunan A.

2. Himpunan Barisan Terbatas

   Prinsip Terurut Sempurna juga berlaku untuk himpunan barisan terbatas. Sebuah barisan terbatas adalah himpunan elemen-elemen yang diurutkan dalam urutan tertentu, dengan jumlah elemen yang terbatas.

   Contoh: Perhatikan himpunan $\mathcal{B} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$. Himpunan ini adalah barisan kuadrat dari bilangan bulat positif. Karena $\mathcal{B}$ adalah barisan dengan jumlah elemen yang terbatas, kita dapat mengurutkan elemen-elemennya dari yang terkecil hingga yang terbesar: 1, 4, 9, 16, 25. Dalam kasus ini, elemen terkecil adalah 1, dan WOP berlaku untuk himpunan $\mathcal{B}$.

3.4 Sifat Archimedes

Sifat Archimedes adalah salah satu sifat penting yang berlaku pada bilangan real. Sifat ini diberi nama dari matematikawan kuno terkenal bernama Archimedes dari *Syracuse*. **Sifat Archimedes** menyatakan bahwa himpunan bilangan asli ($\mathbb{N}$) bukanlah himpunan terbatas, artinya tidak ada bilangan bulat positif yang begitu besar sehingga dapat melampaui semua elemen dalam himpunan tersebut. Secara formal, sifat ini dapat dirumuskan sebagai berikut:
Untuk setiap bilangan real positif x, ada bilangan bulat positif n sehingga $n > x$.
Contoh penerapan Sifat Archimedes:

1. Misalkan kita ingin menunjukkan bahwa himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ memenuhi sifat Archimedes. Ambil bilangan real positif apa pun, misalnya $x = 10.$ Berapapun bilangan bulat positif yang kita ambil, kita selalu dapat menemukan bilangan bulat positif yang lebih besar daripada 10, misalnya $n = 11.$ Jadi, sifat Archimedes berlaku untuk himpunan bilangan asli.

2. Sebagai contoh lain, kita ingin menunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ juga memenuhi sifat Archimedes. Ambil bilangan real positif apa pun, misalnya $x = 20$. Kita dapat memilih bilangan bulat positif yang lebih besar daripada 20, misalnya $n = 21$. Jadi, sifat Archimedes juga berlaku untuk himpunan bilangan bulat.

Sifat Archimedes memiliki implikasi yang penting dalam analisis matematika dan digunakan dalam banyak pembuktian dan konstruksi matematika. Dengan adanya sifat ini, kita tahu bahwa tidak ada batasan atas pada himpunan bilangan asli dan bilangan bulat, yang memungkinkan kita untuk melakukan banyak operasi matematika dengan lebih mudah dan efisien.

3.5 Pembuktian Sifat Archimedes

Untuk membuktikan Sifat Archimedes menggunakan Prinsip Terurut Sempurna (*Well-Ordering Principle*), kita perlu membuat asumsi sebaliknya, yaitu anggapan bahwa Sifat Archimedes tidak berlaku. Artinya, kita anggap bahwa himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dalah himpunan terbatas. Selanjutnya, dengan mengaplikasikan WOP, kita akan sampai pada kontradiksi yang menunjukkan bahwa anggapan tersebut salah, dan akhirnya membuktikan Sifat Archimedes. Berikut adalah langkah-langkah pembuktian tersebut:

Step 1. Asumsikan bahwa himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ adalah himpunan terbatas.

Step 2. Dengan asumsi tersebut, maka ada elemen terbesar dalam himpunan bilangan asli ($\mathbb{N}$) Misalkan elemen terbesar ini adalah m, artinya m adalah bilangan bulat positif terbesar dalam himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$.

Step 3. Karena m adalah bilangan bulat positif terbesar dalam himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, maka $m - 1$ juga merupakan bilangan bulat positif.

Step 4. Karena m adalah bilangan bulat positif terbesar, maka $m+1$ bukanlah bagian dari himpunan bilangan asli.

Step 5. Dalam hal ini, tidak ada bilangan bulat positif n yang lebih besar dari $(m+1)$. Padahal, kita telah menemukan bilangan bulat positif (yakni $(m - 1)$) yang lebih besar daripada $(m + 1)$. Ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $\mathbb{N}$ adalah himpunan terbatas.

Step 6. Karena telah mencapai kontradiksi, maka kita telah membuktikan **Sifat Archimedes**, yang menyatakan bahwa tidak ada batasan atas pada himpunan bilangan asli.

3.6 Barisan Istimewa

1. Barisan Triangular

   Barisan triangular merupakan barisan bilangan yang membentuk pola segitiga. Setiap elemen barisan merupakan jumlah dari bilangan asli berurutan. Berikut adalah beberapa sifat barisan triangular: Elemen ke$-n$ dari barisan triangular adalah hasil penjumlahan dari semua bilangan asli dari 1 hingga n. Misalnya, elemen ke-5 adalah $1+2+3+4+5=15$.

Barisan triangular dapat dihitung menggunakan rumus umum:

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Contoh barisan triangular: $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

2. Barisan Oblong

   Barisan oblong (atau sering juga disebut barisan rectangular) adalah barisan bilangan yang membentuk persegi panjang. Barisan ini dapat dianggap sebagai barisan dua dimensi yang mewakili jumlah seluruh bilangan asli dari 1 hingga n pada setiap baris atau kolom. Beberapa sifat barisan oblong antara lain: Elemen ke-n dari barisan oblong adalah hasil penjumlahan dari semua bilangan asli dari 1 hingga n, dan dapat dinyatakan sebagai produk n dengan elemen ke$-n$ dari barisan triangular. Misalnya, elemen ke-5 dari barisan oblong adalah $5 \cdot 15 = 75$ (dengan mengambil hasil dari barisan triangular di atas).

   Rumus umum untuk menghitung elemen ke$-n$ dari barisan oblong adalah

$$O(n) = n \cdot T(n)$$

   Contoh barisan oblong: $1, 4, 10, 20, 35, \ldots$

3. Barisan Kuadrat

   Barisan kuadrat merupakan barisan bilangan yang membentuk pola kuadratik. Setiap elemen barisan dihasilkan dengan mengalikan bilangan asli berurutan dengan dirinya sendiri. Beberapa sifat barisan kuadrat antara lain: Elemen ke$-n$ dari barisan kuadrat adalah n^2 , di mana n adalah nomor urut elemen tersebut. Misalnya, elemen ke-5 adalah $5^2 = 25$.

   Rumus umum untuk menghitung elemen ke$-n$ dari barisan kuadrat adalah

$$Q(n) = n^2$$

   Contoh barisan kuadrat: $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

   Semua tiga barisan ini memiliki sifat-sifat khusus yang membuatnya menarik dalam matematika dan memiliki banyak aplikasi dalam berbagai masalah dan struktur.

Latihan

1. Tentukan apakah bilangan 123 dan 153 adalah bilangan istimewa.
2. Tentukan elemen ke-7 dari barisan triangular, barisan oblong, dan barisan kuadrat.
3. Tentukan elemen ke-10 dari barisan triangular, barisan oblong, dan barisan kuadrat.
4. Buktikan bahwa ada bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1000 dan dapat dibagi habis oleh 37.
5. Buktikan bahwa ada dua bilangan bulat positif yang jumlahnya 100.
6. Buktikan bahwa ada bilangan bulat positif yang lebih dari dua kali lipat bilangan bulat positif lainnya.

Induksi Matematika dan Teorema Binomial

4.1 Induksi Matematika

Induksi matematik merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Contoh 4.1. Benarkah pernyataan berikut ini?

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} \cdot n(n + 1)$$

Untuk menjawab pertanyaan berikut kita dapat mensubstitusikan n dalam pernyataan tadi dengan n bilangan asli.

- Jika $n = 1$, maka $1 = \frac{1}{2} \cdot 1(1 + 1)$, diperoleh pernyataan yang benar.
- Jika $n = 2$, maka $1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2(2 + 1)$, diperoleh pernyataan yang benar.
- Jika $n = 3$, maka $1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 3(3 + 1)$, diperoleh pernyataan yang benar.

Karena anggota bilangan asli itu ada tak berhingga bayaknya maka cara yang efisien yang dapat dilakukan adalah dengan menerapkan langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika.
Sekarang kita akan menerapkan langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika untuk membuktikan:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} \cdot n(n + 1)$$

Bukti. .

Step 1. Misalkan $p(n)$ menyatakan $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2} \cdot n(n+1)$ sehingga $p(1)$ menyatakan $1 = \frac{1}{2} \cdot 1(1 + 1)$ yang mana pernyataan tersebut benar.

Step 2. Asumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k, sehingga $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2} \cdot k(k+1)$ merupakan pernyataan benar.

Step 3. Dengan memanfaatkan asumsi pada step 2, kita akan tunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 = \frac{1}{2} \cdot (k+1)(k+2)$$

Hal ini bisa ditunjukkan dengan sedikit manipulasi berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot k(k+1) + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\frac{1}{2}k + 1\right) \\ &= (k+1) \cdot \frac{1}{2}(k+2) \end{aligned}$$

Ternyata $1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 = \frac{1}{2} \cdot (k+1)(k+2)$, sehingga $p(k+1)$ benar. Dengan demikian $p(n)$ juga benar untuk setiap bilangan asli n.

□

Contoh 4.2. Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ untuk semua bilangan asli n.

Bukti. .

Step 1. Misalkan $p(n)$ menyatakan $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ sehingga $p(1)$ menyatakan $1 = 1^2$ yang mana pernyataan tersebut benar.

Step 2. Asumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k, sehingga $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$ merupakan pernyataan benar.

Step 3. Dengan memanfaatkan asumsi pada step 2, kita akan tunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k+1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$$

Hal ini bisa ditunjukkan dengan sedikit manipulasi berikut:

$$\begin{aligned} 1+3+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= (1+3+\cdots+(2k-1))+(2k+1) \\ &= k^2+(2k+1) \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Ternyata $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$, sehingga $p(k+1)$ benar. Dengan demikian $p(n)$ juga benar untuk setiap bilangan asli n. □

4.2 Teorema Binomial

Teorema binomial banyak digunakan dalam penurunan beberapa teorema dan pemecahan masalah dalam matematika. Oleh karena itu penguasaan kemampuan-kemampuan tersebut sangat penting bagi mereka yang akan mempelajari matematka karena banyak bahasan dalam matematika yang menggunakan prinsif-prinsif tersebut untuk menurunkan teorema atau untuk pemecahan masalah.
Binom adalah suatu ungkapan yang memuat tepat dua suku yang dipisahkan oleh tanda + atau −. Contohnya $(x+2y)$ atau $(3x-4y)$ dan lain sebagainya. Dalam pembahasan kali ini kita akan mengembangkan rumus penjabaran dari perpangkatan binom, yaitu rumus untuk $(a+b)^n$ dengan a, b bilangan real dan n bilangan asli. Perhatikan contoh-contoh berikut ini :

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ (a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \end{aligned}$$

Dengan memperhatikan contoh-contoh tadi maka kita dapat mengambil sustu kesimpulan bahwa sifat-sifat perluasan dari $(a+b)^n$ adalah sebagai berikut:

a Suku pertama adalah a^n dan suku terakhir adalah b^n.

b Pangkat dari a mengecil dan pangkat dari b membesar.

c Jumlah pangkat dari a dan pangkat dari b di setiap suku sama dengan n.

d Terdapat $n+1$ suku.

e Koefisien suku ke-r adalah $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ dengan $0 \leq r \leq n$.

Teorema 4.3 (Teorema Binomial). Untuk setiap bilangan bulat positif n dan setiap bilangan real a dan b, berlaku:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 \cdot b^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r\end{aligned}$$

Contoh 4.4. Penjabaran dari $(x+3y)^3$ adalah:

$$\begin{aligned}(x+3y)^3 &= \sum_{r=0}^{3} \binom{3}{r} x^{n-r}(3y)^r \\ &= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(3y) + \binom{3}{2}x(3y)^2 + \binom{3}{3}(3y)^3 \\ &= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3y + 3 \cdot x \cdot (3y)^2 + 1 \cdot (3y)^3 \\ &= x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3\end{aligned}$$

Contoh 4.5. Suku ke–7 dari $(x+3y)^{10}$ adalah

$$\binom{10}{6} \cdot x^{10-6} \cdot (3y)^6 = 153090x^4y^6$$

Latihan

1. Buktikan pernyataan-pernyataan berikut benar untuk setiap bilangan asli n.

   a. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

   b. $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$

   c. $4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 1) = \dfrac{n(3n + 5)}{2}$

   d. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n + 1)^2}{4}$

2. Gunakan Teorema binomial untuk menjabarkan bentuk berikut.

   a. $(2x + 3y)^6$

   b. $(x + 4y)^5$

   c. $(5x + xy)^4$

3. Tentukan koefisien x^4y^4 dari hasil ekspansi berikut.

   a. $(4x + 2y)^6$

   b. $(7x + 3y)^7$

   c. $(2x + 3xy)^5$

Basis Bilangan

5.1 Bilangan Basis Sepuluh (Desimal)

Bilangan basis sepuluh, juga dikenal sebagai sistem desimal, adalah sistem bilangan yang paling umum digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Bila banyaknya anggota suatu himpunan kelompok sepuluhnya ada sepuluh kelompok maka dijadikan kelompok baru yaitu kelompok ratusan.

Lambang bilangan dalam sistem bilangan dasar dengan basis sepuluh terdapat sepuluh buah yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Contoh bilangan dasar sepuluh diantaranya adalah sebagai berikut:

Contoh 5.1. $454 = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

Contoh 5.2. $3456_{(10)} = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$

Sistem desimal sangat efisien dan mudah dipahami, terutama karena jumlah jari tangan manusia yang ada sepuluh. Itulah sebabnya sistem ini menjadi standar yang digunakan secara luas dalam berbagai aplikasi matematika dan kehidupan sehari-hari.

5.2 Bilangan Basis Dua (Biner)

Bilangan basis dua, atau juga dikenal sebagai sistem biner, merupakan sistem bilangan yang hanya menggunakan dua digit, yaitu 0 dan 1. Setiap digit dalam sebuah bilangan biner disebut "bit" (binary digit), dan setiap posisi digit dalam bilangan biner memiliki nilai tempat yang merupakan pangkat dari 2.

Contoh 5.3. $1001_{(2)}$ dan $101011_{(2)}$ adalah bilangan biner.

Bilangan biner dapat dikonversi menjadi desimal.

Contoh 5.4. $101_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5_{(10)}$

5.3 Bilangan Basis Delapan (Oktal)

Bilangan basis delapan, atau biasa disebut sistem oktal adalah sistem bilangan yang menggunakan delapan digit berbeda, yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Setiap digit dalam bilangan oktal memiliki nilai tempat yang merupakan pangkat dari 8.
Bilangan oktal sering digunakan dalam bidang komputasi dan elektronika digital karena lebih mudah dibaca dan ditulis daripada bilangan biner. Setiap digit oktal dapat langsung dikonversi ke tiga digit biner, yang sangat berguna dalam representasi data di komputer. Selain itu, beberapa bahasa pemrograman dan sistem operasi menggunakan bilangan oktal untuk mewakili izin file dan alamat memori.

5.4 Bilangan Basis Enam Belas (Heksadesimal)

Bilangan basis enam belas, juga dikenal sebagai sistem heksadesimal, adalah sistem bilangan yang menggunakan enam belas digit. Karena bilangan yang sering kita kenal itu ada sepuluh buah maka kita memerlukan lima angka baru. Digit-digit yang digunakan dalam sistem heksadesimal adalah $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$. Dalam sistem ini, setiap digit memiliki nilai tempat yang merupakan pangkat dari 16.

Contoh 5.5. $23_{(10)} = 1 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = 17_{(16)}$

Contoh 5.6. $2A7_{(16)} = 2 \cdot 16^2 + A \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = 512 + 10 \cdot 16 + 7 = 679_{(10)}$

5.5 Bilangan Basis untuk Pecahan

Sistem desimal diperkenalkan ke Eropa pada tahun 1202 oleh $\mathsf{Leonardo\ Fibonacci}$ dari Pisa dalam bukunya *Liber Abaci*. Namun, ini hanya berlaku untuk representasi bilangan bulat. Representasi desimal dari pecahan tidak benar-benar berkembang sampai tahun 1585 ketika $\mathsf{Simon\ Stevin}$ dari Flanders menerbitkan pamfletnya *De Thiende* bersamaan dengan terjemahan bahasa Prancisnya *La Disme*. Fibonacci sendiri menggunakan basis 60 (ditemukan oleh bangsa Babilonia kuno) untuk mengekspresikan pecahan (sesuatu seperti $10°13'45'' \ldots$ - tentu saja mengingatkan pada notasi derajat/menit/detik yang masih digunakan hingga saat ini).
Kita tahu bahwa, bilangan bulat M dalam basis $N > 0$ dapat diekspresikan sebagai

$$M = a_k N^k + a_{k-1} N^{k-1} + \cdots + a_1 N^1 + a_0$$

Untuk menyertakan pecahan, seperti yang lazim dalam sistem desimal, kita diperbolehkan menggunakan pangkat negatif

$$M = a_k N^k + a_{k-1} N^{k-1} + \cdots + a_1 N^1 + a_0 + a_{-1} N^{-1} + a_{-2} N^{-2} + \cdots + a_{-m} N^{-m} + \ldots$$

Dengan analogi pada sistem desimal, bentuk di atas dapat disederhanakan menjadi

$$M = (\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots})_N$$

di mana semua koefisien a_m memenuhi $0 \leq a_m < N$. Tanda koma $(,)$ (atau dalam penulisan bahasa Inggris biasanya tanda titik $(.)$) di antara a_0 dan a_{-1} (atau bagian bilangan bulat dan pecahan) dikenal sebagai titik radix atau titik basis$-N$ (biner, terner, desimal, dll., tergantung pada basis yang digunakan). Prosedur yang terpisah berlaku untuk konversi bagian bilangan bulat (yang berada di sebelah kiri titik radix) dan bagian pecahan (yang berada di sebelah kanan titik radix). Di sini saya akan membahas prosedur yang terakhir.

Contoh 5.7. Sebagai contoh, $\frac{1}{4}$ diklaim sama dengan $(0.020202\ldots)_3$ yang memenuhi syarat sebagai anggota himpunan *Cantor* C_0. Mari kita verifikasi fakta ini.

Kita mencari representasi

$$0,25 = a_{-1}3^{-1} + a_{-2}3^{-2} + a_{-3}3^{-3} + \ldots$$

dengan a_m adalah 0, 1, atau 2. Kalikan persamaan ini dengan 3:

$$0,75 = a_{-1} + a_{-2}3^{-1} + a_{-3}3^{-2} + \ldots$$

dan perhatikan bahwa di sebelah kiri kita masih memiliki pecahan murni sementara di sebelah kanan a_{-1} adalah bilangan bulat. Kedua sisi hanya dapat sama jika $a_{-1} = 0$. Jadi kita sebenarnya memiliki

$$0,75 = a_{-2}3^{-1} + a_{-3}3^{-2} + \ldots$$

Kalikan lagi dengan 3:

$$2,25 = a_{-2} + a_{-3}3^{-1} + \ldots$$

Jika dua bilangan sama, bagian bilangan bulat dan pecahannya harus sama. Jadi kita memiliki $2 = a_{-2}$ dan

$$0,25 = a_{-3}3^{-1} + a_{-4}3^{-2} + \ldots$$

Algoritmanya sederhana: terus kalikan dengan 3 (atau radix N dalam kasus umum), singkirkan bagian bilangan bulat yang diperoleh dan tulis secara berurutan. Jelas, dalam kasus $\frac{1}{4}$ dan $N = 3$, kita akan memiliki pecahan periodik $\frac{1}{4} = (0.020202\ldots)_3$ dengan $a_{-3} = 0$ dan $a_{-4} = 2$, dan seterusnya.
Kita dapat memverifikasi ekspresi untuk $\frac{1}{4}$ melalui rumus untuk jumlah deret geometrik. Untuk $0 < |q| < 1$,

$$a_0 + a_0 q^{-1} + a_0 q^{-2} + \ldots = \frac{a_0}{1-q} \tag{5.1}$$

Memang,

$$\begin{aligned}(0.020202\ldots)_3 &= 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-4} + 2 \cdot 3^{-6} + \ldots \\ &= 2 \cdot 9^{-1} + 2 \cdot 9^{-2} + \ldots \\ &= \frac{2 \cdot 9^{-1}}{1 - \frac{1}{9}}\end{aligned}$$

yang akhirnya memberikan $\frac{1}{4}$.

Contoh 5.8. Mari kita representasikan $\frac{1}{2}$ dalam basis 5.
Perhatikan bahwa $0.5 \cdot 5 = 2.5$. Oleh karena itu, $a_{-1} = 2$ dan bagian pecahan yang tersisa masih sama, yaitu 0.5. Oleh karena itu, $\frac{1}{2} = (0.22222\ldots)_5$ yang sekali lagi dapat diverifikasi dengan rumus penjumlahan 5.1 bahwa $(0.22222\ldots)_5 = \frac{2/5}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$.

Contoh 5.9. $(0.002002002\ldots)_3 = \frac{2/27}{1-\frac{1}{27}} = \frac{1}{13}$.

Sekarang Anda dapat memverifikasi bahwa

$$\begin{aligned}\pi &= (3.1415926535\ldots)_{10} \\ &= (11.0010010000111 1\ldots)_2 \\ &= (10.0102110\ldots)_3 \\ &= (3.066365\ldots)_7 \\ &= (3.124188\ldots)_9 \\ &= (3.243F6\ldots)_{16}\end{aligned}$$

Latihan

1. Ubahlah bilangan-bilangan 23, 45, 412 ke dalam basis bilangan:

   a. Bilangan basis dua

   b. Bilangan basis lima

   c. Bilangan basis tujuh

   d. Bilangan basis delapan

   e. Bilangan basis dua belas

   f. Bilangan basis lima belas

2. Ubahlah ke dalam bentuk desimal!

   a. $1011001_{(2)}$

   b. $43525_{(8)}$

   c. $A8543_{(12)}$

   d. $BA765_{(15)}$

   e. $0,4_{(7)}$

   f. $0,6_{(12)}$

   g. $3,A_{(12)}$

3. Hitunglah

   (a) $1234_{(5)} + 432_{(5)} = \ldots\ldots_{(5)}$

   (b) $BA2_{(12)} + B29_{(15)} = \ldots\ldots_{(8)}$

   (c) $BA4_{(12)} - AAA_{(12)} = \ldots\ldots_{(12)}$

   (d) $10010_{(2)} - 1011_{(2)} = \ldots\ldots_{(5)}$

   (e) $123_{(5)} \cdot 321_{(5)} = \ldots\ldots_{(8)}$

   (f) $B7_{(12)} \cdot BA_{(12)} = \ldots\ldots_{(15)}$

Keterbagian

6.1 Pendahuluan

Definisi 6.1. Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b ditulis $a|b$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $b = ka$. Jika a tidak habis membagi b maka ditulis $a \nmid b$

Properti 6.2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku

1. Sifat Reflexive: $a \mid a$.
2. Sifat Keterbagian Trivial: $1 \mid a$ dan $a \mid 0$.
3. Sifat Symmetric: Jika $a \mid b$ dan $b \mid a$, maka, $a = \pm b$.
4. Sifat Transitive: Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$.
5. Sifat Distributive: Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid (b + c)$, atau $a \mid (bx + cy)$ untuk suatu $x, y \in \mathbb{Z}$.
6. Jika $a|b$, maka $a|bc$.
7. Jika $a|c$ dan $b|c$, maka $ab|c$.
8. Jika $a|b$ dengan $b \neq 0$ maka $|a| \leq |b|$
9. Jika diberikan $a \neq 0$ dan barisan $0, 1, 2, 3, \ldots, |a| - 1$, maka selisih dua bilangan sembarang dalam barisan itu tidak habis dibagi oleh a.
10. Algoritma Pembagian: Untuk sembarang a dan b dengan $a > 0$, pasti terdapat $q, r \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $b = aq + r$ dengan $0 \leq r \leq a$.
11. Alternatif Algoritma Pembagian: Untuk sembarang a dan b dengan $a \neq 0$, pasti terdapat $q, r \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $b = aq + r$ dengan $0 \leq r \leq |a|$.

6.2 Bilangan Habis Dibagi

6.2.1 Bilangan Habis Dibagi Dua

Suatu bilangan habis dibagi dua jika bilangan yang diwakili oleh angka terakhirnya genap.

Bukti. Misalkan bilangan tersebut adalah

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $a_i \in \mathbb{N}$ untuk $0 \leq i \leq n$. Perhatikan bahwa untuk $1 \leq i \leq n$, 10^i pasti habis dibagi 2. Dengan demikian x akan habis dibagi 2 jika dan hanya jika a_0 habis dibagi 2. Dengan kata lain x akan habis dibagi 2 jika dan hanya jika digit terakhirnya habis dibagi 2. □

Perhatikan bahwa untuk $2 \leq i \leq n$, maka 10^i pasti habis dibagi empat. Sehingga x akan habis dibagi empat jika dan hanya jika $a_1 \cdot 10 + a_0$ habis dibagi empat. Atau dengan kata lain, x akan habis dibagi empat jika dan hanya jika dua digit terakhirnya habis dibagi empat.

Contoh 6.3. Bilangan 20252026 habis dibagi 2 karena $2|6$.

Contoh 6.4. Bilangan 9999999999964 habis dibagi 4 karena $4|64$

Exercise 4.2.1. Dapat dibuktikan oleh pembaca bahwa hal ini berlaku untuk 2^n, yaitu bilangan x akan habis dibagi 2^n jika dan hanya jika n digit terakhirnya habis dibagi 2^n.

6.2.2 Bilangan Habis Dibagi Tiga

Suatu bilangan bulat habis dibagi tiga jika dan hanya jika jumlah digit penyusunnya habis dibagi tiga.

Bukti. Misallkan bilangan tersebut adalah

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Perhatikan bahwa $10^m \equiv 1 \pmod 3$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Sehingga

$$x \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 3$$

Dengan demikian x akan habis dibagi 3 jika dan hanya jika $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ habis dibagi 3. Atau dengan kata lain jumlah digitnya harus habis dibagi 3. □

Exercise 4.2.2. Gunakan cara di atas untuk membuktikan ciri bilangan yang habis dibagi 9.

6.2.3 Bilangan Habis Dibagi Lima

Suatu bilangan bulat habis dibagi lima jika dan hanya jika digit terakhirnya habis dibagi lima.

Bukti. Misalkan bilangan tersebut adalah

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Perhatikan bahwa untuk $1 \leq i \leq n$, maka 10^i habis dibagi 5. Dengan demikian tersisa $x \equiv a_0 \pmod 5$. Atau dengan kata lain, x akan habis dibagi lima jika dan hanya jika a_0, yaitu digit terakhirnya habis dibagi lima. □

Perhatikan bahwa untuk $2 \leq i \leq n$, maka 10^i habis dibagi 25. Sehingga $x \equiv a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod{25}$. Dengan kata lain, x akan habis dibagi 25 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya habis dibagi 25.

Contoh 6.5. Bilangan 12345 dan 43210 keduanya habis dibagi 5.

Contoh 6.6. Karena $25|25$, maka 202720262025 adalah bilangan yang habis dibagi 25

Exercise 4.2.3 Buktikan bahwa suatu bilangan bulat akan habis dibagi 5^k jika dan hanya jika k digit terakhirnya habis dibagi 5^k.

6.2.4 Bilangan Habis Dibagi Enam

Karena $6 = 2 \cdot 3$, maka:
Suatu bilangan bulat akan habis dibagi enam jika dan hanya jika bilangan tersebut habis dibagi dua dan tiga.

6.2.5 Bilangan Habis dibagi Sebelas

Suatu bilangan habis dibagi 11 jika pada bilangan tersebut jumlah bilangan yang diwakili oleh angka pada tempat ganjil (dihitung dari kanan) dikurangi dengan jumlah bilangan yang diwakili oleh angka-angka pada tempat genap habis dibagi 11.

Bukti. Misalkan $x = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$ adalah suatu bilangan asli dengan $0 \le a_i \le 9$ untuk $0 \le i \le n$

$$x = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Perhatikan bahwa untuk n genap maka,

$$\begin{aligned} x &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \\ &\equiv a_n \cdot (1) + a_{n-1} \cdot (-1) + \dots + a_1(-1) + a_0 \pmod{11} \\ &\equiv (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_0 \pmod{11} \end{aligned}$$

Jadi agar x habis dibagi 11, haruslah $(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_0$ habis dibagi 11.
Selanjutnya tinjau untuk n ganjil, maka

$$\begin{aligned} x &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \\ &\equiv a_n \cdot (-1) + a_{n-1} \cdot (1) + \dots + a_1(1) + a_0 \pmod{11} \\ &\equiv (a_{n-1} - a_n) + (a_{n-3} - a_{n-2}) + \dots + (a_1 - a_2) + a_0 \pmod{11} \end{aligned}$$

Jadi agar x habis dibagi 11 haruslah $(a_{n-1} - a_n) + (a_{n-3} - a_{n-2}) + \dots + (a_1 - a_2) + a_0$ habis dibagi 11.
$\therefore$ x akan habis dibagi 11 jika dan hanya jika jumlah dari semua selisih tiap pasang dua digit yang berselingan habis dibagi 11. $\square$

Latihan

1. Tanpa melakukan pembagian, apakah bilangan berikut ini habis dibagi oleh 9?

   a 176521221

   b 149235678

2. Tentukan semua bilangan asli tujuh digit yang habis dibagi 6 serta digit-digitnya hanya terdiri dari 0 atau 1 saja.

3. Apakah ada nilai p sehingga bilangan $2p17p6$ habis dibagi 8? Jika ada, tentukan!

4. Bilangan $2024202x20y6$ habis dibagi 11. Tentukan nilai x dan y yang mungkin.

5. **(XTRA HOTS)**. Misalkan a, b dan c adalah bilangan yang mewakilkan satu digit dari $N = \overline{2024a2025b2026c}$. Diketahui N habis dibagi 792, tentukan nilai minimal dari $a + b + c$.

FPB dan KPK

7.1 Faktor Persekutuan Terbesar

Kita tahu bahwa semua faktor bulat positif dari 30 adalah $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$, dan 30. Sedangkan semua faktor bulat positif dari 45 adalah $1, 3, 5, 9, 15$, dan 45. Maka faktor-faktor persekutuan dari 30 dan 45 adalah $1, 3, 5$, dan 15. Faktor persekutuan terbesar dari 30 dan 45 adalah 15. Secara umum, pengertian tentang faktor persekutuan dari dua buah bilangan bulat dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 7.1. Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat, maka bilangan bulat d disebut faktor persekutuan dari a dan b, jika dan hanya jika $d|a$ dan $d|b$.

Definisi 7.2. Karena 1 adalah pembagi (faktor) dari setiap bilangan bulat, maka 1 adalah faktor persekutuan dari dua bilangan bulat sembarang a dan b. Jadi himpunan faktor persekutuan dari a dan b tidak pernah kosong.

Definisi 7.3. Setiap bilangan bulat bukan nol selalu membagi nol, sehingga jika $a = b = 0$, maka semua bilangan bulat merupakan faktor persekutuan dari a dan b. Dengan kata lain, himpunan semua faktor persekutuan dari a dan b merupakan himpunan tak hingga.

Definisi 7.4. Jika setidaknya satu dari a dan b tidak sama dengan nol, maka himpunan semua faktor persekutuan dari a dan b merupakan himpunan berhingga. Sehingga mesti ada anggota dari himpunan tersebut yang terbesar dan disebut faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b. Notasi (b, c) menyatakan FPB dari b dan c.

Definisi 7.5. Jika dua bilangan bulat positif a dan b dengan $(a, b) = 1$, maka dikatakan bahwa a **dan** b **saling prima** atau a **prima relatif terhadap** b.

Properti 7.6. Jika $d = (a, b)$, maka diperoleh beberapa properti berikut.

1. Terdapat bilangan bulat x_0 dan y_0 sedemikian sehingga $d = ax_0 + by_0$.
2. d merupakan bilangan bulat positif terkecil yang berbentuk $ax + by$ untuk x dan y bilangan bulat.
3. d merupakan pembagi persekutuan yang positif dari a dan b serta d terbagi oleh pembagi persekutuan a dan b.
4. Untuk sembarang bilangan bulat $p > 0$ berlaku $(pa, pb) = p \cdot (a, b)$.
5. Jika $d > 0$, maka $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$
6. Jika $a|bc$ dan $(a, b) = 1$, maka $a|b$

Contoh 7.7. Mudah dibuktikan

- $(-12, 30) = 6$
- $\gcd(5, 155) = 5$
- $\text{FPB}(2024, 2025) = 1$

Misalkan a dan b dua bilangan bulat dengan $a > 0$, maka b dibagi oleh a akan memberikan hasil bagi dan sisa pembagian. Hal ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini dan terkenal dengan nama **Algoritma Pembagian**.

Teorema 7.8. Jika a dan b bilangan-bilangan bulat dengan $a > 0$, maka ada pasangan bilangan-bilangan bulat q dan r yang memenuhi $b = qa + r$, dengan $0 \leq r < a$.

Bilangan-bilangan bulat q dan r dalam teorema ini berturut-turut disebut hasil bagi dan sisa dalam pembagian b oleh a. Teorema tersebut dapat diperluas untuk $a < 0$, sehingga diperoleh teorema berikut.

Teorema 7.9 (Algoritma Pembagian.)**.** Jika a dan b bilangan-bilangan bulat dengan $b \neq 0$, maka ada pasangan bilangan-bilangan bulat q dan r sedemikian hingga $b = aq + r$ dengan $0 \leq r < |a|$.

Pembagi persekutuan terbesar ini dapat diperluas lebih dari dua bilangan. Dalam kasus tiga bilangan, misalkan $a, b,$ dan c bilangan yang tidak nol, maka $\gcd(a, b, c) = d$ adalah bilangan bulat positif yang memenuhi sifat berikut

- d merupakan pembagi dari a , b dan c (b)
- Jika c membagi $a, b,$ dan c, maka $c \leq d$

Contoh 7.10. Sebagai contoh, $\gcd(39, 42, 54) = 3)$ dan $\gcd(49, 210, 350) = 7$.

7.2 Kelipatan Persekutuan Terkecil

Definisi 7.11. Kelipatan persekutuan terkecil (least common multiple) dari dua bilangan bulat a dan b yang tidak nol dituliskan $\operatorname{lcm}(a, b)$ adalah bilangan bulat positif m yang memenuhi $a|m$ dan $b|m$ serta jika $a|c$ dan $b|c$ untuk suatu bilangan asli c, maka $m \leq c$

Teorema 7.12. Untuk a dan b bilangan bulat positif, maka $\gcd(a, b) \cdot \operatorname{lcm}(a, b) = a \cdot b$.

Bukti. Misalkan $d = \gcd(a, b)$, maka $a = dr$ dan $b = ds$ untuk suatu r dan s bilangan bulat. Jika $m = \frac{ab}{d}$ □

Teorema 7.13. Untuk setiap bilangan bulat positif a dan b, maka $\operatorname{lcm}(a, b) = a \cdot b$ jika dan hanya jika $\gcd(a, b) = 1$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 7.12,

$$\gcd(a, b) \cdot \operatorname{lcm}(a, b) = a \cdot b$$

Jika $\operatorname{lcm}(a, b) = ab$, maka $\gcd(a, b) = \frac{ab}{ab} = 1$.
Jika $\gcd(a, b) = 1$, maka $\operatorname{lcm}(a, b) = \frac{ab}{1} = ab$ □

Latihan

1. Buktikan keenam properti di atas.
2. Tentukan FPB dari bilangan-bilangan berikut ini :
   a. 2497 dan 3997
   b. 31894 dan 130217
   c. 123456789 dan 987654321
   d. 1234321 dan 4321234
3. Carilah nilai dari gcd$(143, 227)$ dan lcm$(306, 657)$
4. Diketahui $x \cdot y = 2025$ dan gcd$(x, y) = 45$. Tentukan nilai lcm(x, y).
5. Tetukan nilai dari gcd$(20^{24}, 102^4)$

Algoritma Euclid

8.1 Pendahuluan

Algoritma Euclid digunakan untuk mencari fpb dari dua buah bilangan. Sebelum itu, pahami Lemma berikut

Lemma 8.1. Jika $a = bq + r$ maka $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$

Bukti. Jika $d = \gcd(a, b)$, maka $d|a$ dan $d|b$, mengakibatkan $d|(a-qb) \iff d|r$. Jadi d pembagi persekutuan dari b dan r. Di lain pihak, jika c sebarang pembagi persekutuan dari b dan r, maka $c|(qb+r) \iff c|a$. Ini mengakibatkan c merupakan pembagi persekutuan dari a dan b dengan $c \leq d$ Berdasarkan definisi pembagi persekutuan terbesar, maka $d = \gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ $\square$

8.2 Penggunaan

Misalkan akan dicari pembagi persekutuan terbesar dari bilangan bulat a dan b. Karena $\gcd(|a|, |b|) = \gcd(a, b)$, misalkan $a \geq b > 0$. Langkah pertama menerapkan algoritma pembagian terhadap a dan b adalah

$$a = q_1 \cdot b + r_1, \qquad \text{dengan} \qquad 0 \leq r_1 < b$$

Jika terjadi $r_1 = 0$, maka $b|a$ sehingga $\gcd(a, b) = b$. Jika $r_1 \neq 0$, maka bagilah b oleh r_1 sehingga diperoleh

$$b = q_2 \cdot r_1 + r_2, \qquad \text{dengan} \qquad 0 \leq r_2 < r_1$$

Jika terjadi $r_2 = 0$, maka $r_1|b$ sehingga $\gcd(a, b) = r_1$. Jika $r_2 \neq 0$, maka bagilah r_1 oleh r_2 sehingga diperoleh

$$r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3, \qquad \text{dengan} \qquad 0 \leq r_3 < r_2$$

Proses ini dilanjutkan sampai sisa pembagian nol, katakanlah pada langkah ke-$(n+1)$ yang mana r_{n-1} dibagi r_n dengan $b > r_1 > r_2 > \cdots > 0$. Proses ini akan menghasilkan sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} a &= q_1 \cdot b + r_1, & 0 \le r_1 < b \\ b &= q_2 \cdot r_1 + r_2, & 0 \le r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3, & 0 \le r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, & 0 \le r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan , dari sistem sistem persaaman di atas diperoleh $\gcd(a,b) = \gcd(b, r_1) = \gcd(r_1, r_2) = \cdots = \gcd(r_{n-1}, r_n) = \gcd(r_n, 0) = r_n$.

Contoh 8.2. Algoritma Euclid dapat digunakan untuk $\gcd(12378, 3054)$. Berdasarkan algoritma pembagian diperoleh

$$\begin{aligned} 12378 &= 4 \cdot 3054 + 162 \\ 3054 &= 18 \cdot 162 + 138 \\ 162 &= 1 \cdot 138 + 24 \\ 138 &= 5 \cdot 24 + 18 \\ 24 &= 1 \cdot 18 + 6 \\ 18 &= 3 \cdot 6 + 0 \end{aligned}$$

Seperti telah dikatakan sebelumnya bahwa sisa terakhir yang bukan nol dari persamaan tersebut yaitu 6 merupakan pembagi persekutuan terbesar dari 12378 dan 3054, jadi $6 = \gcd(12378, 3054)$.

Pada teorema di Bab 5 sebelumnya juga menyatakan bahwa $\gcd(a, b)$ dapat dapat dinyatakan sebagai $ax + by$. Untuk menentukan x dan y yang memenuhi $\gcd(a, b) = ax + by$ adalah dengan mensubstitusikan balik *Algoritma euclid* ini. Yaitu,

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-2} - q_n \cdot r_{n-1} \\ &= r_{n-2} - q_n \cdot (r_{n-3} - q_{n-1} \cdot r_{n-2}) \\ &= (1 + q_n \cdot q_{n-1}) \cdot r_{n-2} - q_n \cdot r_{n-3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Representasi r_n sebagai kombinasi linear dari r_{n-2} dan r_{n-3}. Dengan meneruskan substitusi balik dari sistem persamaan tersebut, kita akan berhasil mengeliminasi r_{n-1}, r_{n-2}, $\ldots$, r_2, r_1 sehingga $r_n = \gcd(a, b)$ dinyatakan sebagai kombinasi linear dari a dan b.

Contoh 8.3. Untuk menyatakan 6 sebagai kombinasi linear dari 12378 dan 3054, kita mulai dari persamaan sebelum persamaan terakhir dan selanjutnya mengeliminasi sisa- sisa 18, 24, 138, dan 162.

$$\begin{aligned}
6 &= 24 - 18 \\
&= 24 - (138 - 5 \cdot 24) \\
&= 6 \cdot 24 - 138 \\
&= 6(162 - 138) - 138 \\
&= 6 \cdot 162 - 7 \cdot 138 \\
&= 6 \cdot 162 - 7(3054 - 18 \cdot 162) \\
&= 132 \cdot 162 - 7 \cdot 3054 \\
&= 132(12378 - 4 \cdot 3054) - 7 \cdot 3054 \\
&= 132 \cdot 12378 + (-535)3054
\end{aligned}$$

Jadi $\gcd(a, b) = 6 = 12378x + 3054y$ dengan $x = 132$ dan $y = -535$. Tapi perlu diingat bahwa solusi x dan y yang memenuhi $\gcd(a, b) = 6 = 12378x + 3054y$ tidaklah tunggal, misalnya

$$\gcd(a, b) = 6 = 12378(132 + 3054) + 3054(-12913)$$

juga memenuhi.

8.3 Lainnya

Matematikawan Perancis, Gabriel Lammè (1793-1870) membuktikan bahwa banyaknya langkah yang diperlukan dalam algoritma Euclid ini paling banyak 5 kali banyaknya digit dari bilangan yang lebih kecil. Misalnya , dalam menentukan $\gcd(12378, 3054)$ di atas, bilangan 3054 (lebih kecil dari 12378) memiliki empat digit, maka langkah algoritma Euclid tidak akan lebih dari $5 \cdot 4 = 20$ langkah. Kenyataannya proses tersebut hanya mnemerlukan 6 langkah.

Perlu dicatat pula bahwa langkah dalam algoritma Euclid ini biasanya dapat disingkat lagi dengan memilih sisa r_{k+1} sehingga $|r_{k+1}| < \frac{r_k}{2}$. Contoh soal di atas dapat diselesaikan lebih singkat seperti berikut

$$\begin{aligned}
12378 &= 4 \cdot 3054 + 162 \\
3054 &= 19 \cdot 162 - 24 \\
162 &= 1 \cdot 138 + 24 \\
138 &= 7 \cdot 24 - 6 \\
24 &= (-4)(-6) + 0
\end{aligned}$$

Teorema 8.4. Jika $k > 0$, maka $\gcd(ka, kb) = k \cdot \gcd(a, b)$.

Bukti. Dengan mengalikan k terhadap proses algoritma Euclid yang telah diuaraikan sebelumnya, diperoleh:

$$\begin{aligned}
ka &= q_1(b \cdot k) + r_1 \cdot k, && 0 \le r_1 \cdot k < b \cdot k \\
b &= q_2(r_1 \cdot k) + r_2 \cdot k, && 0 \le r_2 \cdot k < r_1 \cdot k \\
r_1 &= q_3(r_2 \cdot k) + r_3 \cdot k, && 0 \le r_3 \cdot k < r_2 \cdot k \\
&\vdots \\
r_{n-2} \cdot k &= q_n(r_{n-1} \cdot k) + r_n \cdot k, && 0 \le r_n \cdot k < r_{n-1} \cdot k \\
r_{n-1} \cdot k &= q_{n+1}(r_n \cdot k) + 0
\end{aligned}$$

□

Dengan demikian $\gcd(ka, kb) = r_n \cdot k = k \cdot \gcd(a, b)$.

Teorema 8.5. Untuk sembarang $k \neq 0$, maka $\gcd(ka, kb) = |k| \cdot \gcd(a, b)$

Bukti. Cukup dibuktikan untuk kasus $k < 0$, maka $-k = |k| > 0$. Berdasarkan teorema di atas, maka $\gcd(-ak, -bk) = \gcd(|k| \cdot a, |k| \cdot b) = |k| \cdot \gcd(a, b)$. □

Latihan

1. Gunakan *Algoritma Euclid* untuk memperoleh nilai x dan y yang memenuhi

    a. $\gcd(119, 272) = 119x + 272y$

    b. $\gcd(198, 288, 512) = 198x + 288y + 512z$

2. Buktikan bahwa jika d adalah faktor persekutuan dari a dan b, maka $d = \gcd(a, b)$ jika dan hanya jika $\gcd(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

3. Untuk suatu bilangan bulat a, b, dan $n \geq 1$, tunjukkan bahwa

    a. Jika $\gcd(a, b) = 1$, maka $\gcd(an, bn) = 1$.

    b. Jika $a^n | b^n$ maka $an|bn$.

Persamaan Diopanthine

9.1 Definisi

Kita telah mengenal Fungsi linier $ax + by = c$ dengan x dan y menyatakan bilangan-bilangan riil. Dengan kata lain, fungsi linier itu diselesaikan dalam domain (himpunan semesta) himpunan bilangan riil. Apabila domainnya dipersempit, yaitu himpunan bilangan bulat, maka persamaan $ax + by = c$ dengan a, b dan c bilangan-bilangan bulat disebut Persamaan Linier Diophantin.

9.2 Penggunaan

Persamaan $ax + by = c$ berarti $ax \equiv c \pmod{b}$ atau dapat pula berarti $by \equiv c \pmod{a}$ Oleh karena itu, untuk menyelesaikan persamaan $ax + by = c$ dengan a, b, c, x, dan y bilangan-bilangan bulat, kita dapat menyelesaikan salah satu perkongruenan $ax \equiv c \pmod{b}$ atau $by \equiv c \pmod{a}$.

Selanjutnya solusi dari salah satu dari pengkongruenan itu disubsitusikan pada persaman semula untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan linier tersebut.

Contoh 9.1. Temukan solusi (x, y) untuk $9x + 16y = 35$

Ini berarti

$$\begin{aligned} 16y &\equiv 35 \pmod{9} \\ 7y &\equiv 35 \pmod{9} \\ y &\equiv 5 \pmod{9} \end{aligned}$$

Diperoleh $y = 9t + 5$ untuk suatu bilangan bulat t. Lalu substitusikan ke persamaan awal didapat

$$\begin{aligned} 9x + 16(9t + 5) &= 35 \\ 9x + 144t &= 45 \\ x &= -16t - 5 \end{aligned}$$

Dengan demikian himpunan penyelesaian dari $9x+16y = 35$ adalah $\{(x, y)|x = -16t-5,\ y = 9t + 5,\ \ \exists\, y \in \mathbb{Z}\}$.

> **Catatan.** Perlu diingat bahwa $ax + by = c$ akan memiliki solusi bulat (a, b) jika dan hanya jika $\gcd(a, b)|c$

> **Contoh 9.2.** Buktikan persamaan $2x + 4y = 5$ tidak memiliki solusi bulat untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$

Bukti. Karena $\gcd(2, 4) \nmid 5$ maka persamaan tidak memiliki solusi bulat. Mudah diperiksa bahwa

$$x = \frac{5 - 4y}{2}$$

tidak akan pernah bulat untuk setiap $y \in \mathbb{Z}$ □

> **Contoh 9.3.** Tentukan semua pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi $7x + 15y = 51$.

Pertama, kita cek dulu $\gcd(7, 15)|51$, artinya persamaan tersebut memiliki solusi bulat. Selanjutnya

$$\begin{aligned} 15y &\equiv 51 \pmod 7 \\ y &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

Jadi $y = 7t+2$ dengan t merupakan suatu bilangan cacah.Substitusikan ke persamaan semula, diperoleh

$$\begin{aligned} 7x + 15(7t + 2) &= 51 \\ 7x + 105t &= 21 \\ x &= 3 - 15t \end{aligned}$$

Karena x adalah bilangan bulat positif dan t adalah bilangan cacah, maka nilai t yang memenuhi hanyalah $t = 0$. Sehingga diperoleh $x = 3$ dan $y = 2$

Latihan

1. Tentukan solusi dari $4x \equiv 6 \pmod{18}$
2. Jika $9x \equiv k \pmod{12}$ dengan k suatu unsur dari himpunan residu terkecil modulo 12. Tentukan nilai k agar pengkongruenan itu:

   a Tidak memiliki solusi

   b Memiliki solusi
3. Tentukan banyaknya solusi dari tiap-tiap pengkongruenan linier berikut ini dan selesaikan!

   a $3x \equiv 6 \pmod{15}$

   b $6x \equiv 11 \pmod{15}$

   c $3x \equiv 6 \pmod{18}$

   d $3x \equiv 1 \pmod{17}$
4. Jika x dan y menyatakan bilangan-bilangan bulat, tentukan solusi dari:

   a $2x + 6y = 18$

   b $6x + 15y = 51$
5. Carilah penyelesaian dari persamaan:

   a $15x + 14y = 570$

   b $123x + 57y = 531$

   c $12x + 501y = 274$

   d $84x - 438y = 156$

Bilangan Prima

10.1 Pendahuluan

Jika kita menulis $a \mid b$ maka kita katakan bahwa a adalah pembagi b. Salah satu metode yang biasa digunakan di sekolah dasar untuk menentukan pembagi suatu bilangan adalah menggunakan kertas berpetak dan menampilkan bilangan itu sebagai suatu persegi- persegi panjang. Sebagai contoh, 12 dapat disajikan dengan menampilkan persegi-persegi panjang dengan susunan 1 baris 12 kolom, atau 2 baris 6 kolom, atau 3 baris 4 kolom. Dengan demikian 12 mempunyai 6 buah pembagi yang berbeda, yaitu 1, 2, 3, 4, 6, dan 12. Bagaimana dengan 7? Untuk 7, kita hanya dapat menampilkan persegi-persegi panjang dengan susunan 1 baris 7 kolom atau 7 baris 1 kolom. Dengan demikian 7 hanya mempunyai 2 pembagi yang berbeda, yaitu 1 dan 7.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	2	4	6	16	12		24
	3	9	8		18		30
	5	25	10		20		
	7		14		28		
	11		15		32		
	13		21				
	17		22				
	19		26				
	23		27				
	28		33				

Table 10.1: Tabel banyak faktor positif

Dari **Tabel 8.1** tampak bahwa 12 berada pada kolom keenam karena 12 mempunyai enam pembagi, dan 7 berada pada kolom kedua karena 7 mempunyai dua pembagi. Apakah anda melihat suatu pola yang terbentuk pada tabel di atas? Bilangan apa berikutnya pada kolom ketiga? Bilangan itu adalah 49. Sekarang, bilangan-bilangan pada kolom kedua akan menjadi pusat perhatian kita saat ini. Perlu diingat bahwa bilangan-bilangan itu mempunyai tepat dua pembagi, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

10.2 Definisi

Sembarang bilangan bulat positif yang mempunyai tepat dua pembagi positif berbeda disebut **bilangan prima**. Sembarang bilangan bulat lebih besar dari 1 yang mempunyai suatu faktor positif selain 1 dan dirinya sendiri disebut **bilangan komposit**. Sebagai contoh, 4, 6, dan 16 adalah bilangan komposit karena bilangan-bilangan itu mempunyai suatu faktor selain 1 dan dirinya sendiri. Bilangan 1 hanya mempunyai satu faktor. Dengan demikian, 1 bukan bilangan prima maupun bilangan komposit. Dari kolom 2 tabel 1 di atas, kita lihat bahwa dua belas bilangan prima pertama adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, dan 37.

Contoh 10.1. Tunjukkan bahwa bilangan-bilangan 1564, 2781, dan 1001 adalah bilangan komposit.

Jawab. Karena $2|4$, maka 1564 dapat dibagi oleh 2. Karena $3|(2+7+8+1)$, maka 2781 dapat dibagi oleh 3. Karena $11|((1+0)-(0+1))$, maka 1001 dapat dibagi oleh 11.

Definisi 10.2. Bilangan-bilangan komposit dapat dinyatakan sebagai hasil kali dua atau lebih bilangan-bilangan cacah lebih besar dari 1.

Contoh 10.3. $18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

Hal ini dapat diperumum lagi dan menjadi sebuah teorema yang dikenal dengan nama **Teorema Fundamental Aritmatika**. Teorema ini menyatakan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat ditulis secara unik sebagai hasil perkalian dari bilangan-bilangan prima, jika urutan faktor-faktor prima tersebut tidak diperhitungkan. Dengan kata lain, jika kita mengabaikan urutan, ada satu dan hanya satu cara untuk memfaktorkan setiap bilangan bulat positif ke dalam bilangan-bilangan prima.

Secara formal, bunyi teorema ini adalah:

Teorema 10.4. Setiap bilangan bulat positif $n > 1$ dapat ditulis sebagai produk dari bilangan-bilangan prima dengan cara yang unik, kecuali untuk urutan faktor-faktor prima tersebut.”

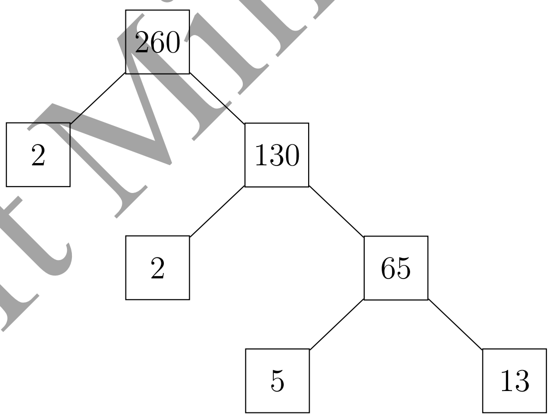
Contoh 10.5. Misalnya, bilangan 60 dapat ditulis sebagai:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Di mana $2, 3,$ dan 5 adalah bilangan-bilangan prima. Unik di sini berarti bahwa tidak ada cara lain untuk menuliskan 60 sebagai produk dari bilangan-bilangan prima yang berbeda, selain dari urutan mereka.

Suatu faktorisasi seperti pada **Example 8.1.5** yang memuat hanya bilangan-bilangan prima disebut **faktorisasi prima**. Untuk menentukan suatu faktorisasi prima dari suatu bilangan komposit yang diberikan, pertama-tama kita tulis kembali bilangan itu sebagai suatu hasil kali dua bilangan- bilangan yang lebih kecil. Selanjutnya, pemfaktoran bilangan-bilangan yang lebih kecil sampai seluruh faktor-faktor adalah bilangan-bilangan prima.

Contoh 10.6. Perhatikan 260 = 26 . 10 = 2 . 13 . 2 . 5 = 2 . 2 . 5 . 13 = 22 . 5 . 13. Prosedur untuk mencari faktorisasi prima dari suatu bilangan juga dapat menggunakan pohon faktor, sebagaimana yang ditampilkan berikut



10.3 Contoh Masalah

Contoh 10.7. Ketika para siswa bertanya kepada Pak Faktor tentang usia-anak-anaknya, Pak Faktor menjawab, "Saya mempunyai tiga orang anak. Hasil kali usia-usia mereka adalah 72 dan jumlah usia-usia mereka adalah bilangan yang ada di atas pintu ruangan ini". Seorang siswa, Ani, mengatakan bahwa nomor ruangan ini adalah 14, tetapi ia masih meminta kepada Pak Faktor untuk memberi informasi tambahan sehingga masalah ini dapat ia dipecahkan. Pak Faktor

> kemudian menyatakan bahwa anak tertuanya adalah seorang pemain catur yang baik. Selanjutnya Ani menyampaikan secara tepat usia ketiga anak Pak Faktor. Berapa usia ketiga anak pak Faktor yang disampaikan oleh Ani itu?

Pemahaman Masalah

Pak Faktor mempunyai tiga orang anak, dan hasi kali usia-usia mereka 72. Ketika Ani diberi tahu jumlah usia mereka, ia menyimpulkan bahwa Pak Faktor tidak menyediakan informasi cukup untuk menentukan usia-usia anaknya. Setelah Pak Faktor mengatakan bahwa anak tertuanya adalah seorang pemain catur yang baik, Ani dapat menemukan usia-usia mereka Kita akan menentukan usia-usia mereka. Dari informasi yang diberikan tampaknya anak tertua, seorang pemain catur yang baik merupakan informasi yang penting

Perencanaan Strategi

Untuk menentukan usia-usia yang mungkin, kita memerlukan tiga buah bilangan bulat positif yang mempunyai hasil kali 72. Jika ada anaknya yang berusia 1 tahun, kemudian buat daftar kemungkinan-kemungkinan usia lainnya; jika ada anaknya yang berusia 2 tahun maka buat daftar usia-usia lainnya yang mungkin; dan seterusnya. Karena $1 \cdot 2 \cdot 36 = 72$, kombinasi $(1, 2, 36)$ adalah sebuah kemunkinan. Mengetahui bahwa $72 = 2^3 \cdot 3^2$ dapat membantu kita untuk mendaftar semua kombinasi yang mungkin dengan memperhatikan pula jumlah dari usia-usia mereka, dalam sebuah tabel. Setelah melakukan pengujian tabel itu, diharapkan kita dapat mengetahui perlunya informasi tambahan itu dan menyelesaikan masalah ini.

Penerapan Strategi

Tabel 8.2 berikut ini memperlihatkan semua kemungkinan usia yang hasil kalinya 72 dan jumlahnya 14. Perlu diketahui bahwa seluruh jumlah di luar 14 hanya satu kali muncul pada tabel itu. Ani mengetahui jumlah usia-usia itu tetapi tidak dapat menentukan usia-usia itu. Hanya dengan penalaran logika untuk masalah ini bahwa jumlah usia-usia itu harus 14.

Ada dua kemungkinan kombinasi yang memberikan jumlah 14, yaitu $(2, 6, 6)$ dan $(3, 3, 8)$. Ketika Ani diberi tahu bahwa yang tertua adalah seorang pecatur yang baik, ia tahu bahwa $(2, 6, 6)$ bukan suatu kemungkinan kombinasi yang mungkin, karena jika usia mereka 2 tahun, 6 tahun, dan 6 tahun maka tidak ada yang tertua diantara mereka. Dengan demikian dia menyimpulkan bahwa usia-usia mereka adalah 3 tahun, 3 tahun, dan 8 tahun.

Peninjauan Ulang

Tripel bilangan $(3, 3, 8)$ memenuhi kondisi-kondisi yang diberikan, yaitu: pertama, hasil kalinya harus 72, jumlahnya harus 14, dan yang tertua adalah pecatur baik. Misalkan informasi yang diberikan adalah “hasil kali usia-usia itu adalah 12”, dengan

Usia	**Usia**	**Usia**	**Jumlah**
1	1	72	74
1	2	36	39
1	3	24	28
1	4	18	23
1	6	12	19
1	8	9	18
2	2	18	22
2	3	12	17
2	4	9	15
2	6	6	14
3	3	8	14
3	4	6	13

Table 10.2: Tabel Produk 72

demikian, kombinasi- kombinasi bilangan yang mungkin adalah $(1, 1, 12)$, $(1, 2, 6)$, $(1, 3, 4)$, dan $(2, 2, 3)$ yang secara berturut-turut mempunyai jumlah 14, 9, 8, dan 7. Jika informasi tambahannya adalah “anak terkecil suka makan bayam” maka kombinasi-kombinasi yang masih mungkin adalah $(1, 2, 6)$ dan $(1, 3, 4)$. Jika ada informasi tambahan lagi, yaitu ”selisih usia antara anak ke dua dan ke tiga adalah 1 tahun” maka tripel bilangan yang kita pilih adalah $(1, 2, 6)$ dan kesimpulannya adalah mereka berusia 1 tahun, 2 tahun, dan 6 tahun.

Latihan

1. Tentukan bilangan asli terkecil yang dapat dibagi oleh lima bilangan prima berbeda.

2. Misalkan 435 orang anggota DPR dimasukkan dalam beberapa panitia. Setiap panitia terdiri dari lebih dari 2 orang tetapi kurang dari 30 orang. Banyak orang pada setiap panitia harus sama, dan setiap orang hanya boleh menjadi anggota satu panitia. Berapa banyak orang untuk setiap panitia?

3. Misalkan kita mempunyai 48 keping logam berukuran sama. Logam-logam itu kita susun membentuk persegi panjang dengan ukuran 6×8. Ukuran persegi panjang lain yang dapat kita bentuk dengan 48 keping logam adalah

4. Misalkan faktor-faktor dari suatu bilangan n adalah 2, 5, dan 9. Jika tepat ada 9 faktor lainnya maka n adalah

5. Bilangan asli terkecil yang dapat dibagi oleh setiap bilangan asli kurang dari atau sama dengan 12 adalah

Aritmetika Jam dan Aritmetika Moduler

11.1 Aritmetika Jam

Aritmetika jam adalah ilmu hitung yang lambang bilangannya hanya menggunakan lambang bilangan pada permukaan jam. Pada aritmetika jam duabelasan lambang bilangan yang dipergunakan adalah $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam penghitungan aritmetika jam ini adalah:

- Pada operasi "+", jika jumlahnya ternyata lebih besar dari dua belas, maka hasilnya dikurangi dengan kelipatan dari dua belas.

- Pada operasi "−", jika bilangan yang dikurangi lebih kecil dari bilangan pengurangnya maka bilangan yang dikurangi tersebut di tambahkan dulu dengan kelipatan dua belas.

Sebenarnya pada permukaan jam yang sering kita pakai adalah jam duabelasan. Tapi tidak tertutup kemungkinan jika kita ingin membuat angka-angkanya sebagai berikut:

a. Aritmetika jam limaan, lambang bilangan yang digunakan adalah: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b. Aritmetika jam duaan, lambang bilangan yang digunakan adalah: $\{1, 2\}$.

c. Aritmetika jam $n-$an Untuk aritmetika jam $n-$an lambang yang digunakan adalah $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n\}$.

Contoh 11.1. Doni berangkat ke sekolah dari rumahnya jam 6 pagi. Lama perjalanan Doni ke sekolah 2 jam. Di sekolah Doni belajar selama 5 jam, kemudian Doni pulang kembali ke rumahnya. Pukul berapa Doni sampai di rumahnya kembali ?
Jawab. $6 + 2 + 5 + 2 = 15 = 3$. Jadi Doni tiba kembali di rumahnya pukul 15 atau pukul 3, karena pada jam duabelasan tidak terdapat angka 15.

11.2 Aritmetika Moduler

Aritmetika moduler lambang-lambang bilangannya sama dengan lambang bilangan pada aritmetika jam, hanya lambang bilangan terbesar diganti dengan nol.
Aritmetika jam duabelasan pada aritmetika moduler lambang bilangan yang dipergunakan menjadi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.
Pada aritmetika moduler duabelasan prinsip pengerjaannya sama dengan aritmetika jam, hanya saja untuk angka 12 tidak ada karena sudah diganti dengan angka nol.
Pada aritmetika moduler tidak tertutup kemungkinan juga jika kita ingin membuat angka-angkanya sebagai berikut:

a. Aritmetika moduler limaan Untuk aritmetika jam limaan lambang bilangan yang digunakan adalah: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

b. Aritmetika moduler duaan Untuk aritmetika jam duaan lambang bilangan yang digunakan adalah: $\{0, 1\}$.

c. Aritmetika jam n—an Untuk aritmetika jam n—an lambang yang digunakan adalah $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n\}$.

Latihan

1. Tentukan unsur identitas pada operasi "+" dan operasi "×" pada:

    a. Aritmetika jam dua belasan.

    b. Aritmetika jam tujuhan.

    c. Aritmetika jam limaan.

    d. Aritmetika jam duaan.

    e. Aritmetika moduler dua belasan.

    f. Aritmetika moduler tujuhan.

    g. Artitmetika moduler limaan.

    h. Aritmetika moduler duaan.

2. Untuk aritmetika jam delapanan, hitunglah operasi-operasi berikut:

    a. $4 + 7 =$

    b. $7 + 5 =$

    c. $8 - 3 =$

    d. $2 - 4 =$

    e. $3 \times 6 =$

    f. $7 \times 3 =$

    g. $7 : 3 =$

    h. $6 : 2 =$

3. Untuk aritmetika moduler duabelasan, hitungah operasi-operasi dibawah ini:

    a. $11 + 6 =$

    b. $6 + 8 =$

    c. $7 - 9 =$

    d. $5 - 7 =$

    e. $5 \times 4 =$

    f. $4 \times 6 =$

    g. $3 : 7 =$

    h. $5 : 8 =$

4. Untuk aritmetika moduler n—an, tentukan nilai n jika:

    a. $4 + 3 = 2$

    b. $3 - 9 = 6$

    c. $4 \times 5 = 6$

    d. $7 : 4 = 5$

5. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini:

    a. $4x + 7 = 3$ pada jam delapanan.

    b. $6 + 5y = 0$ pada jam tuju belasan.

    c. $10 - 2x = 9$ pada jam lima belasan.

Kongruensi

12.1 Modulo

Definisi 12.1. Jika m suatu bilangan positif, maka a kongruen dengan b dalam modulo m dan ditulis $a \equiv b \pmod{m}$ bila m membagi $(a - b)$. Jika m tidak membagi $(a-b)$ maka dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b dalam modulo m dan ditulis $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Contoh 12.2. Bilangan $33 \equiv 1 (\text{mod } 4)$, karena $(33 - 1) = 32$ terbagi oleh 4. Bilangan $41 \not\equiv 7 (\text{mod } 5)$, karena $(41 - 7) = 34$ tidak terbagi oleh 5.

Definisi 12.3. Karena $m \mid (a-b)$ maka ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $(a - b) = mk$. Sehingga $a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika $(a - b) = mk$ untuk suatu bilangan bulat k. Tetapi karena $a - b = mk$ sama artinya dengan $a = mk + b$, maka $a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika $a = mk + b$.

Contoh 12.4. Bilangan $24 \equiv 3 \pmod{7}$ sama artinya dengan $24 = 7 \cdot 3 + 3$. Bilangan $38 \equiv 3 \pmod{5}$ sama artinya dengan $38 = 5 \cdot 7 + 3$.

Teorema 12.5. Untuk setiap bilangan bulat a dan b, maka $a \equiv b \; (\text{ mod } \; m) \iff$ a dan b mempunyai sisa yang sama jika dibagi dengan m.

Definisi 12.6. Himpunan bilangan bulat $\{r_1, \; r_2, \; r_3, \ldots, r_m\}$ disebut sistem residu lengkap modulo m, jika setiap elemennya kongruen modulo m dengan satu dan hanya satu dari $\{0, \; 1, \; 2, \ldots, \; (m - 1)\}$.

Contoh 12.7. Himpunan $\{-14, -7, 9, 13, 26, 30\}$ merupakan sistem residu lengkap dari modulo 6 karena:

$$\begin{aligned}-14 &\equiv 4 \pmod 6\\ -7 &\equiv 5 \pmod 6\\ 9 &\equiv 3 \pmod 6\\ 13 &\equiv 2 \pmod 6\\ 26 &\equiv 1 \pmod 6\\ 30 &\equiv 0 \pmod 6\end{aligned}$$

12.2 Relasi Ekivalensi

Suatu relasi R dinamakan relasi ekivalensi atas himpunan S jika untuk setiap a, b, dan c unsur di S berlaku:

- aRa (Sifat reflektif)
- $aRb \iff bRa$ (Sifat simetris)
- Jika aRb dan bRc, maka aRc (Sifat transitif)

Kongruensi memenuhi syarat sebagai relasi ekivalensi, atau dengan kata lain, jika m adalah bilangan asli dan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka berlaku

- $a \equiv a \pmod m$
- $a \equiv b \pmod m \iff b \equiv a \pmod m$
- Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $b \equiv c \pmod m$, maka $a \equiv c \pmod m$

Properti 12.8. Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$, maka

- $a + c \equiv b + d \pmod m$
- $a - c \equiv b + d \pmod m$
- $ax + cy \equiv bx + dy \pmod m$
- $ac \equiv bd \pmod m$

Properti 12.9. Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $ka \equiv kb \pmod{m}$ untuk suatu sembarang bilangann bulat k.

Properti 12.10. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan n adalah bilangan asli, maka $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Contoh 12.11. Tentukan sisa pembagian 2^{20} oleh 7.

Jawab. Perhatikan bahwa $8 \equiv 1 \pmod{7}$. Menggunakan aturan modulo diperoleh

$$\begin{aligned}
8 &\equiv 1 \pmod{7}\\
2^3 &\equiv 1 \pmod{7}\\
(2^3)^6 &\equiv 1^6 \pmod{7}\\
2^{18}\cdot 2^2 &\equiv 1\cdot 2^2 \pmod{7}\\
2^{20} &\equiv 4 \pmod{7}
\end{aligned}$$

Teorema 12.12. Misalkan

$$P(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$$

adalah suatu polinom dengan $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ adalah bilangan-bilangan bulat yang memenuhi $a \equiv b \pmod{m}$, maka $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$.

Properti 12.13. Jika a adalah solusi dari $P(x) \equiv 0 \pmod{m}$ dan $a \equiv b \pmod{m}$, maka b juga penyelesaian dari $P(x) \equiv 0 \pmod{m}$

Properti 12.14. Jika $\gcd(a, b) = d$, maka $ap \equiv aq \pmod{m}$ jika dan hanya jika $p \equiv q \pmod{\frac{m}{d}}$

Properti 12.15. Jika $\gcd(a, b) = 1$, maka $ax \equiv ay \pmod{m}$ jika dan hanya jika $x \equiv y \pmod{m}$.

Properti 12.16. Jika $ax \equiv ay \pmod{m}$ dengan p adalah prima serta $p \nmid a$, maka $x \equiv y \pmod{p}$.

12.3 Kongruensi Linear

Definisi 12.17. Kongruensi berbentuk $ax \equiv b \pmod{m}$ dengan $a \not\equiv 0 \pmod{m}$ dinamakan kongruensi berderajat satu, atau dengan kata lain kongruensi linear.

Properti 12.18. Kongruensi linear $ax \equiv b \pmod{m}$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $\gcd(a, m)|b$.

Properti 12.19. Jika $\gcd(a, m) = 1$, maka $ax \equiv b \pmod{m}$ memiliki satu solusi tunggal modulo m.

Contoh 12.20. Tentukan penyelesaian dari $12x \equiv 15 \pmod{21}$. *Jawab.* Perhatikan bahwa $\gcd(12, 21)|15$ sehingga memiliki banyak solusi, yaitu

$$\begin{aligned}
x &\equiv 3 \pmod{21} \\
x &\equiv 10 \pmod{21} \\
x &\equiv 17 \pmod{21} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Teorema 12.21. Diberikan bilangan bulat $m_1, m_2, \ldots, m_r$ yang saling relatif prima dua-dua. Diberikan pula $a_1, a_2, \ldots, a_r$ bilangan bulat sembarang, maka kongruensi $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, r$ memepunyai penyelesaian bersama. Setiap dua penyelesaian akan kongruen modulo $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_r$

Contoh 12.22. Tentukan penyelesaian dari sistem kongruensi berikut

$$x \equiv 5 \pmod{6}$$
$$x \equiv 4 \pmod{11}$$
$$x \equiv 3 \pmod{17}$$

Jawab. Perhatikan bahwa $6, 11$, dan 17 adalah relatif prima dua-dua, yakni $(6, 11) = 1$, $(6, 17) = 1$, dan $(11, 17) = 1$. Selanjutnya misalkan $a_1 = 5$, $a_2 = 4$, dan $a_3 = 3$ serta $m_1 = 6$, $m_2 = 11$, dan $m_3 = 17$, maka $M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 6 \cdot 11 \cdot 17 = 1122$.
Mencari nilai x_1 dengan menentukan M_1 terlebih dahulu $M_1 = \frac{M}{m_1} = \frac{1122}{6} = 187$. Maka

$$M_1 \cdot x_1 \equiv 1 \pmod{6}$$
$$187 \cdot x_1 \equiv 1 \pmod{6}$$
$$x_1 \equiv 1 \pmod{6}$$

Selanjutnya menentukan x_2 dengan menentukan $M_2 = \frac{M}{m_2} = \frac{1122}{11} = 102$. Maka

$$M_2 \cdot x_2 \equiv 1 \pmod{11}$$
$$102 \cdot x_2 \equiv 1 \pmod{11}$$
$$x_2 \equiv 4 \pmod{11}$$

Terakhir menentukan x_3 dengan menentukan $M_3 = \frac{M}{m_3} = \frac{1122}{17} = 66$. Maka

$$M_3 \cdot x_3 \equiv 1 \pmod{17}$$
$$66 \cdot x_3 \equiv 1 \pmod{17}$$
$$x_3 \equiv 8 \pmod{17}$$

Dengan demikian penyelesaian dari sistem kongruensinya adalah

$$x \equiv M_1 \cdot x_1 \cdot a_1 + M_2 \cdot x_2 \cdot a_2 + M_3 \cdot x_3 \cdot a_3 \pmod{M}$$
$$x \equiv 187 \cdot 1 \cdot 5 + 102 \cdot 4 \cdot 4 + 66 \cdot 8 \cdot 3 \pmod{1122}$$
$$x \equiv 4151 \pmod{1122}$$

12.4 Kongruensi Tingkat Tinggi

12.4.1 Kongruensi Kuadrat

Definisi 12.23. Bentuk $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{m}$ dengan $a \not\equiv 0 \pmod{m}$ dikatakan kongruensi kuadrat (kongruensi derajat dua).

Contoh 12.24. Carilah pernyelesaian dari $x^2 \equiv 23 \pmod{101}$.
Jawab. Untuk menyelesaikan permasalah ini kita perlu mencari suatu bilangan kuadrat yang bernilai 24 dalam modulo 101.

$$x^2 \equiv 24 \equiv 125 \equiv 226 \equiv 327 \equiv 428 \equiv 529 \pmod{101}$$

Karena $529 = 23^2$, maka

$$x^2 \equiv 23^2 \pmod{101}$$

$$x \equiv 23 \pmod{101} \text{ atau } x \equiv -23 \pmod{101}$$

Dengan demikian solusi persamaannya adalah $x \equiv 23 \pmod{101}$ atau $x \equiv 78 \pmod{101}$.

Contoh 12.25. Carilah dua buah bilangan ganjil positif berurutan paling kecil sehingga hasil kali kedua bilangan tersebut 11 lebihnya dari suatu kelipatan 111.

Jawab. Pertama, kita misalkan terlebih dahulu dua bilangan ganjil tersebut adalah $2x+1$ dan $2x+3$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
(2x+1)(2x+3) &\equiv 11 \pmod{111}\\
4x^2+8x+3 &\equiv 11 \pmod{111}\\
4x^2+8x-8 &\equiv 0 \pmod{111}\\
x^2+2x-2 &\equiv 0 \pmod{111}\\
x^2+2x+1 &\equiv 3 \pmod{111}\\
(x+1)^2 &\equiv 225 \pmod{111}\\
(x+1)^2 &\equiv (15)^2 \pmod{111}
\end{aligned}$$

Diperoleh $x+1 \equiv 15 \pmod{111} \iff x \equiv 14 \pmod{111}$ atau $x+1 \equiv -15 \pmod{111} \iff x \equiv 95 \pmod{111}$. Karena yang diminta adalah paling kecil, maka

$x \equiv 14 \pmod{111}$. Dengan demikian bilangan yang dimaksud adalah $2(14)+1=29$ dan $2(14)+3=31$.

12.4.2 Kongruensi Polinom Bilangan Bulat

Pandang kongruensi $f_1(x) = f_2(x) \pmod{m}$, dimana $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ merupakan polinom bilangan bulat. Jika setiap koefisien variabel x yang berpangkat sama pada $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ saling kongruen dalam modulo m maka $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ saling kongruen identik dalam modulo m. Jadi $f_1(x) \equiv f_2(x) \pmod{m}$ disebut kongruen identik. Sedangkan yang bukan kongruen identik dinamakan kongruensi kondisional.

Contoh 12.26.

$$9x^2 - 2x + 5 \equiv 3x^2 + 4x - 1 \pmod{6}$$

Kongruensi diatas dinamakan kongruensi identik karena $9 \equiv 3 \pmod{6}$, $-2 \equiv 4 \pmod{6}$, dan $5 \equiv -1 \pmod{6}$.

Latihan

1. Tentukan sisa pembagian 495 jika dibagi dengan 7.
2. Tentukan sisa pembagian $260 \cdot 335$ jika dibagi dengan 13.
3. Tentukanlah penyelesaian dari kongruensi :
   a. $3x \equiv 2 \pmod{5}$
   b. $6x \equiv 11 \pmod{15}$
   c. $1 - x \equiv 2 \pmod{9}$
   d. $3x - 9 \equiv 4 \pmod{9}$
4. Tentukan penyelesaiann dari sistem kongruensi berikut :
   a. $x \equiv 5 \pmod{6}$
      $x \equiv 4 \pmod{11}$
   b. $x \equiv 8 \pmod{9}$
      $x \equiv 3 \pmod{7}$
      $x \equiv 5 \pmod{11}$
   c. $2x \equiv 1 \pmod{5}$
      $3x \equiv 2 \pmod{7}$
      $4x \equiv 1 \pmod{11}$
5. Selesaikan kongruensi kuadrat berikut ini :
   a. $x^2 + 5x \equiv 3 \pmod{37}$
   b. $2x^2 + 4x + \equiv \pmod{37}$

Teorema Sisa Cina

13.1 Sejarah

Sesuai namanya, teorema sisa cina berkaitan dengan negara Cina. Masalah tertua yang berkaitan dengan Teorema Sisa Cina termuat dalam karya berjudul *Sunzi Suanjing*, yang ditulis oleh Matematikawan Cina bernama Sun Zi. Masalah ini termuat dalam volume ketiga, tepatnya pada Problem 26.
Problem 26 dalam *Sunzi Suanjing* adalah sebagai berikut:
Kita mempunyai sejumlah objek, tapi tidak diketahui tepatnya ada berapa. Jika kita membaginya dengan 3, maka bersisa 2. Jika kita membaginya dengan 5, maka bersisa 3. Jika kita membaginya dengan 7, maka bersisa 2. Berapakah jumlah objek itu?
Sayangnya, Problem 26 adalah satu-satunya masalah yang berkaitan Teorema Sisa Cina dalam buku Sunzi Suanjing. Karena itu, tidak bisa disimpulkan bahwa Sun Zi menemukan metode umum untuk menyelesaikan masalah serupa. Metode umum baru ditemukan pada tahun 1247, dalam buku berjudul *Shushu Jiuzhang (Mathematical Treatise in Nine Sections)*, yang ditulis oleh Qin Jiushao.

13.2 Pembuktian

Pada bagian ini, kita menggunakan istilah relatif prima. Dua bilangan dikatakan relatif prima, jika FPB-nya adalah 1. Untuk tiga bilangan atau lebih, dikatakan saling relatif prima, jika setiap pasang bilangan mempunyai FPB 1.

Teorema 13.1. –(Teorema Sisa Cina)
Misalkan m_1, m_2, m_3, $\ldots$, m_r adalah bilangan bulat positif selain 1 yang saling relatif prima. Untuk setiap bilangan bulat a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_r sistem kongruensi

linear

$$
\begin{aligned}
x &\equiv a_1 \pmod{m_1}\\
x &\equiv a_2 \pmod{m_2}\\
x &\equiv a_3 \pmod{m_3}\\
&\vdots\\
x &\equiv a_r \pmod{m_r}
\end{aligned}
$$

Mempunyai solusi, dan tiap dua solusi kongruen modulo $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_r$

Bukti. Misalkan $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_r$ dan dan y_j menyatakan hasil bagi antara m dengan m_j dimana $1 \leq j \leq r$. Dengan kata lain, y_j merupakan hasil kali semua modulus selain m_j.

Karena $m_1, m_2, \ldots, m_r$ saling relatif prima, maka y_j dan m_j juga relatif prima. Akibatnya, terdapat bilangan bulat z_j sedemikian sehingga $y_j \cdot z_j \equiv 1 \pmod{m_j}$. Selanjutnya Kita akan menunjukkan bahwa nilai

$$x_0 = a_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + \cdots + a_r \cdot y_r \cdot z_r$$

merupakan solusi dari sistem kongruensi semula.

Perhatikan untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, r$ diperoleh

$$x_0 \equiv (a_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + \cdots + a_r \cdot y_r \cdot z_r) \pmod{m_i}$$

Tinjau bahwa $y + j \equiv 0 \pmod{m_i}$ untuk $j \neq i$, sehingga $a_j \cdot y_j \cdot z_j \equiv 0 \pmod{m_i}$. Akibatnya

$$x_0 \equiv a_i \cdot y_i \cdot z_i \pmod{m_i}$$

Karena $y_i \cdot z_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, maka

$$
\begin{aligned}
x_0 &\equiv a_i \cdot y_i \cdot z_i \pmod{m_i}\\
x_0 &\equiv a_i \cdot 1 \pmod{m_i}\\
x_0 &\equiv a_i \pmod{m_i}
\end{aligned}
$$

Karena $i = 1, 2, 3, \ldots r$, maka dapat disimpulkan bahwa x_0 memenuhi setiap kongruensi pada sistem semula. Dengan ini, tebukti bahwa sistem ongruensi tersebut mempunyai solusi.

Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa tiap dua solusi kongruen modulo m.

Misalkan x_1 adalah solusi lain dari sistem tersebut. Untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, r$ diperoleh

$$x_0 \equiv a_i \pmod{m_i} \text{ dan } x_1 \equiv a_i \pmod{m_i}$$

Sehingga $x_0 \equiv x_1 \pmod{m_i}$. Hal ini berakibat

$$x_0 \equiv x_1 \pmod{\operatorname{lcm}(m_1, m_2, \ldots, m_r)}$$

Karena $m_1, m_2, \ldots, m_r$ saling relatif prima, maka nilai KPK sama dengan hasil kalinya, yaitu m. Dengan demikian, $x_0 \equiv x_1 \pmod{m}$. □

13.3 Langkah Penyelesaian

Misalkan kita akan menyelesaikan Problem 26 dalam Sunzi Suanjing.

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

Step 1. Periksa apakah modulus dalam sistem tersebut saling relatif prima.Langkah ini digunakan untuk mengecek apakah Teorema Sisa Cina bisa diterapkan. Modulus-modulus yang ada dalam sistem adalah $3,\ 5,$ dan 7. Karena ketiganya saling relatif prima, maka sistem tersebut mempunyai solusi berdasarkan Teorema Sisa Cina.

Step 2. Menentukan nilai m dan y_i untuk $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$. Nilai m diperoleh dari perkalian semua modulus, sedangkan y_i diperoleh dari hasil bagi m dengan m_i. Untuk kongruensi dalam soal, diperoleh $m = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, dan

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{m}{m_1} = \frac{105}{3} = 35 \\ y_2 &= \frac{m}{m_2} = \frac{105}{5} = 21 \\ y_3 &= \frac{m}{m_3} = \frac{105}{7} = 15 \end{aligned}$$

Step 3. Menentukan z_i yang memenuhi $y_1 \cdot z_1 \equiv 1 \pmod{m_i}$ untuk $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$. Sebelumnya telah diperoleh nilai $y_1,\ y_2,$ dan y_3. Sekarang, kita akan menentukan solusi dari $35z_1 \equiv 1 \pmod{3}$, $21z_1 \equiv 1 \pmod{5}$, dan $15z_1 \equiv 1$ (mod

7).

Kita mulai dengan menentukan solusi dari kongruensi pertama. Untuk memudahkan, kurangi 35 dengan kelipatan 3, misalnya 33, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} y_1 \cdot z_1 &\equiv 1 \pmod{m_1} \\ 35z_1 &\equiv 1 \pmod{3} \\ 2z_1 &\equiv 1 \pmod{3} \\ z_1 &\equiv 2 \pmod{3} \end{aligned}$$

Secara analog diperoleh $z_2 \equiv 1 \pmod{5}$, dan $z_3 \equiv 1 \pmod{7}$

Step 4. Terakhir menentukan nilai x yang memenuhi system kongruensi semula, yaitu

$$x \equiv a_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + \cdots + a_r \cdot y_r \cdot z_r \pmod{m}$$

Pada langkah sebelumnya kita telah memperoleh nilai a_i, y_1, dan z_i untuk $i = 1,\ 2,\ 3$. Sehingga nilai x yang memenuhi adalah

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1 \pmod{105} \\ x &\equiv 23 \pmod{105} \end{aligned}$$

Dengan demikian, secara umum solusinya adalah $23 + 105k$ untuk suatu k bilangan bulat.

Latihan

1. Tentukan bilanga bulat positif terkecil x sedemikian sehingga :

    a. $x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 3 \pmod 5$, dan $x \equiv 5 \pmod 2$.

    b. $x \equiv 1 \pmod 4$, $x \equiv 0 \pmod 3$, dan $x \equiv 5 \pmod 7$.

2. Tentukan semua bilangan bulat yang berturut-turut bersisa 1, 2, dan 3 ketika dibagi 3, 4, dan 5.

3. Banyak siswa dalam suatu kelas kurang dari 36 siswa. Jika dibagi ke dalam 3 kelompok, maka akan tersisa 2 orang. Jika dibagi ke dalam 4 kelompok, maka akan tersisa 2 orang. Jika dibagi ke dalam 5 kelompok, maka akan tersisa 1 orang. Tentukan banyak siswa dalam kelas tersebut.

4. Tentukan nilai x sehingga

$$17x \equiv \begin{cases} 3 \pmod 2 \\ 3 \pmod 3 \\ 3 \pmod 5 \\ 3 \pmod 7 \end{cases}$$

Teorema Fermat dan Teorema Wilson

14.1 Teorema Fermat

Tujuan dari Teorema Fermat digunakan adalah untuk menguji keprimaan suatu bilangan bulat. Kita tahu bahwa cara menguji keprimaan suatu bilangan bulat n adalah dengan membaginya dengan beberapa bilangan prima yang kurang dari $\sqrt{n}$. Hal ini tentu kurang efektif untuk menguji n yang besar, karena itu terdapat metode lain yang dikenal dengan **Teorema Fermat**.

Teorema 14.1. Jika $a \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{N}$ $(a, m) = 1$, maka sisa-sisa terkecil dalam modulo m dari barisan $\{a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (m-1)\}$ ialah suatu permutasi dari $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (m-1)$.

Bukti. Perhatikan barisan bilangan $a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (m-1)a$. Bilangan-bilangan pada barisan ini tidak ada satupun yang kongruen 0 dalam modulo m. Selanjutnya kita harus membuktikan bahwa setiap bilangan pada barisan tersebut masing-masing akan kongruen dengan tepat salah satu dari $1,\ 2,\ ,\ldots,(m-1)$ dalam modulo m.
Andaikan ada dua suku dari barisan di atas yang kongruen dalam modulo m, misalkan

$$ra \equiv sa \pmod{m} \quad \text{dengan} \quad 1 \leq r \leq s \leq m$$

Selanjutnya karena $(a, m) = 1$, maka kita dapat $r \equiv s \pmod{m}$. Tetapi karena ra dan sa adalah suku-suku pada barisan di atas, maka r dan s adalah residu-residu terkecil dalam modulo m, yang berakibat $r = s$.
Hal ini kontradiksi dengan pengandaian bahwa $1 \leq r < s < m$. Dengan demikian pengandaian salah, dan pernyataan tiap suku pada barisan tersebut kongruen dengan tepat salah satu dari $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (m-1)$ dalam modulo m adalah benar. $\square$

Contoh 14.2. Perhatikan barisan bilangan $4, 8, 12, 16, 20, 24$. Residu-residu terkecil mod 7 dari masing-masing suku dari barisan ini adalah:

$$\begin{aligned} 4 &\equiv 4 \pmod 7 \\ 8 &\equiv 1 \pmod 7 \\ 12 &\equiv 5 \pmod 7 \\ 16 &\equiv 2 \pmod 7 \\ 20 &\equiv 6 \pmod 7 \\ 24 &\equiv 3 \pmod 7 \end{aligned}$$

Tampak pada keenam kekongruenan tersebut bahwa residu-residu terkecil dalam modulo 7 dari barisan $4, 8, 12, 16, 20, 24$ adalah permutasi dari $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Jika semua bilangan pada ruas kiri dikalikan, maka hasilnya akan kongruen dengan perkalian semua bilangan pada ruas kanan dalam modulo 7, yaitu

$$\begin{aligned} 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 &\equiv 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 3 \pmod 7 \\ 4^6(1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 &\equiv 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \pmod 7 \\ 4^6 \cdot 6! &\equiv 6! \pmod 7 \\ 4^6 &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

Teorema 14.3. Jika p adalah suatu bilangan prima dan $(a, p) = 1$ untuk suatu bilangan bulat a, maka $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, bermakna sama dengan $p | (a^{p-1} - 1)$.

Bukti. Ambil sembarang bilangan prima p dan suatu bilangan bulat a sedemikian hingga $(a, p) = 1$, maka menurut Teorema 14.3, residu-residu terkecil modulo p dari $a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (p-1)a$ adalah suatu permutasi dari $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (p-1)$, sehingga hasil kali-hasil kalinya akan kongruen juga dalam modulo p, yaitu

$$\begin{aligned} a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cdots \cdot (p-1)a &\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (p-1) \pmod p \\ a^{p-1} \cdot (p-1)! &\equiv (p-1)! \pmod p \end{aligned}$$

Karena p dan $(p-1)$ saling prima, maka kita bisa *cancel* $(p-1)!$ di kedua ruas sehingga diperoleh $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ $\square$

Contoh 14.4. Jika $p = 5$ dan $a = 2$, maka $(2, 5) = 1$.

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2^{5-1} \equiv 1 \pmod{5}$$

Hanya saja, **Teorema Fermat** memiliki kelemahan, yaitu tedapat bilangan komposit n sedemikian sehingga $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Bilangan bulat seperti ini disebut bilangan **prima semu** (pseudoprimes).

Contoh 14.5. Bilangan 341 adalah komposit (karena $341 = 11 \cdot 31$) sekaligus bilangan prima semu, karena menurut teorema Fermat,

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$$

Untunglah bilangan prima semu relatif jarang terdapat. Untuk bilangan bulat yang lebih kecil dari 10^{10} terdapat $455.052.512$ bilangan prima, tapi hanya 14.884 buah yang merupakan bilangan prima semu terhadap basis 2.

Teorema 14.6. Jika p suatu bilangan prima, maka $a^p \equiv a \pmod{p}\ \forall\, a \in \mathbb{Z}$

Bukti. Ambil sembarang bilangan prima p dengan sembarang bilangan bulat a. Maka kemungkinannya hanya $(a, p) = 1$ atau $(a, p) = p$. (*Apa ada kemungkinan lain dari* $\gcd(a, p)$*?*).
Kasus 1: Jika $(a, p) = 1$, menurut Teorema 14.3 diperoleh $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ sehingga jika kedua ruas dikalikan a, maka diperoleh $a^p \equiv a \pmod{p}$
Kasus 2: Jika $(a, p) = p$, maka $p \vee a \Rightarrow a \equiv a \pmod{p}$ dan $a^p \equiv a \pmod{p}$ □

Contoh 14.7. Tentukan sisa pembagian 67^{17} oleh 17.
Jawab. Perhatikan bahwa 17 adalah bilangan prima, maka menurut Teorema 14.6,

$$\begin{aligned} 67^{17} &\equiv 67 \pmod{17} \\ &\equiv 16 \pmod{17} \end{aligned}$$

Teorema 14.8. Misalkan p dan q merupakan dua bilangan yang tak sama. Jika $a^p \equiv a \pmod{q}$ dan $a^q \equiv a \pmod{p}$, maka $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$.

Bukti. Diketahui $a^p \equiv a \pmod q$ dan $a^q \equiv a \pmod p$ dengan $p \neq q$. □

14.2 Teorema Wilson

Teorema Wilson adalah salah satu teorema yang menggambarkan sifat dari bilangan prima. Menurut teorema Wilson,

Teorema 14.9. —(Teorema Wilson)
Bilangan bulat $p > 1$ adalah bilangan prima jika dan hanya jika

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

Bukti. Karena teorema ini berbentuk biimplikasi, kita harus membuktikannya secara dua arah.
Arah pertama: Jika p adalah bilangan prima, maka $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.
Diberikan bilangan prima p. Maka dapat dibentuk himpunan bilangan $G = \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$. Karena p adalah prima, maka untuk setiap $a \in G$ memepunyai elemen invers yaitu a^{-1} sedemikian sehingga $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod p$.
Selanjutnya perhatikan bahwa

- Jika a adalah suatu bilangan dalam himpunan tersebut dan $a \neq a^{-1}$, maka a dan a^{-1} adalah pasangan yang berbeda. Sehingga diperoleh 1 dan $(p-1)$ keduanya memiliki invers yaitu dirinya sendiri.
- Jika $a = a^{-1}$, maka $a^2 \equiv 1 \pmod p$. Ini berarti $a^2 - 1 \equiv 0 \pmod p$, sehingga $(a-1)(a+1) \equiv 0 \pmod p$. Karena p adalah prima, maka p hanya dapat membagi salah satu faktor, yaitu $a-1$ atau $a+1$. Jadi, $a \equiv 1 \pmod p$ atau $a \equiv -1 \pmod p$. Dari sini kita peroleh bahwa semua elemen $a \in G$ selain 1 dan $(p-1)$ dapat dipasangkan dengan inversnya.

Karena itu, perkalian dari semua bilangan dalam himpunan tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-2) \cdot (p-1) &\equiv 1 \cdot (p-1) \cdot \prod_{a \neq 1, p-1} a \cdot a^{-1} \\
(p-1)! &\equiv 1 \cdot (p-1) \cdot 1 \\
(p-1)! &\equiv (p-1) \pmod p
\end{aligned}$$

Karena $p - 1 \equiv -1 \pmod{p}$, maka:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Arah kedua: Jika $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, maka p adalah bilangan prima.
Sekarang kita buktikan arah sebaliknya dengan kontradiksi. Misalkan p adalah bilangan komposit dan $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Misalkan p dapat ditulis sebagai $p = ab$, dengan $1 < a, b < p$.
Karena a dan b adalah bilangan bulat antara 1 dan $p-1$, maka a dan b merupakan faktor dari $(p-1)!$. Oleh karena itu:

$$(p-1)! \equiv 0 \pmod{p}$$

Ini berarti $(p-1)!$ habis dibagi p, yang bertentangan dengan asumsi bahwa $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Jadi, asumsi bahwa p adalah bilangan komposit salah. Oleh karena itu, p haruslah bilangan prima.
Dengan demikian, kita telah membuktikan kedua arah dari teorema Wilson:

$$p \text{ adalah bilangan prima} \iff (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

□

Contoh 14.10. Misalkan $p = 7$, tunjukkan bahwa $6! \equiv 6 \pmod{7}$.
Jawab. Perhatikan barisan bilangan 2 sampai 5. Hasil kali pasangan dalam modulo 7 adalah $2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{7}$ dan $3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7}$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6 &\equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \pmod{7} \\ 6! &\equiv 6 \pmod{7} \end{aligned}$$

Latihan

1. Diberikan bilangan $p \geq 7$. Buktikan bahwa

$$\underbrace{111\ldots1}_{(p-1)\text{ kali}}$$

habis dibagi oleh p.

2. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$n^9 \equiv n^3 (\text{mod } 504)$$

3. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan genap positif n berlaku

$$n^2 | 2^{n!} - 1$$

4. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan prima $p > 5$ berlaku $p^4 - 1$ merupakan kelipatan 240.

5. Tentukan banyaknya bilangan asli $n < 100$ sehingga $100! + n$ merupakan bilangan prima.

Fungsi Bilangan Teoritik

15.1 Definisi

Fungsi bilangan teoritik adalah fungsi matematika yang memetakan bilangan bulat ke bilangan riil atau kompleks. Fungsi ini mempelajari sifat dan perilaku bilangan dalam konteks teori bilangan. Definisi fungsi bilangan teoritik secara eksplisit bisa berbeda-beda tergantung pada jenis fungsi yang dimaksud.

Contoh definisi eksplisit dari beberapa fungsi bilangan teoritik:

1. Fungsi Mobius (Mu)

Fungsi mu $\mu(n)$ didefinisikan sebagai berikut: Jika n adalah bilangan bulat yang memiliki faktor prima kuadrat, maka $\mu(n) = 0$. Jika n adalah bilangan bulat dengan jumlah faktor prima ganjil, maka $\mu(n) = -1$. Jika n adalah bilangan bulat dengan jumlah faktor prima genap, maka $\mu(n) = 1$.

Contoh 15.1. Karena 8 memiliki faktor prima kuadrat yaitu 2^2 maka nilai dari $\mu(8) = 0$

2. Fungsi Totient Euler (Phi Euler)

Fungsi totient Euler $\varphi(n)$ didefinisikan sebagai jumlah bilangan bulat positif yang lebih kecil dari n dan relatif prima dengan n atau dengan kata lain tidak memiliki faktor prima yang sama dengan n.

Contoh 15.2. Tentukan nilai $\varphi(10)$.
Jawab. Bilangan-bilangan yang relatif prima dengan 10 adalah 1, 3, 7, dan 9. Sehingga nilai $\varphi(10)$ adalah banyaknya bilangan-bilangan tersebut, yaitu $\varphi(10) = 4$.

3. Fungsi Sigma (Fungsi Pembagi)

Fungsi sigma $\sigma(n)$ didefinisikan sebagai jumlah semua pembagi positif dari n, termasuk 1 dan n itu sendiri.

Contoh 15.3. Untuk menghitung $\sigma(12)$, kita tambahkan semua pembagi positif dari 12, yaitu $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. Jadi $(12) = 28$.

4. Fungsi Riemann Zeta

Fungsi Riemann Zeta $\zeta(s)$ didefinisikan sebagai

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$$

Contoh 15.4. Mencari nilai $\zeta(2)$

$$\zeta(2) = 1^{-2} + 2^{-2} + \dots$$

Kita tahu bahwa deret ini adalah deret $p-$Harmonik yang konvergen. Nilainya dapat dihitung sebagai $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Fungsi Partisi

Fungsi partisi $p(n)$ didefinisikan sebagai jumlah partisi dari bilangan bulat n, yaitu jumlah cara unik untuk mengurai n menjadi jumlah bilangan bulat positif.

Contoh 15.5. Untuk mengitung banyak partisi dari 4, kita punya $\{4\}$, $\{3, 1\}$, $\{2, 2\}$, $\{2, 1, 1\}$, dan $\{1, 1, 1, 1\}$. Sehingga $p(4) = 5$.

Setiap fungsi bilangan teoritik memiliki definisi yang spesifik dan mungkin melibatkan sifat-sifat atau aturan khusus tergantung pada tujuan atau masalah yang ingin dipecahkan. Definisi eksplisit tersebut memungkinkan kita untuk memahami sifat-sifat dan perilaku dari fungsi-fungsi ini dalam teori bilangan

15.2 Sifat

Fungsi bilangan teoritik memiliki berbagai sifat yang dapat diidentifikasi dan dipelajari. Beberapa sifat-sifat umum yang sering terjadi pada fungsi bilangan teoritik meliputi:

1. Sifat Multiplikatif: Fungsi bilangan teoritik dikatakan memiliki sifat multiplikatif jika untuk setiap dua bilangan bulat positif a dan b yang relatif prima, berlaku $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$. Contohnya, fungsi totient Euler $\varphi(n)$ dan fungsi mu $\mu(n)$ adalah fungsi multiplikatif.

2. Sifat Additif: Fungsi bilangan teoritik memiliki sifat additif jika untuk setiap dua bilangan bulat positif a dan b, berlaku $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Contohnya, fungsi partisi $p(n)$ adalah fungsi additif.

3. Sifat Periode: Beberapa fungsi bilangan teoritik memiliki sifat periodik, artinya nilai fungsi berulang dengan periode tertentu. Contohnya, fungsi sigma $\sigma(n)$ memiliki periode 2, dimana $\sigma(2n) = \sigma(n) + n + 2$, dan $\sigma(2n+1) = \sigma(n) + n + 1$

4. Sifat Rekursif: Beberapa fungsi bilangan teoritik dapat didefinisikan secara rekursif, yaitu nilai fungsi pada n tergantung pada nilai fungsi pada bilangan yang lebih kecil. Contohnya, fungsi partisi $p(n)$ dapat didefinisikan secara rekursif menggunakan partisi dari bilangan yang lebih kecil.

5. Sifat Hubungan dengan Fungsi Lain: Beberapa fungsi bilangan teoritik memiliki hubungan khusus dengan fungsi bilangan teoritik lainnya. Contohnya, fungsi Riemann Zeta $\zeta(s)$ terkait dengan fungsi Hurwitz Zeta $\zeta(s, a)$ dan fungsi gamma $\Gamma(s)$.

6. Sifat Keterkaitan dengan Bilangan Prima: Beberapa fungsi bilangan teoritik sangat terkait dengan sifat bilangan prima, seperti fungsi mu $\mu(n)$ yang terkait dengan faktorisasi bilangan.

7. Sifat Keterkaitan dengan Teorema Bilangan Teoritik: Beberapa fungsi bilangan teoritik muncul dalam konteks teorema bilangan teoritik tertentu, seperti fungsi totient dalam teorema Euler.

8. Sifat Asimtotik: Beberapa fungsi bilangan teoritik memiliki sifat asimtotik, yang menggambarkan perilaku fungsi saat bilangan cenderung tak terbatas. Misalnya, fungsi Riemann Zeta memiliki kutub dan nol asimtotik di kompleks, yang terkait dengan hipotesis Riemann.

Sifat-sifat ini memberikan wawasan penting tentang perilaku fungsi bilangan teoritik dan seringkali menjadi dasar dalam menyelesaikan masalah dan membuktikan teorema dalam teori bilangan. Matematikawan terus mengeksplorasi sifat-sifat ini untuk meningkatkan pemahaman tentang fungsi bilangan teoritik dan memperluas bidang matematika ini

Latihan

1. Hitung nilai fungsi *totient Euler* (φ) dari bilangan bulat positif berikut:

   a. $\varphi(21^{20})$

   b. $\varphi(36^7 \cdot 99)$

2. Hitung nilai fungsi sigma σ dari bilangan bulat positif berikut:

   a. $\sigma(2121)$

   b. $\sigma()$

3. Hitung jumlah partisi dari bilangan bulat positif berikut:

   a. $p(4)$

   b. $p(5)$

   c. $p(7)$

4. Tentukan nilai fungsi mu (μ) dari bilangan bulat positif berikut:

   a. $\mu()$

   b. $\mu()$

5. Hitung nilai fungsi Riemann Zeta ζ pada $s = 2$ dan $s = 3$.

6. Buktikan bahwa fungsi Totient Euler φ memiliki sifat multiplikatif, yaitu untuk setiap dua bilangan bulat positif a dan b yang relatif prima, berlaku $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

7. Buktikan bahwa fungsi Riemann Zeta ζ memiliki kutub di $s = 1$ dan tidak ada nol non-trivial di wilayah kompleks $\mathrm{Re}(s) > 1$.

8. Tunjukkan bagaimana fungsi Hurwitz Zeta $\zeta(s, a)$ terkait dengan fungsi Riemann Zeta $\zeta(s)$ dan berikan contoh dengan menghitung nilai $\zeta(s, \frac{1}{2})$.

Kumpulan Soal Latihan

1. Dengan induksi matematika, buktikan bahwa $2^n > n^3$ untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 10$.

2. Tentukan sisa pembagian 3^{2024} diabgi 41.

3. Jika $\gcd(a, 2026) = 1013$ dan $a > 2026$, maka tentukan nilai terkecil yang mungkin untuk a.

4. Buktikan bahwa
$$A = 2093^n - 803^n - 464^n + 261^n$$
habis dibagi 1897 untuk setiap n bilangan bulat positif.

5. Jika n adalah bilangan bulat, maka tunjukkan bahwa $n^4 - 20n^2 + 4$ bukan bilangan prima.

6. Untuk setiap bilangan asli n, buktikan bahwa $6 | 2n^3 + 4n$.

7. Diberikan p dan q adalah bilangan prima berbeda. Tunjukkan bahwa berlaku
$$pq | (20^{pq} - 20^p - 20^q + 20)$$

8. Tentukan nilai m sedemikian sehingga koefisien x^4 dan x^5 dari ekspansi $(4+mx)^8$ bernilai sama.

9. Jika
$$\left(a + \frac{1}{2}x\right)^6 = b - 96x + cx^2 + \dots$$
maka tentukan nilai dari $4a + b + c$.

10. Diketahui bahwa 2726, 4472, 5054, dan 6412 keempatnya akan memiliki sisa yang sama jika dibagi oleh bilangan asli m. Tentukan nilai m

11. Tentukan sisa pembagian $47^{37^{27}}$ oleh 11.

12. Carilah semua bilangan tiga digit $\overline{abc}$ yang memenuhi
$$\overline{abc} = (a + b + c)^3$$

13. Dua bilangan bulat positif a dan b memenuhi

$$\frac{a}{11} + \frac{b}{3} = \frac{17}{33}.$$

Tentukan nilai $a^2 + b^2$.

14. (USAMO/1975).
Carilah semua solusi bilangan bulat dari

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^{\cdot}b^2$$

15. (Modifikasi OSN − K/2016).
Banyaknya bilangan asli n yang memenuhi sifat hasil penjumlahan n dengan pembagi positif n yang kurang dari n sama dengan 2028 adalah ...

16. Tentukan semua bilangan bulat positif n yang memenuhi n adalah perkalian dari digit-digitnya yang bukan nol.

17. Carilah semua bilangan prima p sehingga $4p^2 + 1$ dan $6p^2 + 1$ keduanya juga adalah bilangan prima.

18. Carilah bilangan bulat terbesar n sehingga $n^3 + 100$ habis dibagi $n + 10$.

19. Tentukan semua bilangan bulat n sedemikian sehingga $n! + 5$ adalah bilangan kubik sempurna.

20. Tentukan jumlah faktor prima dari 27000001.

21. Buktikan untuk semua bilangan bulat lebih dari 1, bilangan $n^5 + n^4 + 1$ adalah bilangan komposit.

22. Jika p adalah bilangan prima ganjil, buktikan bahwa sisa dari $(p - 1)!$ dibagi oleh $p(p - 1)$ adalah $p - 1$.

23. a) Tentukan semua bilangan bulat positif n sedemikian sehingga 7 membagi $2^n - 1$

b) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n, bilangan $2^n + 1$ tidak habis dibagi 7.

24. Diberikan bilangan prima $p \geq 7$. Buktikan bahwa

$$\underbrace{111\ldots1}_{\text{ada p − 1 angka 1}}$$

habis dibagi p.

25. Diketahui a adalah bilangan bulat yang memenuhi

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{23}=\frac{a}{23!}$$

Tentukan sisa jika a dibagi 13.

26. Buktikan bahwa pecahan

$$\frac{12n+1}{30n+2}$$

tidak dapat disederhanakan untuk semua bilangan asli n.

27. Jika $p > 3$ adalah bilangan prima, bilangan bulat m dan n relatif prima sehingga

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Buktikan bahwa m habis dibagi p.

28. Jika n adalah bilangan bulat positif, hitunglah

$$\gcd(n!+1,\ (n+1)!+1)$$

29. Carilah semua bilangan asli n, sehingga $1+2^{n+1}+3^{2n}$ merupakan kelipatan 57.

30. Buktikan bahwa persamaan

$$x^3+11^3=y^3$$

tidak memiliki solusi untuk x dan y bilangan asli.

This page is intentionally left blank.

Daftar Pustaka

[1] T.M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1998.

[2] Tom M Apostol. *Mathematical analysis; 2nd ed.* Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[3] The riemann zeta function and tate's thesis, 2021-07-01.

[4] Al Jupri. *Dasar-dasar Teori Bilangan*. Penerbit Yrama Widya, 2020.

[5] David M. Burton. *Elementary Number Theory, Seventh Edition*. New York: McGraw-Hill Companies, 2011.

[6] Kenneth H. Rosen. *Elementary Number Theory & Its Application*. Boston, 2011.

[7] Lewinter M. Meyer. *Elementary Number Theory with Programming*. New Jersey: John Wiley and Sons Inc., 2016.

[8] Alexander Bogomolny. *Conversion of Fractions in Various Bases*. Cut The Knot, 2018.

[9] Xu Jiagu. *Lecture Notes on MAthematical Olympiaid Courses: For Junior Section Vol.2*. World Scientific, 2018.

[10] Dorin Andrica Titu Andreescu. *Number Theory: Structure, Examples, and Problems*.

[11] Zuming Feng. Titu Andreescu. Dorin Andrica. *104 Number Theory Problems*. Birkhäuser Boston, 2007.

[12] Gow. James. *The Greek numerical alphabet*. he Journal of Philology. Cambridge, 1883.