Pengantar Logika

Mahmud Yunus

Desember 2006

Kata Pengantar

Buku ini disusun terutama untuk membantu penyediaan buku teks pengantar logika dalam Bahasa Indonesia. Saat ini masih jarang dijumpai buku logika dalam Bahasa Indonesia, khususnya untuk mahasiswa tingkat awal. Untuk logika tingkat awal, yang didominasi logika sentensial, gramatika (tatabahasa) bahasa pengantar yang digunakan untuk pembahasan materi sama pentingnya dengan materi itu sendiri. Setelah dikenalkan dengan bahasan logika simbolik, peran bahasa pengantar sedikit demi sedikit mulai dapat ditinggalkan. Untuk itulah penyusun memandang perlunya menyusun buku pengantar logika dalam Bahasa Indonesia ini.

Penyusunan buku ini sama sekali bukan dilatar belakangi kepakaran, melainkan semata-mata untuk menyediakan bahan ajar logika dalam Bahasa Indonesia yang sangat dibutuhkan mahasiswa di tingkat awal. Untuk itu, penyusun mohon maaf kepada para pakar logika Indonesia sekaligus mohon bantuan saran perbaikan atas segala kekurangan dalam penyusunan buku ini.

Untuk dapat membaca dan mempelajari buku ini tidak diperlukan bekal pengetahuan khusus. Pengetahuan matematika tingkat SMA sudah mencukupi untuk dapat mengikuti pembahasan seluruh materi dalam buku ini. Materi buku ini dipersiapkan untuk bahan perkuliahan Pengantar Logika bagi mahasiswa Matematika semester pertama di perguruan tinggi. Namun demikian, buku ini juga cukup memadai digunakan oleh mahasiswa sains, teknik, atau pun sosial sebelum mempelajari logika yang lebih tinggi beserta cabang-cabang logika yang spesifik sesuai bidang keilmuan masing-masing.

Penyusun menyampaikan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu hingga terbitnya buku ini. Khususnya, kepada pengajar

dan mahasiswa di kelas Pengantar Logika Jurusan Matematika ITS, yang telah memberikan masukan dan koreksi pada naskah catatan kuliah dan soal-soal yang kini dirangkum untuk melengkapi materi buku ini. Dalam hal ini ucapan terimakasih terutama untuk Dr. Erna Apriliani dan Sadjidon, M.Si. Tak lupa terimakasih kepada Nur Animar, yang selalu mendampingi dan membantu penyusun mempersiapkan penulisan dengan LaTeX untuk naskah catatan kuliah.

Menyadari kekurang sempurnaan buku ini, penyusun sangat menghargai dan memperhatikan segala bentuk kritik dan saran untuk perbaikan dan penyempurnaan. Semoga buku ini bermanfaat.

Surabaya, Desember 2006

Mahmud Yunus
`yunusm@matematika.its.ac.id`

Daftar Isi

Bab 1

Pendahuluan

Bab ini menguraikan tentang pengertian logika dan sejarah pengembangannya, dengan tujuan memberikan motivasi mengenai pentingnya mempelajari logika. Pada bagian selanjutnya, masih di bab ini, diuraikan beberapa istilah dan pengertiannya yang akan digunakan pada bahasan bab-bab berikutnya.

1.1 Sekilas Logika

Logika, sebagai bidang kajian, telah dikenal dan dipelajari kira-kira sejak tahun 500 SM. Pada awal perkembangannya, logika hanyalah bagian penting yang dipelajari dalam ilmu filsafat, dan sangat dipengaruhi oleh karya Aristoteles (384–322 SM). Aristoletes adalah murid Plato, ahli filsafat dari Yunani, dan guru dari Alexander Agung. *Organon* adalah nama yang diberikan oleh para pengikut Aristoteles untuk kumpulan enam karya Aristoteles mengenai logika dan argumentasi logika.

Logika tradisional yang sangat dipengaruhi oleh Aristoteles, khususnya mengenai teori silogisma dan konsep *reductio ad absurdum*, tetap bertahan dan tidak berubah hingga akhir abad ke-19. Logika Aristoteles diuraikan menggunakan bahasa sehari-hari, sehingga kadang membingungkan dan kacau dengan makna dalam percakapan sehari-hari. Para ahli filsafat kemudian menghendaki logika yang diungkapkan lebih formal dan secara simbolik, serta berlaku lebih umum tidak terbatas pada aturan bahasa tertentu. Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716), mungkin yang pertamakali berupaya dan berhasil mewujudkan logika formal yang dikehendaki tersebut. Hal itu dilanjutkan dengan publikasi "*The Mathematical Analysis of Logic*" oleh George Boole pada tahun 1847, dan karya Augustus DeMorgan "*Formal Logic*", yang memunculkan ***logika simbolik*** dan menjadikan logika dikenal juga sebagai bagian dari matematika. Selain itu, mulai dikenal bahwa matematika bukan hanya tentang bilangan (aritmatika) dan bentuk-bentuk (geometri), tetapi mencakup semua bidang kajian yang dapat diungkapkan secara simbolik dengan aturan manipulasi yang tepat untuk simbol-simbol tersebut. Inilah logika simbolik yang merupakan bagian mendasar yang dibahas dalam buku pengantar ini.

Era baru logika tersebut semakin jelas perkembangan dan penerapannya. Hal ini antara lain ditandai dengan munculnya logika matematika dan filsafat analitik yang diperkenalkan oleh Gottlob Frege (1848–1925) dan Bertrand Russel (1872–1970). Selain itu, tercatat nama-nama pakar lain seperti Charles Peirce (1839–1914), Giuseppe Peano (1858–1932) yang hingga kini karya-karya mereka masih relevan dan dirujuk oleh para pakar jaman ini. Sejak saat itu, logika berkembang dengan pesat dan bukan hanya dipelajari sebagai bagian filsafat.

Logika matematika adalah nama yang pertama kali disebutkan oleh Giuseppe Peano, dan sering pula disebut sebagai logika simbolik. Pada dasarnya logika matematika masih merupakan logika Aristoteles, tetapi dipandang dari penulisannya digolongkan sebagai cabang dari aljabar abstrak. Mulai masa Boole dan DeMorgan, logika dan matematika telah menjalin hubungan erat dan tak mungkin dapat dipisahkan. Pada akhir abad ke-19 atau awal abad ke-20 diyakini bahwa semua matematika dapat direduksi menjadi logika simbolik sehingga menjadi murni formal. Teori ini pertama dikemukakan oleh pemikiran Kurt Gödel pada tahun 1930-an.

Semenjak logika matematika yang dilengkapi oleh Boole dan De Morgan, perkembangan logika menjadi semakin pesat. Terlebih lagi setelah teori aljabar Boole dikembangkan dan diterapkan oleh Huntington pada awal abad ke-20 dalam teori *switching* yang menjadi cikal bakal perkembangan teori dan aplikasi digital yang dikenal saat ini, logika telah menjadi bagian penting dalam perkembangan sains dan terapannya. Bahkan, logika telah menjadi bagian fundamental dalam lingkup pengembangan *ilmu komputer* dan *kecerdasan buatan*. Kini, logika merupakan bidang kajian yang sangat luas dengan banyak cabangnya, baik pada cabang teori maupun terapan.

1.2 Istilah Dasar Logika

Logika, berasal dari kata Yunani klasik $\lambda \acute{o} \gamma \o \varsigma$ (logos) yang makna aslinya adalah *kata*, atau *yang dikatakan*. Tetapi pada perkembangan selanjutnya berarti *berpikir* atau *bernalar*. Banyak definisi mengenai logika sebagai bidang kajian, bahkan masih sering menjadi perdebatan diantara para ahli. Salah satu definisi ringkas untuk kuliah pengantar ini: logika adalah kajian tentang ***argumentasi*** atau ***pembuktian***. Dalam hal ini, yang dimaksud dengan argumentasi bukanlah suatu perdebatan atau perbedaan pendapat, melainkan suatu contoh penalaran yang disertai satu atau lebih pernyataan sebagai pendukung, alasan, pertimbangan, atau bukti untuk pernyataan yang lain. Pernyataan yang didukung tersebut merupakan ***kesimpulan*** dari argumentasi, sedangkan pernyataan yang mendukung merupakan ***premis*** dari argumentasi.

Mempelajari argumentasi sangatlah penting sebab argumentasi merupakan cara untuk mendukung klaim tentang suatu *kebenaran*. Hal yang menarik adalah bahwa suatu argumentasi menetapkan kebenaran kesimpulan yang tak dapat diingkari, tetapi dengan logika seseorang dipaksa untuk menilai pernyataan tersebut. Argumentasi menetapkan kebenaran suatu kesimpulan relatif terhadap premis-premis dan aturan-aturan tentang ***inferensi*** (cara menarik kesimpulan). Kajian logika tidak mempedulikan apakah suatu argumentasi akan berhasil secara psikologis dalam mengubah pikiran atau meyakinkan orang lain. Kekakuan atau kejanggalan seseorang dalam berpikir merupakan bagian kajian dalam psikologi; efektif tidaknya penalaran serta ragamnya untuk mempengaruhi orang lain dipelajari oleh retorika; akan tetapi ***ketepatan penalaran*** (validitas inferensi) yang dipelajari dalam kajian logika.

Untuk menilai suatu argumentasi, hanya dua aspek atau sifat dari argumentasi tersebut yang perlu diperhatikan, yaitu ***kebenaran*** premis dan keabsahan (***validitas***) penalaran yang mengarah pada kesimpulan. Dalam hal ini, logika hanya mempelajari penalaran (*reasoning*), dengan mengesampingkan keraguan atas kebenaran premis secara empirik atau kebenaran dari hasil penyelidikan.

Suatu argumentasi adalah ***valid*** jika kebenaran premisnya menjamin kebenaran kesimpulannya; atau jika kesimpulan adalah benar atas asumsi bahwa semua premisnya benar; atau jika mustahil kesimpulannya salah bersamaan dengan semua premis benar; atau jika kesimpulan dapat ditarik dari premis-premis sesuai dengan aturan tertentu yang berlaku. Semua pengertian tersebut adalah ekivalen, dan biasanya digunakan bergantian sesuai dengan argumentasi yang akan dinilai validitasnya. (Perumusan yang terakhir adalah validitas sintaktik (kalimat), yang lainnya adalah perumusan kebenaran semantik (makna kata).) Jika suatu argumentasi tidak memenuhi ketentuan di atas, maka dikatakan argumentasi tersebut ***tidak valid***.

Perhatikan bahwa pengertian validitas, yaitu valid dan tidak valid, hanya tepat digunakan untuk menilai argumentasi. Sedangkan nilai kebenaran, yaitu benar dan salah, hanya digunakan untuk menilai pernyataan. Validitas berkenaan dengan penalaran, bukan dalil (proposisi), sedangkan kebenaran berkenaan dengan proposisi, bukan penalaran. Prinsip pokok yang pertama dari logika yang harus diingat: *kebenaran dan validitas adalah saling bebas*. Apabila penalaran di dalam suatu argumentasi adalah valid dan semua premisnya benar, maka argumentasi tersebut dikatakan ***bunyi*** (*sound*). Jika tidak demikian dikatakan argumentasi tersebut ***tidak bunyi*** (*unsound*). Jika suatu argumentasi bunyi, maka kesimpulannya haruslah benar dan akan tidak logis jika menyangsikan kebenaran itu.

Suatu argumentasi dikatakan ***deduktif*** apabila premisnya mengarah pada dasar yang meyakinkan akan kebenaran kesimpulannya, atau jika premisnya mendukung kesimpulan sesuai yang dikehendaki. Suatu argumentasi adalah ***induktif*** apabila argumentasi tersebut membuat tuntutan yang lebih lunak dengan premisnya mendukung tetapi tidak menjamin kesimpulannya. Istilah valid atau tidak valid hanya diterapkan pada argumentasi deduktif; sedangkan untuk argumentasi induktif lebih tepat digunakan istilah kuat atau lemah untuk menilai argumentasi. Dalam suatu argumentasi deduktif yang valid dengan semua premis benar, benarnya kesimpulan sudah semestinya dan mustahil salah. Dalam suatu argumentasi induktif kuat dengan semua premis benar, kebenaran dari kesimpulan semata-mata mungkin, dan kesalahannya semata-mata tidak mungkin. Jenis pendukung yang mengarahkan deduksi valid pada kesimpulannya *tidak* berkaitan dengan tingkatan, melainkan tentang "semua atau tidak-ada". Akan tetapi, jenis pendukung yang mengarahkan induksi kuat pada kesimpulannya berkenaan dengan tingkatan, yakni "lebih atau kurang". Kesimpulan suatu deduksi yang valid tidak pernah memuat informasi yang lebih dari yang termuat dalam premisnya, sedangkan kesimpulan suatu induksi selalu memuat informasi yang lebih dari yang termuat dalam premisnya. Hal inilah yang menyebabkan deduksi mempunyai kepastian (tidak pernah memberikan informasi tambahan) dan induksi selalu tidak pasti dalam tingkatan tertentu.

Jangan dikacaukan pengertian induksi dengan deduksi yang buruk. Perbedaan antara deduksi dan induksi bukanlah perbedaan antara penalaran yang baik dan yang buruk, melainkan tentang dua cara mendukung kebenaran suatu kesimpulan. Deduksi adalah bagian dari sains atau ilmu eksakta, sedangkan induksi tidak selalu. Khusus untuk induksi, dalam logika matematika dikenal istilah ***induksi matematika***; yakni induksi diartikan sebagai cara mendukung kebenaran kesimpulan secara matematis diawali dari kesimpulan yang sangat khusus menuju kesimpulan yang berlaku umum. Perbedaan penting antara induksi kuat dengan deduksi valid adalah: kesimpulan dalam induksi memuat informasi yang tidak termuat dalam premisnya; sedangkan dalam deduksi yang valid, informasi yang termuat dalam kesimpulannya selalu diturunkan dari dan termuat dalam premis-premisnya.

Cara penalaran yang keliru (*fallacy*) merupakan argumentasi yang buruk, baik deduktif maupun induktif. Argumentasi dapat saja "buruk" (atau tidak bunyi) antara lain disebabkan oleh: satu atau lebih premisnya mungkin salah, atau tidak relevan, atau penalarannya mungkin tidak valid, atau bahasa yang menyatakannya mungkin membingungkan atau tidak jelas. Jelas bahwa terdapat tak berhingga banyak argumentasi buruk; juga tak berhingga banyaknya cara berargumentasi yang buruk. Istilah *fallacy* biasanya digunakan untuk kesalahan yang biasa terjadi (salah-kaprah) dalam suatu argumentasi, yang mungkin tampak sangat meyakinkan. Oleh karena itu, mempelajari hal-hal yang demikian itu merupakan upaya pertahanan yang baik untuk menghadapi pengingkaran atas kebenaran.

1.3 Pernyataan dan Kalimat Terbuka

Secara umum, suatu argumentasi dibangun atas kalimat-kalimat yang mempunyai nilai kebenaran, yaitu kalimat-kalimat yang benar atau salah. Kebenaran tersebut, secara matematis, sangat bergantung pada lingkup bahasan dari kalimat yang digunakan. Dalam hal ini, suatu kalimat sesungguhnya menyatakan sifat atau hubungan antara objek-objek tertentu. Lingkup terbesar dari objek yang dikemukakan dalam suatu bahasan disebut ***semesta pembicaraan***. Dalam kalimat sehari-hari, sebagai semesta pembicaraannya adalah alam semesta. Dengan demikian jika tidak disebutkan secara eksplisit semesta pembicaraan dari suatu bahasan, maka dengan sendirinya semesta pembicaraannya adalah alam semesta.

Dengan semesta pembicaraan yang jelas, suatu kalimat dapat mempunyai nilai kebenaran yang pasti. Sebagai contoh perhatikan kalimat-kalimat berikut (sebutkan nilai kebenaran masing-masing):

(a) "Hasil perkalian 2×3 adalah 6."

(b) "Semua mahasiswa baru berpakaian putih-hitam."

(c) "Sangkuriang adalah raja Pajajaran."

(d) "Untuk setiap bilangan bulat a berlaku $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ faktor}}$."

Kalimat yang mempunyai nilai kebenaran (mempunyai salah satu dari nilai benar atau salah) disebut ***pernyataan*** atau ***proposisi***. Kadang-kadang pernyataan juga disebut ***kalimat deklaratif***. Pada buku ini digunakan istilah-istilah tersebut bergantian untuk makna yang sama. Untuk suatu pernyataan yang benar, dikatakan bahwa nilai kebenaran dari pernyataan tersebut adalah "Benar" dan ditulis dengan simbol "B"; sedangkan untuk pernyataan yang salah, dikatakan mempunyai nilai kebenaran "Salah" dan disimbolkan dengan "S".

Perlu diperhatikan bahwa dalam kehidupan sehari-hari tidak semua kalimat mempunyai nilai kebenaran atau tidak mudah ditentukan nilai kebenarannya. Selain itu, ada juga kalimat yang nilai kebenarannya dapat berubah atau dapat ditentukan berdasarkan semesta pembicaraannya maupun berdasarkan unsur-unsur pembangun kalimat itu sendiri.

Di dalam suatu kalimat dikenal adanya ***konstanta*** dan ***variabel***. Konstanta adalah simbol sebagai unsur kalimat yang menunjuk pada suatu anggota *tertentu* dari semesta pembicaraannya. Sedangkan variabel adalah simbol sebagai unsur kalimat yang menunjuk pada *sebarang* anggota semesta pembicaraannya.

Perhatikan contoh berikut ini:

(a) "Radja dan Ratu adalah kelompok pemusik yang disukai remaja."

(b) "Mahasiswa akan mendapat beasiswa dari institut."

Dalam kalimat (a), Radja dan Ratu adalah konstanta yang menunjuk pada nama tertentu dari kelompok-kelompok pemusik yang disukai remaja. Mahasiswa dalam kalimat (b) adalah variabel karena menunjuk sebarang anggota dari semesta pembicaraannya.

Kalimat terbuka adalah suatu kalimat yang memuat variabel, dan dengan mensubstitusikan nilai variabel akan diperoleh suatu kalimat deklaratif. Sebagai contoh, pada kalimat (b) contoh di atas disubstitusikan "mahasiswa terbaik" pada variabel "mahasiswa" akan didapat kalimat deklaratif:

"Mahasiswa terbaik akan mendapat beasiswa dari institut."

Bahasan mengenai variabel dan konstanta akan diuraikan lagi pada bab-bab selanjutnya.

1.4 Kebenaran Pernyataan dan Validitas Penalaran

Untuk lebih mendalami pemahaman tentang kebenaran dan validitas, pada bagian ini diuraikan (sekedar contoh) tentang bentuk argumentasi khusus. Argumentasi ini terdiri dari tiga baris dan biasanya disebut ***silogisma***. Bentuk umum silogisma adalah sebagai berikut:

Premis mayor	—	□	—	□	(menggunakan P dan M)
Premis minor	—	□	—	□	(menggunakan S dan M)
Kesimpulan	—	S	—	P	

Premis dapat dituliskan dengan urutan sebarang. Premis mayor adalah bagian yang memuat ***predikat*** dari kesimpulan, dan premis minor adalah bagian yang memuat ***subjek*** dari kesimpulan.

Tabel 1.1: ***Validitas Silogisma***

Premis benar, Kesimpulan salah		
0	valid	*Mustahil: tidak ada argumentasi valid memiliki premis benar dan kesimpulan salah.*
1	tidak valid	Kucing adalah mamalia. Anjing adalah mamalia. Maka anjing adalah kucing.
Premis benar, Kesimpulan benar		
2	valid	Kucing adalah mamalia. Harimau adalah kucing. Maka hariamau adalah mamalia.
3	tidak valid	Kucing adalah mamalia. Harimau adalah mamalia. Maka harimau adalah kucing.
Premis salah, Kesimpulan salah		
4	valid	Anjing adalah kucing. Kucing adalah burung. Maka anjing adalah burung.
5	tidak valid	Kucing adalah burung. Anjing adalah burung. Maka anjing adalah kucing.

Tabel 1.1: ***(lanjutan)***

Premis salah, Kesimpulan benar		
6	valid	Kucing adalah burung. Burung adalah mamalia. Maka kucing adalah mamalia.
7	tidak valid	Kucing adalah burung. Harimau adalah burung. Maka harimau adalah kucing.

Perbedaan antara kebenaran dan validitas merupakan perbedaan mendasar dari logika formal. Tanpa pemahaman yang baik mengenai hal ini, akan sulit untuk dapat memahami penalaran logika dengan baik.

Tujuh argumentasi di atas dapat membantu memastikan prinsip umum logika berikut ini.

- Premis benar tidak menjamin argumentsi valid.
  (Ditunjukkan contoh #1 dan #3 pada Tabel 1.1)
- Kesimpulan benar tidak menjamin argumentsi valid.
  (Ditunjukkan contoh #3 dan #7 pada Tabel 1.1)
- Premis benar dan kesimpulan juga benar tidak menjamin argumentsi valid.
  (Ditunjukkan contoh #3 pada Tabel 1.1)
- Penalaran benar tidak menjamin kesimpulan benar.
  (Ditunjukkan contoh #4 pada Tabel 1.1)
- Premis salah tidak menjamin argumentsi tidak valid.
  (Ditunjukkan contoh #4 dan #6 pada Tabel 1.1)
- Kesimpulan salah tidak menjamin argumentsi tidak valid.
  (Ditunjukkan contoh #4 pada Tabel 1.1)
- Premis salah dan kesimpulan juga salah tidak menjamin argumentsi tidak valid.
  (Ditunjukkan contoh #4 pada Tabel 1.1)
- Penalaran tidak valid tidak menjamin kesimpulan salah.
  (Ditunjukkan contoh #3 dan #5 pada Tabel 1.1)

Berdasarkan contoh-contoh dan uraian di atas, jelas bahwa kebenaran pernyataan dan validitas penalaran adalah berbeda, hubungan diantaranya tidak semuanya secara langsung. Namun demikian, kebenaran dan validitas tidak dapat dikatakan sama sekali tidak berhubungan, sebab kemustahilan "kasus nol" (pada Tabel 1.1) menunjukkan satu kombinasi nilai-kebenaran yang menghalangi validitas. Jika suatu argumentasi mempunyai premis benar dan kesimpulan salah, maka argumentasi tersebut *pasti* tidak valid.

Sebaliknya, kepastian yang tidak sepenuhnya semacam itu tentang validitas yang didasarkan pada nilai kebenaran hanya ada untuk konsep yang disebut konsep validitas *semantik*. Dalam pembahasan selanjutnya di buku ini akan lebih banyak dibahas mengenai konsep validitas *sintaktik* yang tidak merujuk pada kebenaran sama sekali.

Saat menghadapi kerumitan argumentasi, jangan sampai dikacaukan oleh premis benar atau kesimpulan benar untuk menganggap bahwa suatu argumentasi adalah valid. Tidak juga disesatkan oleh premis salah atau kesimpulan salah sehingga menganggap suatu argumentasi tidak valid. Tidak juga disesatkan oleh penalaran valid untuk menganggap suatu pernyataan adalah benar, atau oleh penalaran yang tidak valid untuk menganggap pernyataan adalah salah. Jika hal ini telah dipahami dengan baik, berarti telah dicapai kemudahan "akal sehat" untuk bernalar dengan benar serta melindungi diri dari pengingkaran tentang nilai kebenaran ataupun kebohongan.

Kebenaran dan validitas digabungkan dalam konsep *soundness*. Suatu argumentasi dikatakan bunyi jika (dan hanya jika) semua premisnya benar *dan* penalarannya valid; selain itu adalah tidak-bunyi (*unsound*). Dengan demikian, semua agumentasi yang bunyi mempunyai kesimpulan yang benar. Tabel 1.2 menyajikan bentuk lain dari tabel sebelumnya, yang menunjukkan bahwa hanya satu jenis argumentasi yang bunyi; dan inilah argumentasi yang akan banyak dipelajari dalam buku pengantar ini.

Peneliti di laboratorium, detektif, atau penyidik kepolisian mengungkapkan tentang kebenaran pernyataan. Sedangkan logika mengungkapkan tentang validitas penalaran.

Bagaimana logika menguji validitas? Pada dasarnya, logika menguji tentang ke-*tidak-valid*-an. Dapat dipastikan bahwa tidak validnya suatu argumentasi adalah apabila memiliki premis benar dan kesimpulan salah. Suatu argumentasi dikatakan *valid* dalam pengertian lemah jika

Tabel 1.2: *Argumentasi yang bunyi*

Jenis	Semua premis benar?	Kesimpulan benar?	Penalaran benar?	Mungkin?	Bunyi?
0	ya	tidak	ya	tidak	—
1	ya	tidak	tidak	ya	tidak
2	ya	ya	ya	ya	ya
3	ya	ya	tidak	ya	tidak
4	tidak	tidak	ya	ya	tidak
5	tidak	tidak	tidak	ya	tidak
6	tidak	ya	ya	ya	tidak
7	tidak	ya	tidak	ya	tidak

argumentasi tersebut secara sederhana *tidak* tidak valid. Pengertian validitas lemah ini akan memenuhi kebutuan dan berlaku pada penalaran pasti dalam sains, matematika, maupun kehidupan sehari-hari.

Untuk menguji tidak validnya argumentasi, harus diketahui bahwa argumentasi tersebut mempunyai premis benar dan kesimpulan salah. Meskipun logika tidak mengetahui apakah pernyataan benar atau salah, dengan logika masih dapat menguji validitas. Salah satu cara adalah dengan *mengasumsikan* bahwa premis suatu argumentasi semuanya benar dan kesimpulannya salah (yakni mengasumsikan argumentasi tidak valid). Cara yang lain adalah dengan *membuat semua asumsi yang mungkin* tentang kebenaran atau kesalahan semua pernyataan. Jika terdapat "semesta yang mungkin" dimana semua premis benar dan kesimpulan salah, maka argumentasi tersebut adalah tidak valid untuk semua semesta. (Perlu dijelaskan, mengapa demikian?)

—o0o—

Bab 2
Logika Sentensial

Logika sentensial diuraikan pada bab ini dalam sajian klasik dengan dilengkapi tambahan bentuk simbolik. Bahasan bab ini diarahkan pada pemahaman konsep dasar logika, dengan harapan setelah mempelajari seluruh bagian bab ini pembaca akan mulai terbiasa membaca dan menulis dalam bahasa formal (ilmiah).

2.1 Pernyataan dan Penyambung Sentensial

Logika sentensial yang sering disebut juga logika proposisional — meskipun ada juga yang membedakan keduanya — berkaitan dengan nilai kebenaran pernyataan atau proposisi. Sebagaimana disebutkan pada bab sebelumnya, ***pernyataan*** adalah kalimat deklaratif, yakni kalimat yang mempunyai nilai kebenaran. ***Pernyataan sederhana*** adalah pernyataan yang tidak memuat pernyataan lain sebagai bagiannya. Untuk penulisannya digunakan huruf kecil p, q, r, $\ldots$ sebagai simbol pernyataan. Sebagai contoh, misal p melambangkan pernyataan "matahari berwarna lembayung" dituliskan

p: "matahari berwarna lembayung"

dan dibaca

p adalah pernyataan "matahari berwarna lembayung"

Pernyataan majemuk adalah pernyataan yang memuat satu atau lebih pernyataan-pernyataan sederhana. Suatu komponen dari pernyataan majemuk adalah keseluruhan pernyataan yang merupakan bagian dari pernyataan yang lebih besar; komponen itu sendiri dapat berupa pernyataan majemuk. Sebagai contoh, untuk p pernyataan di atas dan

q: "bulan berwarna jingga"

maka pernyataan "p jika q" atau dalam bentuk kalimat "matahari berwarna lembayung jika bulan berwarna jingga" adalah pernyataan majemuk. Dalam hal ini, misal

r: "matahari berwarna lembayung jika bulan berwarna jingga"

berarti r adalah pernyataan majemuk yang disusun oleh p dan q dengan penyambung kalimat "jika".

Bagian ini membahas tentang dasar logika sentensial, yakni kajian yang berusaha untuk membangun cara bernalar yang formal yang dapat digunakan dalam analisis permasalahan dan konsep-konsep dalam ilmu pengetahuan yang sistematis. Hal ini diawali dengan menetapkan aturan penggunaan penyambung kalimat atau ***penyambung sentensial*** yang terdiri dari "tidak" (atau "bukan"), "dan", "atau", '‘jika ... maka ...", serta "... jika dan hanya jika ...". Perlu diingat, bahwa penggunaan kata-kata penyambung sentensial tersebut kadang terasa berbeda dari pengertiannya dalam bahasa sehari-hari.

Operator atau juga disebut ***penyambung sentensial*** digunakan untuk menggabungkan pernyataan-pernyataan sederhana menjadi pernyataan majemuk, dan menggabungkan pernyataan majemuk menjadi pernyataan majemuk yang lebih besar. Penyambung sentensial, beserta simbol yang biasa digunakan diberikan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1: *Penyambung Sentensial*

PENYAMBUNG	SIMBOL	NAMA
tidak	$\neg$	*negasi* atau *ingkaran*
dan	$\wedge$	*konjungsi*
atau	$\vee$	*disjungsi*
jika ... maka	$\Rightarrow$	*implikasi* atau *kondisional*
jika dan hanya jika	$\Longleftrightarrow$	*biimplikasi* atau *bikondisional*

Simbol $\neg$ adalah operator yang sebenarnya bukan penyambung, melainkan operator tunggal (*unary*) yang tidak menggabungkan pernyataan-pernyataan menjadi pernyataan majemuk. Sedangkan operator yang lain merupakan penyambung sentensial, dan merupakan operator pasangan (*biner*) yang menggabungkan dua pernyataan menjadi pernyataan mejemuk. Untuk selanjutnya, dapat dikatakan bahwa ***pernyataan sederhana*** adalah pernyataan yang tidak memuat penyambung kalimat. Sedangkan pernyataan yang tidak memuat penyambung kalimat maupun operator negasi disebut pernyataan ***atomik***.

Pernyataan sederhana:

p	"p benar"	— penegasan
$\neg p$	"tidak p"	— negasi (ingkaran)

CONTOH 2.1.1 Diantara kalimat-kalimat berikut ini manakah yang merupakan pernyataan? Jika pernyataan, sebutkan nilai kebenarannya.

(a) $1+1=2$
(b) $1=0$
(c) Besok aku akan ke rumahmu.
(d) Jika saya adalah presiden, maka saya bukanlah presiden.
(e) Benarkah 2 adalah penyelesaian dari $x^2-4=0$?
(f) Angka 5 dan angka 2.
(g) Pernyataan ini adalah salah.
(h) Pernyataan ini adalah benar.

Penyelesaian.

(a) Kalimat "$1 + 1 = 2$" adalah pernyataan sebab kalimat tersebut dapat bernilai salahsatu benar atau salah. Kenyataannya, pernyataan tersebut adalah benar, sehingg nilai kebenarannya adalah B.

(b) Kalimat "$1 = 0$" adalah pernyataan, dengan nilai kebenaran S.

(c) "Besok aku akan ke rumahmu" adalah pernyataan. Meskipun harus menunggu besok untuk mengetahui nilai kebenarannya.

(d) Pada bahasan selanjutnya akan ditunjukkan bahwa pernyataan "Jika saya adalah presiden, maka saya bukanlah presiden" sebenarnya adalah pernyataan yang lebih sederhana "Saya bukanlah presiden". Dengan demikian, selama yang menyatakan bukan presiden, pernyataan tersebut adalah benar.

(e) Kalimat "Benarkah 2 adalah penyelesaian dari $x^2 - 4 = 0$?" bukan pernyataan, sebab tidak dapat mempunyai nilai kebenaran. Kalimat tersebut adalah kalimat tanya atau suatu pertanyaan.

(f) "Angka 5 dan angka 2" bukanlah pernyataan. Kalimat tersebut tidak dapat dinilai kebenarannya, karena berupa kalimat yang tidak lengkap.

(g) "Pernyataan ini adalah salah" adalah pernyataan yang membingungkan: Jika pernyataan itu bernilai benar, padahal pernyataan itu menerangkan tentang pernyataan itu sendiri dan dinyatakan bahwa pernyataan itu salah, maka pernyataan tersebut bernilai salah. Sebaliknya, jika pernyataan itu bernilai salah, maka menerangkan bahwa pernyataan itu salah adalah kebohongan, jadi pernyataan itu benar. Dengan kata lain, jika pernyataan itu salah maka pernyataan itu benar; dan jika pernyataan itu benar maka pernyataan itu salah. Pernyataan tersebut ekivalen dengan pernyataan-semu "Saya sedang berbohong", sehingga pernyataan tersebut dikenal sebagai ***paradox-pembohong***.

(h) "Pernyataan ini adalah benar" tampaknya seperti suatu pernyataan, tetapi kenyataannya tidak ada cara untuk mendapatkan nilai kebenarannya. Sama artinya mengatakan bahwa pernyataan itu benar dengan mengatakan bahwa pernyataan itu salah. Jadi kalimat tersebut bukanlah pernyataan. ◄

Untuk selanjutnya, kalimat yang merujuk atau menerangkan tentang kalimat itu sendiri (dua kalimat terakhir pada contoh di atas) tidak termasuk pernyataan.

2.1.1 Negasi

Untuk menyangkal kebenaran suatu pernyataan adalah dengan menyatakan negasi (ingkaran) dari pernyataan tersebut, yaitu dengan menambahkan simbol negasi di depan pernyataan itu. Sebagai contoh, jika p adalah pernyataan "$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional", maka ingkarannya adalah $\neg p$, yang dibaca "tidak p". Tetapi dengan bahasa sehari-hari, kadang bisa dikatakan dengan "tidaklah benar bahwa ..." untuk menggantikan sekaligus menjelaskan makna kata "tidak". Untuk contoh di atas, $\neg p$ dibaca "tidaklah benar bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional". Pada contoh ini p adalah benar, sehingga $\neg p$ bernilai salah.

Perlu diingat bahwa secara umum negasi suatu pernyataan tidak selalu bernilai salah.

CONTOH 2.1.2 Dapatkan negasi dari pernyataan-pernyataan berikut ini.

(a) p: "$1+1=2$"
(b) q: "$1=0$"
(c) r: "Intan adalah kawan baik berlian"
(d) s: "Semua perempuan suka sewot"

Penyelesaian.

(a) $\neg p$: "tidaklah benar bahwa $1+1=2$" atau dengan lebih singkat $\neg p$: "$1+1\neq 2$"

(b) $\neg r$: "Intan bukanlah kawan baik berlian"

(c) $\neg s$: "Tidak semua perempuan suka sewot" ◀

Perhatikan bahwa pada bagian (c) contoh di atas, untuk mendapatkan negasi dari suatu pernyataan tinggal menambahkan kata “tidak” di bagian awal pernyataan semula. Akan tetapi, untuk mengurangi kekakuan kalimat, kadang perlu dipertimbangkan untuk mencari kalimat padanannya. Seperti pada bagian (b), seharusnya dituliskan $\neg r$: “Tidaklah benar bahwa intan adalah kawan baik berlian”. Agar lebih “halus” kalimat tersebut dapat ditulis dengan padanannya yaitu “Intan bukanlah kawan baik berlian”, tetapi tidak dituliskan “Intan adalah musuh berlian”.

Meskipun dianjurkan untuk menggunakan kalimat yang paling dekat dengan kalimat sehari-hari, perlu kecermatan dalam memilih padanannya. Perlu juga diperhatikan bahwa kalimat yang dipilih haruslah kalimat yang masih menampakkan struktur kalimat logika asalnya dengan jelas. Seperti bagian (b) pada contoh di atas, pernyataan asalnya memuat kata-kata “permata”, “kawan baik”, dan “berlian” sehingga ketiga kata pokok tersebut akan lebih berarti jika dipertahankan pada kalimat baru negasinya.

2.1.2 Konjungsi

Kata “dan” digunakan untuk menggabung dua kalimat menjadi satu kalimat yang disebut *konjungsi* dari dua kalimat. Dalam hal ini kata “dan” mempunyai makna kedua-duanya, seperti dalam contoh pernyataan berikut: “Manusia membutuhkan makan dan minum”. Dalam kalimat tersebut, berarti manusia membutuhkan makan dan sekaligus membutuhkan minum. Dengan demikian nilai kebenaran suatu pernyataan yang disambung dengan kata “dan” adalah bernilai benar jika kedua pernyataan yang menyusunnya bernilai benar.

Simbol yang digunakan untuk konjungsi adalah “$\wedge$”. Dengan simbol ini, misal ada dua pernyataan p dan q, maka disjungsi dari p dan q dinotasikan dengan $p \wedge q$ dan dibaca “p dan q”. Disjungsi ini bernilai benar apabila p maupun q bernilai benar.

CONTOH 2.1.3 Jika p: “Cuaca hari ini tidak menentu” dan q: “1+1=2”, bagaimanakah kalimat $p \wedge q$?

Penyelesaian.
$p \wedge q$: “Cuaca hari ini tidak menentu dan 1+1=2,” atau dengan ungkapan

yang agak lain: “Tidak hanya cuaca hari ini tidak menentu, tetapi juga 1+1=2.” ◀

Pada Contoh 2.1.3, pernyataan q bernilai benar, sehingga jika p benar maka seluruh pernyataan $p \wedge q$ akan benar. Sebaliknya, jika p salah maka pernyataan $p \wedge q$ juga akan bernilai salah.

CONTOH 2.1.4 Jika p adalah pernyataan “Bacaan ini menarik” dan q pernyataan “Logika adalah matakuliah yang menyenangkan,” maka tuliskan pernyataan “Bacaan ini tidak menarik walaupun logika adalah matakuliah yang menyenangkan” dalam bentuk logika.

Penyelesaian. Klausa pertama dalam pernyataan tersebut adalah negasi dari p, yaitu $\neg p$. Klausa ke-dua adalah q. Ungkapan “walaupun” adalah cara lain untuk mengatakan bahwa kedua klausa tersebut adalah benar, sehingga pernyataan tersebut adalah $\neg p \wedge q$. ◀

Sebagaimana contoh-contoh di atas, banyak cara untuk mengungkapkan konjungsi dalam Bahasa Indonesia. Sebagai contoh, misal p: “Laba-laba berkaki delapan” dan q: “Bebek berkaki dua.” Semua pernyataan berikut ini adalah cara mengungkapkan $p \wedge q$:

Laba-laba berkaki delapan dan bebek berkaki dua.

Laba-laba berkaki delapan tetapi bebek berkaki dua.

Laba-laba berkaki delapan sedangkan bebek berkaki dua.

Walaupun laba-laba berkaki delapan, bebek berkaki dua.

Laba-laba berkaki delapan walaupun bebek berkaki dua.

Dalam penggunaan bahasa sehari-hari, kalimat-kalimat di atas mungkin dapat berbeda makna, bergantung bagaimana menyusun kalimatnya serta kata penyambung yang digunakan. Dalam pengertian logika semua pernyataan di atas mempunyai nilai sama; sebarang kalimat yang mengungkapkan dua hal yang kedua-duanya benar adalah konjungsi.

2.1.3 Disjungsi

Dengan penyambung sentensial “atau” dapat diperoleh *disjungsi* dari dua kalimat. Disjungsi dari pernyataan p dan pernyataan q disimbolkan dengan $p \vee q$ dan dibaca "p atau q," dan ini bernilai benar apabila sekurang-kurangnya salah satu dari p atau q bernilai benar.

Dalam pengertian kalimat sehari-hari, penggunaan kata "atau" seringkali berubah-ubah. Lebih sering pengertiannya bersifat *eksklusif*, yakni "*p atau q*" berarti pilih p saja atau q saja. Ini berbeda dengan penggunaan kata "atau" dalam logika, yaitu "*p atau q*" berarti "p atau q, atau kedua-keduanya."

CONTOH 2.1.5 Misal p: "Rektor membaca peraturan akademik" dan q: "Dosen membaca peraturan akademik." Bagaimana kalimat ungkapan untuk $p \vee q$?

Penyelesaian. $p \vee q$: "Rektor atau dosen membaca peraturan akademik." ◀

Perlu diingat bahwa $p \vee q$ pada contoh di atas tidak mengesampingkan kemungkinan bahwa rektor maupun dosen kedua-duanya membaca peraturan akademik — atau bisa jadi kenyataannya rektor tersebut juga seorang dosen.

Negasi, konjungsi, dan disjungsi merupakan bagian fundamental dari pengembangan logika yang dikerjakan oleh George Boole mulai tahun 1847. Hasil kerja George Boole yang dikenal dengan Aljabar Boolean merupakan landasan berkembangnya teori digital dan mengilhami berkembangnya piranti komputer yang saat ini sangat mendominasi kehidupan sehari-hari.

CONTOH 2.1.6 Misal p: "Rektor membaca peraturan akademik," q: "Dosen membaca peraturan akademik" dan r: "Mahasiswa membaca peraturan akademik." Bagaimana kalimat yang mengungkapkan $(p \vee q) \wedge \neg r$?

Penyelesaian. $(p \vee q) \wedge \neg r$: "Rektor atau dosen membaca peraturan akademik, tetapi mahasiswa tidak."

Struktur gramatika bahasa yang baku perlu diperhatikan dalam menyusun kalimat logika, sehingga didapat kalimat atau pernyataan yang baik sesuai gramatika dan benar sesuai aturan logika.

CONTOH 2.1.7 Misal p: "Bunga mawar berwarna merah," q: "Bunga melati pohonnnya berduri," dan r: "Bunga mawar pohonnnya berduri." Tuliskan pernyataan-pernyataan berikut ini dalam bentuk logika simbolik.

(a) "Bunga mawar pohonnnya tidak berduri atau bunga melati pohonnya tidak berduri"

(b) "Bunga mawar berwarna merah atau pohonnnya berduri, atau bunga melati pohonnnya berduri."

Penyelesaian.

(a) Pernyataan tersebut adalah disjungsi dari negasi p dan negasi q, jadi bentuk simbolik pernyataan tersebut adalah $\neg p \vee \neg q$.

(b) Pernyataan tersebut adalah disjunsgi dari ketiga pernyataan yang diberikan, jadi bentuk simboliknya adalah $(p \vee q) \vee r$, atau bentuk yang ekivalen adalah $p \vee (q \vee r)$. Selanjutnya dapat dihilangkan tanda kurungnya dan ditulis $p \vee q \vee r$. ◄

Perhatikan bahwa pernyataan (a) adalah benar, sebab $\neg q$ benar. Pernyataan (b) adalah benar, sebab p benar. Demikian juga r adalah benar. Apabila satu diantara p, q, dan r bernilai benar, maka pernyataan $p \vee q \vee r$ akan bernilai benar.

2.1.4 Implikasi

Kata "jika ... maka ..." digunakan untuk membangun *kalimat kondisonal.* Kalimat kondisional disebut juga dengan *implikasi.* Pernyataan

"jika p maka q" ditulis dengan simbol "$p \Rightarrow q$".

Dalam penulisan di atas, pernyataan p disebut *anteseden,* atau *hipotesis,* atau *alasan* dan pernyataan q disebut dengan *konsekuen,* atau *kesimpulan,*atau *akibat.* Aturan penggunaannya adalah:

Suatu implikasi bernilai salah *apabila antesedennya* benar *dan konsekuennya* salah*; selain yang demikian implikasi bernilai* benar.

Perlu perhatian yang cermat dalam menggunakan implikasi, sebab dalam penggunaan (percakapan) sehari-hari seringkali implikasi tidak diartikan sebagaimana aturan di atas.

Beberapa bentuk kalimat lain juga mempunyai makna sebagaimana "jika ... maka ...". Dalam hal ini, penulisan simbol $p \Rightarrow q$ juga dapat dibaca seperti berikut ini:

(a) q jika p

(b) p hanya jika q

(c) p asalkan q

(d) p syarat cukup untuk q

(e) q syarat perlu untuk p

Dalam bahasa matematika, implikasi dalam bentuk (d) dan (e) paling banyak digunakan, khususnya dalam pembuktian. Sekali lagi, perlu berhati-hati membaca bentuk implikasi ini, sebab tidak sering dijumpai dalam kalimat sehari-hari. Perhatikan pula bahwa *syarat perlu* belum tentu cukup untuk menarik kesimpulan atau menetapkan kebenaran suatu implikasi. Sebaliknya, *syarat cukup* tidak selalu diperlukan untuk menetapkan kebenaran suatu implikasi.

Sebagai contoh, perhatikan pernyataan "Jika suatu segitiga adalah samasisi maka segitiga tersebut samakaki". Dalam hal ini, agar suatu segitiga samakaki syaratnya cukup samasisi dan tidak membutuhkan syarat yang lain. Tetapi, sebenarnya untuk menjadi segitiga samakaki tidak perlu harus samasisi. Demikian pula, suatu segitiga samasisi perlu atau harus samakaki, tetapi samakaki belum cukup sebagai syarat untuk segitiga samasisi.

Berikut ini diberikan beberapa contoh implikasi guna lebih memahami bentuk-bentuk implikasi dan maknanya.

CONTOH 2.1.8 Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan "Jika $1+1=2$ maka ayam berkaki dua."

Penyelesaian. Pernyataan tersebut benar, sebab "$1+1=2$" maupun "ayam berkaki dua" keduanya pernyataan yang benar. ◄

Perhatikan bahwa p dan q dalam pernyataan $p \Rightarrow q$ tidak harus terkait satu sama lain. Pada contoh di atas, tidak dapat dikatakan bahwa ayam berkaki dua *sebab* $1+1=2$, tetapi semata-mata kebenaran implikasi disini adalah secara logika.

CONTOH 2.1.9 Benarkah pernyataan "Saat turun hujan, saya harus menyirami tanaman di halaman." ?

Penyelesaian. Salah. Pernyataan tersebut dapat diungkapkan dengan pernyataan "Jika turun hujan, maka saya harus menyirami tanaman di halaman" yang jelas salah: jika benar-benar turun hujan, maka jelas salah bahwa saya harus menyirami tanaman di halaman. ◄

Secara umum, jika p benar dan q salah, maka $p \Rightarrow q$ bernilai salah.

CONTOH 2.1.10 Benar atau salah pernyataan berikut ini. "Jika matahari seperti donat, maka saya adalah profesor matematika."

Penyelesaian. Benar. Tanpa menghiraukan kebenaran pernyataan kedua (konsekuen), pernyataan pertama (anteseden) jelas salah, sehingga apapun konsekuennya secara keseluruhan implikasi terebut benar. ◄

Secara umum, apabila q salah maka implikasi $p \Rightarrow q$ selalu benar, tanpa menghiraukan kebenaran dari p.

Pada kenyataannya, pernyataan implikasi sering membingungkan dan menyebabkan orang salah dalam memahami maknanya. Umumnya kesalahan tersebut terjadi karena pemahaman yang sering dikacaukan oleh bentuk-bentuk *konvers*, *invers*, dan *kontrapositif* dari implikasi tersebut:

- $q \Rightarrow p$ disebut ***konvers*** dari pernyataan $p \Rightarrow q$
- $\neg p \Rightarrow \neg q$ disebut ***invers*** dari pernyataan $p \Rightarrow q$
- $\neg q \Rightarrow \neg p$ disebut ***kontrapositif*** dari pernyataan $p \Rightarrow q$

Apabila suatu implikasi bernilai benar, maka konvers dan inversnya dapat bernilai benar atau dapat juga bernilai salah. Akan tetapi, jika suatu implikasi bernilai benar, maka kontrapositifnya pasti juga bernilai benar.

Berdasarkan kenyataan bahwa $\neg\neg p$ adalah p, dapat dikatakan bahwa apabila suatu kontrapositif dari suatu pernyataan adalah benar, maka dapat dipastikan bahwa pernyataan tersebut juga benar. Hal ini dapat dilihat dari pernyataan $\neg q \Rightarrow \neg p$ yang bernilai benar, akibatnya kontrapositifnya, yaitu $\neg\neg p \Rightarrow \neg\neg q$ juga benar. Dan pernyataan terakhir tersebut tak lain adalah $p \Rightarrow q$.

CONTOH 2.1.11 Dapatkan konvers, invers, dan kontrapositif dari pernyataan "Jika kamu mendapat A untuk Logika, maka aku belikan kamu mobil baru."

Penyelesaian. Pernyataan tersebut adalah implikasi $p \Rightarrow q$ dengan p pernyataan "kamu mendapat A untuk Logika" dan q pernyataan "aku belikan kamu mobil baru." Konversnya adalah $q \Rightarrow p$ dan dalam bentuk kalimat adalah "Jika aku belikan kamu mobil baru maka kamu mendapat nilai A untuk Logika." ◄

Inversnya adalah $\neg p \Rightarrow \neg q$: "Jika kamu tidak mendapat A untuk Logika, maka aku tidak belikan kamu mobil baru." Sedangkan kontrapositifnya adalah $\neg q \Rightarrow \neg p$: "Jika aku tidak belikan kamu mobil baru maka kamu tidak mendapat nilai A untuk Logika." ◄

Ingat bahwa pernyataan $p \Rightarrow q$ tidak selalu berati p menyebabkan q, sebab p dan q bisa berupa dua pernyataan yang samasekali tidak berubungan. Lihat Contoh 2.1.8. Akan tetapi, apabila $p \Rightarrow q$ benar maka dijamin p benar mengakibatkan q benar.

Perhatikan kembali Contoh 2.1.11. Misalkan pernyataan aslinya benar, maka konvers dan invernya tidak selalu benar. Tidak ada bagian dalam janji tersebut yang mencegah aku untuk membelikan kamu mobil baru, meskipun kamu tidak mendapat A untuk Logika. Jika aku tidak membeli mobil baru untuk kamu, pastilah kamu tidak mendapat A untuk logika, jika tidak demikian berarti aku telah mengingkari janji.

Pernyataan implikasi dalam logika adalah ***implikasi material***, yakni nilai kebenarannya hanya bergantung pada nilai kebenaran anteseden dan konsekuen. Sedangkan implikasi pada percakapan sehari-hari adalah ***implikasi biasa*** yang bisa mempunyai nilai kebenaran tidak tunggal, bergantung pada saat disampaikan atau lingkungan dimana disampaikan pernyataan tersebut, termasuk dialek bahasa yang digunakan. Bahkan masih banyak faktor lain yang mempengaruhi kebenaran suatu implikasi biasa.

2.1.5 Biimplikasi

Adakalanya dikehendaki suatu implikasi sekaligus konversnya kedua-duanya benar, yaitu $p \Rightarrow q$ benar dan $q \Rightarrow p$ juga benar. Ini yang disebut pernyataan ***biimplikasi***. Kata "jika dan hanya jika" digunakan untuk menyambung dua kalimat sehingga menjadi biimplikasi. Pernyataan biimplikasi juga disebut *bikondisional* atau *ekivalensi*. Pernyataan biimplikasi "p jika dan hanya jika q", dinotasikan dengan "$p \iff q$", mempunyai makna sama dengan pernyataan-pernyataan berikut:

(a) "jika p maka q, dan jika q maka p"

(b) "p jika q, dan p hanya jika q"

(c) "q syarat perlu dan cukup untuk p"

(d) "p ekivalen dengan q"

Berdasarkan aturan penggunaan konjungsi dan implikasi, mudah diperiksa bahwa bentuk pernyataan (a) di atas bernilai benar apabila p dan q keduanya benar atau keduanya salah. Jadi, aturannya adalah:

> *Suatu biimplikasi adalah bernilai benar jika dan hanya jika kedua pernyataan penyusunnya mempunyai nilai kebenaran sama.*

CONTOH 2.1.12 Buatlah kalimat yang ekivalen dengan pernyataan "Saya mahasiswa matematika jika dan hanya jika saya mencintai matematika."

Penyelesaian. Berikut ini adalah beberapa kalimat yang mungkin:

- Saya mencintai matematika jika dan hanya jika saya mahasiswa matematika.

- Menjadi mahasiswa matematika adalah syarat perlu dan cukup bagi saya untuk mencintai matematika.
- Bagi saya, mencintai matematika adalah syarat perlu dan cukup untuk menjadi mahasiswa matematika.
- Saya tidak mencintai matematika jika dan hanya jika saya tidak menjadi mahasiswa matematika.

2.1.6 Urutan Operator Penyambung Sentensial

Pada saat menghadapi suatu pernyataan majemuk yang sangat panjang, yakni dibentuk oleh banyak pernyataan sederhana, ada kalanya sulit menentukan nilai kebenarannya. Untuk itu, disepakati aturan urutan sebagai berikut:

(i) ( ) : pernyataan di dalam tanda kurung adalah prioritas tertinggi

(ii) $\neg$: prioritas ke-dua

(iii) $\vee$ dan $\wedge$: prioritas ke-tiga

(iv) $\Rightarrow$ dan $\Longleftrightarrow$: prioritas paling rendah

Dengan urutan prioritas seperti di atas, sebagai contoh, pernyataan

$$p \vee q \Rightarrow r \Leftrightarrow \neg p \wedge r \qquad \text{ekivalen dengan} \qquad ((p \vee q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge r)$$

SOAL-SOAL LATIHAN 2.1

Untuk Soal 1–12, periksalah kalimat yang diberikan termasuk pernyataan atau bukan. Jika termasuk pernyataan, terangkan mengenai nilai kebenarannya. Jika bukan pernyataan, jelaskan mengapa.

1. Matahari terbit setiap hari.
2. Kucing gemuk duduk dibantal empuk.
3. Lihatlah cermin dan katakan wajah siapa yang tampak.

4. Kacamata tidak membuat aku tampak lebih tua.
5. Kalia melambaikan tangan dengan lemah, airmatanya menitik di pipi, sementara Dochino hanya memandangi dari balik tirai jendela.
6. 1.000.000.000.000.000 adalah bilangan paling besar.
7. Tidak ada bilangan yang paling besar.
8. Kemarin hujan lebat, sekarang terang benderang.
9. Apakah dia pasti datang besok?
10. Ini adalah pernyataan.
11. Ini adalah soal latihan nomor 11.
12. Kalimat ini tidak memuat kata benda.

Untuk Soal 13–21, terjemahkan pernyataan majemuk yang diberikan menjadi pernyataan dalam notasi simbolik. Gunakan huruf kecil untuk melambangkan masing-masing pernyataan atomik.

13. Kebakaran itu karena disengaja, atau karena tiba-tiba terjadi.
14. Jika airnya jernih, maka Gusan dapat melihat dasar sumur atau dia tolol.
15. Jolina di sini atau Marian tidak, dan Lalian pasti ya.
16. Jika ada kucing lebih banyak dari anjing, maka ada kuda lebih banyak dari anjing dan ada ular lebih sedikit dari kucing.
17. Jika orang menginjak bulan adalah khayalan, dan Sirterklas juga benar demikian, berarti anak-anak telah tertipu.
18. Jika rambut merah disukai atau rambut ikal tidak berjerawat, maka logika adalah membingungkan.
19. Jika pemukiman sangat jarang dan orang suka tinggal di keluarga besar, dan jika orang tidak suka tinggal di keluarag besar, maka pemukiman sangat jarang.
20. Jika Juono memberi kesaksian dan berkata benar, Perman akan terbukti bersalah; dan jika Juono tidak memberi kesaksian, Perman akan terbukti bersalah.

21. Juono harus memberi kesaksian dan berkata benar, atau dia tidak harus memberi kesaksian.

22. Tentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk berikut ini berdasarkan nilai kebenaran pernyataan sederhana yang diberikan pada (i)–(iv):

    (i) "Galileo lahir sebelum Descartes" benar.
    (ii) "Descartes lahir pada abad ke-enambelas" benar.
    (iii) "Newton lahir sebelum Shakespeare" salah.
    (iv) "Racine sebangsa dengan Galileo" salah.

    (a) Jika Galileo lahir sebelum Descartes, maka Newton tidak lahir sebelum Shakespeare.
    (b) Jika Racine sebangsa dengan Galileo atau Newton lahir sebelum Shakespeare, maka Descartes lahir pada abad ke-enambelas.
    (c) Jika Racine tidak sebangsa dengan Galileo, maka Descartes tidak lahir pada abad ke-enambelas atau Newton lahir sebelum Shakespeare.

23. Diketahui:
    p: "Jane Austen satu generasi dengan Beetoven";
    q: "Beetoven satu generasi dengan Gauss";
    r: "Gauss satu generasi dengan Napoleon";
    s: "Napoleon satu generasi dengan Julius Caesar".
    Dalam hal ini p, q, dan r benar, sedangkan s salah.

    Dapatkan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan di bawah ini:

(a) $p \wedge r$	(b) $q \vee r$	(c) $\neg s \Rightarrow p$
(d) $q \wedge \neg r \vee s$	(e) $\neg p \wedge q \vee r$	(f) $s \Rightarrow \neg p$
(g) $(p \wedge q) \wedge r$	(h) $p \wedge (q \wedge r)$	(i) $s \Rightarrow p$
(j) $p \Rightarrow s$	(k) $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$	(l) $p \wedge q \Leftrightarrow r \wedge \neg s$

Dapatkan nilai kebenaran tiap pernyataan pada Soal 24–41.

24. "Jika $1 = 1$, maka $2 = 2$."
25. "Jika $1 = 0$, maka $1 = 2$."
26. "Jika $1 \neq 0$, maka $2 \neq 2$."
27. "Jika semua ucapan saya benar, maka semua ucapan saya salah."
28. "Jika semua ucapan saya salah, maka $1 = 2$."
29. "Syarat cukup agar $1 = 2$ adalah $1 = 0$."
30. "$1 = 2$ adalah syarat perlu agar 1 samadengan 2."
31. "$1 \neq 2$ adalah syarat perlu agar 1 samadengan 3."
32. "Jika aku menyembah seekor ayam, maka matahari akan marah."
33. "Agar matahari terbit dari timur, perlu matahari terbenam di barat."
34. "Agar matahari terbit dari timur, cukup matahari terbenam di barat."
35. "Jika ada mendung maka ada ada hujan."
36. "Ada hujan hanya jika ada ada mendung."
37. "Ada mendung hanya jika ada ada hujan."
38. "Saya menjadi mahasiswa, maka saya mempunyai Kartu Mahasiswa."
39. "Menjadi mahasiswa adalah syarat cukup agar saya untuk mempunyai Kartu Mahasiswa."
40. "Mempunyai Kartu Mahasiswa adalah syarat cukup agar saya menjadi mahasiswa."
41. "Mempunyai Kartu Mahasiswa adalah syarat perlu dan cukup agar saya menjadi mahasiswa."

Tuliskan bentuk kontrapositif dan konvers dari masing-masing pernyataan pada Soal 42–47 dan nyatakan dalam bentuk kalimat.

42. "Jika saya berpikir, maka saya ada."

43. "Jika saya tidak berpikir, maka saya tidak ada."

44. "Jika saya tidak berpikir, maka saya dewa."

45. "Jika saya tidak berpikir, maka saya tidak ada."

46. "Burung termasuk unggas hanya jika mereka bergerombol."

47. ""Burung bergerombol hannya jika mereka golongan unggas."

48. Berikan contoh dalam bentuk kalimat implikasi $p \Rightarrow q$ yang bermakna bahwa q menyebabkan p.

49. Berikan contoh dalam bentuk kalimat implikasi $p \Rightarrow q$ dan tunjukkan bahwa $\neg p$ menyebabkan $\neg q$.

2.2 Tabel Kebenaran dan Tautologi

Tabel kebenaran adalah daftar lengkap dari semua nilai kebenaran yang mungkin dari suatu pernyataan. Di sini digunakan B untuk menyatakan nilai "benar" dan S untuk menyatakan nilai "salah" dan kadang akan digunakan "1" dan "0" yang berturut-turut menyatakan nilai benar dan salah.

Aturan kebenaran dari penggunaan negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi dapat dirangkum dalam bentuk *tabel kebenaran*. Berikut ini tabel kebenaran dari masing-masing bentuk pernyataan di atas:

NEGASI

p	$\neg p$
B	S
S	B

KONJUNGSI

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

DISJUNGSI

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

IMPLIKASI

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

BIIMPLIKASI

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Suatu pernyataan dikatakan *atomik* apabila dalam pernyataan tersebut tidak terdapat penyambung sentensial maupun negasi. Pada masing-masing tabel kebenaran di atas, dua kolom pertama adalah *kolom atomik*, yakni menyajikan nilai kebenaran yang mungkin dari pernyataan atomik. Secara umum, tabel kebenaran dari pernyataan yang terdiri dari n atomik akan terdiri dari 2^n baris. Pada masing-masing tabel kebenaran di atas, kolom terakhir disebut dengan *kolom pernyataan*.

Pada umumnya, tabel kebenaran suatu pernyataan mempunyai kombinasi dari B dan S dalam kolom pernyataannya; pernyataan dengan kombinasi-kombinasi tersebut dinamakan ***kontingensi***. Pernyataan yang tidak mempunyai kombinasi lain kecuali B, dalam kolom pernyataannya, disebut ***tautologi***. Sedangkan pernyataan yang hanya mempunyai nilai S, dalam kolom pernyataannya, disebut ***kontradiksi***.

Perhatikan contoh sederhana dalam tabel kebenaran berikut ini.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$p \vee \neg p$	$q \wedge \neg q$
B	B	S	S	B	B	S
B	S	S	B	B		S
S	B	B	S	S	B	
S	S	B	B	B		

Berdasarkan tabel kebenaran di atas, dapat dilihat bahwa pernyataan "$p \Rightarrow q$" adalah kontingensi, pernyataan "$p \vee \neg p$" adalah tautologi, dan pernyataan "$q \wedge \neg q$" adalah kontradiksi. Jelas bahwa nilai kebenaran dalam kolom pernyataan terdiri dari kombinasi B dan S, atau B saja, atau hanya S saja, dan kombinasi nilai kebenan tesebut tidak bergantung pada nilai kebenaran pernyataan (atomik) penyusunnya.

CONTOH 2.2.1 Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan-pernyataan $p \Rightarrow q$, dan $\neg p \vee q$. Dengan mengamati tabel yang Anda buat, apakah kesimpulan Anda?

Penyelesaian. Untuk meringkas tabel, dibuat satu tabel dengan dua kolom pernyataan sesuai soal di atas.

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
B	B	S	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B

Dari tabel tersebut, dapat dilihat bahwa pernyataan $p \Rightarrow q$ dan $\neg p \vee q$ termasuk kontingensi. Selain itu, dari dua kolom terakhir tampak bahwa $p \Rightarrow q$ mempunyai nilai kebenaran sama dengan nilai kebenaran $\neg p \vee q$. ◄

CONTOH 2.2.2 Buatlah tabel kebenaran untuk pernyataan-pernyataan $(p \wedge q) \Rightarrow \neg p$, $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$, dan $\neg((p \wedge \neg p) \Rightarrow q)$. Kemudian tetapkan pernyataan-pernyataan tersebut apakah termasuk *kontingensi*, *tautologi*, atau *kontradiksi*.

Penyelesaian. Untuk memudahkan memeriksa tabel yang cukup banyak kolomnya, ditambahkan satu baris (baris pertama) untuk menandai nomor kolom di bawahnya.

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \wedge \neg p$	$(p \wedge q) \Rightarrow \neg p$	$(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$	$\neg((p \wedge \neg p) \Rightarrow q)$
B	B	S	B	S	S	B	S
B	S	S	S	S	B	B	S
S	B	B	S	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B	S

Tampak bahwa kolom 6 memuat kombinasi S dan B, yang berarti pernyataan $(p \wedge q) \Rightarrow \neg p$ adalah kontingensi; kolom 7 hanya memuat nilai kebenaran B yang menunjukkan bahwa $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$ termasuk tautologi; kolom h hanya memuat S yang berarti $\neg((p \wedge \neg p) \Rightarrow q)$ adalah pernyataan kontradiksi. Selain itu, tampak bahwa negasi dari tatologi adalah kontradiksi. ◄

Pernyataan $p \vee \neg p$ dan $p \wedge \neg p$ berturut-turut adalah contoh tautologi dan kontradiksi yang paling sederhana, akan tetapi dua pernyataan tersebut banyak membantu dalam inferensi atau pembuktian. (Hal ini akan dibahas mulai Bab 2).

SOAL-SOAL LATIHAN 2.2

Buatlah tabel kebenaran untuk masing-masing pernyataan pada Soal 1–8, kemudian tentukan termasuk kontingensi, tautologi, ataukah kontradiksi.

1. $p \Rightarrow q \vee p$
2. $p \vee q \Rightarrow \neg p$
3. $p \wedge q \Rightarrow \neg p$
4. $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$
5. $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$
6. $p \wedge (p \Rightarrow \neg p)$
7. $(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$
8. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
9. $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q$
10. $\neg((p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q)$
11. $p \Longleftrightarrow (p \vee q)$
12. $(p \vee \neg p) \Longleftrightarrow (q \vee \neg q)$

Untuk Soal 13–18, misalkan A dan B pernyataan-pernyataan (mungkin majemuk).

13. Jika B suatu tautologi, mengapa $A \Rightarrow B$ juga suatu tautologi, tanpa memperhatikan A?
14. Jika A suatu kontradiksi, mengapa $A \Rightarrow B$ merupakan tautologi, tanpa memperhatikan B?
15. Jika A suatu tautologi dan B kontradiksi, apa yang dapat Anda katakan mengenai $A \Rightarrow B$?
16. Jika A dan B keduanya kontradiksi, apa yang dapat Anda katakan mengenai $A \Leftrightarrow B$?
17. Jika $A \vee B$ suatu kontradiksi, apa yang dapat Anda terangkan mengenai A dan B?

18. Jika $A \wedge B$ suatu tautologi, apa yang dapat Anda terangkan mengenai A dan B?
19. Dapatkah suatu pernyataan atomik merupakan atautologi atau suatu kontradiksi? Jelaskan.

2.3 Ekivalensi Logis

Pada subbbab sebelumnya telah disinggung mengenai beberapa pernyataan yang ekivalen. Misalnya, diduga bahwa $(p \vee q) \vee r$ dan $p \vee (q \vee r)$ adalah dua pernyataan yang ekivalen — biasanya disebut hukum asosiatif untuk disjungsi. Subbab ini akan membahas tentang ***ekivalensi secara logika*** atau singkatnya disebut ***ekivalensi logis***. Selain itu akan dibahas ulang mengenai pernyataan yang "jelas dengan sendirinya" (tautologi) dan pernyataan yang "terang salah" (kontradiksi).

Bahasan ini diawali dengan beberapa contoh tabel kebenaran yang hasilnya akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya.

CONTOH 2.3.1 Buatlah tabel kebenaran untuk $\neg(p \wedge q)$ dan $\neg p \vee \neg q$.

Penyelesaian. Tabel kebenaran yang dimaksud adalah:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
B	B	B	S	S	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	S	B	B	S	B
S	S	S	B	B	B	B

Tabel kebenaran di atas menunjukkan bahwa nilai kebenaran untuk $\neg(p \wedge q)$ dan $\neg p \vee \neg q$ sama di setiap baris, atau dengan kata lain $\neg(p \wedge q)$ dan $\neg p \vee \neg q$ mempunyai nilai kebenaran yang sama untuk semua kombinasi nilai kebenaran pernyataan atomik yang menyusunnya. ◀

Dua pernyataan dikatakan ***ekivalen secara logika***, kadang dengan singkat dikatakan ***ekivalen***, apabila untuk semua nilai kebenaran yang mungkin dari pernyataan atomik yang terlibat, dua pernyataan tersebut selalu mempunyai nilai kebenaran yang sama. Untuk p dan q yang ekivalen, dituliskan $p \equiv q$. Notasi $p \equiv q$ bukanlah pernyataan logika yang baru, melainkan hanya menunjukkan hubungan (ekivalensi) antara dua pernyataan tersebut. Dengan pengertian ini, dari Contoh 2.3.1 pernyataan-pernyataan $\neg(p \wedge q)$ dan $\neg p \vee \neg q$ dikatakan ekivalen, dan ditulis $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$. (Ini salah satu dari Hukum DeMorgan.)

CONTOH 2.3.2 Tunjukkan bahwa $\neg\neg p \equiv p$. Ini disebut negasi ganda (*double negation*).

Penyelesaian. Untuk menunjukkan ekivalensi logis dari dua pernyataan tersebut, dibuat tabel kebenaran untuk p dan $\neg\neg p$ berikut ini

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
B	S	B
S	B	S

Pada kolom-kolom untuk p dan $\neg\neg p$ mempunyai nilai kebenaran yang sama pada masing-masing baris yang bersesuaian. Hal ini menunjukkan bahwa kedua pernyataan tersebut ekivalen secara logika. ◄

CONTOH 2.3.3 Tuliskan "Tidaklah benar saya tidak bahagia" dalam kalimat yang lebih sederhana.

Penyelesaian. Dalam hal ini, penyederhanaan yang dimaksudkan adalah menuliskan dalam kalimat yang ekivalen dan lebih singkat. Misal p: "Saya bahagia," sehingga pernyataan yang diberikan di atas adalah $\neg(\neg p)$. Berdasarkan Contoh 2.3.2 $\neg(\neg p) \equiv p$, jadi pernyataan yang dikehendaki adalah "Saya bahagia." ◄

Berikut ini contoh ekivalensi untuk Hukum DeMorgan (lihat Contoh 2.3.1).

CONTOH 2.3.4 Misal p: "Airmata tanda sangat berduka" dan q: "Airmata tanda sangat bahagia." Terjemahkan $\neg(p \wedge q)$ dan pernyataan ekivalennya berdasarkan Hukum DeMorgan.

Penyelesaian. $\neg(p \wedge q)$: "Airmata bukan sekaligus tanda sangat bersedih dan tanda sangat bahagia" atau dengan tatabahasa yang lebih baik

"Airmata bukan sekaligus tanda sangat bersedih dan sangat bahagia" dan kalimat ini sama dengan mengatakan "Airmata bukan tanda sangat bersedih, atau bukan tanda sangat bahagia, atau bukan kedua-duanya," dan dalam bentuk simbolik pernyataan ini adalah $\neg p \vee \neg q$. ◄

Tabel 2.2: *Ekivalensi Logis*

EKIVALENSI LOGIS (I)	
$\neg\neg p \equiv p$	Hukum Negasi Ganda
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	Hukum Komutatif (untuk konjungsi)
$p \vee q \equiv q \vee p$	Hukum Komutatif (untuk disjungsi)
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Hukum Asosiatif (untuk konjungsi)
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Hukum Asosiatif (untuk disjungsi)
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	Hukum DeMorgan
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Hukum Distributif
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Hukum Penyerapan (Absorbsi)

Tabel 2.2 menyajikan daftar ekivalensi logis yang penting. Pada bagian pembahasan berikutnya daftar ini akan ditambah sesuai bahasannya. Ada baiknya dihapalkan nama-nama yang diberikan.

Ekivalensi pada yang disajikan pada Tabel 2.2 diterapkan untuk sebarang pernyataan. Dalam hal ini, pernyataan-pernyataan p, q, dan r dapat mewakili pernyataan atomik maupun pernyataan majemuk.

SOAL-SOAL LATIHAN 2.3

Untuk Soal 1–6 berikut ini, gunakan tabel kebenaran untuk menunjukkan ekivalensi yang diberikan.

1. $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$
2. $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

3. $p \Rightarrow q \;\equiv\; \neg p \vee q$
4. $p \Rightarrow \neg p \;\equiv\; \neg p$
5. $p \Leftrightarrow \neg p \;\equiv\; q \Leftrightarrow \neg q$
6. $p \Leftrightarrow \neg q \;\equiv\; q \Leftrightarrow \neg p$
7. Gunakan ekivalensi logis untuk menulis ulang pernyataan-pernyataan pada soal-soal berikut. Jika memungkinkan, tulis dalam kalimat yang lebih sederhana.
   (a) "Tidaklah benar, bahwa aku seorang raja dan kamu seorang penyihir."
   (b) "Tidaklah benar, bahwa aku seorang raja atau kamu seorang penyihir."
   (c) "Sekarang hujan dan saya lupa membawa payung, atau sekarang hujan dan saya lupa membawa topi."
   (d) "Aku lupa topiku atau payungku, dan aku lupa topiku atau kacamataku."
8. Tunjukkan bahwa $\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$. Secara umum, misal $p_1, p_2, \ldots, p_k$ adalah pernyataan-pernyataan, tunjukkan bahwa
$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k \equiv \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_k$$
9. Dengan Soal 8, tunjukkan pula bahwa
$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_k \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_k$$
10. Semua tautologi adalah saling ekivalen logis satu dengan yang lain. Benarkah pernyataan tersebut? Jelaskan.
11. Dua pernyataan yang ekivalen logis pasti keduaduanya tautologi atau kedua-duanya kontradiksi. Benarkah demikian? Berikan penjelasan.

2.4 *Tautologi Implikasi dan Tautologi Ekivalensi*

Untuk p dan q dua pernyataan, dikatakan p *secara tautologi berimplikasi* q jika dan hanya jika pernyataan $p \Rightarrow q$ adalah tautologi.

Sebagai contoh, pernyataan “Harto adalah pelawak dan Tongki adalah boneka” secara tautologi berimplikasi “Tongki adalah boneka”, sebab sebarang pernyataan p dan q akan selalu menghasilkan pernyataan $p \wedge q \Rightarrow q$ bernilai benar. Tampaknya pengertian implikasi tautologi adalah trivial. Namun demikian, pada pembahasan bab berikutnya hal ini ternyata merupakan hal mendasar sangat membantu dalam penurunan (inferensi) sentensial.

Implikasi tautologi dapat diperiksa menggunakan tabel kebenaran. Dalam hal ini, baris yang memuat B untuk anteseden (alasan) harus memuat B untuk konsekuen (kesimpulan). Misalnya untuk contoh di atas, tabel kebenarannya adalah sebagai berikut

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow q$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

Kolom terakhir tabel di atas hanya untuk meyakinkan bahwa pernyataan $p \wedge q \Rightarrow q$ adalah tautologi. Perhatikan bahwa kolom pernyataan $p \wedge q$ mempunyai nilai B hanya pada baris pertama, dan kolom pernyataan q juga mempunyai nilai B pada baris itu. Berarti, $p \wedge q$ secara tautologi berimplikasi q. Sebaliknya, dapat disimpulkan q tidak berimplikasi secara tautologi $p \wedge q$, sebab pada bari ke-tiga q bernilai B sedangkan $p \wedge q$ bernilai S.

Apabila dua pernyataan saling berimplikasi secara tautologi, maka dua pernyataan tersebut dikatakan *ekivalen secara tautologi.* Pengertian ekivalen tautologi lebih kuat daripada implikasi tautologi. Peran ekivalensi tautologi dalam inferensi cukup penting, meskipun tidak sepenting implikasi tautologi. Apabila dua pernyataan ekivalen secara tautologi, berarti keduanya menyatakan hal yang sama, sehingga perannya dalam inferensi hampir identik.

Sebagai contoh, misal p adalah pernyataan “Modulus bilangan kompleks adalah bilangan real” dan q pernyataan “Bagian imajiner bilangan kompleks adalah bilangan real”. Pernyataan “Modulus bilangan kompleks adalah bilangan real dan bagian imajiner bilangan kompleks bukan bilangan real” ekivalen secara tautologi dengan pernyataan "Tidaklah benar, bahwa modulus bilangan kompleks bukan bilangan real atau bagian imajiner bilangan kompleks adalah bilangan real". Dalam contoh ini, lebih mudah dipandang bahwa pernyataan $p \wedge \neg q$ ekivalen secara tautologi dengan $\neg(\neg p \vee q)$. Perhatikan tabel kebenaran untuk contoh ini.

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$p \wedge \neg q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	B	S	S

Tampak dari tabel di atas, bahwa kolom ke-6 dan ke-7 mempunyai nilai-nilai yang sama. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pernyataan $p \wedge \neg q$ ekivalen secara tautologi dengan $\neg(\neg p \vee q)$.

Perhatikan juga contoh yang lain dalam tabel kebenaran berikut ini.

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
B	B	S	B	S	S
B	S	B	S	B	B
S	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	S

Berdasarkan tabel kebenaran di atas, dapat dikatakan bahwa pernyataan $\neg(p \Rightarrow q)$ ekivalen secara tautologi dengan $p \wedge \neg q$. Hal ini dapat lebih jelas, misalnya, dengan menambahkan satu kolom pernyataan $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$. Kolom pernyataan tersebut akan memuat nilai B di semua barisnya. Jadi $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ adalah tautologi. Dengan kata lain, negasi dari implikasi $p \Rightarrow q$ adalah konjungsi $p \wedge \neg q$.

Untuk selanjutnya, pengertian dua pernyataan yang *ekivalen secara tautologi* dengan singkat dikatakan sebagai dua pernyataan yang ***ekivalen***. Dikaitkan dengan pengertian ekivalensi logis, mengatakan bahwa dua pernyataan p dan q dikatakan ekivalen logis, yang ditulis dengan $p \equiv q$, sama dengan mengatakan bahwa ekivalensi $p \Leftrightarrow q$ adalah tautologi.

Digunakannnya istilah tautologi implikasi karena memang sedang membicarakan tautologi yang berbentuk implikasi. Sedangkan istilah implikasi tautologi digunakan karena ingin menjelaskan suatu implikasi yang bersifat tautologi. Untuk selanjutnya, di buku ini, dua istilah itu akan digunakan bergantian dengan maksud disesuaikan dengan penekanan yang diinginkan. Demikian juga halnya penggunaan istilah tautologi ekivalensi dan ekivalensi tautologi.

SOAL-SOAL LATIHAN 2.4

Tunjukkan bahwa pernyataan pada Soal 1–6 *bukan* implikasi tautologi dengan memberikan contoh pernyataan p dan q (dalam kalimat sehari-hari) sehingga implikasi yang diberikan salah.

1. $p \vee q \Rightarrow p$
2. $p \Rightarrow p \wedge q$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
4. $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$
5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
6. $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

Tulislah peryataan-pernyatan pada Soal 7–18 dalam bentuk simbolik, kemudian tentukan apakah pernyataan tersebut tautologi atau bukan.

7. Jika saya marah dan mengantuk, maka saya marah.
8. Jika saya marah atau mengantuk, maka saya marah.
9. Jika tidak benar bahwa malaikat ada dan surga menyenangkan, maka malaikat tidak ada dan surga tidak menyenangkan.
10. Jika malaikat tidak ada dan surga tidak menyenangkan, maka tidak benar bahwa malaikat ada dan surga menyenangkan.
11. Bagi saya membawa payung adalah perlu pada saat hujan. Oleh karena itu jika tidak hujan saya tidak akan membawa payung.

12. Bagi saya membawa payung adalah cukup pada saat hujan. Oleh karena itu jika tidak hujan saya tidak akan membawa payung.
13. Bagi saya membawa payung adalah perlu dan cukup pada saat hujan. Oleh karena itu jika tidak hujan saya tidak akan membawa payung.
14. Bagi saya membawa payung adalah perlu dan cukup pada saat hujan. Oleh karena itu jika saya tidak membawa payung pasti tidak hujan.
15. Bagi saya untuk lulus Kalkulus saya cukup memilih dosen yang baik. Oleh karena itu, saya akan memilih dosen yang baik atau saya tidak akan lulus Kalkulus.
16. Bagi saya untuk lulus Kalkulus saya perlu memilih dosen yang baik. Oleh karena itu, saya akan memilih dosen yang baik atau saya tidak akan lulus Kalkulus.
17. Untuk memperoleh nilai bagus cukup belajar, tetapi Jopan tidak memperoleh nilai bagus. Berarti Jopan tidak belajar.
18. Untuk memperoleh nilai bagus perlu dan cukup belajar, tetapi Jimal tidak belajar. Oleh karena itu Jimal tidak memperoleh nilai bagus.

—–o0o—–

Bab 3

Teori Inferensi

Inferensi adalah inti dari bahasan logika. Pada bab ini diuraikan mengenai aturan-aturan inferensi serta penerapannya untuk menentukan validitas suatu argumentasi. Dengan mempelajari bahasan pada bab ini, diharapkan pembaca akan mampu membuktikan validitas argumentasi secara benar. Selain itu, pembaca akan memahami cara membaca dan membuat (menulis) suatu pernyataan penegasan atau pun kalimat umum dengan bentuk dan makna yang tepat secara logika.

3.1 Kriteria Inferensi

Singkatnya, dapat dikatakan bahwa ***inferensi*** adalah cara menarik kesimpulan dalam suatu argumentasi. Sebagaimana telah disinggung pada bab pertama, argumentasi adalah sederetan pernyataan yang disebut ***premis*** dan diakhiri dengan satu pernyataan yang disebut ***kesimpulan***. Suatu argumentasi dikatakan ***valid*** apabila konjungsi dari semua premisnya berimplikasi secara tautologi pada kesimpulan. Mulai bagian ini akan digunakan huruf kecil, seperti p dan q, hanya untuk menuliskan pernyataan atomik saja. Sedangkan huruf besar, seperti P dan Q, digunakan untuk melambangkan sebarang pernyataan, majemuk maupun atomik.

Sebelum membahas lebih jauh, perlu dipahami pengertian beberapa istilah yang akan digunakan pada pembahasan selanjutnya. Secara umum, suatu argumentasi adalah implikasi $P \Rightarrow Q$, dengan P konjungsi dari beberapa pernyataan (atomik atau majemuk). Secara umum, argumentasi ditulis dalam bentuk:

$$\begin{array}{ll} P_1 & \text{(premis)} \\ P_2 & \text{(premis)} \\ \vdots & \\ P_n & \text{(premis)} \\ \hline Q & \text{(kesimpulan)} \end{array}$$

Jika ditulis dalam bentuk implikasi, argumentasi tersebut sama artinya dengan pernyataan

(1) $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$

(dengan bentuk ini, $P \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$.)

Ada dua permasalahan yang biasa dibicarakan dalam bahasan inferensi. Pertama, apabila semua premis P_1, P_2, ..., P_n diketahui, bagaimana caranya memperoleh kesimpulan Q? Ke-dua, apabila seluruh pernyataan dalam argumentasi (1) diketahui, apakah argumentasi tersebut valid?

Telah disinggung di awal subbab ini, bahwa suatu argumentasi adalah valid apabila Q dapat *diturunkan secara logis* dari P, atau dengan kata lain apabila Q merupakan *implikasi secara tautologi* dari P. Dalam pengantar logika ini, ditekankan pada permasalahan ke-dua, yakni membuktikan validitas argumentasi atau menunjukkan bahwa inferensi yang digunakan untuk mendapatkan Q adalah inferensi yang dapat diterima.

Untuk memudahkan pemahaman, perhatikan contoh sederhana berikut ini.

CONTOH 3.1.1 Apakah "Jawa akan menangis" merupakan implikasi logis dari dua premis:

1. "Kalimantan memberi mainan pada Jawa atau Jawa akan menangis."
2. "Kalimantan tidak memberi mainan pada Jawa."

Penyelesaian. Untuk menyederhanakan, pandang p: "Jawa akan menangis" dan q: "Kalimantan memberi mainan pada Jawa." Dengan ini dapat disusun argumentasi dalam bentuk simbolik:

Premis 1:	$q \vee p$
Premis 2:	$\neg q$
Kesimpulan:	p

Untuk memutuskan apakah argumentasi tersebut valid, perlu dipastikan apakah konjungsi $(q \vee p) \wedge \neg q$ berimplikasi secara tautologi pada p. Untuk itu dibuat tabel kebenaran berikut ini:

1	2	3	4	5	6
q	p	$q \vee p$	$\neg p$	$(q \vee p) \wedge \neg q$	$(q \vee p) \wedge \neg q \Rightarrow p$
B	B	B	S	S	B
B	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B
S	S	S	B	S	B

Tampak dari tabel tersebut bahwa kolom ke-6 hanya memuat nilai kebenaran B, yang menunjukkan bahwa $(q \vee p) \wedge \neg q \Rightarrow p$ adalah tautologi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa argumentasi tersebut adalah valid, yakni kesimpulannya merupakan akibat logis dari premis-premisnya. ◀

Dari contoh ini tampaknya cukup sederhana untuk membuktikan validitas argumentasi. Akan tetapi, ingat bahwa untuk argumentasi yang dibangun (misalnya) dari 5 pernyataan atomik, maka tabel kebenaran yang harus dibuat terdiri dari 32 baris. Untuk membuat tabel kebenaran dengan 32 baris tidak hanya membosankan, tetapi juga sulit menghindari kesalahan saat berhadapan dengan kolom-kolom yang banyak. Untuk itulah perlunya dikembangkan teori inferensi sentensial yang dapat diterapkan dalam konteks yang lebih umum.

CONTOH 3.1.2 Misal dikemukakan suatu aturan inferensi sebagai berikut:

(2) Dari suatu pernyataan q dan $(p \Rightarrow q)$, dapat disimpulkan p

Apakah aturan inferensi itu dapat diterima?

Penyelesaian. Diduga aturan inferensi tersebut tidak dapat diterima. Untuk itu, dibuat contoh penyangkal seperti berikut ini. Misalkan

p: "Komodo adalah binatang bersayap"
q: "Komodo adalah binatang bertelor"

Jelas bahwa p dan $(p \Rightarrow q)$ keduanya benar, tetapi p salah. Menggunakan aturan (2) dapat diturunkan kesimpulan yang salah dari premis-premis yang benar; oleh karena itu aturan itu tidak dapat diterima. ◄

Aturan inferensi yang bisa diterima untuk menunjukkan validitas argumentasi $P \Rightarrow Q$ perlu memperhatikan batasan-batasan berikut ini.

- Pernyataan Q merupakan kesimpulan yang diturunkan secara logis dari P jika Q merupakan implikasi tautologi dari P.
- Jika diusulkan suatu aturan inferensi yang memungkinkan penurunan kesimpulan salah dari premis-premis benar, maka aturan tersebut tidak dapat diterima.
- Aturan inferensi harus memungkinkan penurunan semua kesimpulan yang mempertahankan argumentasi tetap valid.

SOAL-SOAL LATIHAN 3.1

1. Buatlah contoh penyangkal untuk dua aturan salah untuk inferensi berikut ini.

   (a) Dari q dan $(p \Rightarrow q)$ dapat disimpulkan p.
   (b) Dati $\neg p$ dan $(p \Rightarrow q)$ dapat disimpulkan $\neg q$.

2. Tentukan aturan-aturan inferensi berikut ini dapat diterima atau ditolak. Jika ditolak, berikan contoh penyangkal dengan membuat pernyataan-pernyataan yang menyebabkan semua premis benar tetapi kesimpulan salah.

   (a) Dari p dan q, dapat diturunkan $p \wedge q$.
   (b) Dari p dan $p \vee q$, dapat diturunkan q.
   (c) Dari $\neg q$ dan $p \vee q$, dapat diturunkan p.
   (d) Dari $\neg p$ dan $p \vee q$, dapat diturunkan $\neg q$.

3. Dengan menggunakan pengertian implikasi tautologi, jelaskan mengapa aturan inferensi berikut ini melanggar tidak dapat diterima:
   Dari "SBY adalah Presiden" dapat disimpulkan "Hamengku Buwono adalah Raja".
   (Perhatikan bahwa ini bukan kasus premis benar dan kesimpulan salah, sebab kedua pernyataan tersebut adalah benar).

4. Pernyataan-pernyataan berikut ini yang manakah yang ekivalen secara logika dengan pernyataan "Saat ini hujan deras atau saat ini gerimis"?

   (a) Jika saat ini hujan deras, maka saat ini gerimis.
   (b) Saat ini gerimis.
   (c) Saat ini gerimis atau saat ini gerimis.
   (d) Saat ini gerimis dan saat ini hujan deras atau saat ini tidak hujan.

3.2 Tautologi dan Argumentasi

Pada subbab sebelumnya telah disinggung bahwa pembahasan inferensi sesungguhnya adalah pembahasan penerapan tautologi. Pada bagian ini akan diulas kembali mengenai tautologi, khususnya mengenai tautologi implikasi dan tautologi ekivalensi, yang akan diarahkan pada aturan inferensi.

Pertama dibahas disini mengenai tautologi implikasi, yaitu tautologi dalam bentuk $P \Rightarrow Q$. Masing-masing pernyataan yang dibahas, silakan periksa dengan tabel kebenaran untuk meyakinkan bahwa pernyataan-pernyataan tersebut adalah tautologi.

MODUS PONEN atau PENALARAN LANGSUNG

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

Jika suatu implikasi dan antesedennya kedua-duanya benar, maka konsekuennya juga benar.

Sebagai contoh, misal p: "Saya giat belajar" dan q: "Saya akan lulus tepat waktu," maka diperoleh tautologi berikut ini:

Jika saya giat belajar menyebabkan saya akan lulus tepat waktu, dan saya giat belajar, maka saya akan lulus tepat waktu.

Pernyataan seperti itu dapat ditulis dalam ***bentuk argumentasi*** sebagai berikut:

Jika saya belajar maka saya akan lulus tepat waktu.
Saya giat belajar.

Oleh karena itu, saya akan lulus tepat waktu.

Dalam bentuk simbolik dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Pernyataan-pernyataan di atas garis adalah sesuatu yang *diketahui* atau *diberikan*, sedangkan yang di bawah garis adalah kesimpulan yang dapat ditarik. Pada bagian kesimpulan, biasanya digunakan kata "Oleh karena itu,..." atau "Jadi ..." atau "Maka ..." atau "Berarti ..." atau "Dengan demikian ...", atau pun dapat digunakan kata-kata yang sepadan menyesuaikan konteksnya. Sedangkan dalam bentuk simbolik, simbol "$\therefore$" melambangkan kata-kata tersebut di atas.

Modes ponen adalah bentuk yang paling umum dari penalaran sehari-hari. Apabila diketahui p menyebabkan q dan diketahui p benar, maka pasti q juga benar. Ini sering juga disebut dengan ***menegaskan*** (mengiyakan) ***hipotesis*** (anteseden). Pengertian modus ponen ini jangan sampai dikacaukan dengan argumentasi keliru seperti ini: "Jika saya mahasiswa berprestasi maka saya akan aktif bertanya. Saya aktif bertanya, berarti saya mahasiswa berprestasi." Periksalah bahwa ini adalah cara penarikan kesimpulan yang tidak dapat diterima. Ini dikenal sebagai kekeliruan ***penegasan konsekuen***. Inferensi yang dapat diterima adalah kebalikannya, yakni ***pengingkaran konsekuen*** seperti berikut ini.

MODUS TOLEN atau PENALARAN TAKLANGSUNG

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$$

Jika suatu implikasi benar tetapi konsekuennya salah, maka antesedennya juga salah.

Dalam bentuk argumentasi dapat ditulis:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Sebagai contoh

Jika saya mahasiswa berprestasi, maka saya aktif kuliah.
Saya tidak aktif kuliah.
___
Jadi, saya bukan mahasiswa berprestasi.

Argumentasi ini terasa tidak langsung seperti sebelumnya; terasa sedikit berbelit: "Jika saya mahasiswa berprestasi, saya aktif kuliah. Akan tetapi, saya tidak aktif kuliah. Karena itu, pastilah saya bukan mahasiswa berprestasi." Itulah sebabnya disebut *penalaran taklangsung*. (Untuk latihan, tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa argumentasi tersebut merupakan tautologi.)

Perlu diingat, bahwa terdapat juga argumentasi keliru yang mirip dengan ini dan harus dihindari: "Jika saya mahasiswa berprestasi maka saya pasti lulus. Akan tetapi saya bukan mahasiswa berprestasi. Jadi, saya tidak lulus." Harus cermat membaca argumentasi yang mirip-mirip seperti itu, karena bisa sangat berbeda maknanya secara logika.

PENYEDERANAAN atau SIMPLIFIKASI

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

dan

$$p \wedge q \Rightarrow q$$

Jika dua pernyataan kedua-duanya benar, maka khususnya salah satu pasti benar.

Sebagai contoh, dari pernyataan "Bulan bersinar terang dan matahari sedang sembunyi" dapat ditarik kesimpulan "bulan bersinar terang" atau kesimpulan yang lain "matahari sedang sembunyi." Contoh lain yang diungkapkan dalam satu pernyataan "Jika empat adalah bilangan bulat dan tiga adalah bilangan ganjil, maka (khususnya) tiga adalah bilangan ganjil."

PENAMBAHAN

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

dan

$$q \Rightarrow (p \vee q)$$

Jika satu pernyataan diketahui benar, maka konjungsinya dengan sebarang pernyataan yang lain pasti benar.

Contoh untuk aturan *penambahan*: "Jika sembilan habis dibagi tiga, maka sembilan habis dibagi tiga atau habis dibagi empat." Perhatikan bahwa apabila p benar, pastilah $p \vee q$ benar tanpa memperthatikan kebenaran dari q.

Perlu diperhatikan bahwa $p \Rightarrow (p \wedge q)$ *dan* $(p \vee q) \Rightarrow p$ *kedua-duanya bukan tautologi.*

SILOGISMA DISJUNGTIF atau MODUS TOLENDO PONEN

$$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$$

dan

$$[(p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$$

Jika p atau q benar, dan diketahui yang satunya salah, maka yang satunya lagi pasti benar.

Contoh: "Jika mahasiswa atau dosen mengerjakan soal itu, padahal diketahui dosen tidak mengerjakan soal itu, maka pasti mahasiswa mengerjakan soal itu."

TRANSITIFITAS

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Jika q *diakibatkan oleh* p, *dan* r *diakibatkan oleh* q, *maka* r *diakibatkan oleh* p.

Contoh: "Jika mahasiswa aktif maka kelas menjadi menyenangkan dan jika kelas menyenangkan maka mahasiswa akan mudah memahami perkuliahan. Jadi, jika mahasiswa aktif maka mahasiswa akan mudah memahami perkuliahan."

Selain tautologi implikasi, tautologi ekivalensi berbentuk $P \Leftrightarrow Q$ juga cukup berperan dalam inferensi. Ingat bahwa pernyataan $P \Leftrightarrow Q$ bernilai benar apabila P dan Q mempunyai nilai kebenaran sama. Apabila P dan Q pernyataan-pernyataan majemuk, bentuk $P \Leftrightarrow Q$ harus benar untuk semua nilai kebenaran pernyataan atomik yan menyusunnya. Ini berarti P dan Q dua pernyataan yang ekivalen logis.

EKIVALENSI LOGIS dan EKIVALENSI TAUTOLOGI

Mengatakan bahwa $P \equiv Q$ sama dengan mengatakan bahwa $P \Leftrightarrow Q$ adalah tautologi.

Subbab ini ditutup dengan sajian tabel tautologi implikasi dan ekivalensi yang sering digunakan dalam inferensi. Beberapa sifat dalam tabel berikut ini sebenarnya dapat diturunkan langsung dari sifat-sifat yang lain. (Silakan periksa dan untuk latihan.) Sifat-sifat yang disajikan dalam Tabel 3.1–3.3 menyajikan tautologi yang sering digunakan, sehingga diberi nama untuk memudahkan penyebutan pada saat digunakan.

Tabel 3.1: *Tautologi Implikasi*

BENTUK SIMBOLIK	BENTUK ARGUMENTASI	
Modus Ponen (Penalaran Langsung)		
$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{p \quad\quad} \\ \therefore q \end{array}$	
Modus Tolen (Penalaran Taklangsung)		
$[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{\neg q \quad\quad} \\ \therefore p \end{array}$	
Penyederhanaan (Simplifikasi)		
$(p \wedge q) \Rightarrow p$ $(p \wedge q) \Rightarrow q$	$\begin{array}{l} \underline{(p \wedge q)} \\ \therefore p \end{array}$	$\begin{array}{l} \underline{(p \wedge q)} \\ \therefore q \end{array}$
Penambahan		
$p \Rightarrow (p \vee q)$	$\begin{array}{l} \underline{p \quad\quad} \\ \therefore p \vee q \end{array}$	
Silogisma Disjungtif (Modus Tollendo Ponen)		
$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$ $[(p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$	$\begin{array}{l} (p \vee q) \\ \underline{\neg p \quad\quad} \\ \therefore q \end{array}$	$\begin{array}{l} (p \vee q) \\ \underline{\neg q \quad\quad} \\ \therefore p \end{array}$
Transitifitas		
$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r \quad} \\ \therefore p \Rightarrow r \end{array}$	

Tabel 3.2: ***Tautologi Ekivalensi***

BENTUK SIMBOLIK	BENTUK ARGUMENTASI	
	Negasi Ganda	
$p \Leftrightarrow \neg\neg p$	$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore \neg\neg p \end{array}$	$\begin{array}{l} \neg\neg p \\ \hline \therefore p \end{array}$
	Hukum Komutatif	
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore q \wedge p \end{array}$	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \hline \therefore q \vee p \end{array}$
	Hukum Asosiatif	
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$\begin{array}{l} (p \wedge q) \wedge r \\ \hline \therefore p \wedge (q \wedge r) \end{array}$	$\begin{array}{l} p \wedge (q \wedge r) \\ \hline \therefore (p \wedge q) \wedge r \end{array}$
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$	$\begin{array}{l} (p \vee q) \vee r \\ \hline \therefore p \vee (q \vee r) \end{array}$	$\begin{array}{l} p \vee (q \vee r) \\ \hline \therefore (p \vee q) \vee r \end{array}$
	Hukum DeMorgan	
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\begin{array}{l} \neg(p \wedge q) \\ \hline \therefore \neg p \vee \neg q \end{array}$	$\begin{array}{l} \neg p \vee \neg q \\ \hline \therefore \neg(p \wedge q) \end{array}$
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$\begin{array}{l} \neg(p \vee q) \\ \hline \therefore \neg p \wedge \neg q \end{array}$	$\begin{array}{l} \neg p \wedge \neg q \\ \hline \therefore \neg(p \vee q) \end{array}$
	Hukum Distributif	
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\begin{array}{l} p \wedge (q \vee r) \\ \hline \therefore (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{array}$	$\begin{array}{l} (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ \hline \therefore p \wedge (q \vee r) \end{array}$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee (p \vee r)$	$\begin{array}{l} p \vee (q \wedge r) \\ \hline \therefore (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array}$	$\begin{array}{l} (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ \hline \therefore p \vee (q \wedge r) \end{array}$
	Hukum Idempoten	
$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$\begin{array}{l} p \wedge p \\ \hline \therefore p \end{array}$	$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \wedge p \end{array}$
$p \vee p \Leftrightarrow p$	$\begin{array}{l} p \vee p \\ \hline \therefore p \end{array}$	$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee p \end{array}$
	Switcheroo (Hukum Ekivalensi untuk Implikasi dan Disjungsi)	
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \vee q \end{array}$	$\begin{array}{l} \neg p \vee q \\ \hline p \Rightarrow q \end{array}$
	Kontrapositif	
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \hline \therefore \neg q \Rightarrow \neg p \end{array}$	$\begin{array}{l} \neg q \Rightarrow \neg p \\ \hline \therefore p \Rightarrow q \end{array}$

Tabel 3.2: ***(lanjutan)***

BENTUK SIMBOLIK	BENTUK ARGUMENTASI	
Hukum Bikondisional		
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$\dfrac{p \Leftrightarrow q}{\therefore (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$	$\dfrac{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}{\therefore p \Leftrightarrow q}$
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	$\dfrac{p \Leftrightarrow q}{\therefore (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)}$	$\dfrac{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)}{\therefore p \Leftrightarrow q}$

Tabel 3.3: *Tautologi yang lain*

Hukum Penghilangan Tengah	$p \vee \neg p$
Hukum Kontradiksi	$\neg(p \wedge \neg p)$

Meskipun pada tabel-tabel di atas digunakan huruf kecil yang melambangkan pernyataan atomik, semuanya dapat dikembangkan dan diterapkan untuk sebarang pernyataan. Misal, Modus Ponen juga berlaku dalam bentuk $[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q$. *(Lihat awal subbab berikutnya.)*

SOAL-SOAL LATIHAN 3.2

> Gunakan tabel kebenaran untuk memeriksa tautologi pada Soal 1–10 (Untuk istilah yang diberikan, lihat Tabel 3.1 dan 3.2)

1. Modus Tolen
2. Penyederhanaan
3. Silogisma Disjungtif: $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$
4. Penambahan
5. Transitifitas
6. Negasi Ganda
7. Kontrapositif
8. Hukum Komutatif: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

9. Hukum Komutatif: $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
10. Ekivalensi untuk Implikasi dan Disjungsi

Untuk Soal 11–16, tulislah masing-masing argumentasi dalam bentuk simbolik. Apakah argumentasi tersebut valid? Jika tidak valid, buatlah contoh penyangkal dengan kalimat sehari-hari untuk bentuk simbolik yang Anda buat.

11. Jika matahari bersinar, Joah senang. Ternyata Joah tidak senang. Berarti matahari tidak bersinar.
12. Jika hari itu turun hujan, kamu pasti tidak datang ke pestanya. Semua tahu bahwa kamu datang ke pestanya. Jadi, hari itu tidak turun hujan.
13. Jika hari itu tidak turun hujan, kamu pasti datang ke pestanya. Semua tahu bahwa kamu datang ke pestanya. Jadi, hari itu tidak turun hujan.
14. TV kabel menyiarkan tontonan sadis. Perusahaan TV kabel tidak punya hak membiarkan anak-anak melihat tontonan sadis. Oleh karena itu, TV kabel seharusnya tidak menyiarkan tontonan sadis.
15. Dosen seharusnya membimbing mahasiswa, agar mahasiswa berhasil. Jadi, dosen tidak membimbing mahasiswa atau mahasiswa berhasil.
16. Mahasiswa harus serius atau dosen harus bijaksana. Kenyataannya mahasiswa tidak serius. Oleh karena itu, dosen harus bijaksana.

3.3 *Aturan Inferensi*

Telah disebutkan pada subbab sebelumnya bahwa untuk menguji validitas argumentasi dapat digunakan tabel kebenaran. Akan tetapi, telah disinggung pula bahwa untuk pengujian dengan tabel kebenaran menjadi semakin rumit seiring dengan rumitnya argumentasi. Subbab ini akan dibahas aturan penurunan atau inferensi tanpa menggunakan tabel kebenaran.

Ingat bahwa suatu argumentasi pada dasarnya berbentuk $P \Rightarrow Q$, dengan P adalah konjungsi dari beberapa pernyataan yang disebut premis. Inferensi adalah cara memperoleh Q dari premis-premis yang diberikan, dengan atau tanpa menambahkan pernyataan-pernyataan yang "diperbolehkan." Aturan inferensi yang dibahas di sini adalah berkenaan dengan kata "diperbolehkan" tersebut, dengan memanfaatkan sifat-sifat atau hukum-hukum tautologi yang diberikan dalam Tabel 3.1–3.3 serta beberapa aturan yang dikembangkan dari hasil-hasil dasar dalam tabel-tabel tersebut.

Pada subbab sebelumnya diberikan tautologi implikasi $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$ yang dalam "bentuk argumentasi" ditulis

$$\begin{array}{l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

Pernyataan-pernyataan di atas garis, yaitu ***premis***, adalah pernyatan-pernyataan yang diketahui (diberikan) semuanya benar —meskipun tidak disertai keterangan mengenai nilai kebenaran itu. Pernyataan di bawah garis, yaitu kesimpulan, dengan demikian harus juga benar.

Perhatikan perubahan perubahan simbol dengan huruf kecil dan huruf kapital pada saat menggunakan Tabel 3.1–3.3. Sebagai contoh, akan disusun argumentasi berikut ini:

Jika langit terang dan bulan juga, maka bulan tampak cantik dan kamu juga.
Langit terang dan bulan juga.
Oleh karena itu, bulan tampak cantik dan kamu juga.

Dalam bentuk simbolik dapat ditulis:

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s) \\ p \wedge q \\ \hline \therefore r \wedge s \end{array}$$

Dengan memisalkan P pernyataan $p \wedge q$ dan Q pernyataan $r \wedge s$, maka argumentasi di atas dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

yang tak lain adalah bentuk Modus Ponen yang diketahui termasuk implikasi tautologi. Jadi, argumentasi di atas adalah valid. Dengan kata lain, cara penurunan Q dari premis-premis $P \Rightarrow Q$ dan P dapat diterima. Dalam hal ini Modus Ponen adalah ***aturan inferensi*** pertama yang nantinya akan digunakan. Selanjutnya, akan disusun daftar pernyataan benar, yang disebut ***bukti***. Untuk kasus ini, tahap-tahap penyusunan tersebut dinamakan ***pembuktian***. Pembuktian adalah cara menunjukkan bagaimana suatu kesimpulan dapat diperoleh dari sekumpulan premis.

CONTOH 3.3.1 Terapkan Modus Ponen pada pernyataan 1 dan 3 dalam daftar berikut ini.

1. $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee s)$
2. $r \Rightarrow \neg s$
3. $p \wedge q$

Penyelesaian. Tiga pernyataan tersebut dapat ditulis lebih sederana dengan simbol pernyataan majemuk:

1. $P \Rightarrow Q$
2. R
3. P

Berdasarkan aturan Modus Ponen, apabila dua pernyataan $P \Rightarrow Q$ dan P muncul dalam daftar, maka dapat ditulis juga Q. Dengan demikian, penerapan Modus Ponen pada baris 1 dan 3 (baris 2 tidak dilibatkan) akan mengasilkan daftar yang lebih panjang berikut ini:

1.	$(p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee s)$	Premis
2.	$r \Rightarrow \neg s$	Premis
3.	$p \wedge q$	Premis
4.	$\neg r \vee s$	1, 3 Modus Ponen

Pada bagian (kolom) kanan diberikan keterangan untuk tiap baris pernyataan. Baris 1, 2, dan 3 adalah pernyataan-pernyataan yang diketahui (diberikan) sebagai premis. Sedangkan baris 4 diperoleh dengan menerapkan Modus Ponen pada baris 1 dan 3. ◀

Pada contoh di atas, daftar empat pernyataan tersebut memberikan ***bukti*** bahwa Pernyataan 4 dihasilkan (diturunkan) dari premis-premis 1–3 yang diberikan, dan daftar demikian yang disebut ***bukti argumentasi***

$$\begin{array}{lll} & (p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee s) & \text{Premis} \\ & r \Rightarrow \neg s & \text{Premis} \\ & \underline{p \wedge q} & \text{Premis} \\ \therefore & \neg r \vee s & \text{Kesimpulan} \end{array}$$

Sekarang dapat dikatakan bahwa ***aturan inferensi*** adalah instruksi-instruksi untuk mendapatkan pernyataan benar yang baru dari daftar pernyataan-pernyataan yang diketahui atau diasumsikan benar.

Secara umum, dari sudut pandang matematika maupun filsafat, dikatakan bahwa pembuktian yang baik haruslah melibatkan sebanyak mungkin premis yang telah diberikan dan sesedikit mungkin aturan inferensi. Akan tetapi hal ini tidak banyak dipermasalahkan dalam buku pengantar ini.

Untuk selanjutnya, tautologi yang telah dibicarakan pada subbab sebelumnya, semuanya adalah aturan inferensi yang dapat diterima.

ATURAN INFERENSI T1
Semua tautologi yang diberikan pada Tabel 3.1, Tabel 3.2, dan Tabel 3.3 dapat diterapkan sebagai aturan inferensi.

CONTOH 3.3.2 Terapkan Modus Tolen pada premis-premis berikut ini.

1. $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee s)$
2. $\neg(\neg r \vee s)$
3. $(p \wedge q) \Rightarrow q$

Penyelesaian. Daftar di atas dapat ditulis sebagai

1. $P \Rightarrow Q$
2. $\neg Q$
3. $P \Rightarrow R$

Sebagai aturan inferensi, Modus Tolen mempunyai bentuk:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline \therefore \neg P \end{array}$$

Ini sesuai dengan dua premis yang pertama, sehingga dapat diterapkan Modus Tolen untuk mendapatkan yang berikut ini:

1.	$(p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee s)$	Premis
2.	$\neg(\neg r \vee s)$	Premis
3.	$(p \wedge q) \Rightarrow q$	Premis
4.	$\neg(p \wedge q)$	1, 2 Modus Tolen ◀

Pada contoh di atas digunakan $P \Rightarrow R$ untuk menyajikan premis ke-tiga pada saat akan menggunakan Modus Tolen. Sebenarnya, tidak ada masalah dengan bentuk penyajian itu, sebab kenyataannya premis ke-tiga tidak terlibat dalam penurunan ini. Boleh saja, misal, premis ke-tiga ditulis R. Akan tetapi, untuk pernyataan pertama dan ke-dua perlu diupayakan berbentuk $P \Rightarrow Q$ dan $\neg Q$ agar dapat terlihat dimana Modus Tolen dapat diterapkan. Bagian dari penerapan aturan inferensi adalah kecermatan mengenali struktur pernyataan.

Ingat bahwa tautologi adalah pernyataan yang selalu benar. Dengan demikian, diperbolehkan menambahkan tautologi pada daftar pernyataan-pernyataan benar. Hal teresebut ini dituliskan sebagai aturan inferensi berikut ini.

ATURAN INFERENSI T2
Sebarang tautologi dalam Tabel 3.1 dan Tabel 3.2, dan Tabel 3.3 dapat ditambahkan sebagai baris baru dalam suatu pembuktian.

CONTOH 3.3.3 Berilah keterangan pada masing-masing baris langkah-langkah berikut ini.

1.	$p \Rightarrow \neg\neg p$
2.	$\neg\neg p \Rightarrow p$
3.	$p \Rightarrow p$

Penyelesaian. Dua baris pertama adalah penerapan aturan inferensi T2. Ingat bahwa $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$ adalah tautologi, yang disebut Negasi Ganda. Diperbolehkan memisah ekivalensi tautologi menjadi dua implikasi tautologi dan menuliskan salah satu atau kedua-duanya. Dalam contoh ini dituliskan kedua-duanya. Langkah ke-tiga didapat dari penerapan aturan inferensi T1, yakni menggunakan hukum transitif. Jadi, dapat dituliskan penjelasan seperti berikut:

1.	$p \Rightarrow \neg\neg p$	Negasi Ganda
2.	$\neg\neg p \Rightarrow p$	Negasi Ganda
3.	$p \Rightarrow p$	1, 2 Transitifitas ◄

Sebenarnya yang dikerjakan pada Contoh 3.3.3 adalah bukti dari argumentasi (yang tidak memuat premis) berikut ini:

$$\frac{\qquad}{\therefore p \Rightarrow p}$$

Aturan T1 dan T2 adalah aturan inferensi yang paling sering digunakan dalam pembuktian. Pada akhir subbab ini akan ditambahkan tiga aturan inferensi yang tidak begitu sering digunakan, tetapi kadang sangat diperlukan dalam pembuktian.

> ATURAN INFERENSI S (SUBSTITUSI)
> Sebarang bagian dari pernyataan majemuk dapat diganti dengan pernyataan lain yang ekivalen secara tautologi.

Sebagaimana aturan T2, untuk aturan substitusi hanya didasarkan pada tabel tautologi di bagian akhir subbab sebelumnya. Pada umumnya, aturan S digunakan untuk menyederhanakan suatu pernyataan, dengan maksud untuk lebih mudah dikenali struktur pernyataan tersebut.

CONTOH 3.3.4 Jelaskan mengenai langkah ke-3 dan ke-4 dalam bukti berikut ini.

1.	$\neg(\neg p) \Rightarrow q$	Premis
2.	p	Premis
3.	$p \Rightarrow q$	
4.	q	

Penyelesaian. Baris ke-3 menyerupai baris ke-1, hanya saja $\neg(\neg p)$ diganti dengan p. Penggantian tersebut dapat dibenarkan dengan aturan S sebab tautologi Negasi Ganda menyatakan bahwa $\neg(\neg p)$ ekivalen secara tautologi dengan p. Untuk mendapatkan baris ke-4 hanya diterapkan Modus Ponen pada baris ke-2 dan ke-3. Dengan demikian, keterangan yang dikehendaki adalah seperti berikut:

1.	$\neg(\neg p) \Rightarrow q$	Premis
2.	p	Premis
3.	$p \Rightarrow q$	1, Substitusi
4.	q	2, 3 Modus Ponen ◄

ATURAN INFERENSI K (KONJUNGSI)
Jika P dan Q dua baris sebarang dalam bukti, maka dapat ditambahkan baris $P \wedge Q$ pada bukti tersebut.

Aturan ini cukup mudah dipahami dari kenyataan bahwa jika diketahui P dan Q kedua-duanya benar, maka bisa dipastikan $P \wedge Q$ benar.

Sebagaimana umumnya pembuktian, kadang diperlukan adanya asumsi yang harus digunakan untuk dapat mencapai kesimpulan. Dalam hal ini, perlu ditambahkan premis baru yang *diasumsikan* benar dalam langkah-langkah pembuktian. Untuk itu, diperlukan aturan inferensi yang berikut ini.

ATURAN INFERENSI P (PREMIS)
Pada baris-baris pembuktian dapat ditambahkan premis baru.

Tentu saja dengan aturan P ini, tidak bisa sesuka hati meletakkan premis baru dalam baris-baris bukti. Biasanya premis-premis telah diberikan (diketahui) dan dituliskan di baris-baris awal bukti. Akan tetapi hal demikian bukan suatu keharusan, karena pada dasarnya premis-premis dapat dituliskan pada baris manapun. Tergantung pada pemakai, meletakkan premis dapat dimana saja dalam baris-baris bukti yang dianggap akan memudahkan pembuktian.

CONTOH 3.3.5 Lengkapilah dengan keterangan pembuktian berikut:

1.	$p \Rightarrow r$	Premis
2.	$q \Rightarrow r$	Premis
3.	$\neg p \vee r$	
4.	$\neg q \vee r$	
5.	$(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	
6.	$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$	
7.	$\neg(p \vee q) \vee r$	
8.	$(p \vee q) \Rightarrow r$	

Penyelesaian. Berikut ini penjelasan masing-masing langkah, disertai jenis aturan inferensi yang digunakan

1.	$p \Rightarrow r$	Premis
2.	$q \Rightarrow r$	Premis
3.	$\neg p \vee r$	1, Ekiv. unt. Impl. dan Disj. (T1)
4.	$\neg q \vee r$	2, Ekiv. unt. Impl. dan Disj. (T1)
5.	$(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$	3, 4 Konjungsi (K)
6.	$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$	5, Hukum Distributif (T1)
7.	$\neg(p \vee q) \vee r$	6, Hukum DeMorgan (S)
8.	$(p \vee q) \Rightarrow r$	7, Ekiv. unt. Impl. dan Disj. (T1)

◀

Perhatikan bahwa pembuktian di atas adalah bukti untuk validitas argumentasi:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \vee q \Rightarrow r \end{array}$$

Ini menunjukkan bahwa jika masing-masing p dan q berakibat r, maka apabila salah satunya benar bisa dipastikan r juga benar. Hal ini rasanya mudah dan jelas diterima akal, tetapi ternyata untuk membuktikannya tidak sesederha itu.

SOAL-SOAL LATIHAN 3.3

Untuk Soal 1–30, lengkapi pernyataan atau alasan yang kosong. Untuk lebih menyingkat tuliskan $\neg(\neg p)$ dengan p saja.

1.

1.	$\neg p \Rightarrow q$	Premis
2.	$\neg p$	Premis
3.	....	1,2 Modus Ponens

2.

1.	$\neg p \vee q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$	Premis
2.	$\neg p \vee q$	Premis
3.	....	1,2 Modus Ponens

3.

1.	$p \Rightarrow \neg q$	Premis
2.	p	Premis
3.	....	1,2 Modus Ponens

4.

1.	$\neg p \vee q \Rightarrow \neg(q \wedge r)$	Premis
2.	$q \wedge r$	Premis
3.	....	1,2 Modus Tolen

5.

1.	$\neg p \wedge q \Rightarrow q \wedge \neg r$	Premis
2.	$\neg(q \wedge \neg r)$	Premis
3.	....	1,2 Modus Tolen

6.

1.	$\neg(\neg p \vee q)$	Premis
2.	....	1, DeMorgan

7.

1.	$\neg(p \wedge \neg q)$	Premis
2.	....	1, DeMorgan

8.

1.	$p \wedge r \Rightarrow \neg q$	Premis
2.	$\neg q \Rightarrow r$	Premis
3.	....	1, 2 Hukum Transitif

9.	1.	$\neg p \wedge q \Rightarrow q \wedge \neg r$	Premis
	2.	$q \wedge \neg r \Rightarrow s$	Premis
	3.	....	1, 2 Hukum Transitif
10.	1.	$p \wedge r \Rightarrow q$	Premis
	2.	$\neg q \Rightarrow r$	Premis
	3.	$\neg r$	Premis
	4.	....	1, 2 Hukum Transitif
	5.	....	3, 4 Modus Tolen
11.	1.	$\neg p \wedge q \Rightarrow q \wedge \neg r$	Premis
	2.	$q \wedge \neg r \Rightarrow s$	Premis
	3.	$\neg s$	Premis
	4.	....	1, 2 Hukum Transitif
	5.	....	3, 4 Modus Tolen
12.	1.	$(p \Rightarrow q) \vee r$	Premis
	2.	$\neg r$	Premis
	3.	....	1, 2 Silogisma Disjungtif
13.	1.	$\neg(p \wedge q) \vee s$	Premis
	2.	$\neg s$	Premis
	3.	....	1, 2 Silogisma Disjungtif
14.	1.	$p \Rightarrow r \wedge q$	Premis
	2.	$\neg r$	Premis
	3.	....	2 Penambahan $\neg q$
	4.	....	3 DeMorgan
	5.	....	1, 4 Modus Tolen
15.	1.	$p \vee q \Rightarrow r$	Premis
	2.	$\neg r$	Premis
	3.	....	1, 2 Modus Tolen
	4.	....	3 DeMorgan
	5.	....	Penyederhanaan
16.	1.	$p \Rightarrow r$	Premis
	2.	p	Premis
	3.	s	Premis
	4.	....	1, 2 Modus Ponens
	5.	....	3, 4 Aturan K

17. $\neg(\neg p \vee q) \Rightarrow p \wedge \neg q$ ....

18.

1.	$p \wedge q \Rightarrow r$	Premis
2.	q	Premis
3.	p	Premis
4.	....	3, 2 Aturan K
5.	....	1, 4 Modus Ponens

19. $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$ ....

20.

1.	$p \Rightarrow \neg q \wedge r$	Premis
2.	$q \wedge r$	Premis
3.	$\neg p$	....

21.

1.	$\neg p \vee (r \Rightarrow s)$	Premis
2.	$p \Rightarrow (r \Rightarrow s)$	....

22.

1.	$s \wedge t \Rightarrow q \wedge \neg r$	Premis
2.	$s \wedge t$	Premis
3.	$q \wedge \neg r$	....

23.

1.	$\neg p \Rightarrow q$	Premis
2.	$\neg p \vee \neg q$	....

24.

1.	$\neg[p \Rightarrow \neg(q \wedge r)]$	Premis
2.	$\neg[\neg p \vee \neg(q \wedge r)]$	....
3.	$p \wedge (q \wedge r)$	....

25.

1.	$\neg p \wedge \neg q \Rightarrow p$	Premis
2.	$\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee p$	....
3.	$(p \vee q) \vee p$	....

26.

1.	$(p \vee q) \vee \neg r$	Premis
2.	$\neg p dan \neg q$	Premis
3.	$\neg(p \vee q)$	....
4.	$\neg r$	....
5.	$\neg r \vee s$	....

27.

1.	$p \vee q \Rightarrow r \wedge s$	Premis
2.	p	Premis
3.	$p \vee q$	....
4.	$r \wedge s$	....
5.	r	....

28.

1.	$p \Rightarrow \neg q$	Premis
2.	$\neg q \Rightarrow \neg r$	Premis
3.	$(r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow t$	Premis
4.	$p \Rightarrow \neg r$	....
5.	$r \Rightarrow \neg p$	....
6.	t	....

29.

1.	$p \Rightarrow \neg\neg p$	....
2.	$p \Rightarrow p$	....
3.	$\neg p \vee p$	....
4.	$(\neg p \vee p) \vee \neg q$	....
5.	$\neg p \vee (p \vee \neg q)$	....
6.	$\neg p \vee (\neg q \vee p)$	....
7.	$p \Rightarrow (\neg q \vee p)$	....
8.	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	....

30.

1.	$\neg p \vee p$	Premis
2.	t	Premis
3.	$t \vee \neg p$	....
4.	$\neg p \vee t$	....
5.	$(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee t)$	....
6.	$\neg p \vee (p \wedge t)$	....

Untuk masing-masing Soal 31–35 ubahlah ke bentuk bukti simbolik, dan lengkapi dengan penjelasan untuk tiap langkahnya.

31. Bagi saya membawa payung adalah perlu saat hujan. Apabila sedang hujan saya selalu memakai topi. Hari ini saya tidak memakai topi. Oleh karena itu, hari ini pasti tidak sedang hujan atau saya membawa payung.

32. Kamu tidak bisa sekaligus bahagia dan kaya. Oleh karena itu, kamu tidak bahagia atau tidak kaya. Sekarang kamu bahagia. Oleh karena itu, kamu pasti tidak kaya.

33. Jika saya cerdas atau tampak dewasa, saya akan bahagia dan kaya. Tetapi saya tidak kaya. Jadi benar bahwa saya tidak bahagia atau saya tidak kaya. Dengan kata lain, saya tidak sekaligus bahagia dan kaya. Oleh karena itu, saya tidak cerdas atau tampak dewasa, Dengan kata

lain saya tidak cerdas maupun tampak dewasa. Khususnya, saya tidak cerdas.

34. Jika mahasiswa senior simpatik atau mahasiswa yunior tegas, maka suasana akademik semarak. Jika mahasiswa senior tidak simpatik maka orang tua akan tidak senang. Awalnya orang tua senang, jadi mahasiswa senior simpatik. Oleh karena itu benar bahwa mahasiswa senior simpatik dan mahasiswa yunior tegas, dan akibatnya suasana akademik semarak.
35. Jika senior memberi contoh yang baik atau yunior punya motivasi belajar yang tinggi, maka suasana ilmiah akan terjaga atau kegiatan belajar tidak terganggu. Tetapi suasana ilmiah tidak terjaga atau kegiatan belajar terganggu. Kenyataannya, dapat dikatakan tidaklah benar bahwa suasana ilmiah terjaga atau kegiatan belajar tidak terganggu. Jadi tidaklah benar bahwa senior memberi contoh yang baik atau yunior punya motivasi belajar yang tinggi. Oleh karena itu, senior tidak memberi contoh yang baik dan yunior tidak punya motivasi belajar yang tinggi. Khususnya, senior tidak memberi contoh yang baik.

3.4 *Argumentasi dan Bukti*

Pada bagian ini dibahas ulang mengenai pengertian argumentasi dan bukti dengan ungkapan yang lebih tepat. Pada Contoh 3.3.5 pada subbab sebelumnya telah dibahas argumentasi berikut ini.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \vee q \Rightarrow r \end{array}$$

Tepatnya, ***argumentasi*** adalah daftar pernyataan yang disebut ***premis*** diikuti dengan satu pernyataan yang disebut ***kesimpulan***. Daftar premis dimungkinkan *kosong*, seperti pada Contoh 3.3.3 subbab sebelumnya. Suatu argumentasi dikatakan ***valid*** jika konjungsi premis-premisnya berimplikasi secara tautologi pada kesimpulannya. Dengan kata lain, validitas berarti bahwa *jika semua premis benar, maka* *benar juga kesimpulan.* Validitas suatu argumentasi tidak menjamin kebenaran premis-premisnya, sehingga tidak pula menjamin kebenaran kesimpulannya. Jaminannya hanyalah kesimpulan benar jika premis-premisnya benar.

ARGUMENTASI DAN VALIDITAS

Argumentasi adalah daftar pernyataan yang disebut ***premis*** diikuti dengan suatu pernyataan yang disebut ***kesimpulan***.

$$\begin{array}{l} \quad P_1 \\ \quad P_2 \\ \quad \vdots \\ \quad \underline{P_n} \\ \therefore Q \end{array}$$

Untuk bentuk di atas, pernyataan-pernyataan P_1, P_2, ..., P_n adalah premis-premis, dan Q adalah kesimpulan. Argumentasi di atas dikatakan ***valid*** jika pernyataan

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow Q$$

merupakan suatu tautologi.

Untuk menunjukkan validitas suatu argumentasi seperti

$$\begin{array}{l} \quad p \Rightarrow r \\ \quad \underline{q \Rightarrow r \qquad\quad} \\ \therefore p \vee q \Rightarrow r \end{array}$$

perlu diperiksa apakah pernyataan $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$ merupakan tautologi. Pada bab sebelumnya, untuk menjawab itu harus dibuat tabel kebenaran.

Terdapat beberapa permasalahan yang muncul pada saat akan menggunakan tabel kebenaran. Pertama, tabel kebenaran bisa berukuran sangat besar. Untuk pernyataan $[(a \Rightarrow q) \wedge (b \Rightarrow q)] \Rightarrow [(a \vee b) \Rightarrow q]$ diperlukan delapan baris dan sembilan kolom. Banyaknya baris itu akan menjadi dua kali lipat dengan penambahan hanya satu pernyataan atomik.

Kedua, memeriksa validitas suatu argumentasi melalui tabel kebenaran hampir selalu membosankan. Karena tabel kebenaran sesungguhnya tidak menceritakan apapun mengenai alasan mengapa suatu argumentasi valid atau tidak valid. Pada bahasan kali ini, akan dikonsentrasikan pada cara alternatif untuk menunjukkan bahwa suatu argumentasi adalah valid. Cara ini dilakukan dengan mengkonstruksi ***bukti***, yang akan lebih menarik dan dapat bercerita banyak mengenai apa sesungguhnya yang berlaku atau terjadi dalam argumentasi.

Terakhir, meskipun kebenaran dapat digunakan untuk memeriksa validitas dalam logika proposisional, namun tidak dapat digunakan dalam *logika predikat* (dibahas pada bab berikutnya). Dengan demikian, tabel kebenaran tidak dapat digunakan dalam argumentasi matematika yang sebenarnya. Salah satu maksud tersembunyi berkait dengan hal ini adalah menunjukkan apa yang sebenarnya dikerjakan orang matematika, yakni membuat bukti.

Secara informal, bukti adalah cara untuk meyakinkan bahwa kesimpulan yang diperoleh benar-benar didasarkan pada premis-premis yang diberikan, atau bahwa kesimpulan harus benar apabila premis-premis benar. Secara formal, bukti adalah daftar pernyataan, biasanya dimulai dari premis-premis, dengan pernyataan-pernyataan yang bukan premis harus benar jika pernyataan-pernyataan yang mendahuluinya benar. Khususnya, kebenaran pernyataan terakhir, yakni kesimpulan, harus didasarkan kebenaran pernyataan-pernyataan yang mendahuluinya. Bagaimana bisa tahu bahwa masing-masing pernyataan diturunkan dari pernyataan-pernyataan yang mendahuluinya? Dalam kasus ini, dapat dirujuk aturan inferensi yang menjamin hal itu.

BUKTI

Bukti suatu argumentasi adalah daftar pernyataan, dengan masing-masing pernyataan diperoleh dari pernyataan-pernyataan yang mendahuluinya dengan menggunakan aturan inferensi T1, T2, S, K, atau P. Pernyataan terakhir dalam suatu bukti haruslah kesimpulan dari argumentasi tersebut.

Sebagai contoh, berikut ini adalah bukti dari argumentasi di atas, yang telah dibahas pada subbab sebelumnya.

1.	$p \Rightarrow r$	Premis
2.	$q \Rightarrow r$	Premis
3.	$\neg p \vee r$	1, Ekiv. untuk Impl. dan Disj. (T1)
4.	$\neg q \vee r$	2, Ekiv. untuk Impl. dan Disj. (T1)
5.	$(\neg p \vee r) \wedge (\neg b \vee r)$	3, 4 Konjungsi (K)
6.	$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$	5, Hukum Distributif (T1)
7.	$\neg(p \vee q) \vee r$	6, Hukum DeMorgan (S)
8.	$(p \vee q) \Rightarrow r$	7, Ekiv. untuk Impl. dan Disj. (T1)

Satu hal yang cukup menyenangkan, tetapi samasekali tidak cukup jelas, bahwa setiap argumentasi yang valid dalam logika sentensial (proposisional) selalu mempunyai bukti. Hal ini tidak berlaku untuk logika predikat (dibahas pada Bab 4), khususnya tidak dapat diterapkan dalam argumentasi matematika yang sebenarnya. Demikian juga, bahwa tidak ada argumentasi yang *tidak valid* mempunyai bukti. Satu-satunya cara mempelajari untuk mendapatkan bukti adalah dengan mempelajari banyak contoh dan mengerjakan banyak latihan.

Berikut ini contoh lain yang akan banyak membantu untuk mendapatkan bukti argumentasi yang sejenis.

CONTOH 3.4.1 Buktikan argumentasi yang valid berikut ini

$$\begin{array}{rl} & p \wedge q \Rightarrow r \wedge s \\ & p \wedge q \\ \hline \therefore & r \wedge s \end{array}$$

Penyelesaian. Sebagaimana telah dikatakan sebelumnya, bahwa untuk memperoleh bukti adalah dengan mengingat bentuk yang pernah digunakan sebelumnya. Dalam hal ini, argumentasi tersebut dibawa ke bentuk

$$\begin{array}{rl} & A \Rightarrow B \\ & A \\ \hline \therefore & B \end{array}$$

Ini tidak lain adalah Modus Ponen. Jadi, diperoleh bukti satu langkah:

1.	$p \wedge q \Rightarrow r \wedge s$	Premis
2.	$p \wedge q$	Premis
3.	$r \wedge s$	1, 2 Modus Ponen ◀

Pada contoh di atas tampak bahwa buktinya lebih singkat dari tabel kebenaran. Karena ada empat pernyataan atomik, maka tabel kebenarannya akan terdiri dari 16 baris. Selain itu, bukti di atas menunjukkan bahwa argumentasi tersebut hanya perpanjangan bentuk Modus Ponen.

Modus Ponen dan Modus Tolen, mungkin, merupakan aturan inferensi yang paling umum dan sering digunakan.

CONTOH 3.4.2 Buktikan argumentasi yang valid berikut ini.

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ r \Rightarrow \neg p \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

Penyelesaian. Berdasarkan premis yang ke-dua dan kesimpulan, tampak ciri Modus Tolen. Akan tetapi, untuk menggunakannya aruslah diketahui p benar, sebab Modus Tolen mengatakan bahwa p dan $r \Rightarrow \neg p$ bersama-sama menghasilkan $\neg r$. Bagaimana cara mendapatkan p itu sendiri? Karena diketahui $p \wedge q$, maka dapat digunakan Penyederhanaan. Jadi diperoleh bukti berikut

1.	$p \wedge q$	Premis
2.	$r \Rightarrow \neg p$	Premis
3.	p	1, Simplifikasi
4.	$\neg r$	2, 3 Modus Tolen ◀

Seringkali pada saat mengerjakan pembuktian, akan terpaku cukup lama memikirkan langkah pertama yang akan digunakan. Salah satu cara menetapkan langkah pertama pembuktian adalah dengan bekerja mundur, yakni bekerja dari kesimpulan; diperhatikan terlebih dahulu kesimpulannya dan kemudian ditetapkan langkah-langkah yang mungkin menuju kesimpulan tersebut. Cara yang lain adalah dengan bekerja maju dari apa yang diketahui (premis) dan mundur dari apa yang diinginkan (kesimpulan), sampai bertemu di tengah. Dengan cara ini juga bisa didapat alur pembuktian dari premis-premis menuju kesimpulan yang utuh dan logis.

Contoh yang berikut ini adalah contoh penggunaan Aturan K dalam pembuktian.

CONTOH 3.4.3 Buktikan argumentasi valid berikut ini.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow a \\ p \Rightarrow b \\ \underline{p \qquad\qquad} \\ \therefore a \wedge b \end{array}$$

Penyelesaian. Dengan Modus Ponen dapat diperoleh a dan b secara terpisah. Untuk mendapatkan konjungsinya, dilakukan dengan menerapkan Aturan K.

1.	$p \Rightarrow a$	Premis
2.	$p \Rightarrow b$	Premis
3.	p	Premis
4.	a	1, 3 Modus Ponen
5.	b	2, 3 Modus Ponen
6.	$a \wedge b$	4, 5 Aturan K ◄

Perlu diingat bahwa cara pembuktian tidaklah tunggal, dan contoh-contoh yang dibahas disini tentu saja bukan satu-satunya pembuktian yang bisa dikerjakan.

Berikut ini diberikan contoh pembuktian yang menggunakan cara bekerja mundur dari kesimpulan kemudian maju dari premis-premis hingga didapat alur yang utuh dan terurut secara logis.

CONTOH 3.4.4 Buktikan argumentasi valid berikut.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \vee r \\ p \\ \underline{\neg r \qquad\qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

Penyelesaian. Ini salah satu contoh cara yang bisa digunakan untuk mendapatkan suatu bukti. Pertama, pastikan apa yang dikehendaki.

(i) Diharapkan q. Satu-satunya kemunculan q adalah dalam premis pertama, sebagai bagian dari konsekuen $q \vee r$. Konsekuen tersebut dapat ditarik keluar menggunakan dua premis pertama dan Modus Ponen.

(ii) Untuk mendapatkan q saja dari $q \vee r$ perlu mengeluarkan r. Padahal premis ke-tiga menunjukkan bahwa r bernilai salah, sehingga dapat digunakan Silogisma Disjungtif untuk melengkapi bukti.

Dengan demikian diperoleh bukti berikut ini.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	Premis
2.	p	Premis
3.	$\neg r$	Premis
4.	$q \vee r$	1, 2 Modus Ponen
5.	q	3, 4 Silogisma Disjungtif ◀

Perhatikan kembali proses berpikir mundur-maju di atas. Pekerjaan di tersebut dilakukan mundur dimulai dari q. Dapat dilihat bahwa dengan bekerja maju diperoleh $q \vee r$, kemudian mundur dari q lagi dengan menggunakan Silogisma Disjungtif akan bertemu pada hasil yang diharapkan.

CONTOH 3.4.5 Buktikan argumentasi valid berikut.

$$\begin{array}{rl} & p \vee r \Rightarrow s \wedge t \\ & p \\ \hline \therefore & t \end{array}$$

Penyelesaian.

- Dikehendaki t. Ini muncul pada konsekuen premis pertama. Dengan Modus Ponen dapat diperoleh t apabila diketahui $p \vee r$ benar.
- Hanya diketahui p benar dari premis ke-dua. Tetapi dengan Aturan Penambahan dapat diperoleh $p \vee r$.
- Dengan menggabungkan dua hasil tersebut, akan diperoleh konsekuen $s \wedge t$.

Untuk mendapatkan t sendiri dapat dilakukan menggunakan Aturan Penyederhanaan:

1.	$p \vee r \Rightarrow s \wedge t$	Premis
2.	p	Premis
3.	$p \vee r$	2 Penambahan
4.	$s \wedge t$	1, 3 Modus Ponen
5.	t	4 Penyederhanaan ◄

CONTOH 3.4.6 Buktikan argumentasi valid berikut ini.

$$\begin{array}{l} a \Rightarrow b \wedge c \\ \neg b \\ \hline \therefore \neg a \end{array}$$

Penyelesaian.

- Dikehendaki $\neg a$, yang muncul sebagai *negasi* dari anteseden dalam premis pertama. Ini dapat diperoleh menggunakan Modus Tolen apabila diketahui $b \wedge c$ benar.
- Jadi tujuan selanjutnya adalah menunjukkan $\neg(b \wedge c)$. Sedangkan yang diketahui adalah $\neg b$. Ini dapat dibawa kebantuk yang lebih dekat menggunakan Hukum DeMorgan untuk menulis $\neg(b \wedge c)$ sebagai $\neg b \vee \neg c$.
- Selanjutnya dapat diingat bahwa dengan Aturan Penambahan dapat diperoleh $\neg b \vee \neg c$ dari $\neg b$.

Dengan demikian diperoleh bukti yang diinginkan sebagai berikut:

1.	$a \Rightarrow b \wedge c$	Premis
2.	$\neg b$	Premis
3.	$\neg b \vee \neg c$	2, Penambahan
4.	$\neg(b \wedge c)$	3, DeMorgan
5.	$\neg a$	1, 4 Modus Tolen ◄

Sampai sejauh ini hampir semua pembuktian dilakukan dengan cara mundur. Akan tetapi, penulisan bukti harus dengan cara maju. Hal inilah yang sering dirasa membingungkan saat pertama akan mengerjakan pembuktian dalam logika simbolik atau dalam pembuktian matematika. Pembuktian tidak mengikuti alur berpikir yang mengarahkan pada cara mendapatkan bukti itu sendiri. Bahkan seringkali proses berpikir benar-benar kebalikan dari apa yang diungkapkan dalam suatu bukti.

Satu hal lain yang penting untuk diingat adalah sering terdapat banyak bukti yang berbeda untuk satu argumentasi yang diberikan. Berikut ini adalah bukti lain untuk argumentasi pada contoh di atas.

1.	$a \Rightarrow b \vee c$	Premis
2.	$\neg b$	Premis
3.	$\neg(b \wedge c) \Rightarrow \neg a$	1, Kontra Positif
4.	$\neg b \vee \neg c$	2, Penambahan
5.	$\neg(b \wedge c)$	4, DeMorgan
6.	$\neg a$	3, 5 Modus Ponen ◀

Mengkonstruksi suatu bukti hampir mirip dengan bermain catur. Pemain harus memilih langkah yang tepat, dari semua kemungkinan yang ada untuk mencapai tujuan.

CONTOH 3.4.7 Buktikan argumentasi valid berikut ini.

$$\begin{array}{l} s \Rightarrow r \\ p \vee q \Rightarrow \neg r \\ \neg s \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r) \\ \underline{p \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

Penyelesaian.

i. Dikehendaki akhir bukti adalah q saja. Diketahui q muncul pada premis ke-dua dan ke-tiga, dan tidak jelas akan difokuskan pada premis yang mana.

ii. Premis terakhir, yaitu p, adalah yang paling sederhana sehingga merupakan pilihan yang seharusnya sangat membantu. Tampaknya dapat digabungkan dengan premis ke-dua menggunakan Modus

Ponen. Kenyataannya, dapat digunakan Aturan Penambahan untuk memperoleh $p \vee q$ dari p dan kemudian menggunakan Modus Ponen untuk memperoleh $\neg r$ dari premis ke-dua.

iii. Selanjutnya dapat digabungkan $\neg r$ dengan premis pertama untuk memperoleh $\neg s$ dengan Modus Tolen.

iv. Kemudian dapat digabungkan $\neg s$ dengan premis ke-tiga untuk mendapatkan $\neg q \Rightarrow r$ menggunakan Modus Ponen.

v. Dengan mengingat bahwa baru didapat $\neg r$, dapat digunakan Modus Tolen untuk mendapatkan q yang dikehendaki.

Dengan demikian diperoleh bukti berikut:

1.	$s \Rightarrow r$	Premis
2.	$p \vee q \Rightarrow \neg r$	Premis
3.	$\neg s \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r)$	Premis
4.	p	Premis
5.	$p \vee q$	4, Penambahan
6.	$\neg r$	4, 2 Modus Ponen
7.	$\neg s$	1, 6 Modus Tolen
8.	$\neg q \Rightarrow r$	3, 7 Modus Ponen
9.	q	6, 8 Modus Tolen ◀

Sebagaimana ditunjukkan dalam pembuktian di atas, bahwa tidak semua bukti dapat diperoleh dengan mudah. Kadang-kadang diperlukan sedikit berputar-putar untuk mendapatkannya. Jika baris argumentasi yang dicoba tidak berhasil, maka sebaiknya mencoba dengan yang lain.

Argumentasi yang berikut ini pada dasarnya menegaskan bahwa apabila dimungkinkan adanya satu kontradiksi dalam suatu argumentasi, maka segala sesuatu tentang kesimpulannya menjadi mungkin. Argumentasi ini kadang disebut ***argumentasi licin***. Berhati-hatilah menerima argumentasi seperti ini!

CONTOH 3.4.8 Buktikan dan berikan komentar untuk argumentasi:

$$\begin{array}{l} \quad p \wedge \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Penyelesaian. Perhatikan bahwa premis $p \wedge \neg p$ adalah kontradiksi. Dengan menggunakan tabel kebenaran untuk $p \wedge \neg p \Rightarrow q$ akan dapat dipastikan bahwa argumentasi tersebut valid. Tetapi di sini akan dilakukan dengan pembuktian.

(i) Cara termudah untuk memulai adalah dengan Aturan Penyederhanaan untuk memecah pernyataan $p \wedge \neg p$ menjadi dua pernyataan p dan $\neg p$.

(ii) Perhatikan bahwa q tidak muncul di semua premis. Cara untuk mendapatkannya adalah dengan Aturan Penambahan, yakni dengan menambahkan q pada p untuk memperoleh $p \vee q$.

(iii) Pernyataan $\neg p$ yang diperoleh dari (i) menyatakan bahwa p salah, sehingga menggabungkannya dengan $p \vee q$ menggunakan Silogisma Disjungtif akan menghasilkan q.

Bukti lengkapnya adalah sebagai berikut:

1.	$p \wedge \neg p$	Premis
2.	p	1, Penyederhanaan
3.	$\neg p$	1, Penyederhanaan
4.	$p \vee q$	2, Penambahan
5.	q	3, 4 Silogisma Disjungtif.

Perhatikan bahwa pembuktian di atas satu langkah lebih singkat dari yang diberikan pada soal latihan. Hal ini menggambarkan kenyataan bahwa kemungkinan adanya beberapa bukti untuk satu argumentasi. Bukti paling sederhana, dalam hal ini paling singkat, dipandang sebagai bukti yang terbaik.

Komentar untuk argumentasi di atas adalah sebagai berikut. Perhatikan premisnya yang membuat kontradiksi, yakni mengklaim bahwa p dan $\neg p$ keduanya benar. Tentang apa yang dikatakan dalam argumetnasi tersebut adalah bahwa dengan adanya suatu kontradiksi dalam suatu argumentasi, maka *apa pun kesimpluannya akan menjadi benar*. Perhatikan bahwa q sama sekali tidak ada kaitannya dengan premis yang diberikan.

Secara umum, anteseden yang salah menyebabkan sebarang konsekuen, salah atau benar. Berikut ini contoh yang lebih mengena: "Jika $1 = 0$, maka saya adalah Presiden Indonesia" adalah pernyataan benar. Untuk menulisnya sebagai argumentasi, dimisalkan p sebagai pernyataan "$0 = 1$" dan q pernyataan "saya Presiden Indonesia," sehingga dalam bentuk argumentasi

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Tetapi ini belum cukup. Orang matematika sudah pasti tahu bahwa p salah, sehingga $\neg p$ haruslah benar. Jadi argumentasinya adalah

$$\begin{array}{l} p \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Dengan Aturan K, hal ini sebenarnya sama dengan

$$\begin{array}{l} p \wedge \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

dan ini adalah valid. ◀

Berikut ini adalah contoh pembuktian untuk argumentasi yang tidak valid. Perhatikan perbedaan langkah-langkah dalam pembuktian ini yang berbeda dengan pembuktian untuk argumentasi yang valid.

CONTOH 3.4.9 Buktikan bahwa argumentasi berikut ini tidak valid.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Penyelesaian. Bukti hanya dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa suatu argumentasi adalah valid. Jika dipaksakan untuk membuktikan argumentasi di atas, pasti tidak akan pernah sampai. Argumentasi tesebut tampaknya singkat seperti Modus Ponen, hanya saja terbalik. Tampaknya seperti Modus Tolen, tetapi negasinya tidak ada. Tampaknya ada kesalahan, dan memang demikian.

Untuk menunjukkan suatu argumentasi yang tidak valid harus dicari contoh penyangkal (*counterexample*). Ini dilakukan dengan menetapkan nilai-nilai kebenaran yang membuat premis-premis bernilai benar tetapi kesimpulannya salah, jadi dengan menunjukkan bahwa kesimpulan tidak mengikuti premis-premis.

Untuk soal ini, agar kesimpulan salah dibutuhkan p bernilai salah. Untuk premis-premis menjadi benar dibutuhkan q bernilai benar. Selanjutnya periksa bahwa kedua premis benar: Premis pertama $p \Rightarrow q$, bernilai benar apabila p salah dan q benar. Ini adalah contoh penyangkal yang diperlukan.

Suatu contoh penyangkal menjadi jelas jika diberikan dalam bentuk pernyataan yang nyata. Untuk p, yang harus bernilai salah, misalkan sebagai pernyataan "$0 = 1$". Untuk q, yang harus bernilai benar, misalkan pernyataan "bumi adalah bulat". Argumentasinya menjadi seperti berikut:

Jika $0 = 1$, maka bumi adalah bulat.	Benar
Bumi adalah bulat	Benar
Jadi, $0 = 1$	Salah. ◄

CONTOH 3.4.10 Pastikan apakah argumentasi-argumentasi berikut ini valid atau tidak valid. Jika valid, buktikan; jika tidak valid, berikan contoh penyangkal.

(a) Setiap reaksi kimia yang tidak riversibel menghasilkan panas. Oleh karena itu, jika suatu reaksi kimia reversibel maka tidak menghasilkan panas.

(b) Mahasiswa dididik untuk menjadi politisi. Jika mahasiswa dididik untuk menjadi politisi, maka mahasiswa dididik untuk menjadi robot. Jadi, mahasiswa dididik untuk menjadi robot.

Penyelesaian.

(a) Untuk menganalisis sebarang argumentasi yang diberikan dalam bentuk kata-kata, pertama harus mengubahnya dalam bentuk simbolik. Kalimat yang pertama membahas dua aspek dari suatu reaksi kimia, yakni reaksi yang reversibel atau yang menghasilkan panas. Misalkan p: "reaksi kimia ini reversibel" dan q: "reaksi kimia ini menghasilkan panas." Dengan demikian pernyataan yang pertama adalah $p \Rightarrow q$. Kesimpulan dalam argumentasi tersebut berupa implikasi $\neg p \Rightarrow \neg q$. Dalam bentuk simbolik, argumentasi tersebut adalah:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \Rightarrow \neg q \end{array}$$

Argumentasi ini tampaknya seperti pada aturan Kontrapositif. Akan tetapi, kesimpulannya terbalik, sebab kontrapositif dari $p \Rightarrow q$ adalah $\neg q \Rightarrow \neg p$. Hal ini mengisyaratkan bahwa argumentasi tersebut tidak valid, sehingga dicoba untuk mencari contoh penyangkalnya.

Contoh penyangkal yang dibuat harus membuat premis bernilai benar tetapi kesimpulan bernilai salah. Satu-satunya cara untuk menjadikan suatu implikasi bernilai salah adalah dengan membuat anteseden benar dan konsekuen salah, jadi harus dibuat contoh untuk $\neg p$ benar dan $\neg q$ salah. Untungnya, dengan ini sekaligus memberikan nilai benar pada premis di atas. Menggunakan makna yang sama dengan p dan q yang telah dibuat di atas, contoh penyangkal akan diberikan oleh rekasi kimia yang reversibel tetapi menghasilkan panas.

Jika diinginkan contoh penyangkal yang lebih mudah ditangkap maknanya, dapat dicoba dengan memisalkan p: "binatang ini adalah kuda" dan q: "binatang ini adalah mamalia."

(b) Misal p: "mahasiswa dididik untuk menjadi politisi" dan q: "mahasiswa dididik untuk menjadi robot." Dengan demikian argumentasi tersebut mempunyai bentuk:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Tampak bahwa argumentasi tersebut hanyalah penerapan dari Modus Ponen, jadi argumentasi tersebut valid (meskipun kesimpulannya salah!) ◄

Pada contoh di atas, pada bagian (a), kesimpulan dari argumentasi asalnya kenyataannya benar: Reaksi kimia yang reversibel tidak menghasilkan panas. Tetapi penalaran yang digunakan untuk sampai pada kesimpulan tersebut tidak valid. Pada contoh (b), premis dan kesimpulannya salah (salah satu premisnya kebetulan benar. Periksalah, yang mana?) dan penalaran yang dugunakan untuk sampai pada kesimpulan itu adalah valid. Hal ini memperjelas perbedaan antara *kebenaran* dan *validitas*. Validitas suatu argumentasi hanya bergantung semata-mata pada bentuknya saja. Validitas menjamin bahwa *jika* premis-premis kebetulan benar untuk suatu interpretasi bagi komponen atomiknya, *maka* kesimpulannya juga pasti benar. Validitas tidak menjelaskan apakah premis bernilai benar, tidak juga menceritakan bagaimana kejadiannya apabila premis itu salah. Sebaliknya, apabila suatu argumentasi tidak valid, tidak harus berarti kesimpulannya salah, hanya saja kebenaran itu tidak berdasarkan kebenaran premis-premisnya.

Contoh berikut ini mirip dengan jenis pertanyaan yang sering muncul dalam test bakat atau kecerdasan seperti TPA (Test Potensi Akademik), yang berkaitan dengan penalaran logis.

CONTOH 3.4.11 Pastikan apakah argumetnasi berikut ini valid atau tidak. Jika valid, berikan buktinya; jika tidak valid, berikan contoh penyangkalnya.

> Ketika Alex hadir pada kuliah Logika, temannya Gopri dan Dania juga hadir. Karena Dania bersahabat dengan Lutifa, kehadiran Lutifa memerlukan kehadiran Dania. Di lain pihak, kehadiran Dania memerlukan Alex untuk hadir di kelas (sebagai teman bisik-bisik saat dosen mulai membosankan). Oleh karena itu, Lutifa tidak akan hadir di kelas kecuali kalau Gopri juga hadir.

Penyelesaian. Untuk memudahkan melihat awal dan akhir dari argumentasi tersebut, terjemahkan ke dalam bentuk simbolik. Untuk lebih memudahkan lagi, pilih nama mahasiswa sebagai simbol dari kehadirannya di kelas Logika. Jadi a: "Alex hadir di kelas Logika" dan seterusnya. Bentuk argumentasinya adalah sebagai berikut

$$\begin{array}{rl} & a \Rightarrow g \wedge d \\ & l \Rightarrow d \\ & d \Rightarrow a \\ \hline \therefore & l \Rightarrow g \end{array}$$

Dengan memperhatikan premis-premisnya dapat terlihat bahwa implikasi

$$l \Rightarrow d \Rightarrow a \Rightarrow g \wedge d$$

Jadi, Aturan Transitivitas akan menghasilkan $l \Rightarrow g \wedge d$, cukup mudah. Demikian juga muncul $l \Rightarrow g$, jadi argumentasi tersebut valid. Untuk mendapatkan $l \Rightarrow g$ dari $l \Rightarrow g \wedge d$ dapat digunakan Aturan Penyederhanaan, tetapi hal ini tidak dapat dilakukansecara langsung. Untuk itu digunakan Ekivalensi untuk Implikasi dan Disjungsi, sebagai alat yang sangat membantu untuk memanipulasi implikasi. Bukti untuk argumentasi valid tersebut adalah sebagai berikut:

1.	$a \Rightarrow g \wedge d$	Premis
2.	$l \Rightarrow d$	Premis
3.	$d \Rightarrow a$	Premis
4.	$l \Rightarrow a$	2, 3 Transitivitas
5.	$l \Rightarrow g \wedge d$	1, 4 Transitivitas
6.	$\neg l \vee (g \wedge d)$	5, Ekiv. untuk Impl. dan Disjungsi
7.	$(\neg l \vee g) \wedge (\neg l \vee d)$	6, Distributif
8.	$\neg l \vee g$	7, Penyederhanaan
9.	$l \Rightarrow g$	8, Ekiv. untuk Impl. dan Disjungsi

◀

SOAL-SOAL LATIHAN 3.4

Buktikan masing-masing argumentasi yang valid pada Soal 1–21.

1. $$\begin{array}{l} p \vee r \Rightarrow \neg q \\ p \vee r \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow (q \Rightarrow s) \\ \neg p \\ \hline \therefore q \Rightarrow s \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg t) \\ \neg(r \Rightarrow \neg t) \\ \hline \therefore p \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l} \neg p \vee r \Rightarrow \neg q \\ q \\ \hline \therefore \neg(\neg p \vee r) \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow (q \wedge r) \\ \neg p \wedge s \\ \hline \therefore r \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \wedge s \\ \neg r \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg(q \vee r) \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow (q \wedge r) \\ r \vee s \\ \hline \therefore s \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{l} p \vee r \Rightarrow q \\ s \Rightarrow p \\ s \\ \hline \therefore q \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{l} p \vee q \Rightarrow r \\ \neg r \\ t \Rightarrow q \\ \hline \therefore \neg t \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{l} p \vee \neg q \Rightarrow r \\ s \Rightarrow t \wedge u \\ s \wedge p \\ \hline \therefore r \wedge u \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{l} p \wedge \neg q \Rightarrow r \\ s \Rightarrow p \\ q \wedge \neg u \\ u \wedge s \\ \hline \therefore r \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{l} (p \Rightarrow r) \Rightarrow r \\ \neg(q \vee r) \\ \hline \therefore p \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \\ q \wedge p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \\ q \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$

16.
$$\begin{array}{l} \text{—} \\ \hline \therefore (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \end{array}$$

17.
$$\begin{array}{l} \text{—} \\ \hline \therefore p \Rightarrow \neg(q \wedge \neg p) \end{array}$$

18.
$$\begin{array}{l} \text{—} \\ \hline \therefore \neg(p \wedge \neg p) \end{array}$$

19.
$$\begin{array}{l} \text{—} \\ \hline \therefore (p \wedge q) \Rightarrow q \end{array}$$

20.
$$\begin{array}{l} \text{—} \\ \hline \therefore (p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p \end{array}$$

21. $$\begin{array}{l} — \\ \hline \therefore \neg p \Rightarrow (p \Rightarrow \neg p) \end{array}$$

Berikan contoh penyangkal untuk argumentasi tidak valid pada Soal 22–24, yaitu dengan mencari pernyataan-pernyataan atomik yang membuat premis-premisnya benar dan kesimpulan salah.

22. $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

23. $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \Rightarrow r \\ \hline \therefore q \Rightarrow r \end{array}$$

24. $$\begin{array}{l} p \wedge q \Rightarrow r \\ \neg r \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

24. $$\begin{array}{l} p \wedge q \Rightarrow r \\ p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

Untuk Soal 25–28, pastikan apakah masing-masing argumentasi yang diberikan valid atau tidak. Jika valid, buktikan; jika tidak valid, berikan contoh penyangkal.

25. $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \vee r \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

26. $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \wedge r \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

27. $$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ \neg q \Rightarrow \neg r \\ \hline \therefore p \Rightarrow q \end{array}$$

28. $$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ q \vee \neg r \\ \hline \therefore p \Rightarrow q \end{array}$$

Untuk Soal 29-36 berikut ini, ubahlah masing-masing argumentasi menjadi bentuk simbolik dan kemudian pastikan apakah valid atau tidak. Jika tidak valid, berikan contoh penyangkal disertai nilai kebenaran untuk berbagai pernyataan atomiknya.

29. Jika kau seekor sapi, maka kau akan makan rumput. Akan tetapi, kau bukan seekor sapi, jadi kau tidak makan rumput.

30. Jika kita ditakdirkan bisa terbang, kita pasti punya sayap. Karena kita memang bisa terbang dan karena kita tidak akan terbang kecuali kalau kita ditakdirkan terbang, berarti kita punya sayap.

31. Jika pabrik-pabrik di Gresik menyebabkan polusi udara, maka hujan asam akan mengakibatkan kerusakan di Surabaya. Kenyataannya, hujan asam mengakibatkan kerusakan di Surabaya, jadi pabrik-pabrik di Gresik pasti menyebabkan polusi udara.

32. Jika tingkat suku bunga turun, tingkat inflasi akan naik. Jika tingkat suku bunga turun, pasar saham akan juga naik. Oleh karena itu, jika tingkat inflasi naik maka pasar saham juga naik.

33. Anda sedang menjadi ketua himpunan mahasiswa, dan sedang dihadapkan pada masalah rumit berikut ini. Mahasiswa yunior menolak menandatangani pengesahan AD-ART kecuali jika mahasiswa senior dan Ketua Jurusan juga menandatanganinya. Karena Ketua Jurusan bertanggungjawab terhadap Dekan, maka tandatangan Dekan atas pengesahan AD-ART tersebut merupakan syarat cukup bagi Ketua Jurusan untuk menandatangani AD-ART. Sebaliknya, Ketua Jurusan harus membina mahasiswa baru untuk aktif ke himpunan mahasiswa, sehingga menolak menandatangani AD-ART kecuali jika mahasiswa yunior juga menandatanganinya. Anda menyimpulkan bahwa Dekan tidak akan tandatangan kecuali jika mahasiswa senior juga memberikan tandatangan.

34. (Kelanjutan Soal No. 33...) Ketika Anda mempersiapkan acara penandatanganan, seseorang yang mewakili Ketua Jurusan menginformasikan pada sekretariat himpunan mahasiswa bahwa dikarenakan adanya keberatan dari mahasiswa baru, Ketua Jurusan menolak tandatangan bersama-sama dengan mahasiswa baru. Sebagai balasan, perwakilan mahasiswa baru mengumumkan dengan tegas: mereka tidak akan tandatangan kecuali jika Dekan juga tandatangan. Setelah berpusing-pusing berpikir, Anda sambil muram sampai pada kesimpulan bahwa mustahil seseorang akan memberikan tandatangan. [Untuk menyingkat waktu analisis Anda, dapat Anda asumsikan tautologi berikut ini (yang telah dibuktikan pada bagian sebelumnya): $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$.]

35. *Ketika matahari meninggi dan bulan tak mau pergi,*
maka aku akan mencari
Jika kau seru angin berbisik, matahari akan naik
Jika bulan hendak bergeser menjauh, gerimis pun tak mau jatuh
Kau seru angin 'tuk berbisik dan hujan pun mau menitik
Jadi, aku akan mencari

36. *Jika tak ada capung bermata biru, dan kunang-kunang berbinar,*
Maka tak ada yang mengharapkanmu; sungguh itu benar.
Tetapi Dena benar-benar mengharap dirimu,
Dan Wian dan juga Sanyu.
Sungguh banyak kunang-kunang sedang berbinar
Atau kau memang hanya anak yang tegar.
Kau meyakinkanku kalau kau makin dewasa
Dan memang itu aku percaya;
Wajahmu makin cerah dan tak bergurat
Begitulah aku yakin ingin merapat erat.
Aku tak mampu menyangkal
Capung memang bermata biru seperti mata kamu yang aku kenal.

37. Dapatkah segala sesuatu dibuktikan tanpa adanya premis yang diketahui? Jelaskan.

38. Seorang teman menegaskan bahwa setiap argumentasi dapat dibuktikan melalui banyak cara. Apakah pendapat itu benar? Jelaskan.

39. Gupino mengklaim dapat membuktikan argumentasi berikut:

$$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Bagaimana komentar Anda tentang klaim Gupino tersebut?

40. Rotungo mengatakan bahwa aturan penyederhanaan dapat diturunkan dari aturan penambahan, oleh karena itu aturan penyederhanaan tidak perlu. Berikan komentar untuk penegasan Rotungo itu.

3.5 Bukti Tak Langsung dan Konsistensi

Secara umum, suatu argumentasi berbentuk $P \Rightarrow Q$. Untuk membuktikannya, pada bahasan sebelumnya dilakukan secara langsung, yaitu diawali dari premis-premis P kemudian dilakukan penurunan (inferensi) mengarah ke kesimpulan Q. Akan tetapi tidak semua pembuktian dapat dilakukan secara langsung demikian, setidaknya beberapa pembuktian menjadi sangat rumit jika dilakukan secara langsung. Pada bagian ini akan dibahas mengenai cara pembuktian dengan cara lain, yang disebut *pembuktian tidak langsung*.

3.5.1 Bukti Kondisional

Sejauh ini telah dibahas aturan inferensi dan telah dikerjakan pembuktian yang cukup rumit. Akan tetapi masih ada bukti yang cukup sederhana yang tidak dapat dikerjakan dengan aturan-aturan inferensi yang telah dibahas tersebut. Sebagai contoh, untuk argumetnasi berikut ini kesimpulannya tampak sangat jelas tetapi pembuktiannya ternyata tidak sejelas itu:

> Jika Budi menang maka Jono urutan ke-dua. Jika Karman urutan ke-dua maka Jono tidak urutan ke-dua. Oleh karena itu, jika Karman urutan ke-dua maka Budi tidak menang.

Misalkan digunakan simbol-simbol berikut ini:

p : “Budi menang”
q : “Jono urutan ke-dua”
r : “Karman urutan ke-dua”

sehingga bentuk argumentasi lengkap:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow \neg q \\ \hline \therefore r \Rightarrow \neg p \end{array}$$

Aturan inferensi yang telah dibahas sebelumnya, ternyata tidak mencukupi untuk membuktikan argumentasi valid seperti di atas. Jelas bahwa tidak mungkin mendapatkan nilai-nilai kebenaran yang menyebabkan premis-premis benar dan kesimpulan salah. Kesimpulan akan salah hanya untuk p dan r yang kedua-duanya benar. Tetapi dengan ini premis-premisnya menjadi salah tanpa memperhatikan nilai kebenaran q. Jadi tampak bahwa argumentasi di atas adalah valid. (Jika kurang yakin tentang validitas ini, silakan periksa dengan tabel kebenaran.) Sekarang bagaimana cara untuk membuktikannya dengan aturan inferensi?

Aturan Premis, aturan P, memperbolehkan menambahkan premis baru apabila premis tersebut diharapkan muncul dalam kesimpulan. Dengan penambahan premis baru, argumentasi di atas menjadi

1.	$p \Rightarrow q$	Premis
2.	$r \Rightarrow \neg q$	Premis
3.	r	Premis
4.	$\neg q$	2, 3 Modus Ponen
5.	$\neg p$	1, 4 Modus Tolen

Pada penurunan di atas perhatikan keterangan 'Premis' setelah pernyataan r pada baris ke-tiga. Dalam hal ini r adalah premis tambahan dan ditulis menjorok ke kanan untuk membedakan bahwa itu bukan salah satu dari premis asli. Aturan ini dapat dirangkum sebagai aturan baru, yang disebut aturan bukti bersyarat atau lebih dikenal dengan sebutan ***Aturan Bukti Kodisional*** (BK):

> ATURAN BUKTI KONDISONAL (BK)
> Jika pernyataan Q dapat diturunkan secara logis dari pernyataan P dengan disertai sekelompok premis, maka diperbolehkan menurunkan $P \Rightarrow Q$ hanya dari premis-premis itu saja.

Pada contoh di atas, dapat diturunkan pernyataan $\neg p$ dari premis tambahan r beserta sekelompok premis asli. Dengan demikian dapat diturunkan $r \Rightarrow \neg p$ dari sekelompok premis itu saja.
Bukti selengkapnya adalah sebagai berikut:

1.	$p \Rightarrow q$	Premis
2.	$r \Rightarrow \neg q$	Premis
3.	r	Premis
4.	$\neg q$	2, 3 Modus Ponen
5.	$\neg p$	1, 4 Modus Tolen
6.	$r \Rightarrow \neg p$	3, 5 BK

Perhatikan bahwa baris ke-6 ditulis kembali rata di kiri, untuk menunjukkan bahwa kesimpulan tersebut sebenarnya dapat diturunkan dari premis-premis aslinya saja. Bagian yang menjorok ke kanan disebut *bukti subordinat.*

Secara intuitif, bukti kondisional sebenarnya dapat dikerjakan dengan cukup sederhana. Kesimpulan yang dikehendaki adalah berupa *pernyataan kondisional*, dan untuk memulai pembuktian *ditambahkan anteseden dari kesimpulan sebagai premis baru.*

CONTOH 3.5.1 Buktikan bahwa $d \Rightarrow c$ dari premis-premis berikut:

$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$
$\neg d \vee a$
b

Bukti.

1.	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$	Premis
2.	$\neg d \vee a$	Premis
3.	b	Premis
4.	$\quad d$	Premis
5.	$\quad a$	2, 4 Silogisma Disjungtif
6.	$\quad b \Rightarrow c$	1, 5 Modus Ponen
7.	$\quad c$	3, 6 Modus Ponen
8.	$d \Rightarrow c$	4, 7 BK ◄

Perhatikan bahwa baris ke-8 ditulis kembali rata di kiri dengan premis aslinya. Ini untuk menunjukkan bahwa kesimpulan tersebut sebenarnya juga diperoleh dari premis-premis yang diberikan di awal, tetapi juga didapat dari premis tambahan (baris ke-4). Bagian bukti subordinat (yang ditulis menjorok ke kanan) selalu diawali dengan premis tambahan (baru) yang merupakan anteseden dari kesimpulan. (Ingat bahwa kesimpulannya berupa pernyataan kondisional atau implikasi.) Bagian ini menunjukkan 'apa yang terjadi jika premis baru itu ditambahkan' dan tentu saja diarahkan pada kesimpulan yang dikehendaki.

Contoh berikut ini menunjukkan bahwa aturan penambahan premis (aturan P) yang memperbolehkan penempatan premis pada *sebarang* baris. Karena kesimpulan berbentuk pernyataan kondisional, maka dicoba dengan cara pembuktian kondisional, meskipun sebenarnya dapat diturunkan secara langsung (silakan coba bukti secara langsung).

CONTOH 3.5.2 Buktikan

$$\begin{array}{l} s \wedge (\neg p \vee m) \\ m \Rightarrow q \vee r \\ \hline \therefore\ p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r) \end{array}$$

Bukti.

1.	$s \wedge (\neg p \vee m)$	Premis
2.	$m \Rightarrow q \vee r$	Premis
3.	$\neg p \vee m$	1, Penyederhanaan
4.	$\quad p$	Premis
5.	$\quad m$	3, 4 Silogisma Disjungtif
6.	$\qquad \neg q$	Premis
7.	$\qquad q \vee r$	2, 5 Modus Ponen
8.	$\qquad r$	6, 7 Silogisma Disjungtif
9.	$\quad \neg q \Rightarrow r$	7, 8 BK
10.	$p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$	4, 9 BK ◄

Pada contoh di atas, kesimpulannya terdiri dari dua pernyataan kondisional. Oleh karena itu, terdapat dua bukti subordinat. Pertama dengan menambahkan anteseden p sebagai premis baru, kemudian anteseden $\neg q$ sebagai premis tambahan ke-dua. Beberapa hal perlu diperhatikan untuk contoh sejenis ini. Pertama, setelah menurunkan r (baris 8) diterapkan aturan BK untuk premis tambahan pada subordinat ke-dua dan dihasilkan $\neg q \Rightarrow r$ (baris 9). Selanjutnya, pada hasil penurunan subordinat ke-dua diterapkan aturan BK dengan premis tambahan pertama. Pada saat penurunan tahap ini, baris-baris subordinat ke-dua tidak boleh digunakan lagi (mengapa?). Secara umum, tiap tahap penuruan tidak boleh menggunakan baris-baris pernyataan yang berada di dalam subordinatnya, tetapi boleh menggunakan yang berada di subordinat atasnya.

Pembuktian menggunakan aturan BK boleh dicoba diterapkan apabila argumentasi yang dihadapi mempunyai kesimpulan berupa pernyataan kondisional (implikasi). Akan tetapi ini bukan satu-satunya pembuktian yang bisa dicoba.

3.5.2 Konsistensi

Perhatikan tiga pernyataan berikut ini:

1. SBY terpilih sebagai Presiden RI pada tahun 2001.
2. Adik saya menyebut truk dengan sendok.
3. Johan lebih tinggi dari Jihan dan Johan tidak lebih tinggi dari Jihan.

Semua sepakat kalau ketiga pernyataan tersebut adalah salah. Akan tetapi masing-masing bernilai salah karena alasan yang berbeda.

Pernyataan pertama akan salah, tetapi mungkin juga menjadi benar jika dibicarakan di lingkungan yang berbeda, misalnya di lingkungan yang tidak tahu kapan ada pemilihan presiden di Indonesia. Pernyataan ke-dua, juga salah karena tidak benar menyebut sesuatu benda dengan sebutan lain yang tidak umum. Sedangkan pernyataan ke-tiga, siapa pun akan mengatakan itu hal yang tidak mungkin terjadi. Seseorang tidak mungkin mempunyai dua sifat berbeda pada saat yang bersamaan.

Pernyataan ke-tiga adalah pernyataan yang mustahil secara logika. Meskipun tidak diketahui “Johan lebih tinggi” atau “Johan lebih rendah”. Dalam notasi logika hal ini dapat disimbolkan dengan

$$s \wedge \neg s$$

Bentuk logika tersebut dinamakan ***kontradiksi*** (pertentangan atau kemustahilan). Dua pernyataan adalah saling bertentangan jika yang satu merupakan negasi dari yang lain. Atau dengan kata lain, kontradiksi adalah konjungsi dari suatu pernyataan dengan negasinya sendiri. Ini selalu bernilai salah.

Banyak pernyataan dengan berbagai bentuk dapat bernilai salah secara logika. Jika pernyataan tersebut tidak dalam bentuk kontradiksi, maka dapat dikenali dengan menerapkan aturan inferensi untuk menurunkan suatu kontradiksi. Aturan inferensi tidak memungkinkan penurunan kesimpulan salah dari premis-premis benar, jadi jika kesimpulan salah secara logika maka haruslah premis juga salah secara logika. Sebagai contoh perhatikan pernyataan berikut:

1. $\neg(\neg s \vee s)$ Premis

Pernyataan ini tidak dalam bentuk kontradiksi, tetapi dengan aturan inferensi dapat diturunkan

2.	$\neg\neg s \wedge \neg s$	DeMorgan
3.	$s \wedge \neg s$	Negasi ganda

Baris ke-tiga menunjukkan bentuk kontradiksi, jadi premis (baris-1) tidak bisa benar.

Contoh lain yang menunjukkan premis salah diberikan berikut ini.

1.	$(s \Rightarrow r) \wedge \neg(\neg s \vee r)$	Premis
2.	$s \Rightarrow r$	1, Penyederhanaan
3.	$\neg(\neg s \vee r)$	1, Penyederhanaan
4.	$s \wedge \neg r$	3, DeMorgan
5.	s	4, Penyederhanaan
6.	$\neg r$	4, Penyederhanaan
7.	r	2, 5 Modus Ponen
8.	$r \wedge \neg r$	7, 6 Konjungsi

Dua baris terakhir di atas juga dapat diturunkan dengan

7.	$\neg s$	2, 6 Modus Tolen
8.	$s \wedge \neg s$	5, 7 Konjungsi

Tidak penting kontradiksi yang mana yang berhasil diturunkan. Asalkan muncul suatu kontradiksi dalam suatu penurunan, berarti dapat dikatakan premis yang diberikan adalah salah secara logika. Dua pernyataan atau lebih yang secara logika tidak bisa bersama-sama bernilai benar dikatakan ***tidak konsisten***.

Konsistensi premis-premis dalam suatu argumentasi juga bagian yang menarik untuk diselidiki. Ingat contoh argumentasi licin dan penalaran keliru. Suatu argumentasi bisa mengecoh atau menyesatkan jika hanya validitasnya saja yang dipentingkan. Bentuk implikasi $P \Rightarrow Q$ akan selalu bernilai benar jika P salah, termasuk untuk Q yang salah. Jadi sebenarnya, hanya penurunan untuk argumentasi yang "bunyi" yang tidak membingungkan.

Oleh karena hal itu, ada kalanya yang lebih menarik atau diperlukan bukannya penurunan suatu kesimpulan, tetapi dikehendaki kepastian apakah sekelompok premis konsisten atau tidak konsisten. Untuk membuktikan premis-premis yang tidak konsisten dilakukan dengan menurunkan suatu kontradiksi. Dengan menggunakan aturan-aturan penurunan, apabila dapat diturunkan suatu kontradiksi dari premis-premis tersebut berarti telah dibuktikan bahwa premis-premis itu tidak konsisten.

CONTOH 3.5.3 Buktikan bahwa pernyataan-pernyataan ini tidak konsisten:

Jika kelas dipenuhi mahasiswa yang terlalu pasif maka kedatangan dosen dirasa membawa bencana.
Jika kedatangan dosen dirasa membawa bencana maka kelas serasa menjadi penjara bagi mahasiswa.
Jika kelas pada tingkat sarjana maka tidak boleh menjadi penjara bagi mahasiswa.
Kelas dipenuhi mahasiswa yang terlalu pasif dan kelas itu pada tingkat sarjana.

Bukti. Penurunan berikut ini menunjukkan bahwa dapat diturunkan kontradiksi dengan menggunakan aturan inferensi logika. Buktinya adalah sebagai berikut:

1.	$p \Rightarrow b$	Premis
2.	$b \Rightarrow r$	Premis
3.	$s \Rightarrow \neg r$	Premis
4.	$p \wedge s$	Premis
5.	s	4, Penyederhanaan
6.	$\neg r$	3, 5 Silogisma Disjungtif
7.	p	4, Penyederhanaan
8.	$p \Rightarrow r$	1, 2 Transitifitas
9.	r	7, 8 Silogisma Disjungtif
10.	$r \wedge \neg r$	6, 9 Kongjungsi

Permasalahan lain yang berbeda dengan contoh di atas, dimisalkan sekelompok premis tidak diketahui konsisten atau tidak. Penurunan kontradiksi dari premis-premis tersebut juga tidak berhasil. Kegagalan untuk membuktikan tidak konsistennya premis-premis tersebut dengan menurunkan kontradiksi tentu saja *tidak* berarti bahwa premis-premis tersebut konsisten. Untuk kasus seperti ini, memeriksa nilai kebenaran masing-masing premis adalah cara yang bisa dilakukan.

Ingat bahwa premis-premis dikatakan tidak konsisten apabila premis-premis tersebut tidak dapat bernilai benar secara bersamaan. Dengan demikian, apabila dapat ditemukan nilai kebenaran setiap pernyataan atomik yang menunjukkan bahwa semua premis tersebut bernilai benar secara bersamaan maka dapat dipastikan premis-premis tersebut konsisten.

CONTOH 3.5.4 Buktikan bahwa premis-premis berikut ini konsisten.

Jika Juned mahasiswa junior maka Seno mahasiswa senior.
Jika Seno mahasiswa senior maka Markis mahasiswa junior.
Markis bukan mahasiswa junior.

Bukti. Untuk menyederhanakan, premis-premis di atas ditulis dalam bentuk simbolik, yaitu:

1. $j \Rightarrow s$
2. $s \Rightarrow m$
3. $\neg m$

Selanjutnya diperiksa nilai kebenaran masing-masing pernyataan atomik yang menyusun premis-premis tersebut. Dari baris-3 terlihat bahwa $\neg m$ bernilai benar, sehingga haruslah m salah. Dengan m salah, maka premis baris-2 akan bernilai benar apabila s salah. Karena $j \Rightarrow s$ bernilai B, sedangkan s bernilai S maka haruslah j bernilai S. Dengan demikian, untuk j, s, dan m yang semuanya bernilai S akan menyebabkan semua premis bernilai B. Jadi, ada kemungkinan ketiga premis tersebut bernilai benar secara bersamaan, dan ini berarti ketiga premis tersebut konsisten. ◄

Sebagai pembanding, perhatikan tabel kebenaran berikut ini. Pada baris terakhir yang menunjukkan bahwa ketiga premis mempunyai nilai kebenaran B secara bersamaan, yaitu pada saat semua pernyataan atomiknya bernilai S (lihat bagian yang berwarna gelap).

j	l	m	$j \Rightarrow l$	$l \Rightarrow m$	$\neg m$
B	B	B	B	B	S
B	B	S	B	S	B
B	S	B	S	B	S
B	S	S	S	B	B
S	B	B	B	B	S
S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	S
S	S	S	B	B	B

3.5.3 *Bukti Taklangsung*

Bukti taklangsung sebenarnya merupakan gabungan aturan bukti kondisional dan pengertian kontradiksi. Bukti ini dikenal juga dengan sebutan ***bukti dengan kontradiksi*** atau ***reductio ad absurdum*** . Metode pembuktian dengan kontradiksi ini mudah dijelaskan. Dengan *modus Tolen* dapat diturunkan negasi dari anteseden dari suatu pernyataan kondisional apabila diketahui bahwa konsekuen bernilai salah. Jika konsekuen tersebut suatu kontradiksi maka diketahui secara logika adalah salah. Jadi dari $p \Rightarrow (q \wedge \neg q)$ dapat diturunkan $\neg p$.

Contoh berikut ini menggambarkan aturan pembuktian dengan kontradiksi. Misalkan akan membuktikan $\neg p$.

CONTOH 3.5.5 Buktikan dengan kontradiksi:

$$\begin{array}{rl} & \neg q \vee r \\ & p \Rightarrow \neg r \\ & q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$$

Bukti.

1.	$\neg q \vee r$	Premis
2.	$p \Rightarrow \neg r$	Premis
3.	q	Premis
4.	$\quad p$	Premis
5.	$\quad \neg r$	2, 4 Modus Ponen
6.	$\quad \neg q$	1, 5 Silogisma Disjungtif
7.	$\quad q \wedge \neg q$	3, 6 Konjungsi
8.	$p \Rightarrow q \wedge \neg q$	4, 7 BK
9.	$\neg p$	8 Kontradiksi ◀

Perhatikan bahwa bukti di atas sebenarnya adalah bukti kondisional, yaitu dengan adanya premis yang ditambahkan yang berupa negasi dari kesimpulan yang diinginkan. Dalam setiap bukti tak-langsung selalu diturunkan suatu kontradiksi, misal baris-7, dari premis yang ditambahkan, baris-4, dan disimpulkan negasi dari premis tambahan tersebut, baris-9.

Sebenarnya contoh di atas dapat lebih ringkas apabila telah dipahami aturan *reductio ad absurdum* dengan baik. Dalam contoh di atas, baris-8 (aturan BK) dapat dilompati, sehingga baris-8 berisi kesimpulan:

8. $\neg p$ 4, 7 Kontradiksi.

Dalam hal ini, tahap bukti kondisional dan tahap kontradiksi dapat digabung menjadi satu tahap.

Aturan bukti tak-langsung (RAA : *reductio ad absurdum*) dapat dirangkum seperti berikut ini.

ATURAN RAA
Jika suatu kontradiksi dapat diturunkan dari sekelompok premis dan negasi s, maka s dapat diturunkan dari sekelompok premis tersebut.

Contoh berikut ini menunjukkan penggunaan aturan pembuktian tak-langsung. Kesimpulan yang diharapkan adalah $\neg d$.

1.	$d \Rightarrow w$	Premis
2.	$a \vee \neg w$	Premis
3.	$\neg(d \wedge a)$	Premis
4.	$\quad d$	Premis
5.	$\quad w$	1, 4 Modus Ponen
6.	$\quad a$	2, 5 Silogisma Disjungtif
7.	$\quad \neg d \vee \neg a$	3, DeMorgan
8.	$\quad \neg a$	4, 7 Silogisma Disjungtif
9.	$\quad a \wedge \neg a$	6, 8 Konjungsi
10.	$\neg d$	4, 9 RAA

CONTOH 3.5.6 Perhatikan contoh bukti taklangsung yang berikut ini. Argumentasinya adalah

$$\begin{array}{l} j \wedge b \Rightarrow s \\ \neg s \vee t \\ \neg t \\ \underline{j \qquad\qquad} \\ \therefore \neg b \end{array}$$

Bukti. Untuk menekankan bahwa sebarang kontradiksi yang dapat diturunkan akan dapat diterima, berikut ini diberikan dua bukti formal RAA.

Bukti cara pertama:

1.	$j \wedge b \Rightarrow s$	Premis
2.	$\neg s \vee t$	Premis
3.	$\neg t$	Premis
4.	j	Premis
5.	$\quad b$	Premis
6.	$\quad j \wedge b$	4, 5 Konjungsi
7.	$\quad \neg s$	2, 3 Silogisma Disjungtif
8.	$\quad \neg(j \wedge b)$	1, 7 Modus Tolen
9.	$\quad (j \wedge b) \wedge \neg(j \wedge b)$	6, 8 Konjungsi
10.	$\neg b$	5, 9 RAA

Bukti cara ke-dua:

1.	$j \wedge b \Rightarrow s$	Premis
2.	$\neg s \vee t$	Premis
3.	$\neg t$	Premis
4.	j	Premis
5.	$\quad b$	Premis
6.	$\quad \neg s$	2, 3 Silogisma Disjungtif
7.	$\quad \neg(j \wedge b)$	1, 6 Modus Tolen
8.	$\quad \neg j \vee \neg b$	7, DeMorgan
9.	$\quad \neg b$	8, 4 Silogisma Disjungtif
10.	$\quad b \wedge \neg b$	5,9 Konjungsi
11.	$\neg b$	5, 10 RAA ◀

Perhatikan bukti yang ke-dua bahwa pada baris-9 adalah $\neg b$ yang merupakan kesimpulan yang dikehendaki. Tetapi pembuktian belum lengkap karena masih di dalam bukti subordinat, yang bergantung pada premis tambahan dan bukannya premis asli saja.

Tidak ada strategi atau aturan khusus untuk memastikan kapan harus menerapkan bukti langsung dan kapan bukti taklangsung. Biasanya bukti taklangsung diisyaratkan dengan adanya premis-premis yang tidak menunjukkan langkah awal pembuktian. Dengan keadaan seperti itu, dengan menetapkan premis tambahan, yang berupa negasi dari kesimpulan yang diharapkan, dapat diperoleh dengan jelas titik awal pembuktian.

SOAL-SOAL LATIHAN 3.5

Dengan menggunakan bukti kondisonal, buktikan masing-masing argumentasi pada Soal 1–9 berikut ini. Jika memungkinkan, bandingkan dengan bukti secara langsung.

1. $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \hline \therefore \neg p \Rightarrow q \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} \neg r \vee \neg s \\ q \Rightarrow s \\ \hline \therefore r \Rightarrow \neg q \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} b \Rightarrow \neg c \\ \neg(d \wedge \neg b) \\ \hline \therefore c \Rightarrow \neg d \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} p \wedge q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} \neg p \\ \neg r \Rightarrow t \\ \neg s \Rightarrow p \\ \hline \therefore \neg(r \wedge s) \Rightarrow t \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} \neg p \\ \neg r \Rightarrow t \\ \neg s \Rightarrow p \\ \hline \therefore \neg(r \wedge s) \Rightarrow t \end{array}$$

7. $$\begin{array}{l} q \Rightarrow p \\ t \vee s \\ q \vee \neg s \\ \hline \therefore \neg(p \vee r) \Rightarrow t \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} e \vee f \Rightarrow g \\ j \Rightarrow \neg g \wedge \neg h \\ j \vee k \\ \hline \therefore e \Rightarrow k \end{array}$$

9. $$\begin{array}{l} \neg r \Rightarrow q \\ t \Rightarrow \neg q \\ \neg s \Rightarrow \neg q \\ \hline \therefore t \vee \neg s \Rightarrow r \end{array}$$

Tunjukkan pembuktian lengkap untuk masing-masing argumentasi pada Soal 10–12 berikut ini.

10. Para saksi tidak berkata jujur atau Bondet di rumah pada jam tujuh. Jika Bondet di rumah pada jam tujuh maka dia melihat pamannya. Jika dia melihat pamannya maka dia tahu siapa yang lebih dulu di sana. Oleh karena itu, jika para saksi berkata jujur maka Bondet tahu siapa yang lebih dulu di sana.

11. Logika sulit atau tidak banyak mahasiswa menyukainya. Jika Kalkulus mudah, maka logika tidak sulit. Oleh karena itu, jika banyak mahasiswa menyukai logika maka Kalkulus tidak mudah.

12. Jika Blues menang, maka Rock atau Dangdut akan menduduki tempat ke-dua. Jika Rock menduduki tempat ke-dua maka Blues tidak akan menang. Jika Klasik menduduki tempat ke-dua maka Dangdut tidak berada di tempat ke-dua. Oleh karena itu, jika Blues menang maka Klasik tidak akan berada di urutan ke-dua.

Buktikan bahwa masing-masing kelompok premis pada Soal 13–18 adalah *konsisten* dengan menunjukkan nilai kebenaran masing-masing pernyataan atomik yang menyusun premis-premis tersebut sehingga semua premis bernilai benar secara bersamaan.

13.
    1. $p \wedge \neg q$
    2. $\neg(q \vee r)$
    3. $p \Rightarrow t$

14.
    1. $\neg p \vee \neg q$
    2. $\neg p \Rightarrow r)$
    3. $\neg r$

15. 1. $p \Rightarrow q$
    2. $q \Rightarrow r)$
    3. $\neg r \vee s$

16. 1. $p \Rightarrow q$
    2. $r \Rightarrow q$
    3. $q \Rightarrow \neg s$

17. 1. $p \Rightarrow q$
    2. $\neg q \Rightarrow r$
    3. $r \vee p$

18. 1. $3 \times 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad 8 - 3 = 2$
    2. $8 - 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 + 3 = 9$
    3. $3 \times 2 \neq 8 \quad \Rightarrow \quad 2 + 3 = 9$

Apakah masing-masing kelompok premis yang diberikan pada Soal 19–29 konsisten? Buktikan jawaban Anda.

19. Jika Maryam yang paling tua maka Jepri lebih muda dari Sofyana.
    Maryam yang paling tua dan Eliza tidak lebih tua dari Sofyana
    Tidak benar Sofyana yang paling tua atau Eliza lebih tua dari Sofyana.

20. Persebaya adalah pemenang dan Persija tidak di urutan ke-tiga.
    Jika Persebaya adalah pemenang maka Persik di urutan ke-empat.
    Jika Persija tidak di urutan ke-tiga maka Persik tidak di urutan ke-empat.

21. Juki di perpustakaan dan tidak benar bahwa Tomi di kelas Kalkulus atau pun Dicky di kelas Kalkulus.
    Jika Chika di lab komputasi maka Dicky di kelas Kalkulus.
    Jika Kea di kelas Logika maka Tomi di kelas Kalkulus.
    Jika Juki di perpustakaan, maka Chika di lab komputasi atau Kea di kelas Logika.

22. Darmaji sebagai ketua himpunan mahasiswa, sedangkan Okki atau Sentot akan dipilih untuk periode berikutnya.
    Jika Darmaji sebagai ketua himpunan mahasiswa maka Sentot tidak akan dipilih untuk periode berikutnya.
    Jika Okki dipilih untuk periode berikutnya maka Darmaji tidak akan bertahan pada jabatannya.

23. Jika Imay tingginya 170 cm maka tidak benar bahwa Steve dan Biyan keduanya lebih tinggi dari Imay.
    Imay tingginya 170 cm dan Biyan tidak setinggi Nadine.
    Jika Biyan tidak lebih tinggi dari Imay maka Biyan setinggi Nadine.
    Selain itu, Steve lebih tinggi dari Imay.

24.
1. $p \Rightarrow r$
2. $\neg(q \wedge r)$
3. $p \vee (q \wedge r)$
4. q

25.
1. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow p$
2. $p \Rightarrow s$
3. $s \Rightarrow r$
4. $\neg p \vee \neg s$

26.
1. $\neg(q \vee r)$
2. $p \Leftrightarrow q$
3. $q \Leftrightarrow r$
4. $\neg p$

27.
1. $q \Rightarrow p$
2. $q \vee s$
3. $\neg(p \wedge r)$
4. $\neg p \Leftrightarrow \neg r$

28.
1. $x = y \quad \Rightarrow \quad x \neq y$
2. $x < y \quad \vee \quad x = y$
3. $x \not< y \quad \Rightarrow \quad x < y$

29.
1. $x = 2 \quad \vee \quad x = 3$
2. $x \neq 2 \quad \vee \quad x \neq 3$

Buktikan argumentasi valid pada Soal 30–40 berikut ini dengan menerapkan *bukti taklangsung*

30.
$$\begin{array}{l} \neg(p \wedge q) \\ p \Rightarrow r \\ q \Rightarrow \neg r \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

31.
$$\begin{array}{l} t \Rightarrow \neg s \\ r \Rightarrow \neg t \\ s \vee r \\ \hline \therefore \neg t \end{array}$$

32.
$$\begin{array}{l} \neg(p \wedge q) \\ \neg r \Rightarrow q \\ \neg p \Rightarrow r \\ \hline \therefore r \end{array}$$

33.
$$\begin{array}{l} a \Rightarrow b \vee c \\ b \Rightarrow \neg a \\ d \Rightarrow \neg c \\ \hline \therefore \neg(a \wedge d) \end{array}$$

34.
$$\begin{array}{l} s \vee o \\ s \Rightarrow \neg e \\ o \Rightarrow m \\ \hline \therefore \neg e \vee m \end{array}$$

35.
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ t \Rightarrow \neg p \\ \neg(q \vee r) \\ \hline \therefore \neg t \end{array}$$

36.
$$\begin{array}{l} \neg r \vee \neg b \\ t \vee s \Rightarrow r \\ b \vee \neg s \\ \neg t \\ \hline \therefore \neg(t \vee s) \end{array}$$

37.
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg s \\ s \vee \neg r \\ \neg(t \vee \neg r) \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

38.
$$\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow \neg s \\ \neg p \vee r \\ r \Rightarrow \neg t \\ \hline \therefore \neg s \vee \neg t \end{array}$$

39.
$$\begin{array}{l} x < y \Rightarrow xy = x \\ x \neq y \wedge xy \neq x \\ x \not< y \vee y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ \hline \therefore \neg(x = 2 \Leftrightarrow x = y) \end{array}$$

40.
$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 24 \\ (x = 6 \Rightarrow y = 4) \vee 2x = 12 \\ (2x = 12 \Rightarrow x = 6) \vee 2x + 3y \neq 24 \\ x \neq 6 \\ \hline \therefore 2x = 12 \Rightarrow y = 4 \end{array}$$

41. Dapatkah bukti langsung digunakan untuk soal-soal nomor 1–9 di atas? Jika dapat, tunjukkan bukti langsung dalam bentuk baku untuk masing-masing soal yang memungkinkan.

——o0o——

Bab 4
Logika Predikat

Bab ini akan membahas mengenai aturan-aturan inferensi lain yang belum dibahas pada bagian sebelumnya, khususnya aturan inferensi yang melibatkan kuantor. Bahasan ini merupakan bagian mendasar dari logika predikat dan terapannya. Setelah mempelajari bab ini, diharapkan pembaca dapat melengkapi pemahamannya mengenai penggunaan teori inferensi yang melibatkan kuantor, dan dapat menginterpretasikan serta membuat kalimat penegasan yang cukup rumit dengan tepat secara logika.

4.1 *Istilah dan Simbol Logika Predikat*

Bahasan inferensi logika pada bab sebelumnya hanya memeriksa bentuk logika atau struktur pernyataan penyusun argumentasi tetapi belum memperhatikan struktur logika pernyataan atomiknya. Dengan demikian masih banyak argumentasi — termasuk yang sering muncul dalam percakapan sehari-hari — yang belum tercakup oleh aturan-aturan inferensi yang telah dibahas. Sebagai contoh, salah satu argumentasi yang cukup dikenal dalam logika (dikemukakan oleh Aristoles) adalah yang berikut ini.

Semua laki-laki adalah makhluk hidup.
Socrates adalah laki-laki.
Oleh karena itu, Socrates adalah makhluk hidup.

Jelas bahwa tidak ada cara untuk menyajikan argumentasi tersebut menggunakan logika sentensial (proposisional), seperti yang telah dibahas pada bab sebelumnya. Permasalahannya adalah, bagaimana menyajikan pernyataan "Semua laki-laki adalah makhluk hidup." Demikian juga, bagaimana mengaitkannya dengan "Socrates adalah laki-laki," sehingga dapat diperiksa kebenaran kesimpulannya "Socrates adalah makhluk hidup."

Misalnya dipaksakan argumentasi di atas disimbolkan menggunakan aturan pada logika proposisional, didapat argumentasi dalam bentuk sebagai berikut:

p : "Semua laki-laki adalah makhluk hidup"
q : "Socrates adalah laki-laki"
r : "Socrates adalah makhluk hidup"

maka argumentasi di atas menjadi berbentuk:

$$\begin{array}{ll} p & \text{Premis} \\ q & \text{Premis} \\ \hline \therefore r & \text{Kesimpulan} \end{array}$$

Jelas bahwa tidak ada gambaran bagaimana menurunkan r dari p dan q dengan aturan inferensi yang telah dibicarakan pada bab sebelumnya. Dengan demikian, jelas diperlukan suatu aturan inferensi yang lain untuk dapat bekerja dengan kasus seperti di atas. Untuk itulah perlu dikembangkan kajian ***logika predikat***, yang memungkinkan manipulasi pernyataan tentang semua atau sesuatu.

Seperti dalam gramatika (tatabahasa), logika predikat memperhatikan struktur pernyataan atomik, yakni memperhatikan subjek dan predikat suatu kalimat. Apabila subjek kalimat berupa objek tunggal (misalnya Socrates dalam "Socrates adalah laki-laki"), maka yang digunakan adalah ***logika orde pertama*** (*first order logic*). Sedangkan untuk subjek kalimat yang berupa predikat lain (seperti laki-laki dalam "Sebagai laki-laki sangat membanggakan"), maka yang digunakan adalah ***logika orde ke-dua*** (*second order logic*) atau orde yang lebih tinggi. Pembahasan dalam buku pengantar ini dibatasi pada uraian logika orde pertama.

Kembali ke contoh argumentasi di atas. Sekarang diungkapkan kembali pernyataan "Semua laki-laki adalah makhluk hidup" dalam bentuk yang lebih dekat ke pernyataan dari logika proposisional:

> "Untuk semua x, jika x adalah laki-laki maka x adalah makhluk hidup."

Kalimat "x adalah laki-laki" bukanlah pernyataan sebagaimana telah dibahas dalam bab terdahulu, sebab kalimat tersebut memuat sesuatu x yang tidak diketahui dan dapat ditetapkan nilai kebenaran tanpa mengetahui apa x itu. Kalimat ini dapat dipecah menjadi subjek, x, dan ***predikat***, "adalah laki-laki". Kalimat tersebut adalah ***bentuk pernyataan***, sebab akan menjadi pernyataan dengan mengisi simbol x dengan sesuatu yang tertentu. Subjek yang telah disimbolkan dengan x, disebut ***term***, dan dapat digunakan simbol L untuk predikat "adalah laki-laki". Dengan demikian penulisan kalimat "x adalah laki-laki" secara simbolik dapat disajikan dengan Lx. (Penulisan predikat yang diletakkan sebelum term, menyesuaikan dengan kesepakatan penulisan nama fungsi sebelum variabel dalam matematika.) Untuk selanjutnya, digunakan huruf kecil untuk simbol term dan huruf besar untuk simbol predikat.

Dengan cara serupa, jika digunakan M untuk menyatakan "adalah makhluk hidup" maka Mx menyatakan simbol untuk "x adalah makhluk hidup." Dengan demikian pernyataan "Jika x adalah laki-laki maka x adalah makhluk hidup" ditulis sebagai $Lx \Rightarrow Mx$.

Untuk menuliskan "Untuk semua x, jika x adalah laki-laki maka x adalah makhluk hidup" secara simbolik, diperlukan simbol untuk melambangkan "Untuk semua x". Dalam hal ini digunakan simbol

"∀" yang dibaca "untuk semua" atau "untuk setiap." Jadi dapat ditulis pernyataan tersebut secara lengkap sebagai berikut:

$$\forall x[Lx \Rightarrow Mx]$$

Simbol "∀" disebut ***kuantor*** (*quantifier*) yang menjelaskan banyaknya sesuatu yang sedang dibahas. Secara khusus, simbol ini disebut ***kuantor universal*** karena menyatakan keberlakuan sesuatu secara universal (keseluruhan).

Perlu diperhatikan bahwa pengertian "untuk semua" di sini bukan berarti pasti ada. Akan tetapi hanya menunjukkan bahwa jika ada, maka secara keseluruhan akan berlaku sifat (mempunyai predikat) sama. Sebagai contoh, pernyataan "Semua kucing bulan berbulu hijau" akan dipandang sebagai pernyataan yang benar, sebab tidak dapat dibuat contoh penyangkal yang menyatakan kucing bulan tidak berbulu hijau. Kebenaran ini dinamakan ***kebenaran kosong****. Hal ini sesuai dengan bentuk implikasi berikut: Jika B: "adalah kucing bulan", dan H: "berbulu hijau" maka pernyataan itu dapat ditulis sebagai* $\forall x[Bx \Rightarrow Hx]$. *Perhatikan bahwa implikasi ini adalah bernilai benar (berikan penjelasan!).*

Perhatikan kembali contoh dalam bentuk $\forall x[Lx \Rightarrow Mx]$. Di sini digunakan tanda kurung siku yang berguna untuk membatasi keberlakuan atau ***jangkauan*** (*scope*) kuantor $\forall x$. Dalam hal ini, pernyataan di dalam kurung tersebut berlaku benar untuk semua x. Beberapa istilah yang dibahas di sini akan dibicarakan lagi pada bagian-bagian berikutnya.

CONTOH 4.1.1 Nyatakan argumentasi di atas, tentang Socrates, dalam bentuk simbolik.

Penyelesaian. Pernyataan "Socrates adalah laki-laki" menggunakan predikat L untuk membuat pernyataan mengenai laki-laki tertentu, Socrates. Selanjutnya digunakan simbol s untuk Socrates. Dengan demikian Ls adalah pernyataan "Socrates adalah laki-laki." Demikian juga, Ms adalah pernyataan "Socrates adalah makhluk hidup." Argumentasinya menjadi berbentuk:

$$\begin{array}{l} \forall x[Lx \Rightarrow Mx] \\ Ps \\ \hline \therefore Ms \end{array} \quad ◄$$

Contoh di atas adalah bentuk argumentasi klasik yang dikenal sebagai ***silogisma***. Perhatikan bahwa silogisma mempunyai bentuk khusus, yakni terdapat dua premis yang menggunakan satu *term* bersama (dalam hal ini predikat L, "adalah laki-laki").

Matematika disajikan dalam bahasa logika predikat. Berikut ini contoh pernyataan matematika yang dinyatakan secara simbolik.

CONTOH 4.1.2 Tuliskan secara simbolik: "Jika suatu bilangan lebih besar dari 1 maka bilangan tersebut lebih besar dari 0."

Penyelesaian. Karena pernyataan ini berlaku benar untuk setiap bilangan, maka perlu ditulis kembali menggunakan kuantor universal: "Untuk semua x, jika x adalah bialangan dan x lebih besar dari 1, maka x lebih besar dari 0." Gunakan simbol B untuk predikat "adalah bilangan" dan gunakan notasi baku ">" untuk "lebih besar dari." Dengan ini pernyataan tersebut dapat disimbolkan menjadi

$$\forall x[(Bx \wedge (x > 1)) \Rightarrow (x > 0)] \quad ◄$$

Perhatikan bahwa penggunaan tanda kurung yang mengapit "$x > 1$" dan "$x > 0$" hanyalah untuk memperjelas saja, bukan suatu keharusan.

Bagi orang matematika, seringkali tidak menghiraukan bahwa x suatu bilangan, dan dianggap telah diketahui jika ditulis seperti $x > 1$. Oleh karena itu, pernyataan pada contoh di atas bisa ditulis sebagai

$$\forall x[(x > 1) \Rightarrow (x > 0)].$$

Kenyataan ini sebenarnya agak kurang tepat. Dapat saja bertentangan dengan prinsip logika jika dibenarkan menetapkan x mencakup "segala sesuatu" yang mungkin. Seharusnya disepakati terlebih dahulu makna "semua" atau "semesta" dari kuantor $\forall x$ mengacu tentang apa. Dalam contoh di atas, seharusnya disepakati bahwa semesta pembicaraannya adalah semua bilangan real. Jadi sudah seharusnya tidak memperbolehkan x menunjuk sesuatu yang lain, gajah misalnya.

CONTOH 4.1.3 Tuliskan pernyataan berikut ini secara simbolik: "Diketahui dua bilangan, kuadrat dari jumlahnya tidak pernah negatif."

Penyelesaian. Di sini, sekali lagi dibuat pernyataan tentang semua bilangan, tepatnya semua pasangan dua bilangan. Pernyataan di atas dapat diungkapkan kembali sebagai: "Untuk semua x dan semua y, jika x dan y bilangan, maka kuadrat dari jumlahnya tidak negatif." Karena "kuadrat jumlahnya" adalah $(x+y)^2$, maka pernyataan tersebut dapat ditulis dalam simbol sebagai berikut:

$$\forall x[\forall y[(Bx \wedge By) \Rightarrow \neg((x+y)^2 < 0)]].$$

Untuk kasus seperti ini, karena jangkauan $\forall x$ dan $\forall y$ sama, maka dapat juga ditulis sebagai

$$\forall x, y[(Bx \wedge By) \Rightarrow \neg((x+y)^2 < 0)].$$

Jika tidak dikehendaki adanya tanda negasi, maka dapat ditulis

$$\forall x, y[(Bx \wedge By) \Rightarrow ((x+y)^2 \geq 0)].$$

Demikian juga, jika disepakati semestanya dimaksudkan bilangan real, maka dapat ditulis

$$\forall x, y[(x+y)^2 \geq 0] \qquad \blacktriangleleft$$

Kadangkala lebih ditekankan untuk tidak mengkalim kebenaran tentang *segala* sesuatu, tetapi hanya kebenaran tentang *sekurang-kurangnya satu* hal saja. Misalnya, ingin menegaskan bahwa "beberapa mahasiswa adalah jujur," tetapi mungkin tidak ingin menyatakan hal ini berlaku secara keseluruhan. Cara yang umum digunakan adalah dengan ungkapan "*terdapat* (atau *ada*) seorang mahasiswa yang jujur." Simbol untuk menyatakan "terdapat" adalah "∃," yang disebut ***kuantor eksistensial***, yakni untuk menyatakan eksistensi (keberadaan) sesuatu. Jika digunakan M untuk predikat "adalah mahasiswa" dan J untuk predikat "jujur", maka pernyataan "beberapa mahasiswa adalah jujur" dapat ditulis dengan

$$\exists x[Px \wedge Jx]$$

Perlu diperhatikan bahwa penggunaan kuantor eksistensial mempunyai ***makna keberadaan*** (*existential import*), yakni menegaskan keberadaan sesuatu. Sebagai contoh "$\exists x, Mx$" mengegaskan keberadaan mahasiswa, sekurang-kurang ada mahasiswa. Sedangkan kuantor universal tidak memiliki makna keberadaan. Jadi $\forall x[Ax \Rightarrow Bx]$ menegaskan bahwa semua A, jika ada, adalah B; hal ini tidak mengharuskan adanya A.

CONTOH 4.1.4 Tuliskan pernyataan berikut ini dalam bentuk simbolik: "Setiap orang mempunyai kelebihan dibanding orang yang lain."

Penyelesaian. Tulis kembali pernyataan tersebut untuk mendapatkan bentuk yang lebih dekat dengan simbol logika (tanpa mengubah maknanya): "Untuk setiap orang x, ada orang y sedemikian sehingga x mempunyai kelebihan dibanding y." Terlihat adanya dua kuantor, kuantor universal dan kuantor eksistensial. Selain itu, diperlukan predikat O untuk "adalah orang" dan predikat Bxy untuk menyatakan "x mempunyai kelebihan dibanding y." Dengan demikian, pernyataan di atas dapat ditulis

$$\forall x[Ox \Rightarrow (\exists y[Oy \wedge Bxy])] \qquad \blacktriangleleft$$

*Pada contoh di atas, diperkenalkan predikat baru Bxy yang melibatkan dua term. Karena menghubungkan dua term yang menyertainya, **predikat 2-tempat** seperti itu sering juga disebut dengan **relasi**. Dalam buku lain kadang ditulis xBy, untuk menyatakan "x mempunyai kelebihan dibanding y." (Pada Bab 5 dibahas mengenai relasi).*

Banyak definisi dalam matematika dibangun menggunakan kuantor. Salah satu contoh yang cukup menarik adalah pengertian "habis dibagi." Untuk mengatakan suatu bilangan x habis dibagi oleh 2, misalnya, adalah dengan mengatakan bahwa x adalah 2 kali suatu bilangan bulat, atau ada bilangan bulat n sedemikian sehingga $x = 2n$. Dengan sedikit memperumum hal tersebut dan menuliskannya secara simbolik, dapat ditulis definisi berikut ini.

DEFINISI 4.1.1 **(Habis Dibagi)**
*Untuk x dan y dua bilangan bulat, maka dikatakan **x habis dibagi y** jika*

$$\exists n[Bn \wedge (x = yn)]$$

dengan B menyatakan predikat "adalah bilangan bulat."

Apabila disepakati bahwa variabel yang digunakan berada dalam semesta bilangan bulat, maka tidak harus menggunakan predikat B dan diperoleh bentuk yang lebih sederhana: $\exists n[x = yn]$.

CONTOH 4.1.5 Tuliskan pernyataan berikut ini secara simbolik: "Jika suatu bilangan habis dibagi 6 maka bilangan tersebut habis dibagi 3 dan habis dibagi 2."

Penyelesaian. Untuk menyederhanakan notasi, misal ditetapkan semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan bulat yang berarti semua variabel yang terkait adalah bilangan bulat.

Pertama, perhatikan bahwa pernyataan tersebut universal terhadap bilangan bulat: "Untuk setiap bilangan bulat n, jika n habis dibagi 6 maka habis dibagi 3 dan habis dibagi 2." Sekarang, apabila ingin ditulis "n habis dibagi 6" maka harus hati-hati bahwa telah digunakan variabel n dan karenanya tidak dapat menggunakannya lagi dalam definisi "habis dibagi" (Definisi (4.1.1)). Oleh karena itu digunakan variabel lain, misal m, dan ditulis $\exists m[n = 6m]$ untuk menyatakan "n habis dibagi 6." Pada umumnya, variabel yang dikenai kuantor (variabel yang tepat disebelah kanan simbol kuantor) adalah ***variabel dummy***, yakni tidak mempermasalahkan nama yang digunakan selama penggunaannya nama itu tetap pada seluruh pernyataan.

Dengan cara sama untuk habis dibagi 3 dan habis dibagi 2, selanjutnya dapat ditulis pernyataan sebagai berikut:

$$\exists n[(\exists m[n = 6m]) \Rightarrow (\exists m[n = 3m]) \wedge (\exists m[n = 2m])] \qquad \blacktriangleleft$$

Pada contoh terakhir di atas, digunakan m sebagai variabel dummy pada tiga bagian pernyataan, yang sebenarnya menegaskan bilangan-bilangan yang berbeda pada masing-masing bagian. Apabila dikehendaki penegasan bahwa tiga bilangan tersebut berbeda, dapat ditulis menggunakan tiga variabel yang berbeda, misalnya:

$$\exists n[(\exists m[n = 6m]) \Rightarrow (\exists a[n = 3a]) \wedge (\exists b[n = 2b])].$$

Dalam contoh terakhir di atas, telah ditunjukkan bagaimana matematika diterjemahkan dalam bentuk simbolik. Hal ini merupakan harapan matematikawan pada akhir abad ke-19 bahwa semua matematika dapat dibuat sedemikian formal dan simbolik dengan cara seperti contoh tersebut. Usaha paling serius untuk hal ini telah ditunjukkan dalam karya Whitehead dan Russel, *Principia Mathematica* (1910), yang menerjemahkan sebagian besar karya matematika ke dalam bahasa simbolik. Harapan selanjutnya adalah pengembangan suatu prosedur formal untuk memeriksa kebenaran pernyataan-pernyataan matematika dan menghasilkan bukti. Gagasan ini telah dipangkas oleh Gödel dengan teorema ketidak-lengkapan (*incompleteness theorem*) (1931), yang secara efektif menunjukkan ketidak-mungkin-an prosedur yang diharapkan itu. Meskipun demikian, matematikawan masih merasakan bahwa segala pekerjaan matematika selalu dapat dinyatakan dalam logika simbolik, dan dalam menulis karya matematika bahasa sebenarnya yang digunakan adalah versi lain dari logika predikat yang (mungkin) sedikit kurang formal.

Dalam buku ini banyak digunakan kata "adalah" di depan predikat, dengan maksud memperjelas predikat sekaligus menyingkat penulisan. Jika tidak membingungkan, kata "adalah" dapat dihilangkan. Sebagai contoh, "Kehidupan kota adalah bebas" sebagai penulisan singkat dari "Kehidupan kota adalah kehidupan yang bebas". Jika ditulis "Kehidupan kota bebas" akan menjadi kalimat yang tidak jelas maksudnya, bahkan termasuk kalimat yang tidak sempurna.

SOAL-SOAL LATIHAN 4.1

Terjemahkan masing-masing kalimat pada Soal 1–14 ke dalam bentuk simbol logika predikat. (Huruf yang bergaris bawah sebagai penunjuk predikat atau term yang sesuai.)

1. Setiap mahasiswa berhak mendapat beasiswa.
2. Laki-laki yang sehat selalu mengkonsumsi buah-buahan.
3. Semua sapi makan rumput.
4. Tidak ada sapi yang makan rumput.
5. Beberapa sapi makan rumput.
6. Beberapa unggas adalah burung.
7. Beberapa sapi adalah bukan burung dan beberapa yang lain ya.
8. Beberapa sapi adalah burung tetapi tidak benar sapi adalah ikan.
9. Meskipun beberapa pengendara di kota adalah gila, Bajuri adalah pengendara yang waras.
10. Walaupun semua orang matematika membingungkan, Bintang dan Jamrud tidak membingungkan.
11. Jika satu atau lebih kehidupan adalah bebas, maka semua kehidupan adalah bebas.
12. Jika setiap makhluk berasal dari makhluk yang lebih rendah, maka kamu dan aku juga demikian.
13. Beberapa bilangan lebih besar dari dua, sedangkan yang lainnya tidak.
14. Setiap bilangan yang lebih kecil dari 10, juga lebih kecil dari 100.

Untuk Soal 15–24 dapat digunakan huruf i sampai n sebagai simbol bilangan bulat.

15. 12 adalah habis dibagi oleh 6.

16. 13 tidak habis dibagi oleh 6.
17. Untuk sebarang bilangan bulat positif m, jika 12 habis dibagi m, maka demikian juga 24.
18. Jika 13 tidak habis dibagi m, maka demikian juga 17.
19. 15 adalah habis dibagi oleh suatu bilangan bulat positif.
20. 15 adalah habis dibagi oleh bilangan bulat positif selain 1 dan 15.
21. 17 adalah bilangan prima (yakni tidak habis dibagi sebarang bilangan bulat positif selain 1 dan bilangan itu sendiri).
22. 15 bukan bilangan prima.
23. Tidak ada bilangan real positif terkecil.
24. Tidak ada bilangan bulat positif terbesar.

Tuliskan masing-masing pernyataan pada Soal 25–32 menggunakan kata-kata. Ingat bahwa simbol huruf besar untuk menyatakan predikat (bukan kata benda) dan dapat ditambahkan kata "adalah" di depannya.

25. $\forall x[Tx \Rightarrow Px]$; T = "titik hujan," P = "menimbulkan percikan air."
26. $\forall y[Cy \Rightarrow My]$; C= "coverboy," M= "macho."
27. $\exists z[Kz \wedge Lz]$; K= "adalah kuda," L= "melenguh."
28. $\exists z[Kz \wedge \neg Lz]$; K= "adalah kuda," L= "melenguh."
29. $\forall x[Kx \Rightarrow \neg Lx]$; K= "adalah kuda," L= "melenguh."
30. $\neg\forall x[Kx \Rightarrow Lx]$; K= "adalah kuda," L= "melenguh."
31. $\exists z, y[Kz \wedge Ky \wedge Mz \wedge \neg My]$; K= "adalah kucing," M= "manja."
32. $\forall x[Px \Rightarrow \exists y[Py \wedge Txy]$; P= "seorang pria," Lxy= "y lebih tua dari x."
33. Pernyataan yang menegaskan bahwa semua atlet adalah pemabok, adalah salah. Dengan kata lain, tidak ada atlet yang pemabok. Benarkah demikian?
34. Berikan satu kelebihan logika predikat daripada logika proposisional.

35. Seseorang mengklaim bahwa kuantor $\forall$ dan $\exists$ saja tidak cukup; dan diperlukan kuantor baru untuk menyatakan "untuk beberapa" dan "tidak ada." Berikan komentar mengenai hal ini!

36. Misalkan simbol "$\boxtimes$" melambangkan kuantor yang berarti "untuk yang tidak ada" (seperti dalam kalimat "untuk x yang tidak ada dapat lebih besar dari dirinya sendiri"). Nyatakan $\boxtimes$ menggunakan kuantor yang telah dikenal.

4.2 Variabel dan Formula

Kemunculan suatu variabel dalam suatu formula dapat dibedakan atas dua jenis: yaitu yang dipengaruhi oleh suatu kuantor atau tidak. Dalam aturan inferensi, kemunculan suatu variabel perlu diperjelas kaitannya dengan kuantor yang menyertainya. Sebelum itu, perlu didefinisikan pengertian ***formula*** dengan lebih tepat. Suatu ***formula atomik*** adalah suatu predikat diikuti atau diapit oleh sejumlah term sebagai argumen. Jadi ekspresi-ekspresi berikut:

Ra, $\quad x + y = z$, $\quad x$ adalah biru

semuanya dalah formula atomik. Pengertian *formula* dapat didefinsikan secara rekursif sebagai berikut:

DEFINISI 4.2.1

1. *Setiap formula atomik adalah formula.*
2. *Jika S suatu formula, maka* $\neg(S)$ *adalah formula.*
3. *Jika R dan S adalah formula, maka* $(R) \wedge (S)$, $(R) \vee (S)$, $(R) \Rightarrow (S)$, *dan* $(R) \Leftrightarrow (S)$ *adalah formula.*
4. *Jika R suatu formula dan v sebarang variabel maka* $\forall v(R)$ *dan* $\exists v(R)$ *adalah formula.*
5. *Semua ekspresi yang tidak dihasilkan dari aturan di atas adalah bukan formula.*

Dengan definisi formula tersebut, maka dapat dikatakan bahwa

$$x = y \Rightarrow \vee x$$

bukanlah formula, tetapi hanyalah simbol-simbol yang tidak mempunyai makna. Formula tidak harus mempunyai makna dalam arti mengatakan sesuatu yang bermakna; singkatnya, formula harus mempunyai struktur kalimat yang formal.

Untuk dapat menangkap pengertian formula yang relatif lebih tepat, ada baiknya diingat kembali pengertian ***jangkauan*** (*scope*) dari suatu kuantor.

> DEFINISI 4.2.2 ***Jangkauan*** *suatu kuantor yang muncul dalam suatu formula adalah kuantor beserta formula terkecil yang mengikuti kuantor tersebut.*

Pada contoh berikut ini, jangkauan kuantor "$\exists x$" ditandai dengan kurung kurawal dibawah formula:

(1) $\underbrace{\exists x[Mx]} \vee Rx$

(2) $\forall y, \underbrace{\exists x[x > y \wedge \forall z(z = 2)]}$

(3) $\underbrace{\exists x, \forall y[(xy = 0) \wedge \forall x, z(x + z = z + x)]}$

(4) $\underbrace{\exists x, \forall y(xy = 0)} \wedge \forall x, z(x + z = z + x)$

Tanda kurung dalam suatu formula diperlukan untuk memperjelas ekspresi yang merupakan formula terkecil yang mengikuti suatu kuantor. Perlu diperhatikan contoh (3), bahwa $\forall y$ bukanlah formula, sehingga jangkauan untuk $\exists x$ semua bagian ekpresi itu.

Selanjutnya, didefinisikan pengertian *terikat* (*bound*) atau *bebas* (*free*) untuk suatu variabel.

DEFINISI 4.2.3 *Kemunculan suatu variabel dalam suatu formula dikatakan* ***terikat*** *apabila kemunculannya berada dalam jangkauan suatu kuantor yang menggunakan variabel tersebut.*
Kemunculan suatu variabel dikatakan ***bebas*** *apabila variabel tersebut* tidak *terikat.*

Berdasarkan definisi di atas, maka pada contoh (2)–(4) di atas kemunculan semua variabel adalah terikat. Sedangkan dalam formula:

(5) $\exists y[x > y]$

kemunculan variabel y adalah terikat dan variabel x muncul secara bebas.

DEFINISI 4.2.4 ***Variabel bebas*** *adalah variabel dalam suatu formula yang sekurang-kurangnya satu kemunculannya bebas, dan* ***variabel terikat*** *adalah variabel dalam suatu formula yang sekurang-kurangnya muncul sekali secara terikat.*

Perlu diperhatikan bahwa suatu variabel dapat bebas dan sekaligus terikat dalam satu formula yang sama, tetapi kemunculan variabel adalah salah satu bebas atau terikat tetapi tidak dapat kedua-duanya. Jadi, dalam formula

$y > 0 \vee \exists y(y < 0)$

variabel y bebas dan sekaligus terikat; kemunculannya yang pertama adalah bebas dan kemunculan berikutnya adalah terikat.

Ingat kembali pengertian "pernyataan" yang merupakan kalimat yang selalu mempunyai nilai benar atau salah, dan pengertian itu tidak dapat terjadi jika terdapat variabel dalam kalimat tersebut. Dengan demikian dapat didefinisikan kembali sebagai berikut:

DEFINISI 4.2.5 ***Pernyataan*** *adalah suatu formula yang tidak memuat variabel bebas.*

Contoh-contoh yang telah diberikan di atas relatif sederhana dalam strukturnya. Perhatikan contoh dalam struktur yang relatif agak rumit berikut ini.

(i) “Jika satu saat berada setelah yang ke-dua, maka ada satu saat setelah yang ke-dua dan sebelum yang pertama.”

Cara terbaik untuk memulai menerjemahkan adalah dengan memperkenalkan variabel-variabel sebelum menulisnya secara simbolik. Di sini diperlukan tiga variabel yang berbeda untuk menerjemahkan kalimat di atas:

(ii) “Jika saat x berada setelah y, maka ada saat z sedemikian sehingga z setelah y dan z sebelum x.”

Dengan ini tidak lagi sulit menggunakan (ii) untuk melengkapi terjemahan (i) secara simbolik. Perubahan pokok dalam hal ini adalah menetapkan predikat yang menggantikan keterangan “satu saat.”

(iii) “Jika x adalah satu saat, y satu saat, dan x setelah y, maka terdapat z sedemikian sehingga z adalah satu saat, z setelah y, dan z sebelum x.”

Secara simbolik dapat ditulis sebagai berikut:

(iv) $Sx \wedge Sy \wedge Txy \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Tzy \wedge Bzx)$,

dengan S menyatakan “adalah satu saat”, T untuk predikat dua-tempat “setelah”, dan B predikat dua-tempat “sebelum.”

Beberapa catatan perlu diperhatikan dari formula (i) – (iv). Formula (iv) mempunyai dua variabel bebas dan dengan dengan demikian bukan merupakan pernyataan. Namun demikian, tampaknya (i) secara intuitif memang pernyataan. Pada (i) kata “satu” dan “ke-dua” berfungsi sebagai kuantor universal, yang pada kalimat tersebut berarti sebarang saat. Dengan demikian (i) dapat ditulis kembali (tanpa mengubah maknanya):

“Jika sebarang saat berada setelah sebarang saat yang ke-dua, maka ....”

Selanjutnya, dapat diperoleh pernyataan dari (iv) dengan menambahkan kuantor universal:

(v) $\forall x, y[Sx \wedge Sy \wedge Txy \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Tzy \wedge Bzx)]$

dan ini adalah terjemahan terakhir dari (i).

SOAL-SOAL LATIHAN 4.2

Untuk Soal 1–12, klasifikasikan masing-masing ekspresi sebagai:
(i) term, (ii) formula, (iii) bukan term maupun formula.

1. Yuri Gagarin
2. terlambat
3. angka enam
4. x adalah ungu
5. bilangan bulat a
6. $x + y = z$
7. $(x + y) + z^2$
8. bilangan bulat x sedemikian sehingga $x = x + x$
9. setiap laki-laki x
10. seseorang yang menjadi presiden berikutnya
11. $(3 + 1) + 10$
12. z membenci y, tetapi mencintai x

13. Berapa banyakkah kemuculan bebas dari variabel dan berapa banyakkah variabel bebas yang ada pada masing-masing formula berikut ini? Formula yang manakah yang merupakan pernyataan?

    (a) $\forall x, y, z\ [(x > y) \wedge (y > z)] \Rightarrow \exists w(w > w)$
    (b) $\exists x(x$ merah$)\ \vee\ \forall y(y$ biru dan x ungu$)$
    (c) $x + x = x + x$
    (d) $\exists y(x + x = x + x)$
    (e) $\exists x, y(x$ menikah dengan y dan z anak mereka$)$

14. Dengan menggunakan huruf untuk menyatakan predikat dan konstanta yang disertakan, ubahlah ke bentuk simbolik masing-masing pernyataan berikut ini.

    (a) Mahasiswa yang menyukai Bahasa Inggris hanya jika mereka menyukai Logika. $(Mx,\ Ix,\ Lx)$
    (b) Beberapa mahasiswa menyukai Bahasa Inggris, tetapi tidak ada mahasiswa yang menyukai sekaligus Bahasa Jerman dan Kalkulus. (Jx)
    (c) Jika dua saat tidak bersamaan, maka pastilah yang satu setelah yang lain. $(x = y)$
    (d) Jika semua mahasiswa senior menyukai Logika maka beberapa mahasiswa junior juga menyukainya.

15. Dengan menggunakan simbol matematika baku, seperti "<" dan ">", tulislah masing-masing pernyataan berikut ini dalam bentuk simbolik.

    (a) Terdapat bilangan x yang lebih kecil dari 9 dan lebih besar dari 1.
    (b) Untuk sebarang bilangan x ada bilangan y yang lebih kecil.
    (c) Tidak ada bilangan yang paling besar.
    (d) Untuk setiap x, x tidak lebih besar dari x.
    (e) Untuk sebarang dua bilangan x dan y, jumlahan x dan y sama hasilnya dengan jumlahan y dan x.

4.3 *Inferensi yang Hanya Melibatkan Kuantor Universal*

Pada subbab sebelumnya telah dibahas silogisma klasik, yaitu

Semua laki-laki adalah makhluk hidup.
Socrates adalah laki-laki.
Oleh karena itu, Socrates adalah makhluk hidup.

Pembuktian untuk argumentasi sejenis ini tidak tercakup oleh aturan-aturan inferensi yang telah dibahas sebelumnya, bahkan tabel kebenaran pun tidak dapat lagi dugunakan untuk membuktikan atau menyangkal validitasnya. Hal ini terutama karena adanya kuantor yang terlibat dalam argumentasi tersebut.

Bentuk ini disajikan dalam argumentasi simbolik sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \forall x[Lx \Rightarrow Mx] \\ Ls \\ \hline \therefore Ms \end{array}$$

Di sisi L adalah predikat "adalah laki-laki" sedangkan M adalah predikat "adalah makhluk hidup." Sekarang yang dibutuhkan adalah membahas tentang aturan-aturan yang memungkinkan untuk membuktikan validitas argumentasi tersebut, serta argumentasi-argumentasi yang lain dalam logika predikat.

Aturan yang pertama adalah penghilangan kuantor universal yang mempunyai jangkauan pada seluruh bagian formula. Gagasan ini cukup jelas, yakni apa pun yang berlaku untuk semua objek pasti berlaku juga untuk satu objek tertentu diantaranya.

Perhatikan pernyataan $\forall x, [Lx \Rightarrow Mx]$, atau, "Untuk semua x, jika x adalah laki-laki maka x adalah makhluk hidup." Dari pernyataan umum tentang laki-laki ini dapat *dikhususkan* untuk laki-laki tertentu, Socrates misalnya. Berikut ini adalah aturan inferensi yang berkaitan dengan hal ini.

SPESIFIKASI UNIVERSAL (PENGHILANGAN KUANTOR UNIVERSAL)

Jika s menyatakan sesuatu yang tertentu, maka berikut ini adalah tautologi untuk sebarang predikat P:

$$\forall x[Px] \Rightarrow Ps$$

Sebagai aturan inferensi, hal ini dapat ditulis

$$\frac{\forall x[Px]}{\therefore Ps}$$

CONTOH 4.3.1 Buktikan contoh yang telah dibahas di atas adalah valid.

Penyelesaian. Bukti untuk silogisma tersebut sederhana saja, yakni dengan menerapkan aturan Spesifikasi Universal dan Modus Ponen.

1.	$\forall x[Lx \Rightarrow Mx]$	Premis
2.	Ls	Premis
3.	$Ls \Rightarrow Ms$	1, SU (s untuk x)
4.	Ms	2, 3 Modus Ponen ◄

Bagaimana dapat diketahui pengkhususan (spesifikasi) $Ls \Rightarrow Ms$ dan tidak dikatakan, misalnya, $Lp \Rightarrow Mp$ dengan p menyatakan Plato? Selain alasan deduksi yang masuk akal, sebenarnya boleh saja menurunkan kesimpulan Mc atau pun Ms. Akan tetapi, juga perlu diperhatikan bahwa kesimpulan dan salah satu premis dari argumentasi aslinya menyebutkan Socrates, bukannya Plato, sehingga pengkhususan untuk Socrates mungkin lebih berguna dalam pembuktian ini. Penulisan keterangan SU pada baris-3, adalah singkatan untuk *spesifikasi universal*, sedangkan keterangan *s* untuk *x* menerangkan pengkhususan dari baris-1 dari variabel *x* untuk konstanta *s*. Untuk selanjutnya, keterangan di belakang SU tidak harus dicantumkan apabila hanya ada satu variabel di baris asalnya.

Sebagai contoh berikutnya, perhatikan argumentasi sederhana tentang bilangan.

CONTOH 4.3.2 Buktikan argumentasi valid berikut ini.

Setiap bilangan positif adalah lebih besar dari 0.
1 adalah bilangan positif
3 adalah bilangan positif
Oleh karena itu, 1 dan 3 adalah lebih besar dari 0.

Penyelesaian. Langkah pertama adalah membawa argumentasi tersebut menjadi bentuk simbolik. Definisikan Px: "x adalah bilangan positif," dan digunakan simbol > untuk "lebih besar dari." Dengan demikian argumentasi di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \forall x[Px \Rightarrow x > 0] \\ P1 \\ P3 \\ \hline \therefore (1 > 0) \wedge (3 > 0) \end{array}$$

Selanjutnya dapat dilakukan pembuktian:

1.	$\forall x[Px \Rightarrow x > 0]$	Premis
2.	$P1$	Premis
3.	$P3$	Premis
4.	$P1 \Rightarrow 1 > 0$	1, SU (1 untuk x)
5.	$1 > 0$	2, 4 Modus Ponen
6.	$P3 \Rightarrow 3 > 0$	1, SU (3 untuk x)
7.	$3 > 0$	3, 6 Modus Ponen
8.	$(1 > 0) \wedge (3 > 0)$	5, 7 Konjungsi ◄

Perhatikan baris-4 dan baris-6, digunakan tambahan keterangan (1 untuk x) dan (3 untuk x) yang menjelaskan penggunaan aturan Spesifikasi Universal yang mengkhususkan 1 untuk x dan 3 untuk x.

Suatu argumentasi tentu saja tidak terbatas pada munculnya satu premis yang menggunakan kuantor. Berikut ini contoh sederhana yang lain.

CONTOH 4.3.3 Buktikan bahwa $2 + 2$ bukan bilangan ganjil, jika diketahui:

Untuk setiap x, jika x bilangan genap maka $x+2$ bilangan genap.
Untuk setiap x, jika x bilangan genap maka x bukan bilangan ganjil.
Dua adalah bilangan genap.

Penyelesaian. Dengan mendefinisikan Gx untuk "x bilangan genap" dan Lx untuk "x bilangan ganjil," dapat dilakukan simbolisasi dan sekaligus pembuktian sebagai berikut:

1.	$\forall x[Gx \Rightarrow G(x+2)]$	Premis
2.	$\forall x[Gx \Rightarrow \neg Lx]$	Premis
3.	$G2$	Premis
4.	$G2 \Rightarrow G(2+2)$	1, SU (2 untuk x)
5.	$G(2+2)$	3, 4 Modus Ponen
6.	$G(2+2) \Rightarrow \neg L(2+2)$	2, SU ($2+2$ untuk x)
7.	$\neg L(2+2)$	5, 6 Modus Ponen ◀

Apabila dalam suatu argumentasi terdapat dua premis dengan kuantor yang sama, penggunaan variabelnya tidak dibatasi harus sama. Ingat pengertian variabel dummy. Misal pada premis pertama digunakan variabel x, maka pada premis yang lain dapat digunakan lagi variabel x atau dapat juga digunakan variabel lain, misalnya y. Sebagai contoh, misalnya digunakan pendefinisian seperti contoh sebelumnya, yaitu Gx untuk "x bilangan genap" dan Lx untuk "x bilangan ganjil" dan Px untuk "x bilangan positif."

CONTOH 4.3.4 Buktikan

$$\forall x[x > 0 \Rightarrow Gx \vee Lx]$$
$$\forall x[Px \Rightarrow x > 0]$$
$$P4$$
$$\neg L4$$

$$\therefore G4$$

Penyelesaian. Argumentasi tersebut dapat ditulis dengan lebih jelas menggunakan variabel y untuk premis ke-dua, yaitu

$$\forall y[Py \Rightarrow y > 0]$$

karena dapat digunakan x atau y untuk membicarakan bilangan. Selanjutnya penurunan buktinya adalah sebagai berikut:

1.	$\forall x[x > 0 \Rightarrow Gx \vee Lx]$	Premis
2.	$\forall y[Py \Rightarrow y > 0]$	Premis
3.	$P4$	Premis
4.	$\neg L4$	Premis
5.	$P4 \Rightarrow 4 > 0$	2, SU (4 untuk y)
6.	$4 > 0$	3, 5 Modus Ponen
7.	$4 > 0 \Rightarrow G4 \vee L4$	1, SU (4 untuk x)
8.	$G4 \vee L4$	6, 7 Modus Ponen
9.	$G4$	4, 8 Modus Tollendo Ponen ◄

Dengan hanya menggunakan satu kuantor pada setiap pernyataan, tidak banyak yang dapat dilakukan untuk matematika ataupun penalaran yang sistematik. Di dalam matematika seringkali dijumpai hubungan antara dua hal atau lebih. Untuk itu, semua yang sudah dibahas sebelumnya dapat dikembangkan termasuk kalimat-kalimat yang melibatkan kuantor lebih dari satu untuk satu pernyataan. Tentu saja, asalkan kuantor-kuantor tersebut berada di awal kalimat. Atau dengan kata lain jangkauan kuantor-kuantor tersebut meliputi seluruh formula yang mengikutinya. Sebagai contoh, perhatikan argumentasi berikut ini.

CONTOH 4.3.5 Buktikan bahwa tidak benar satu lebih besar dari dua, jika diketahui:

> Untuk setiap dua bilangan, jika yang pertama lebih besar dari yang ke-dua, maka tidaklah benar yang ke-dua lebih besar dari yang pertama.
> Dua adalah lebih besar dari satu.

Penyelesaian. Argumentsi tersebut dapat ditulis dalam bentuk simbolik:

$$\begin{array}{rl} & \forall x, \forall y\ [x > y \Rightarrow \neg(y > x)] \\ & 2 > 1 \\ \hline \therefore & \neg(1 > 2) \end{array}$$

Perhatikan adanya dua kuantor universal di awal premis pertama, yang selanjutnya dapat disingkat penulisannya dengan $\forall x, y$. Sedangkan penggunaan dua variabel yang berbeda, yaitu x dan y, jelas akan memudahkan. Untuk masing-masing variabel dapat diterapkan aturan spesifikasi universal, dan disubstitusi x dengan 2 dan y dengan 1. Penurunan selengkapnya adalah dalam bentuk:

1.	$\forall x, \forall y\ [x > y \Rightarrow \neg(y > x)]$	Premis
2.	$2 > 1$	Premis
3.	$2 > 1 \Rightarrow \neg(1 > 2)$	1, SU (2 untuk x, 1 untuk y)
4.	$\neg(1 > 2)$	Modus Ponen ◄

Aturan ke-dua, yang membenarkan penambahan kuantor, lebih rumit dari aturan sebelumnya yaitu aturan yang membenarkan penghilangan kuantor. Sebagai contoh awal, perhatikan premis yang menyatakan sebarang x adalah manusia, dan disimpulkan secara keliru bahwa semua adalah manusia.

1.	Mx	Premis
2.	$\forall x(Mx)$	1, Penambahan kuantor

Argumentasi di atas, menyatakan bahwa setiap objek x, jika x adalah manusia maka semuanya adalah manusia. Jelas bahwa penarikan kesimpulan ini tidak valid, dan kekeliruan itu tidak sulit dicari. Kekeliruan yang dilakukan di atas adalah *perumumuman secara universal*, yakni penambahan kuantor universal pada suatu variabel yang merupakan variabel bebas pada salah satu premis. Secara umum, perumuman ini dapat dijelaskan seperti berikut: apapun yang dapat ditegaskan atau dibuktikan dari premis-premis untuk *sebarang* objek haruslah berlaku untuk *semua* objek dalam semestanya. Aturan inferensi yang membenarkan penambahan kuantor universal tersebut dapat dirangkum sebagai berikut:

ATURAN GENERALISASI UNIVERSAL (GU)

Dari formula F dapat diturunkan $\forall v[F]$.

Terdapat beberapa batasan untuk dapat menerapkan aturan GU. Aturan GU tidak dapat diterapkan pada premis tambahan yang memuat variabel tanpa kuantor. Dalam hal ini, aturan GU tidak mungkin diterapkan selama masih di dalam bukti subordinat. Untungnya aturan GU biasanya tidak diterapkan untuk argumentasi dengan premis-premis yang memuat variabel bebas. Termasuk dalam kasus ini, penurunan di dalam bukti subordinat biasanya tidak memerlukan aturan GU.

CONTOH 4.3.6 Buktikan argumentasi berikut:

Tidak ada domba yang ingin belajar.
Tidak ada mahasiswa yang tidak ingin belajar.
Semua ternak saya adalah domba.
Oleh karena itu, tidak ada ternak saya yang menjadi mahasiswa.

Penyelesaian. Secara simbolik argumentasi tersebut dapat ditulis:

$$\begin{array}{l} \forall x(Dx \Rightarrow \neg Bx) \\ \forall y(My \Rightarrow By) \\ \forall z(Tz \Rightarrow Dz) \\ \hline \therefore \forall x(Tx \Rightarrow \neg Mx) \end{array}$$

Karena kesimpulan argumentasi tersebut berupa pernyataan kondisional, maka dicoba pembuktian melalui bukti kondisional. Buktinya adalah dengan langkah-langkah seperti berikut ini.

1.	$\forall x(Dx \Rightarrow \neg Bx)$	Premis
2.	$\forall y(My \Rightarrow By)$	Premis
3.	$\forall z(Tz \Rightarrow Dz)$	Premis
4.	$Dx \Rightarrow \neg Bx$	1, SU
5.	$Mx \Rightarrow Bx$	2, SU
6.	$Tx \Rightarrow Dx$	3, SU
7.	$\quad Tx$	x Premis
8.	$\quad Dx$	x 6, 7 Modus Ponen
9.	$\quad \neg Bx$	x 4, 8 Modus Ponen
10.	$\quad \neg Mx$	x 5, 9 Modus Tollen
11.	$Tx \Rightarrow \neg Mx$	7, 10 Bukti Kondisional
12.	$\forall x(Tx \Rightarrow \neg Mx)$	11, GU ◄

Perhatikan bahwa x ditandai pada baris (7) sebab variabel tersebut bebas di Tx dan Tx adalah premis tambahan. Demikian pula pada baris-baris (8), (9), dan (10); ketiga baris tersebut bergantung pada baris (7), seperti ditunjukkan oleh angka-angka di sebelah kiri keterangan pada masing-masing baris tersebut. Baris (11) mengakhiri penandaan variabel x dan diperbolehkan menerapkan aturan GU pada baris itu.

Simbolisasi untuk tiga premis pada argumetnasi di atas menggunakan variabel-variabel yang berbeda. Hal ini semata-mata hanya sebagai upaya memperjelas bagaimana term x disubstitusikan pada tiga premis itu dengan aturan spesifikasi universal. Biasanya lebih sering dan diusahakan sedapat mungkin menggunakan simbol variabel yang sama. Jadi, dapat digunakan x untuk simbol variabel pada tiga premis tersebut.

Untuk selanjutnya, penempatan tanda variabel yang menunjukkan tidak diperbolehkannya menerapkan aturan generalisasi universal tidak perlu ditulis eksplisit. Peniadaan tanda variabel ini kadang cukup jelas, khususnya dapat diideintifikasi dari kemunculannya pada premis tambahan dan penurunan yang mengikutinya.

Perhatikan sekali lagi contoh penerapan aturan generaslisasi universal terakhir berikut ini, dan perhatikan keterangan pada masing-masing baris buktinya. Pada contoh berikut ini tidak lagi digunakan penandaan variabel bebas pada premis tambahan yang dimunculkan.

CONTOH 4.3.7 Buktikan:

Tidak ada ikan yang menyusui.
Semua kuda menyusui.
Jadi, tidak ada ikan yang juga kuda.

Penyelesaian. Argumentasi di atas dapat disimbolkan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \forall x(Ix \Rightarrow \neg Mx) \\ \underline{\forall y(Ky \Rightarrow My)} \\ \therefore \forall x(Ix \Rightarrow \neg Kx) \end{array}$$

Langkah-langkah pembuktiannya secara lengkap adalah:

1.	$\forall x(Ix \Rightarrow \neg Mx)$	Premis
2.	$\forall y(Ky \Rightarrow My)$	Premis
3.	$Ix \Rightarrow \neg Mx$	1, SU (x untuk x)
4.	$Kx \Rightarrow Mx$	2, SU (x untuk y)
5.	Ix	Premis
6.	$\neg Mx$	3, 5 Modus Ponen
7.	$\neg Kx$	4, 6 Modus Tollen
8.	$Ix \Rightarrow \neg Kx$	5, 7 BK
9.	$\forall x(Ix \Rightarrow \neg Kx)$	8, GU ◄

SOAL-SOAL LATIHAN 4.3

Buktikan masing-masing argumentasi dalam Soal 1–9.

1. $\forall x[Px \Rightarrow Qx]$
   $\neg Qa$
   ―――――
   $\therefore \neg Pa$

2. $\forall x[Px \Rightarrow Qx]$
   $\forall x[Qx \Rightarrow Rx]$
   Pb
   ―――――
   $\therefore \neg Rb$

3. $\forall x[Nx \Rightarrow x < 0]$
   $\neg(3 < 0)$
   ―――――
   $\therefore \neg N3$

4. $\forall x[x > 0 \Leftrightarrow Px]$
   $\forall x[Px \Rightarrow \neg Nx]$
   $4 > 0$
   ―――――
   $\therefore \neg N4$

5. $\forall x[Px \Rightarrow Qx]$
   $\neg Qa$
   ―――――
   $\therefore \neg\forall x[Px]$

6. $\forall y[Fy \Leftrightarrow Hy]$
   Hd
   ―――――
   $\therefore Fd$

7. $\forall x[Gx \Rightarrow Jx \wedge Hx]$
   Gx
   ―――――
   $\therefore Hx$

8. $3 > 1$
   $\forall x[x > 1 \;\Rightarrow\; x > 0]$
   $4 > 1$
   ―――――
   $\therefore 3 > 0 \;\wedge\; 4 > 0$

9. $$\begin{array}{rl} & \forall x, y, z\ [(x > y) \wedge (y > z) \Rightarrow (x > z)] \\ & \forall x\ (x + 1 > x) \\ \hline \therefore & \forall x\ (x + 3 > x) \end{array}$$

Untuk Soal-soal 10–24, tulislah masing-masing argumentasi ke dalam bentuk simbolik dan buktikan bahwa argumentasi tersebut valid.

10. Semua anjing adalah binatang. Schooby Doo adalah anjing. Oleh karena itu, Schooby Doo adalah binatang.
11. Setiap bilangan genap habis dibagi dua. Sepuluh adalah bilangan genap. Delapan juga bilangan genap. Jadi, sepuluh dan delapan adalah bilangan genap.
12. Tidak ada bilangan yang lebih besar dari bilangan itu sendiri. Sembilan adalah bilangan. Jadi, sembilan tidak lebih besar dari sembilan.
13. Semua ular adalah reptil. Semua reptil adalah vertebrata. Jadi, semua ular adalah vertebrata.
14. Tidak ada biola yang ditabuh. Semua kendang ditabuh. Oleh karena itu, tidak ada biola yang juga kendang.
15. Semua cendekiawan adalah dermawan. Tidak ada orang kikir yang dermawan. Oleh karena itu, tidak ada orang kikir yang cendekiawan.
16. Semua yang memahami logika adalah orang pandai. Tidak ada orang pandai yang mudah ditipu. Oleh karena itu, tidak ada orang yang memahami logika yang mudah ditipu.
17. Semua mawar adalah tanaman. Semua tanaman adalah makhluk hidup. Jadi, semua mawar adalah makhluk hidup.
18. Semua drum adalah instrumen perkusi. Semua genderang adalah drum. Jadi, semua genderang adalah instrumen perkusi.
19. Semua soneta adalah puisi. Tidak ada dokumen resmi yang berupa puisi. Oleh karena itu, tidak ada dokumen resmi yang berupa soneta.
20. Siapa pun yang bekerja di pabrik adalah anggota serikat buruh atau menduduki posisi manajerial. Endar bukan anggota serikat buruh dan dia tidak menduduki posisi manajerial. Jadi, Endar tidak bekerja di pabrik.

21. Ptah adalah dewa Mesir, yang dipercaya bahwa dia adalah ayah dari semua dewa Mesir. Jadi, Ptah adalah ayah dari dirinya sendiri.

22. Semua angsa bisa membunuh kobra. Agus tidak bisa membunuh Komang. Oleh karena itu, jika Komang adalah kobra maka Agus bukan angsa.

23. Saudara perempuan dari ibu seorang anak laki-laki adalah bibi anak tersebut. Baiq adalah anak laki-laki dan Matia adalah bibi dari Helena. Semua bibi Baiq mengirimi dia hadiah ulang tahun. Oleh karena itu, jika Helena adalah ibu Baiq, pasti Matia mengirimi Baiq hadiah ulang tahun.

24. Untuk setiap x dan y, berlaku x sama dengan atau lebih besar dari y atau y sama dengan atau lebih besar dari x. Jadi, satu sama dengan atau lebih besar dari satu.

4.4 *Inferensi Terbatas dengan Kuantor Eksistensial*

Untuk merumuskan aturan inferensi yang melibatkan kuantor eksistensial, cara yang mudah adalah dengan menerapkan aturan yang digunakan untuk kuantor universal dan menerapkan *spesifikasi eksistensial* yang memperbolehkan penyederhanaan dengan menghilangkan kuantor eksistensial. Jadi, dari

$$\exists x[Hx]$$

dapat diturunkan

$$Hx$$

Akan tetapi, perlu diperhatikan bahwa aturan ini jika tidak dibatasi akan menghasilkan inferensi yang tidak valid. Sebagai contoh, misalkan H diinterpretasikan sebagai "lebih besar dari 1" dan disubstitusikan "1" untuk variabel bebas "x," berarti dalam interpretasi aritmatika di atas, berdasarkan kenyataan, ada bilangan yang lebih besar 1 dapat disimpulkan bahwa 1 lebih besar dari 1. Selain itu, jika dilanjutkan dengan menerapkan spesifikasi universal, berarti dapat disimpulkan bahwa $\forall x(Hx)$ dari $\exists x(Hx)$, yang jelas hal ini tidak valid.

Untuk menghindari inferensi tidak valid seperti di atas, dapat dilakukan dengan mengganti kuantor eksistensial dengan konstanta "sementara," yaitu dengan memperkenalkan suatu simbol sebagai nama yang diarahkan pada kesimpulan yang telah diketahui.
Sebelum itu, perhatikan terlebih dahulu contoh argumentasi berikut ini.

> $0 < 1$
> Untuk sebarang x, jika $x \geq 2$ maka $x \geq 1$
> Oleh karena itu, terdapat bilangan yang lebih kecil dari 2.

Argumentasi tersebut dapat disimbolkan sebagai berikut (dengan menganggap semesta pembicaraannya adalah semua bilangan real).

$$\begin{array}{rl} & 0 < 1 \\ & \forall x\ [(x \geq 2) \Rightarrow (x \geq 1)] \\ \hline \therefore & \exists x\ (x < 2) \end{array}$$

Pembuktian informal untuk argumentasi di atas adalah: Substitusikan 0 untuk x pada premis ke-dua untuk memperoleh $(0 \geq 2) \Rightarrow (0 \geq 1)$. Dengan premis pertama dan Modus Tollen dapat disimpulkan bahwa $0 < 2$. Dengan demikian diperoleh contoh bilangan yang lebih kecil dari 2, sehingga jelas telah ditunjukkan bahwa terdapat bilangan yang lebih kecil dari 2. Jadi dapat disimpulkan $\exists x\ (x < 2)$.

Dua aturan inferensi formal untuk pembuktian argumentasi yang melibatkan kuantor eksistensial seperti di atas, adalah *spesifikasi eksistensial* (SE) dan *generalisasi eksistensial* (GE). Rumusan dari kedua aturan tersebut dapat dirangkum seperti yang berikut ini.

> ATURAN SPESIFIKASI EKSISTENSIAL (SE)
> Jika formula G dihasilkan dari formula F dengan cara mensubstitusikan suatu nama tertentu pada setiap variabel v di F, maka dapat diturunkan G dari $\exists v[F]$.

Perlu diperhatikan bahwa "nama tertentu" dalam aturan SE di atas harus nama yang belum digunakan dalam baris-baris bukti di atas baris penerapan SE tersebut. Selain itu, dengan sendirinya nama tersebut adalah konstanta yang berada dalam semesta dari predikat yang menyertainya. Penerapan aturan inferensi dengan kuantor eksistensial sama dengan aturan inferensi dengan kuantor universal dalam hal jangkauan dari kuantornya, yakni jangkauan kuantornya harus pada seluruh formula yang menyertainya. Hal ini tampaknya sesuatu yang wajar dan mudah dipahami.

Aturan berikutnya yang juga cukup sederhana adalah aturan generalisasi eksistensial (GE): Jika diketahui sesuatu yang tertentu, maka dapat dikatakan bahwa secara umum ada sesuatu. Secara formal aturan GE didefinisikan sebagai berikut:

ATURAN GENERALISASI EKSISTENSIAL (GE)
Jika α menyatakan sesuatu yang tertentu, maka berikut ini adalah tautologi untuk sebarang predikat P:

$$P\alpha \Rightarrow \exists x[Px]$$

Sebagai aturan inferensi, dituliskan

$$\begin{array}{rl} & P\alpha \\ \hline \therefore & \exists x[Px] \end{array}$$

Dengan menerapkan dua aturan GE dan aturan SU, contoh argumentasi mengenai bilangan kurang dari 2 di atas dapat dibuktikan dengan langkah-langkah berikut:

1.	$0 < 1$	Premis
2.	$\forall x\ [(x \geq 2) \Rightarrow (x \geq 1)]$	Premis
3.	$(0 \geq 2) \Rightarrow (0 \geq 1)$	2, SU (0 untuk x)
4.	$0 < 2$	1, 3, Modus Tollen
5.	$\exists x\ (x < 2)$	4, GE

Selanjutnya, contoh silogisma berikut ini menunjukkan penerapan SE dan GE dalam satu pembuktian. Dalam contoh ini digunakan huruf Yunani α sebagai simbol konstanta atau nama objek tertentu.

CONTOH 4.4.1 Buktikan argumentasi berikut ini.

Semua mamalia adalah binatang.
Beberapa mamalia berkaki-dua.
Jadi, beberapa binatang berkaki dua.

Penyelesaian. Dengan simbol Mx untuk "x adalah mamalia," Bx untuk "x adalah binatang," dan Kx untuk "x adalah berkaki dua," bukti untuk argumentasi di atas adalah sebagai berikut:

1.	$\forall x\,(Mx \Rightarrow Bx)$	Premis
2.	$\exists x\,(Mx \wedge Kx)$	Premis
3.	$M\alpha \wedge K\alpha$	2, SE
4.	$M\alpha$	3, Penyederhanaan
5.	$K\alpha$	3, Penyederhanaan
6.	$M\alpha \Rightarrow B\alpha$	1, SU
7.	$B\alpha$	4, 6, Modus Ponen
8.	$B\alpha \wedge K\alpha$	7, 5, Konjungsi
9.	$\exists x\,(Bx \wedge Kx)$	8, GE ◄

(Baris-4, 5, dan 7 sebenarnya dapat dilompati, jika telah dipahami benar aturan-aturan inferensi sebelumnya. Jadi, dari baris-3 dan baris-6 dapat diturunkan baris-8.)

SOAL-SOAL LATIHAN 4.4

Untuk Soal 1–8, apakah argumentasi yang diberikan valid? Jika valid, buktikan; dan jika tidak valid, berikan contoh penyangkal dengan interpretasi aritmatika yang sederhana.

1. Beberapa pembohong peminum minuman keras. Beberapa mahasiswa tidak minum minumam keras. Oleh karena itu, beberapa mahasiswa bukan pembohong.
2. Semua petinju adalah orang kuat. Beberapa polisi adalah orang kuat. Berarti, beberapa polisi adalah petinju.
3. Beberapat matakuliah matematika tidak menarik, tetapi semua matakuliah matematika diperlukan. Oleh karena itu, beberapa hal yang tidak diperlukan tidak menarik.
4. Tidak ada orang intelek yang minum berlebihan juga makan berlebihan. Beberapa orang bijaksana makan berlebihan. Oleh karena itu, beberapa orang bijaksana bukan orang intelek.
5. Tidak ada orang matematika yang membingungkan. Tidak ada seorang pun, yang tidak membingungkan, adalah administrator.

Juned adalah orang matematika. Jadi, Juned bukan administrator.

6. Tidak ada kanak-kanak yang sabar. Tidak ada orang yang tidak sabar dapat duduk manis. Rebo adalah kanak-kanak. Oleh karena itu, Rebo tidak dapat duduk manis.

7. Tidak ada calon ketua himpunan mahasiswa dari mahasiswa baru. Beberapa mahasiswa baru memenuhi syarat sebagai calon ketua himpunan mahasiswa. Berarti, beberapa mahasiswa yang memenuhi syarat tidak dicalonkan sebagai ketua himpunan mahasiswa.

8. Semua orang Surabaya selalu menyapa orang yang dikenalnya dengan baik. Tidak ada orang Surabaya menyapa orang yang bukan orang Jawa. Berarti, orang Surabaya mengenal dengan baik hanya orang Jawa.

4.5 *Pergantian Kuantor*

Dalam percakapan sehari-hari, jelas bahwa pernyataan:

(1) Semua mahasiswa matematika mengenal Euclid.

adalah ekivalen dengan

(2) Tidaklah benar bahwa ada mahasiswa matematika yang tidak mengenal Euclid.

Pernyataan (1) menggunakan kuantor universal, sedangkan pernyataan (2) menggunakan kuantor eksistensial. Jika disimbolkan, pernyataan (1) dapat ditulis sebagai

(3) $\forall x\,(Mx \Rightarrow Ex)$

dan bentuk simbolik untuk (2) adalah

(4) $\neg\exists x\,(Mx \wedge \neg Ex)$

Karena “$Mx \wedge \neg Ex$” ekivalen dengan “$\neg(Mx \Rightarrow Ex)$” berarti (4) ekivalen dengan

(5) $\neg(\exists x \neg(Mx \Rightarrow Ax)$

Perhatikan pula contoh berikut ini. Jelas bahwa pernyataan

(6) Ada anak sapi berkepala dua.

ekivalen dengan

(7) Tidaklah benar bahwa tidak ada anak sapi berkepala dua.

Bentuk simbolik untuk pernyataan (6) adalah

(8) $\exists x\,(Sx \wedge Dx)$

dan bentuk simbolik untuk (7) adalah

(9) $\neg\forall x\,(Sx \Rightarrow \neg Dx)$

Karena "$Sx \Rightarrow \neg Dx$" secara tautologi ekivalend dengan "$\neg(Sx \wedge Dx)$", berarti (9) ekivalen dengan

(10) $\neg\forall x\,(Sx \wedge Dx)$.

Pemahaman untuk kasus-kasus seperti di atas akan menjadi lebih mudah dengan memahami aturan negasi dari pernyataan berkuantor. Misal diberikan pernyataan universal $\forall x\,(Px)$, yang menegaskan bahwa untuk semua x, pernyataan Px adalah benar (untuk sebarang predikat P). Apa makna negasi dari pernyataan itu, yaitu $\neg\forall x\,(Px)$, adalah benar? Apabila Px tidak selalu benar, maka haruslah ada suatu contoh yang menunjukkan Px salah. Dengan kata lain, harus ada x yang menyebabkan Px bernilai salah. Gagasan ini mengarah pada tautologi berikut ini.

NEGASI DARI KUANTOR UNIVERSAL

Untuk sebarang predikat P, berikut ini adalah tautologi:

$$\neg(\forall x(Px)) \Longleftrightarrow \exists x(\neg Px)$$

CONTOH 4.5.1 Dapatkan negasi dari "Semua angsa berbulu putih."

Penyelesaian. Misal simbol Ax untuk "x adalah angsa" dan Px untuk "x berbulu putih." Bentuk simbolik pernyataan di atas sebelum dinegasi-kan adalah $\forall x\,[Ax \Rightarrow Px]$. Setelah dinegasikan menjadi

$$\neg\forall x\,[Ax \Rightarrow Px] \;\equiv\; \exists x\,[\neg(Ax \Rightarrow Px)]$$

Selanjutnya dengan Ekivalensi untuk Implikasi dan Disjungsi, bentuk di atas disederhanakan :

$$\begin{aligned}\neg\forall x[Ax \Rightarrow Px] &\equiv \exists x[\neg(Ax \Rightarrow Px)]\\ &\equiv \exists x[\neg(\neg Ax \vee Px)]\\ &\equiv \exists x[(Ax \wedge \neg Px)]\end{aligned}$$

Dengan menerjemahkan kembali dalam kata-kata: "Ada angsa yang tidak berbulu putih." ◄

Perlu dicatat bahwa negasi dari pernyataan di atas *bukanlah* "Tidak ada angsa berbulu putih." Untuk membuktikan kebalikan dari pernyataan universal cukup dengan membuat *satu* contoh penyangkal. Dalam hal ini, cukup dengan mengatakan bahwa ada (sekurang-kurangnya satu) angsa yang tidak berbulu putih. Perlu dicermati pula bahwa pernyataan "Semua angsa tidak berbulu putih" berbeda dengan pernyataan "Tidak semua angsa berbulu putih."

Untuk kuantor eksistensial mempunyai aturan yang serupa dengan aturan yang telah diuraikan di atas.

> NEGASI PERNYATAAN DENGAN KUANTOR EKSISTENSIAL
> Untuk sebarang predikat P, berikut ini adalah tautologi:
>
> $$\neg[\exists x(Px)] \Longleftrightarrow \forall x(\neg Px)$$

CONTOH 4.5.2 Dapatkan negasi dari "Ada laki-laki yang berwibawa."

Penyelesaian. Misal Lx simbol untuk "x adalah laki-laki" dan Hx untuk "x adalah berwibawa." Akan dicari negasi dari pernyataan $\exists x(Lx \wedge Wx)$. Negasinya adalah

$$\begin{aligned}\neg[\exists x(Lx \wedge Wx)] &\equiv \forall x[\neg(Lx \wedge Wx)]\\ &\equiv \forall x[\neg Lx \vee \neg Wx)]\\ &\equiv \forall x[Lx \Rightarrow \neg Wx)]\end{aligned}$$

Dengan kata-kata, negasi dari "Ada laki-laki yang berwibawa" adalah "Semua laki-laki tidak berwibawa." ◄

Masih ada ekivalensi logis yang menarik, seperti berikut:

$$\neg\forall x(\neg Qx) \equiv \exists x(Qx)$$

Ekivalensi di atas menegaskan bahwa pernyataan eksistensial dapat ditulis sebagai (negasi dari) pernyataan universal. Jika dikehendaki, dapat pula dikerjakan tanpa kuantor eksistensial sama sekali. Akan tetapi, dengan menggunakan kuantor tersebut sering menghasilkan pernyataan yang lebih sederhana dan mudah ditangkap maknanya.

CONTOH 4.5.3 Buktikan bahwa argumentasi berikut ini adalah valid.

> Semua mahasiswa dapat berenang.
> Semua orang dapat berenang atau menyelam.
> Kartilo tidak dapat berenang.
> Jadi, tidak semua orang yang dapat menyelam adalah mahasiswa.

Penyelesaian. Misalkan Mx simbol untuk "x adalah mahasiswa," Rx untuk "x dapat berenang," Sx untuk "x dapat menyelam," dan k simbol untuk "Kartilo." Secara simbolik, argumentasi di atas dapat ditulis

$$\begin{array}{rl} & \forall x(Mx \Rightarrow Rx) \\ & \forall x(Rx \vee Sx) \\ & \neg Rk \\ \hline \therefore & \neg\forall x(Sx \Rightarrow Mx) \end{array}$$

Seringkali sangat sulit membuktikan kesimpulan bentuk negatif, sehingga kesimpulan tersebut ditulis terlebih dahulu dalam bentuk positif, yaitu dengan menulis kembali sebagai $\exists x[\neg(Sx \Rightarrow Mx)]$. Pernyataan eksistensial ini dapat dibuktikan dengan mencari contoh seseorang yang menyebabkan $\neg(Sx \Rightarrow Mx)$ bernilai benar. Sekali lagi, negasi yang ada dapat ditarik makin ke dalam: $\neg(Sx \Rightarrow Mx)$ ekivalen dengan $Sx \wedge \neg Mx$. Selanjutnya, bahwa satu-satunya orang yang diketahui secara khusus adalah Kartilo, sehingga ada baiknya dicoba untuk membuktikan bahwa $Sk \wedge \neg Mk$. Pembuktian selengkapnya adalah sebagai berikut:

1.	$\forall x[Mx \Rightarrow Rx]$	Premis
2.	$\forall x[Rx \vee Sx]$	Premis
3.	$\neg Rk$	Premis
4.	$Mk \Rightarrow Rk$	1, SU
5.	$Rk \vee Sk$	2, SU
6.	$\neg Rk \Rightarrow Sk$	5, Ekiv. untuk Impl. dan Disj.
7.	$\neg Mk$	3, 4, Modus Tollen
8.	Sk	3, 6, Modus Ponen
9.	$Sk \wedge \neg Mk$	7, 8, Konjungsi
10.	$\neg(\neg Sk \vee Mk)$	9, DeMorgan
11.	$\neg(Sk \Rightarrow Mk)$	10, Ekiv. untuk Impl. dan Disj.
12.	$\exists x[\neg(Sx \Rightarrow Mk)]$	11, GE
13.	$\neg\forall x[Sx \Rightarrow Mx]$	12, Negasi kuantor ◄

SOAL-SOAL LATIHAN 4.5

Tulislah negasi dari masing-masing pernyataan yang diberikan pada Soal 1–21 berikut ini.

1. $\forall x[Px \Rightarrow Qx]$
2. $\forall x[\neg Px \Rightarrow Qx]$
3. $\forall x[\neg(Px \Rightarrow Qx)]$
4. $\forall x[Px \Leftrightarrow Qx]$
5. $\exists x[Px \wedge Qx]$
6. $\exists x[Px \vee Qx]$
7. $\exists x[Px \Leftrightarrow Wx]$
8. $\exists x[Px \Rightarrow (Qx \vee Rx)]$
9. $\forall x[\exists y(Pxy)]$
10. $\forall x[Px \Rightarrow \exists(Qx \Rightarrow Ry)]$
11. $\forall x[\exists y(Px \Rightarrow Qy)]$
12. $\forall x[Px \Rightarrow \exists y(Qxy)]$
13. Semua manusia adalah makhluk hidup.
14. Semua burung dapat terbang.
15. Beberapa sapi dapat terbang.
16. Beberapa burung tidak dapat terbang.
17. Semua babi tidak mempunyai sayap atau tidak dapat terbang.
18. Beberapa kuda mempunyai sayap dan dapat terbang.

19. Untuk setiap bilangan positif terdapat bilangan positif lain yang lebih kecil.

20. Untuk setiap bilangan x ada bilangan y sedemikian sehingga $y^2 = x$.

21. Ada bilangan yang lebih kecil dari semua bilangan positif.

Buktikan masing-masing argumentasi dalam Soal 22–35 berikut ini.

22. $$\begin{array}{l} \forall x[Px \Rightarrow Qx] \\ \neg Qb \\ \hline \therefore \neg Pb \end{array}$$

23. $$\begin{array}{l} \forall x[Px \Rightarrow Qx] \\ \forall x[Qx \Rightarrow Rx] \\ Pb \\ \hline \therefore Rb \end{array}$$

24. $$\begin{array}{l} \neg\exists x[Px \wedge Qx] \\ Pb \\ \hline \therefore \neg Qb \end{array}$$

25. $$\begin{array}{l} \neg\exists x[Px \Rightarrow Qx] \\ \hline \therefore Pb \end{array}$$

26. $$\begin{array}{l} \forall x[Px \Rightarrow \neg Qx] \\ \neg\exists x[(Rx \vee Sx) \wedge \neg Qx] \\ R\alpha \\ \hline \therefore \neg P\alpha \end{array}$$

27. $$\begin{array}{l} \forall x[Px \Rightarrow (Qx \vee Rx)] \\ \neg\exists x[(Qx \vee Rx) \wedge \neg Sx] \\ \neg S\alpha \\ \hline \therefore \neg P\alpha \end{array}$$

28. $$\begin{array}{l} \forall x[Px \Rightarrow Qx] \\ P\alpha \\ \hline \therefore \neg\exists x[Qx] \end{array}$$

29. $$\begin{array}{l} \forall x[Px \Rightarrow Qx] \\ \neg Q\alpha \\ \hline \therefore \neg\forall x[Px] \end{array}$$

30. $$\begin{array}{l} \neg\exists x[Px \wedge Qx] \\ P\alpha \\ \hline \therefore \neg\forall x[Qx] \end{array}$$

31. $$\begin{array}{l} \neg\exists x[Px \wedge \neg Qx] \\ \forall x[Qx \Rightarrow Rx] \\ P\alpha \\ \hline \therefore \exists x[Rx] \end{array}$$

32. Tidak ada babi bisa terbang.
    Bolli adalah babi.
    $\therefore$ Bolli tidak bisa terbang.

33. Tidak ada ada mahasiswa yang bodoh.
Tidak ada orang tidak bodoh yang penipu.
Kimi adalah mahasiswa.
∴ Kimi bukan penipu.

34. Tidak ada ada mahasiswa yang curang.
Tidak ada orang yang tidak curang yang tidak dapat duduk tenang saat ujian.
Riyani adalah mahasiswa.
∴ Riyani dapat duduk tenang saat ujian.

35. Pemboros adalah teman setan.
Tidak ada orang yang suka berfoya-foya yang mampu mengendalikan nafsu.
Orang yang berteman dengan setan adalah orang yang suka berfoya-foya.
Brosman adalah pemboros.
∴ Brosman tidak mampu mengendalikan nafsu.

—o0o—

Bab 5
Pengantar Teori Himpunan

Pada bab ini akan diuraikan teori himpunan dengan pendekatan intuitif, dengan memanfaatkan bahasa logika. Dengan mempelajari bab ini, pembaca dapat memahami konsep-konsep teori himpunan secara intuitif, sekaligus memahami logika dengan lebih jelas melalui teori himpunan.

5.1 Istilah dan Simbol Himpunan

Teori himpunan mulai dikembangkan pada pertengahan abad ke-19, yang berakar pada karya George Cantor; meskipun sumbangan pemikiran dan karya lain seperti dari Gottlob Frege dan Giuseppe Peano juga cukup berpengaruh.

Pada dasarnya, tujuan pengembangan teori himpunan adalah untuk membangun aksioma-aksioma umum yang mendasar untuk semua permasalahan matematika. Dengan ini pula, matematika dapat dibawa ke bentuk logika. Khusus masalah ini, karya-karya yang paling menonjol dan diterapkan para pakar sampai sekarang diantaranya dari Bertrand Russell, Alfred North Whitehead, dan David Hilbert.

5.1.1 Keanggotaan

Himpunan adalah sebarang kumpulan atau koleksi objek. Dengan pengertian ini, dapat dikatakan misalnya himpunan orang Indonesia, himpunan bilangan bulat, dan himpunan segitiga yang puncaknya di titik pusat. Beberapa istilah yang digunakan untuk "himpunan" antara lain ***kelas***, ***koleksi***, ***keluarga***, dan ***agregat***. Dalam buku pengantar ini, semua istilah tersebut digunakan bergantian dengan makna yang sama.

Suatu objek yang berada di suatu himpunan disebut ***unsur*** atau ***elemen*** atau ***anggota*** dari himpunan tersebut; dan umumnya digunakan simbol "$\in$" untuk menyatakan "anggota dari." Sebagai contoh, "kota adalah anggota dari provinsi" dapat ditulis "kota $\in$ provinsi." Untuk dapat menyebut keanggotaan suatu himpunan, maka himpunan tersebut harus dijelaskan secara lengkap; misalnya himpunan semua bilangan bulat, himpunan mahasiswa baru, kumpulan cerita pendek, keluarga unggas, kelas masyarakat ekonomi lemah. Untuk penulisannya, umumnya himpunan ditulis dengan mengapit anggota-anggotanya menggunakan kurung kurawal. Sebagai contoh, misal B adalah himpunan presiden Indonesia setelah era Orde Baru, dapat ditulis

$$B = \{\text{ Gus Dur, Megawati, SBY }\}.$$

Himpunan dapat ditulis dengan menggunakan aturan atau predikat yang harus dipenuhi oleh anggota-anggotanya. Misalnya, jika Px: "x adalah presiden Indonesia setelah era Orde Baru sampai tahun 2007," maka contoh di atas dapat ditulis dengan

$$B = \{x : Px\}$$

Notasi ini dapat diungkapkan dengan kalimat "himpunan semua x sehingga berlaku Px." Simbol ":" kadang ditulis dengan "|" dengan maksud yang sama. Sedangkan untuk bukan anggota himpunan dilambangkan dengan simbol $\notin$. Sebagai contoh

$$\text{Soekarno} \notin B.$$

yang menyatakan bahwa Soekarno bukan salah satu presiden Indonesia setelah era Orde Baru.

Penulisan dengan kurung kurawal dan penggunaan aturan untuk menentukan suatu himpunan di atas disebut notasi *pembangun himpunan*, dan notasi ini yang paling umum digunakan dalam matematika.

Pada umumnya, tidak benar bahwa suatu himpunan adalah anggota dari himpunan itu sendiri. Jadi himpunan mahasiswa bukanlah anggota himpunan mahasiswa; dalam hal ini jelas bahwa himpunan mahasiswa bukan mahasiswa. Hal ini mempertegas perbedaan antara *keanggotaan* dan *kesamaan*. Misal B suatu himpunan, maka

$$B = B$$

selalu benar, sedangkan

$$B \in B$$

umumnya salah.

Secara umum, untuk memperjelas uraian di atas, berikut ini adalah dua aturan dasar yang digunakan dalam teori himpunan:

(a) **Aturan Abstraksi**: sebarang kumpulan objek yang dapat didaftar atau digambarkan dengan suatu predikat merupakan himpunan. Suatu objek adalah anggota suatu himpunan jika dan hanya jika objek tersebut merupakan salah satu objek dalam daftar atau memenuhi predikat yang menjelaskan himpunan. Dengan simbol, diberikan sebarang predikat Px, himpunan $\{x : Px\}$ ada dan $\forall a[a \in \{x : Px\} \Leftrightarrow P(a)]$

(b) **Aturan Perluasan**: Diberikan dua himpunan A dan B. Dikatakan A dan B sama, atau $A = B$ jika dan hanya jika $\forall x\{x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$. Dengan kalimat dapat dikatakan bahwa dua himpunan adalah sama jika dan hanya jika keduanya mempunyai anggota yang tepat sama.

Selanjutnya, dalam buku ini akan digunakan dua aturan di atas untuk menyatakan himpunan dan keanggotaannya. Dengan memperhatikan dua aturan dasar di atas, dengan memisalkan $A = \{1,2,3\}$, $B = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ dan $C = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$, dapat ditulis hubungan-hubungan yang *benar* berikut ini:

$$2 \in A$$
$$A \in B$$
$$\{1,3,2\} = A$$
$$\{1,2\} \in B$$

dan perhatikan juga bahwa hubungan-hubungan berikut ini benar:

$$2 \notin B$$
$$B \notin C$$
$$B \neq C$$
$$\{1,3\} \notin B$$

Dua aturan dasar di atas tampaknya sederhana, namun demikian dua aturan itu akan banyak membantu dalam pembahasan selanjutnya. Akan terlihat bahwa dua aturan tersebut sebenarnya amat sangat berguna.

5.1.2 Himpunan Bagian

Untuk dua himpunan A dan B, jika setiap anggota A adalah anggota B, maka dikatakan A ***himpunan bagian*** dari B atau A ***termuat*** di B. Simbol "$\subseteq$"(yang disebut simbol ***inklusi***) digunakan untuk meyatakan "himpunan bagian dari" atau "termuat di." Sebagai contoh, dapat ditulis

> Himpunan orang Jawa adalah himpunan bagian dari himpunan orang Indonesia.

atau

> Himpunan orang Jawa termuat dalam himpunan orang Indonesia.

atau dengan singkat dapat ditulis

> Himpunan orang Surabaya $\subseteq$ himpunan orang Indonesia.

Perlu diperhatikan bahwa penulisan bentuk terakhir di atas adalah penulisan yang tidak lazim, yaitu mencampurkan penulisan ungkapan dalam kata-kata dengan ungkapan simbolik. Sebaiknya ditulis, misalnya dengan

$$J \subseteq I$$

dengan $J = \{x : x \text{ orang Jawa}\}$ dan $I = \{x : x \text{ orang Indonesia}\}$.

Secara simbolik, pengertian himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B adalah:

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Dengan pengertian seperti di atas, jelas bahwa setiap himpunan merupakan himpunan bagian dari himpunan itu sendiri; jadi $A \subseteq A$, sebab jelas berlaku $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in A]$. Untuk menyatakan himpunan A yang bukan himpunan bagian dari B, sering ditulis dengan $A \nsubseteq B$.

Selanjutnya, kesamaan himpunan $A = B$ dapat juga dinyatakan menggunakan simbol inklusi seperti diuraikan dalam contoh berikut ini.

CONTOH 5.1.1 Buktikan bahwa jika A dan B dua himpunan, maka

$$A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Bukti. Misal $A = B$, maka berdasarkan Aturan Perluasan setiap unsur di A juga di B dan juga sebaliknya setiap unsur di B juga di A. Hal ini berarti $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$. Jadi

$$(\star) \qquad (A = B) \Rightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Sebaliknya, misal $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$. Ambil sebarang $x \in A$, karena $A \subseteq B$ berarti x uga di B. Sedangkan untuk $x \in B$, dengan $B \subseteq A$ berarti x juga di A. Dengan demikian $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, dan berdasarkan Aturan Perluasan ini berarti $A = B$. Jadi

$$(\star\star) \qquad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$$

Dari $(\star)$ dan $(\star\star)$ dapat diperoleh

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \qquad \blacktriangleleft$$

Secara intuitif jelas bahwa kesamaan, keanggotaan, dan inklusi adalah berbeda dan mempunyai notasi yang tidak sama. Perbedaan tersebut dapat juga dilihat dari sifat simetri dan transitifitasnya. Inklusi berbeda dengan kesamaan, sebab kesamaan bersifat simetri, yaitu $A = B$ maka $B = A$, sedangkan inclusi tidak demikian. Demikian pula dapat diperiksa perbedaan yang lain diantara ketiga notasi tersebut. Penggunaan ketiga pengertian di atas dalam bahasa sehari-hari sering agak membingungkan, karena diungkapkan dengan kata yang sama, “adalah”. Sebagai contoh:

Bumi adalah planet yang dihuni manusia.
Bumi adalah planet yang mengitari matahari.
Planet yang mengitari matahari adalah benda di angkasa raya.

Tetapi dengan notasi yang tepat, kalimat-kalimat di atas ditulis dengan:

Bumi = planet yang dihuni manusia.
Bumi $\in$ himpunan planet yang mengitari matahari.
Himpunan planet yang mengitari matahari $\subseteq$ kelas benda di angkasa raya.

Beberapa buku menggunakan simbol “$\subset$” untuk inklusi. Tetapi di buku ini digunakan “$\subseteq$” untuk inklusi dan “$\subset$” untuk menyatakan ***himpunan bagian sejati*** (*proper subset*). Pengertian himpunan bagian sejati adalah sebagai berikut: Jika A dan B dua himpunan, maka

$$A \subset B \Longleftrightarrow [\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \neg(A = B)]$$

atau

$$A \subset B \Longleftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

Dengan bahasa sehari-hari, terdapat ungkapan “A termuat di B” yang juga berarti “B memuat A”. Ungkapan ini apabila ditulis secara simbolik harus dipertegas, karena dapat berarti

$$A \subseteq B \quad \equiv \quad B \supseteq A$$

atau mungkin dapat juga

$$A \subset B \quad \equiv \quad B \supset A$$

Untuk itu, adalah lebih tepat jika dipertegas yang dimaksudkan ungkapan “himpunan bagian” ataukah “himpunan bagian sejati,” dan tidak digunakan “termuat di.”

5.1.3 Himpunan Kosong dan Himpunan Kuasa

Berbicara mengenai keanggotaan suatu himpunan, terdapat himpunan yang tidak mempunyai anggota yang disebut ***himpunan kosong*** dan dinotasikan dengan $\{\}$ atau $\emptyset$. Dengan Aturan Abstraksi himpunan ini dapat dibangun dengan cara seperti berikut ini. Untuk sebarang predikat Px didefinisikan himpunan kosong dengan

$$\emptyset = \{x : Px \wedge \neg Px\}$$

Sekarang misalkan $a \in \emptyset$, berdasarkan Aturan Perluasan didapat $Pa \wedge \neg Pa$, dan dengan Pembuktian Taklangsung hal ini dapat berarti bahwa $\emptyset$ tidak mempunyai anggota, yaitu $\neg\exists(a \in \emptyset) \Leftrightarrow \forall a(a \notin \emptyset)$.

Ingat bahwa implikasi $p \Rightarrow q$ selalu benar apabila p salah, dan karena $x \in \emptyset$ selalu salah, maka untuk sebarang himpunan A akan didapat $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ yang selalu benar. Hal ini menunjukkan bahwa $\emptyset$ merupakan himpunan bagian dari semua himpunan, yaitu

$$\forall A[A \text{ himpunan } \Rightarrow \emptyset \subseteq A].$$

Selalin itu, misal $B \subseteq \emptyset$, padahal $\emptyset \subseteq B$ utuk sebarang himpunan B, jadi dapat disimpulkan $B = \emptyset$. Dengan kalimat, ini mengungkapkan bahwa himpunan kosong adalah himpunan terkecil yang termuat di sebarang himpunan.

Beberapa fakta berkenaan dengan himpunan kosong dapat dirangkum seperti berikut:

- $\forall x[x \notin \emptyset]$
- $\forall A[\emptyset \subseteq A]$
- $\forall x[x \in A \Rightarrow x \neq x]$
- $\forall A[A \subseteq \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset]$
- $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

Telah disebutkan di atas bahwa sebarang himpunan A selalu memuat himpunan kosong sebagai himpunan bagiannya. Selain itu, kenyataannya bahwa dapat dibangun suatu himpunan yang selalu memuat himpunan A tersebut sebagai himpunan bagiannya. Himpunan ini disebut ***himpunan kuasa*** (terjemahan bebas dari *power* *set*) untuk himpunan A, dinotasikan dengan $\wp(A)$, yang didefinisikan sebagai himpunan yang memuat semua hipunan bagian dari A. Jadi dapat ditulis dengan

$$\wp(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Sebagai contoh, misal $A = \{a, b, c\}$. Himpunan bagian dari A adalah

$$\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ \{a,b,c\}$$

sehingga diperoleh

$$\wp(A) = \{\ \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\ \}$$

Dapat diperiksa bahwa $\wp(A)$ mempunyai anggota sebanyak $2^{|A|}$ dengan $|A|$ menyatakan banyaknya anggota himpunan A. Berdasarkan kenyataan ini, kadang himpunan kuasa untuk A ditulis dengan 2^A.

SOAL-SOAL LATIHAN 5.1

1. Untuk sebarang himpunan A, B, dan C, manakah diantara pernyataan-pernyataan berikut ini yang benar?

   (a) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$ (b) $(A = B) \wedge (B = C) \Rightarrow (A = C)$

   (c) $(A = B) \wedge (B \in C) \Rightarrow (A \in C)$ (d) $(A \in B) \wedge (B \in C) \Rightarrow (A \in C)$

   (e) $(A \in B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \in C)$ (f) $(A \in B) \wedge (B = C) \Rightarrow (A \in C)$

   (g) $(A \in B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \in C)$ (h) $(A \in B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$

   (i) $(A \subset B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \in C)$ (j) $(A \subseteq B) \wedge (B \in C) \Rightarrow (A \in C)$

2. Untuk masing-masing pernyataan pada Soal 1 yang salah, berikan contoh himpunan A, B, dan C yang menunjukkan pernyataan tersebut secara umum tidak benar.

3. Berikan contoh himpunan-himpunan A, B, C, D, dan E yang memenuhi syarat-syarat berikut:

$A \subset B$
$B \in C$
$C \subset D$
$D = E$

4. Dapatkan kesalahan dari masing-masing argumentasi berikut ini:

   (a) Socrates adalah laki-laki.
   Laki-laki adalah sangat banyak.
   Oleh karena itu, Socrates sangat banyak.

   (b) Samito adalah kepala desa.
   Kepala desa adalah jabata.
   Jadi, Samito adalah jabatan.

Untuk himpunan A dan B yang diberikan pada Soal 5–9, pernyataan-pernyataan berikut ini manakah yang benar: $A \in B$, $A \subseteq B$, $A \subset B$, $A = B$?

5. $A = \left\{ 1, \{1\}, \text{Jayabaya}, \text{bola} \right\}$
   $B = \left\{ 1, \{1\}, \text{Jayabaya}, \text{Kertajaya} \right\}$

6. $A =$ himpunan bilangan bulat positif.
   $B =$ himpunan bilangan bulat.

7. A adalah himpunan dengan anggota: angka 17, Agustus, angka 1945, himpunan semua pulau di Indonesia, merdeka.
   B adalah himpunan semua pulau di Indonesia.

8. A adalah himpunan yang memuat: himpunan presiden Indonesia setelah era Orde Baru, angka 2006, himpunan bilangan yang habis dibagi 8.
   B adalah himpunan yang memuat: himpunan presiden Indonesia, angka 2006, angka 2007, himpunan bilangan yang habis dibagi 4.

9. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   $B = \left\{1,\ \frac{6}{3},\ 1+2,\ 15-10,\ 2\times 2\right\}$

5.2 Operasi Himpunan

Untuk sebarang dua himpunan A dan B, didefinisikan operasi ***irisan*** atau ***interseksi*** dari A dan B, yang dinotasikan dengan $A \cap B$, sebagai himpunan dari semua unsur di A yang juga termuat di B. Dengan pengertian ini, untuk semua x, $x \in A \cap B$ jika dan hanya jika $x \in A$ dan $x \in B$, dan secara simbolik dituliskan

$$\forall x[x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A) \ \wedge \ (x \in B)].$$

atau dengan notasi pembangun himpunan dapat ditulis

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Jika A himpunan semua penggemar matematika, dan B himpunan semua orang Indonesia, maka $A \cap B$ adalah himpunan semua orang Indonesia yang gemar matematika.

Jika A himpunan semua orang Indonesia, dan B himpunan semua hewan yang berbobot lebih dari satu ton, maka $A \cap B$ adalah himpunan semua orang Indonesia yang berbobot lebih dari satu ton. Perhatikan bahwa untuk contoh ini $A \cap B$ adalah himpunan kosong (meskipun $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$). Untuk himpunan A dan B dengan $A \cap B = \emptyset$ dikatakan bahwa A dan B adalah ***saling asing***.

Untuk sebarang dua himpunan A dan B, didefinisikan operasi ***gabungan*** dari A dan B, ditulis dengan $A \cup B$, sebagai himpunan semua anggota A dan semua anggota B. Lebih tepatnya, untuk semua x, $x \in A \cup B$ jika dan hanya jika $x \in A$ atau $x \in B$. Penggunaan "atau" dalam definisi ini dengan pengertian "atau" yang digunakan dalam bab-bab sebelumnya, yaitu "$x \in A$ atau $x \in B$" adalah salah hanya untuk $x \notin A$ dan $x \notin B$. Dengan demikian, secara simbolik dapat dituliskan

$$\forall x[x \in A \cup B \Longleftrightarrow (x \in A) \ \vee \ (x \in B)]$$

atau dengan notasi pembangun himpunan dapat ditulis

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Jika A himpunan semua mahasiswa junior, dan B himpunan semua mahasiswa senior, maka $A \cup B$ adalah himpunan semua mahasiswa.

Untuk sebarang dua himpunan A dan B, didefinisikan operasi ***selisih himpunan*** dari A dan B, ditulis dengan $A \setminus B$, sebagai himpunan semua anggota A yang bukan anggota B. Lebih tepatnya, untuk semua x, $x \in A \setminus B$ jika dan hanya jika $x \in A$ dan $x \notin B$. Secara simbolik dapat dituliskan

$$\forall x[x \in A \setminus B \iff (x \in A) \ \wedge \ (x \notin B)]$$

atau dengan notasi pembangun himpunan dapat ditulis

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

Sebagai contoh, jika A himpunan semua orang, dan B himpunan semua perempuan, maka $A \setminus B$ adalah himpunan semua laki-laki.

SOAL-SOAL LATIHAN 5.2

Untuk masing-masing himpunan A dan B yang diberikan pada Soal 1–6, dapatkan: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus (A \cap B)$, $B \cap (A \setminus B)$

1. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$
2. $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \left\{a,d,p,q,r,s,t\right\}$
3. A himpunan semua bilangan bulat positif.
   B himpunan semua bilangan bulat yang lebih besar dari 100.
4. A himpunan semua orang, dan B himpunan semua laki-laki.
5. A himpunan semua bilangan genap.
   B himpunan semua bilangan ganjil.
6. A himpunan semua bilangan bulat positif.
   B himpunan semua bilangan bulat positif yang habis dibagi 10.

Tulislah himpunan-himpunan yang diberikan pada Soal 7–9 dalam notasi pembangun himpunan.

7. Himpunan semua bilangan asli: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$
8. Himpunan semua bilangan bulat: $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

9. Himpunan semua bilangan bulat positif yang habis dibagi 5.
10. Jelaskan mengenai hasil operasi himpunan berikut ini.
    (a) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$ (b) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$ (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$
    (d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$ (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\}$
11. Diberikan $A = \{1\}$, $B = \{1, \{1\}\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{1, 2, \{1\}\}$, $E = \{1, \{1, \{1\}\}\}$, dapatkan hasil bentuk-bentuk berikut ini.
    (a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $\{B\} \cap E$
    (d) $(C \cup D) \setminus B$ (e) $(A \cap D) \setminus E$ (f) $(A \cup B) \cap C$
    (g) $\{A\} \cap B$ (h) $(\{A\} \cup D) \cap (E \setminus C)$.
12. Menggunakan himpunan-himpunan pada Soal 11, periksalah mana diantara pernyataan-pernyataan berikut ini yang benar.
    (a) $A \in B$ (b) $A \subseteq B$ (c) $C \subseteq D$
    (d) $B \subset D$ (e) $B \in E$ (f) $B \subseteq E$
    (g) $C \in D$ (h) $B \setminus A \in D$. (i) $E \setminus B \in A$
13. Jika diketahui $A \subseteq B$, tunjukkan bahwa:
    (a) $A \cap B = A$ (b) $A \cup B = B$
14. Untuk sebarang dua himpunan A dan B, buktikan bahwa:
    (a) $A \subseteq A \cup B$ (b) $(A \cap B) \subseteq A$ (c) $A \cup B = B \cup A$
    (d) $A \cap B = B \cap A$ (e) $A \setminus A = \emptyset$ (f) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

5.3 Himpunan Semesta dan Komplemen Himpunan

Seringkali hal yang menarik untuk dibicarakan bukannya semua himpunan yang mungkin, tetapi semata-mata semua himpunan bagian dari suatu himpunan yang tertentu. Misalnya, pada saat berbicara tentang kegiatan kemahasiswaan maka dengan sendirinya semesta pembicaraannya adalah "himpunan mahasiswa." Dengan semesta pembicaraan ini, pada saat menyebut “himpunan pemusik” maka sudah seharusnya sebutan tersebut menunjuk hanya pada mahasiswa pemusik, bukannya pemusik profesional, bukan pula pemusik anak-anak atau pun pemusik jalanan.

Himpunan yang menjadi semesta pembicaraan seperti di atas disebut dengan ***himpunan semesta***, dan di buku ini akan sering dinotasikan dengan $\mathscr{S}$. Berbeda dengan himpunan kosong, $\emptyset$, yang tidak memerlukan tambahan keterangan pada saat menggunakannya dengan himpunan yang lain, himpunan semesta, $\mathscr{S}$, dapat diartikan berbeda pada penggunaan yang berbeda. Pada satu saat “$\mathscr{S}''$ dapat menyatakan himpunan semua manusia, dan di saat lain “$\mathscr{S}$” mungkin menyatakan himpunan semua titik di bidang datar, dan di saat yang lain lagi menyatakan himpunan cangkir-cangkir.

Pada saat-saat tertentu, kepastian mengenai himpunan semesta perlu disebutkan. Adakalanya, tanpa menyebutkan atau membatasi himpunan semestanya terlebih dahulu akan meyebabkan makna himpunan bagian dan operasi himpunan menjadi kacau, atau bahkan mungkin tidak lagi bermakna. Pada umumnya, jika himpunan semesta tidak disebutkan secara eksplisit, maka dianggap semesta pembicaraannya adalah semua objek di jagad raya.

Definisi mengenai komplemen himpunan, salah satu contohnya, akan mempunyai makna jelas apabila disebutkan himpunan semestanya terlebih dahulu. Untuk suatu himpunan A di dalam himpunan semesta $\mathscr{S}$, didefinisikan ***komplemen*** dari himpunan A (dinotasikan dengan A^c) sebagai himpunan semua anggota $\mathscr{S}$ yang bukan anggota A. Lebih tepat dapat ditulis

$$A^c = \{x : x \in \mathscr{S} \ \wedge \ x \notin A\} = \mathscr{S} \setminus A$$

Selain dengan menyebutkan himpunan semesta, komplemen suatu himpunan dapat didefinisikan relatif terhadap himpunan yang lain. Misal A dan B dua himpunan, ***komplemen*** dari A ***relatif*** terhadap B didefinisikan sebagai selisih himpunan $B \setminus A$.

CONTOH 5.3.1 Misal diberikan $\mathscr{S} = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$. Dapatkan A^c dan $(A \cup B)^c$.

Penyelesaian.

- $A^c = \mathscr{S} \setminus A = \{1,2,3,4\} \setminus \{1,2,3\} = \{4\}$
- $(A \cup B)^c = \mathscr{S} \setminus (A \cup B) = \{1,2,3,4\} \setminus \{1,2,3,4\} = \emptyset$

SOAL-SOAL LATIHAN 5.3

---

1. Diberikan $\mathscr{S} = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, e\}$. Dapatkan:

   (a) A^c (b) B^c (c) $(A \cap B)^c$

   (d) $(A \cup B)^c$ (e) $A^c \cup B^c$ (f) $A^c \cap B$

2. Misal $\mathscr{S}$ adalah himpunan semua bilangan bulat positif dan

   $A =$ himpunan semua bilangan bulat positif genap.
   $B =$ himpunan semua bilangan bulat positif ganjil.
   $C =$ himpunan semua bilangan bulat yang lebih besar dari 100.
   $D =$ himpunan bilangan positif kurang dari 100.

   Dapatkan:

   (a) A^c (b) $D \setminus C$ (c) $A \setminus C^c$

   (d) $(A \cup B)^c$ (e) $(D \setminus C)^c$ (f) $(A \cap D) \setminus B^c$

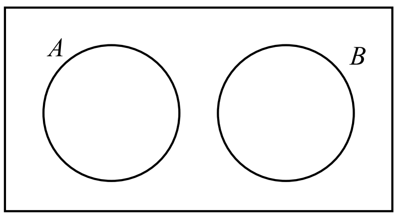
   (g) $(A \cap B)^c$ (h) $C \cup D^c$ (i) $A \setminus (C^c \cup D)$

   (j) D^c (k) $B^c \setminus A$ (l) $A^c \setminus (B \setminus D^c)$

5.4 *Diagram Venn*

Untuk mempelajari himpunan dan hubungan antar himpunan, kadang akan lebih mudah apabila digunakan alat bantu diagram untuk menyajikan himpunan. Gagasan ini pada awalnya dikenalkan oleh Euler, seorang matematikawan Swiss, pada abad ke-18 dan kemudian disempurnakan oleh matematikawan dari Inggris, Venn, pada abad ke-19. Oleh karena itu, diagram-diagram untuk menyajikan himpunan dikenal dengan ***diagram Euler*** atau ***diagram Venn***.

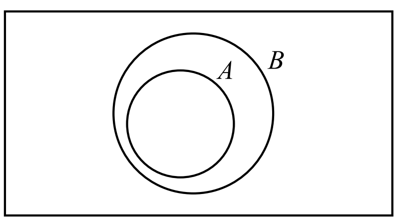
Penyajian himpunan dengan diagram Venn digunakan segi-empat untuk menggambarkan himpunan semesta. Himpunan-himpunan digambarkan dengan lingkaran atau bentuk lain yang diletakkan di dalam segi-empat tersebut. Sedangkan titik-titik digunakan untuk mewakili anggota himpunan. Jadi, untuk menyajikan dua himpunan A dan B, misalnya, yang saling asing digambarkan seperti pada Gambar 5.1. Gambar di atas menjelaskan bahwa tidak ada anggota A



Gambar 5.1: *Himpunan A dan B yang saling asing.*

yang berada di dalam B.

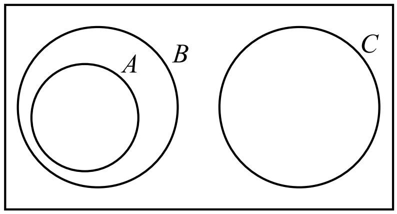
Untuk dua himpunan A dan B dengan $A \subseteq B$ disajika dalam diagram sepert dalam Gambar 5.2 Dari Gambar 5.2 mudah dipahami bahwa



Gambar 5.2: *Himpunan A dan B dengan* $A \subseteq B$.

seluruh A berada di dalam B, yang berarti semua anggota himpunan A juga menjadi anggota himpunan B.

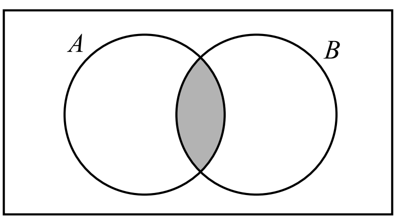
Apabila diketahui tiga himpunan A, B, dan C, dengan $A \subseteq B$ dan $B \cap C = \emptyset$, dapat disajikan menggunakan diagram Venn seperti dalam



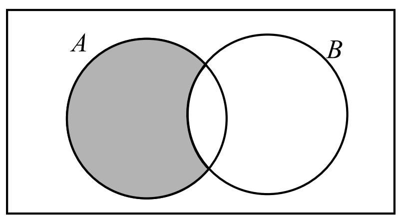
Gambar 5.3: *$A \subseteq B$ dan $B \cap C = \emptyset$.*

Gambar 5.3. Apabila $A \subseteq B$ dan $B \cap C = \emptyset$, dari diagram di atas tampak bahwa $A \cap C = \emptyset$, yaitu tidak ada anggota A yang berada di C.

Seringkali perlu tambahan informasi yang tidak dapat disajikan hanya dengan gambar lingkaran dan segi-empat. Misalnya untuk memudahkan menyajikan diagram untuk irisan dua himpunan, digunakan warna (disini digunakan warna gelap) atau arsiran pada daerah yang dimaksud. Warna gelap pada Gambar 5.4 menunjukkan diagram untuk irisan dari dua himpunan A dan B. Dengan menggunakan diagram Venn, akan mudah menyimpulkan tentang hubungan himpunan-himpunan yang digambarkan. Sebagai contoh, bagian warna gelap pada Gambar 5.5 menunjukkan bagian dari himpunan A yang tidak berada di himpunan B, yaitu $A \setminus B$.



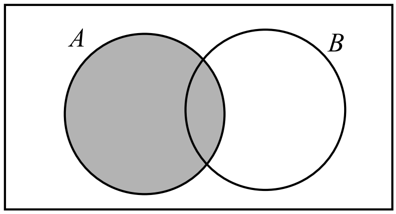
Gambar 5.4: *Irisan, $A \cap B$.*



Gambar 5.5: *Selisih himpunan, $A \setminus B$.*

Selanjutnya, dengan menggabungkan Gambar 5.4 dan Gambar 5.5 diperoleh Gambar 5.6 yang menunjukkan himpunan $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ yang tak lain adalah himpunan A sendiri. Dari ilustrasi ini, dapat disimpulkan bahwa $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$

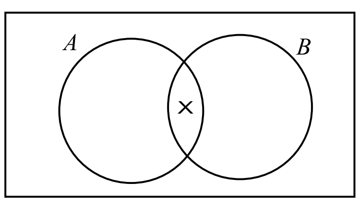
Tambahan informasi yang digunakan (seperti warna gelap di atas)



Gambar 5.6: $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

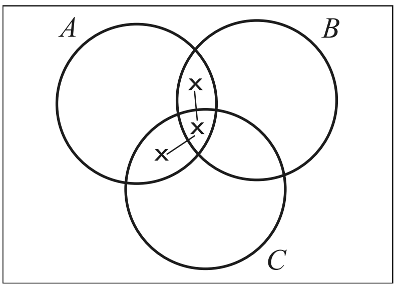
dapat didefinisikan sesuai dengan hubungan antar himpunan yang ingin diamati. Misalnya, berikut ini warna gelap dimaksudkan untuk menandai himpunan kosong. Dengan ketentuan ini, misal diketahui dua himpunan A dan B dengan $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq B$. Pernyataan pertama dapat digambarkan dengan diagram pada Gambar 5.4. Sedangkan pernyataan ke-dua, karena $A \subseteq B$ berarti A berada seluruhnya di dalam B, sehingga bagian A yang berada di luar B haruslah kosong (ditandai warna gelap). Ini ditunjukkan pada Gambar 5.5. Apabila dua pernyataan tersebut digabungkan, didapat Gambar 5.6 yang menunjukkan seluruh bagian A ditandai warna gelap, dan ini berarti A himpunan kosong. Jadi, jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq B$ maka haruslah $A = \emptyset$.

Selain penandaan kekosongan himpunan, berikut ini contoh untuk menandai ketidak-kosongan himpunan, yaitu dengan memberikan tanda silang “x” pada bagian himpunan yang tidak kosong. Tanda “x” untuk menunjukkan adanya anggota himpunan. Jadi, apabila $A \cap B \neq \emptyset$ berarti ada anggota di dalam irisan tersebut, dan ini disajikan seperti dalam Gambar 5.7.

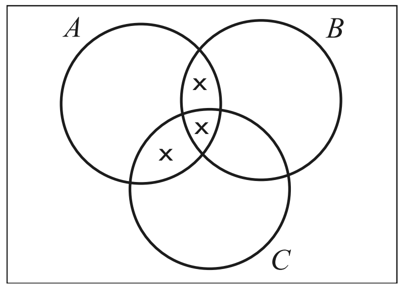


Gambar 5.7: $(A \cap B) \neq \emptyset$.

Untuk menyajikan hubungan yang agak rumit, misalnya $A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$, disajikan dalam Gambar 5.8. Garis yang menghubungkan tiga tanda silang dalam gambar tersebut menunjukkan bahwa sekurang-kurangnya satu dari tiga daerah kecil dalam gambar itu tidak kosong. Apabila garis-garis yang menghubungkan tanda-tanda silang pada



Gambar 5.8: $A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$.



Gambar 5.9: *Hubungan A, B, dan C.*

Gambar 5.8 dihilangkan, yakni menjadi Gambar 5.9, maka gambar tersebut tidak hanya menyajikan hubungan $A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$ melainkan dapat diartikan:

(a) $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$ (tanda silang paling atas)
(b) $A \cap (B \cap C) \neq \emptyset$ (tanda silang yang tengah)
(c) $(A \cap C) \setminus B \neq \emptyset$ (tanda silang paling bawah)

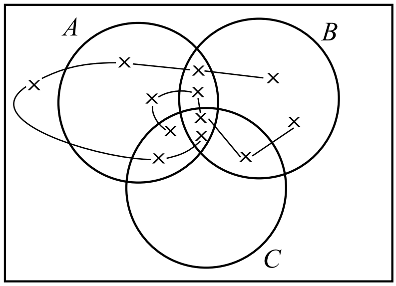
Jelas bahwa tiga penegasan (a), (b), dan (c) di atas semuanya mengakibatkan $A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$. Bahkan tanpa garis hubung, Gambar 5.9 akan menggambarkan hubungan-hubungan yang lain.

Hubungan yang dinyatakan oleh

$A \cup B \neq \emptyset$ (sesuatu berada di A atau di B)
$A \cup C^c \neq \emptyset$ (sesuatu berada di A atau tidak di C)

disajikan dalam Gambar 5.10. Perhatikan adanya dua garis penghubung yang terpisah, masing-masing untuk satu pernyataan eksistensial di atas.

Bagaimana dengan interpretasi untuk tanda silang (untuk menandai keberadaan) dan warna gelap (untuk menandai kekosongan) yang ada

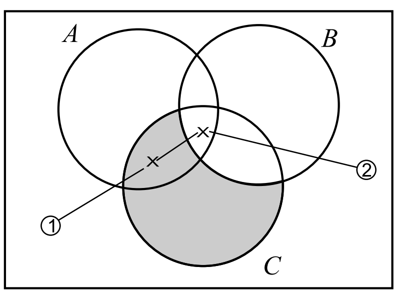


Gambar 5.10: $A \cup B \neq \emptyset$ *dan* $A \cup C^c \neq \emptyset$.

dalam satu diagram? Misal diberikan:

(d)	$A \cap C \neq \emptyset$	(beberapa anggota A adalah anggota C)
(e)	$C \subseteq B$	(semua anggota C adalah anggota B)

Pada Gambar 5.11, daerah warna gelap menunjukkan bagian dari C yang di luar B adalah kosong; tanda silang yang terhubung menunjukkan dua bagian irisan dari A dan C tidak kosong. Permasalahan interpretasi yang muncul adalah pada Daerah ①. Perhatian pada (d) dan (e) jelas merupakan keharusan untuk menyatakan bahwa warna gelap *mendominasi* tanda silang, oleh karena itu Daerah ① adalah kosong. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa Daerah ② tidak kosong, yakni (d)



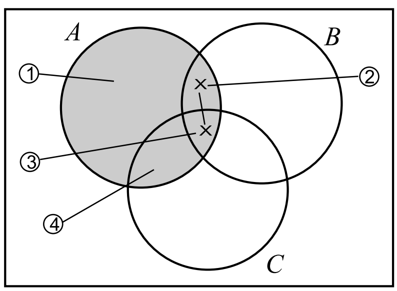
Gambar 5.11: $A \cap C \neq \emptyset$ *dan* $C \subseteq B$.

dan (e) berakibat $A \cap (B \cap C) \neq \emptyset$ (beberapa anggota A adalah anggota B dan C).

Kadang tidak mudah mengatakan bahwa tanda warna gelap mendominasi tanda silang. Apabila *setiap* tanda silang yang berada di daerah tanda silang terhubung "tertutup" oleh warna gelap maka sudah seharusnya disimpulkan bahwa diagram tersebut tidak konsisten, dan bukannya dikatakan daerah yang terhubung tersebut kosong. Uraian ini juga menunjukkan bahwa diagram Venn dapat digunakan untuk memeriksa konsistensi suatu himpunan yang dibangun dari hubungan himpunan-himpunan yang lain. Sebagai contoh, misalnya diketahui tiga himpunan A, B, dan C dengan syarat:

(f)	$A \subseteq C$	(semua anggota A adalah anggota C)
(g)	$A \cap C = \emptyset$	(tidak ada anggota A di C)
(h)	$A \cap B \neq \emptyset$	(beberapa anggota A berada di B)

Hubungan-hubungan tersebut disajikan dalam diagram pada Gambar 5.12. Dengan asumsi (f), Daerah ① dan ② ditandai warna



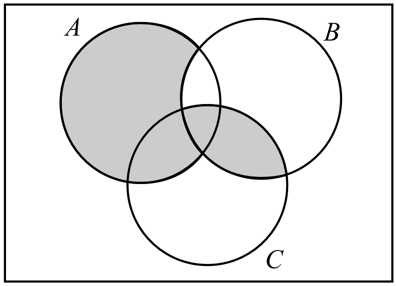
Gambar 5.12: $A \subseteq C$ *dan* $A \cap C = \emptyset$ *dan* $A \cap B \neq \emptyset$.

gelap; asumsi (g) menandai warna gelap Daerah ③ dan ④ . asumsi (h) menempatkan dua tanda silang terhubung di Daerah ② dan ③ . Dengan demikian, asumsi-asumsi yang diberikan berakibat Daerah ② dan ③ kedua-duanya kosong dan tidak kosong, yang berarti kontradiksi.

Dengan diagram Venn yang telah diuraikan di atas, sekarang dapat digunakan untuk menunjukkan validitas silogisma klasik. Sebagai contoh, perhatikan silogisma:

1. Tidak ada B yang C
2. Semua A adalah B
3. Oleh karena itu, tidak ada A yang C.

Premis 1 dan 2 disajikan dalam Gambar 5.13.



Gambar 5.13: *"Tidak ada B yang C" dan "Semua A adalah B."*

Sekarang diagram tersebut diperiksa apakah mengakibatkan tidak ada A yang C. Begitu mudah terlihat dari diagram tersebut bahwa daerah irisan dari A dan C ditandai warna gelap, yang berarti kesimpulan silogisma di atas adalah benar dan silogisma tersebut valid. Semua silogisma yang valid dapat diuji dengan cara seperti ini, tetapi jangan terpaku pada penggunaan diagram Venn untuk menguji argumentasi secara umum.

Diagram Venn hanya mudah digunakan untuk menyajikan argumentasi yang melibatkan tidak lebih dari tiga himpunan.

SOAL-SOAL LATIHAN 5.4

1. Buatlah diagram Venn untuk menyajikan himpunan-himpunan A dan B dengan $A \cap B^c = \emptyset$.
2. Buatlah diagram Venn untuk menyajikan himpunan-himpunan A dan B dengan $A \cap B^c = \emptyset$ dan $A^c \cap B = \emptyset$. Berdasarkan pengamatan pada diagram yang Anda buat, nyatakan hubungan A dan B dengan cara yang lebih sederhana.

3. Jika $A \subseteq B$ dan $C \cap B^c \neq \emptyset$, bagaimana kesimpulan Anda mengenai hubungan A dan C?
4. Buatlah diagram Venn yang menyajikan $A \subseteq C$ dan $B \cap C^c \neq \emptyset$.
5. Apakah asumsi-asumsi berikut ini secara bersama konsisten?

$$\begin{aligned} B \cap C &= \emptyset \\ (A \cap C) \setminus B &= \emptyset \\ (A \cap B) \setminus C &= \emptyset \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

6. Apakah asumsi-asumsi berikut ini secara bersama konsisten?

$$\begin{aligned} C &\neq \emptyset \\ A \cap B &\neq \emptyset \\ A \cap C &= \emptyset \\ (A \cap B) \setminus C &= \emptyset \end{aligned}$$

7. Apakah asumsi-asumsi berikut ini secara bersama konsisten?

   Beberapa orang Madangkara hidup sebagai pertapa.
   Tidak ada pertapa yang mencuri harta rakyat jelata.
   Beberapa orang Madangkara mencuri harta rakyat jelata.

8. Misal diasumsikan bahwa:

   Semua naga emas mati.
   Tidak ada naga emas yang mati.

   Dapatkah disimpulkan bahwa tidak ada naga emas?
9. Apakah asumsi-asumsi pada Soal 8 secara bersama konsisten?

Periksalah validitas argumentasi pada Soal 10–17 dengan menggunakan diagram Venn. Berikan keterangan bagian (daerah) pada diagram yang menunjukkan valid atau tidaknya argumentasi tersebut.

10. $A \cap B \subseteq C^c$
    $A \cup C \subseteq B$
    $\therefore A \cap C = \emptyset$

11. $A \subseteq (B \cup C)^c$
    $B \subseteq (A \cup C)^c$
    $\therefore B = \emptyset$

12. $A^c \subseteq (B \cap C)^c$
    $C \subseteq A^c$
    $B \subseteq A \cup C^c$
    $\therefore (B \cup C)^c \subseteq A^c$

13. $C^c \subseteq (A \cup B)^c$
    $C \subseteq A^c$
    $B \subseteq A^c \cap C$
    $\therefore (B \cup C)^c \subseteq A$

14. Semua mahasiswa berlaku tertib saat ujian.
    Ada mahasiswa yang bukan pembohong.
    $\therefore$ Ada pembohong yang tidak tertib saat ujian.

15. Semua mahasiswa berlaku tertib saat ujian.
    Beberapa pembohong tidak tertib saat ujian.
    $\therefore$ Ada pembohong yang bukan mahasiswa.

16. Semua pembohong berlaku tertib saat ujian.
    Beberapa mahasiswa bukan pembohong.
    $\therefore$ Beberapa mahasiswa tidak tertib saat ujian.

17. Seorang pembohong tidak tertib saat ujian.
    Semua mahasiswa bukan pembohong.
    $\therefore$ Tidak ada mahasiswa yang tidak tertib saat ujian.

5.5 *Sifat Dasar Operasi pada Himpunan*

Beberapa sifat operasi pada himpunan telah disinggung pada bagian-bagian sebelumnya, termasuk menggunakan diagram Venn untuk menguji sifat-sifat tersebut. Cara yang lebih tepat dan mudah diterapkan adalah dengan membawa kebenaran dari hubungan-hubungan antar semua himpunan yang terlibat ke bentuk formula yang sesuai dan diperiksa menggunakan ekivalensi tautologi. Sebagai contoh, ingin ditunjukkan bahwa untuk sebarang dua himpunan A dan B berlaku

$$(1) \quad A \cap B = B \cap A$$

Berdasarkan definisi operasi gabungan, diketahui bahwa untuk sebarang unsur x berlaku

$$(2) \quad x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B$$

Selain itu, bentuk ini adalah ekivalensi tautologi:

(3) $x \in A \wedge x \in B \Longleftrightarrow x \in B \wedge x \in A$

Sesuai dengan bentuk (2) dapat diperoleh

(4) $x \in B \cap A \Longleftrightarrow x \in B \wedge x \in A$

Dengan menggabungkan hasil (2)–(4) dan menggunakan sifat transitifitas dan simetri dari ekivalensi dapat diperoleh:

(5) $x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in B \cap A$

dan dengan Aturan Perluasan, dapat disimpulkan bahwa

(6) $A \cap B = B \cap A$

Penurunan dari (5) ke (6) adalah biasa dan umumnya tidak dituliskan, demikian pula dari (1) dan (2). Selanjutnya semua ekivalensi di atas dapat disajikan dalam bentuk bukti informal seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in B \cap A. \end{aligned}$$

Cara ini selanjutnya yang akan sering digunakan dalam pembuktian.

CONTOH 5.5.1 Buktikan bahwa $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.

Bukti.

1. $x \in A \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \cap B$
2. $\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)$
3. $\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)$
4. $\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$
5. $\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$
6. $\Leftrightarrow x \in A \setminus B.$ ◄

Berikut ini disajikan tabel sifat kesamaan dan beberapa sifat dasar yang terkait. Pada Tabel 5.1 tautologi yang bersesuaian diberikan pada bagian kiri.

Tabel tersebut sesungguhnya tidak baku, dalam arti beberapa bagian pada tabel tersebut sebenarnya dapat diturunkan langsung dari beberapa bagian yang lain dalam tabel itu juga. Misalnya, bagian 16

Tabel 5.1: *Kesamaan dan Sifat Dasar Operasi pada Himpunan*

	TAUTOLOGI	KESAMAAN OPERASI PADA HIMPUNAN
1.	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	$A \cup B = B \cup A$
2.	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$A \cap B = B \cap A$
3.	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4.	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5.	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7.	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8.	$p \vee p \Leftrightarrow p$	$A \cup A = A$
9.	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$A \cap A = A$
10.	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	$(A^c)^c = A$
11.	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
12.	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
13.	$p \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$	$A \cup \emptyset = A$
14.	$p \wedge \neg(q \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$	$A \setminus \emptyset = A$
15.	$p \wedge \neg(q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg r)$	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
16.	$p \wedge \neg(q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
	KONTRADIKSI	KESAMAAN OPERASI PADA HIMPUNAN
17.	$p \wedge \neg p$	$A \setminus A = \emptyset$
18.	$p \wedge (q \wedge \neg q)$	$A \cap \emptyset = \emptyset$

dapat diperoleh dari tautologi 12 dan penerapan tautologi 7. Selain itu, tabel tersebut juga masih dapat dikembangkan lebih panjang lagi dengan berbagai variasinya.

Satu hal yang perlu diperhatikan untuk pembuktian yang melibatkan himpunan kosong $\emptyset$ atau himpunan semesta $\mathscr{S}$, adalah kenyataan bahwa untuk setiap x berlaku

$$x \in \mathscr{S}$$
$$x \notin \emptyset.$$

Dengan sifat ini, salah satunya dapat ditunjukkan bahwa $\emptyset \neq \mathscr{S}$. (Buktikan untuk latihan.)

Selain menggunakan ekivalensi tautologi, seperti dalam Tabel 5.1, implikasi tautologi lebih mudah diterapkan untuk kasus inklusi himpunan.

CONTOH 5.5.2 Buktikan bahwa $A \cap B \subseteq A$.

Bukti.

1.	$x \in A \cap B$	$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge x \in B$
2.		$\Rightarrow$	$x \in A$ ◄

Baris 1 adalah ekivalensi, sedangkan ruas kanan dari 1 secara tautologi berimplikasi ruas kanan dari 2 (ingat Aturan Penyederhanaan), tetapi ini tidak ekivalen secara tautologi.

Dalam pembuktian yang melibatkan inklusi himpunan ada satu hal yang harus diperhatikan, sebagaimana dalam contoh berikut ini.

CONTOH 5.5.3 Buktikan bahwa $(A \cap B) \setminus (B \cap C) \subseteq A$.

Bukti.

1.	$x \in (A \cap B) \setminus (B \cap C)$	$\Leftrightarrow$	$x \in (A \cap B) \wedge x \notin (B \cap C)$
2.		$\Rightarrow$	$x \in (A \cap B)$
3.		$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge x \in B$
4.		$\Rightarrow$	$x \in A$ ◄

Perhatikan bahwa baris 3 ekivalen secara tautologi dengan baris 2, sehingga digunakan operator ekivalen yang menunjukkan hubungan baris 3 dengan ruas kanan baris 2. Tetapi perlu cermat mengartikan tanda implikasi pada baris 2 yang berlaku untuk menunjuk hubungan baris 3 dengan ruas kiri baris 1. Demikian pula baris terakhir yang menggunakan tanda implikasi, dengan sendirinya menunjukkan hubungan baris 4 dengan ruas kiri baris 1. Ingat bahwa implikasi adalah bagian searah dari biimplikasi.

SOAL-SOAL LATIHAN 5.5

1. Berikan contoh penyangkal untuk menunjukkan bahwa secara umum operasi selisih himpunan tidak bersifat komutatif.

2. Berikan contoh penyangkal untuk menunjukkan bahwa secara umum operasi selisih himpunan tidak bersifat asosiatif.
3. Berikan contoh penyangkal untuk menunjukkan bahwa secara umum operasi selisih himpunan tidak bersifat distributif terhadap gabungan, yaitu tidak berlaku $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.
4. Apakah operasi selisih himpunan bersifat distributif terhadap irisan? Berilah penjelasan.
5. Buktikan validitas hubungan inklusi untuk sebarang himpunan A, B, dan C berikut ini.

   (a) $A\subseteq A\cup B$
   (b) $A\setminus B\subseteq A$
   (c) $A\setminus(B\cup C)\subseteq A\setminus(B\cap C)$
   (d) $(A\cap B)\setminus C\subseteq(A\cup B)\setminus C$

6. Dengan menggunakan sifat-sifat pada Tabel 5.1, buktikan masing-masing pernyataan berikut ini.

   (a) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$
   (b) $A\subseteq B \wedge B\subseteq A \Rightarrow A=B$
   (c) $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$
   (d) $A\subset B \Rightarrow \neg(B\subset A)$
   (e) $A\subset B \wedge B\subset C \Rightarrow A\subset C$
   (f) $A\cap B\subset A \Rightarrow A\neq B$
   (g) $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow A\setminus B\subset A$

7. Dengan menggunakan definisi himpunan semesta $\mathscr{S}$ dan komplemen himpunan, buktikan masing-masing kesamaan berikut ini.

   (a) $\mathscr{S}^c=\emptyset$
   (b) $\emptyset^c=\mathscr{S}$
   (c) $(A^c)^c=\emptyset$
   (c) $A\cap A^c=\emptyset$
   (e) $A\cup A^c=\mathscr{S}$
   (f) $A\cap B^c=A\setminus B$

5.6 *Simbolisasi Bahasa Sehari-hari*

Telah beberapa kali diungkapkan di bagian-bagian sebelumnya, bahwa penggunaan bahasa sehari-hari sering dijumpai kalimat-kalimat yang berubah-ubah maknanya, diantaranya tergantung oleh siapa dan dalam situasi apa kalimat itu disampaikan. Selain itu, yang lebih membingungkan jika bahasa sehari-hari yang disampaikan dalam bahasa tulis. Seringkali satu kata digunakan pada dua kesempatan yang berbeda. Contoh sederhananya seperti penggunaan kata "adalah" yang digunakan untuk mengungkapkan simbol "$\in$" atau "$\subseteq$" pada saat bersamaan. Sebaliknya, juga sering dijumpai penggunaan kata "adalah", "adalah himpunan bagian dari" atau "adalah termasuk" untuk satu maksud mengungkapkan simbol "$\subseteq$."

Dengan menerjemahkan kalimat sehari-hari ke dalam bentuk simbolik akan memperjelas makna yang dimaksud. Namun demikian, tentu saja tidak semua kalimat sehari-hari dapat (atau mudah) diterjemahkan dalam bentuk simbolik.

Pada subbab ini, diuraikan hanya beberapa kalimat yang dapat diterjemahkan dalam bentuk simbolik yang terdiri dari satu huruf yang mewakili himpunan, tanda kurung, dan simbol-simbol berikut:

$$\cap, \qquad \cup, \qquad \neg, \qquad \emptyset, \qquad =, \qquad \neq, \qquad \subseteq$$

Disini tidak digunakan simbol "$\subset$," sebab simbol "$\subseteq$" dengan definisinya sudah cukup mewakili. Sedangkan simbol "$\in$" juga tidak digunakan sebab dalam bahasan disini dibatasi untuk himpunan-himpunan yang setingkat, dalam arti himpunan-himpunan bagian dari satu himpunan semesta tertentu. Penggunaan bentuk simbolik ini pada dasarnya ekivalen dengan bahasa silogisma klasik. Bentuk simbolik ini sudah mencukupi untuk menyajikan pernyataan-pernyataan yang memuat predikat satu-tempat, tetapi tidak akan mencukupi kerumitan bahasa yang melibatkan predikat dua-tempat atau lebih.

Pernyataan dalam Bahasa Indonesia yang berbentuk "Semua ... adalah ... ," dengan dua bagian kosong diisi dengan kata benda yang lazim seperti "ular" atau "binatang melata" atau "laki-laki," dengan maksud himpunan yang disebut pada kata benda pertama merupakan himpunan bagian dari himpunan yang disebut pada kata benda ke-dua. Sebagai contoh:

(1) Semua mahasiswa adalah penggemar Kalkulus

berarti

Himpunan mahasiswa $\subseteq$ himpunan penggemar Kalkulus,

atau menggunakan "M" untuk mewakili "himpunan mahasiswa" dan "K" mewakili "himpunan penggemar Kalkulus" dapat ditulis

$$M \subseteq K$$

Dengan menggunakan kesamaan operasi pada himpunan, tentu saja pernyataan di atas dapat pula diungkapkan dalam bentuk simbolik yang ekivalen:

$$M \cup K = K \qquad \text{atau} \qquad M \cap \neg K = \emptyset$$

dan sebagainya. Bentuk-bentuk simbolik yang ekivalen dapat dipilih sesuai yang diinginkan, dengan mempertimbangkan yang paling memudahkan untuk memahami suatu kalimat pernyataan. Dalam pembahasan seperti itu, himpunan semesta mudah ditetapkan sehingga batasan untuk komplemen suatu himpunan juga mudah dipahami. Sebagai contoh, misalkan $\mathscr{S}$ ditetapkan sebagai himpunan semua orang.

Seperti sebelumnya, penggunaan terjemahan untuk pernyataan dalam bentuk "Semua ... adala ..." juga digunakan apabila bagian kosong ke-dua diisi dengan kata sifat. Sebagai contoh

Semua mahasiswa adalah beriman

yang berarti

Himpunan mahasiswa $\subseteq$ himpunan orang beriman

atau dengan singkatan yang jelas, misalnya

$$M \subseteq I$$

Dalam bentuk singkat kadang pernyataan seperti di atas diungkapkan tanpa menggunakan kata "himpunan," misalnya diungkapkan

Mahasiswa adalah pemuda

dan bukannya

Semua mahasiswa adalah pemuda

yang dapat ditulis dalam bentuk simbolik dengan

$$M \subseteq P$$

Perlu berhati-hati saat menerjemahkan pernyataan seperti di atas. Untuk bahasa sehari-hari sering dijumpai penggunaan bentuk yang sama untuk mengungkapkan hal yang berbeda; seperti contoh berikut ini.

Mahasiswa adalah sangat banyak

bukan berarti

Himpunan mahasiswa $\subseteq$ himpunan sesuatu yang sangat banyak

(yang berarti setiap mahasiswa sangat banyak) tetapi lebih tepatnya dimisalkan M sebagai himpunan mahasiswa dan B adalah himpunan yang mempunyai anggota sangat banyak, sehingga dapat ditulis

$$M \in B$$

Serupa dengan pernyataan itu adalah

Pengurus senat mahasiswa adalah sembilan

diartikan himpunan pengurus senat mahasiswa adalah termuat dalam himpunan yang terdiri dari sembilan anggota.

Dalam Bahasa Indonesia sehari-hari pernyataan berbentuk "Beberapa ... adalah ..." atau "Terdapat ... yang ..." atau "Ada ... yang ..." dengan bagian-bagian kosong diisi kata benda yang lazim atau mungkin kata sifat untuk bagian kosong yang ke-dua, mempunyai arti bahwa irisan dua himpunan yang bersesuaian dengan kata-kata yang diisikan tidak kosong. Sebagai contoh:

(2) Beberapa orang mahasiswa adalah penggemar Kalkulus

berarti ada sekurang-kurangnya satu orang yang menjadi mahasiswa sekaligus sebagai penggemar Kalkulus, dan ini dapat ditulis simbolik

$$M \cap K \neq \emptyset$$

Perhatikan bentuk pernyataan (2) di atas, bahwa dua himpunan yang bersesuaian kedua-duanya tidak kosong. Akan tetapi, pernyataan seperti ini tidak dapat diturunkan dari pernyataan (1). Dalam logika tradisional, hal ini dibenarkan; tetapi logika moderen (seperti yang dianut disini) tidak membenarkan penurunan "Beberapa A adalah B"

dari “Semua A adalah B.” Untuk memperjelas hal ini, perhatikan contoh lain yang berikut ini. Misalkan benar bahwa

> Semua penggemar Logika dan Kalkulus adalah pengemar Logika

maka tidak benar disimpulkan bahwa

> Beberapa penggemar Logika dan Kalkulus adalah pengemar Logika

meskipun sebagai pernyataan yang berdiri sendiri, pernyataan terakhir tersebut benar.

Dalam Bahasa Indonesia, pernyataan dalam bentuk “Tidak ada ... adalah ... ” atau “Tidak ada ... yang ... ” dengan kedua bagian kosong diisi kata benda biasa atau kosong yang ke-dua diisi kata sifat, mempunyai makna tidak ada satu pun yang sekaligus menjadi anggota dua himpunan yang bersesuaian dengan dua kata yang diisikan pada bagian kosong tersebut; dengan kata lain, irisan dua himpunan tersebut kosong. Sebagai contoh

> Tidak ada mahasiswa yang menyukai Kuliah Lapangan

diterjemahkan dalam bentuk simbolik:

$$M \cap L = \emptyset$$

Perhatikan bahwa bentuk simbolik yang terakhir ini adalah ekivalen dengan

$$M \subseteq L^c$$

dan dengan mengingat bahwa komplemen berkaitan dengan negasi, maka bentuk simbolik ini dapat diterjemahkan dalam kalimat:

> Semua mahasiswa adalah tidak menyukai Kuliah Lapangan

Sekali lagi, kata “adalah” dapat dihilangkan untuk *menghaluskan* ungkapan; dan kalimat terakhir di atas dapat ditulis

> Semua mahasiswa tidak menyukai Kuliah Lapangan

Dari bentuk-bentuk di atas, secara umum dalam Bahasa Indonesia ungkapan (pernyataan) dalam bentuk “Tidak ada A yang B” ekivalen dengan “Semua A tidak B.”

Pernyataan dalam Bahasa Indonesia berbentuk “Beberapa ... adalah tidak ...” atau “Beberapa ... yang tidak ...” atau atau “Beberapa ... tidak ...” dengan kedua bagian kosong diisi kata benda biasa atau bagian kosong yang ke-dua diisi kata sifat, mempunyai makna ada sesuatu yang menjadi anggota himpunan yang bersesuaian dengan kata pertama, dan tidak menjadi anggota himpunan yang bersesuaian dengan kata ke-dua. Jelas dalam hal ini, irisan dari himpunan yang pertama dengan komplemen himpunan yang ke-dua tidak kosong. Perhatikan contoh ini:

Beberapa mahasiswa tidak gemar mendaki gunung

diterjemah menjadi

$$M \cap G^c \neq \emptyset$$

Selanjutnya, berikut ini terjemahan beberapa pernyataan pendek yang sedikit agak rumit.

Kata “dan” sering berkaitan dengan irisan dua himpunan. Sebagai contoh, pernyataan

Semua mahasiswa adalah pandai dan terampil

diterjemahkan dalam bentuk simbolik

$$M \subseteq P \cap T$$

demikian juga untuk kata “tetapi”:

Mahasiswa baru adalah konyol tapi sangat bersemangat

diterjemahkan

$$M \subseteq K \cap S$$

Perlu diperhatikan bahwa terjemahan kata “dan” atau “tetapi” yang muncul pada subjek berbeda dengan kemunculan pada predikat. Perhatikan pernyataan

Mahasiswa pemalas dan bebal adalah sebagian yang gagal

tidak diterjemahkan sebagai

$$(P \cap B) \subseteq G$$

tetapi terjemahan yang tepat adalah

$$(P \cup B) \subseteq G$$

Pernyataan di atas mempunyai arti dua pernyataa berikut ini benar:

Mahasiswa pemalas adalah sebagian yang gagal

dan

Mahasiswa bebal adalah sebagian yang gagal

yang berturut-turut diterjemahkan menjadi

$$P \subseteq G \qquad \text{dan} \qquad B \subseteq G$$

Jelas bahwa dua pernyataan ini benar untuk pernyataan $(P \cup B) \subseteq G$ yang bernilai benar. Tetapi, tidak demikian untuk $(P \cap B) \subseteq G$ bernilai benar, yang menghasilkan $P \cap G \neq \emptyset$ tetapi tidak harus $P \subseteq G$, dan demikian juga untuk $B \subseteq G$.

Perlu ditegaskan lagi bahwa dalam pemakaian bahasa sehari-hari sering kali tidak digunakan kalimat dalam bentuk baku, seperti misalnya kata "adalah" yang menunjuk atau mewakili predikat lebih sering tidak digunakan. Sebagai contoh

Beberapa mahasiswa peminum kopi dan perokok

dapat diterjemahkan menjadi

$$M \cap K \cap R \neq \emptyset$$

dengan "M" menunjuk hipunan mahasiswa, "K" untuk himpunan peminum kopi, dan R menyatakan himpunan perokok. Untuk memperjelas, bentuk simbolik di atas dapat ditulis $M \cap (K \cap R)$.

Berikut ini contoh yang agak rumit lagi.

CONTOH 5.6.1 Terjemahkan kalimat berikut ini ke dalam bentuk simbolik:

Beberapa mahasiswa yang suka minum teh tidak suka minum kopi maupun minum susu

Penyelesaian. Misalkan "M" adalah himpunan mahasiswa, "T" himpunan orang yang suka minum teh, "K" himpunan orang yang suka minum kopi, dan "S" himpunan orang yang suka minum susu. Bentuk umum dari pernyataan di atas adalah "Beberapa P tidak Q."

Subjek dari kalimat tersevdbut dapat disimbolkan

$$M \cap T$$

yaitu "mahasiswa yang suku minum teh." Sedangkan predikatnya dapat disimbolkan

$$K \cup S$$

Dengan demikian keseluruhan pernyataan tersebut disombolkan dengan

$$(M \cap T) \cap \neg(K \cup S) \neq \emptyset$$

yang ekivalen dengan

$$M \cap T \cap \neg K \cap \neg S \neq \emptyset \qquad \blacktriangleleft$$

Dalam Bahasa Indonesia, kata "maupun" sama artinya dengan "dan," tetapi digunakan untuk menggabungkan kata yang setara di depan dan di belakang kata itu dan berlaku bersama-sama untuk keterangan yang mendahuluinya, biasanya untuk kata keterangan "tidak". Jadi, untuk contoh di atas, keterangan "tidak suka" menjelaskan "minum kopi" juga menjelaskan "minum susu." Bandingkan dengan pernyataan berikut ini, dengan menggunakan kata "dan" menggantikan kata "maupun"

> Beberapa mahasiswa yang suka minum teh tidak suka minum kopi dan minum susu

Secara simbolik, pernyataan tersebut dapat diterjemahkan menjadi:

$$(M \cap T) \cap (\neg K \cup S) \neq \emptyset$$

Dalam hal ini, kata "tidak suka" hanya keterangan untuk "minum kopi" dan tidak berlaku untuk "minum susu." Sedangkan untuk kata "atau pun" berlaku seperti kata "maupun" tetapi sebagai pengganti kata "atau."

SOAL-SOAL LATIHAN 5.6

1. Diberikan:

$$\begin{array}{ccl}
\mathscr{S} & = & \text{himpunan semua manusia.} \\
I & = & \text{himpunan semua orang Indonesia.} \\
K & = & \text{himpunan semua orang yang gemar minum kopi.} \\
C & = & \text{himpunan semua cendekiawan.} \\
P & = & \text{himpunan semua pembohong.} \\
B & = & \text{himpunan semua orang bijaksana.} \\
T & = & \text{himpunan semua orang yang gemar minum teh.} \\
J & = & \text{himpunan semua orang yang gemar minum jamu.}
\end{array}$$

   Terjemahkan masing-masing pernyataan berikut ini ke dalam bentuk simbolik.

   (a) Beberapa orang Indonesia yang suka minum jamu adalah orang bijaksana.
   (b) Tidak ada orang cendekia yang orang Indonesia.
   (c) Orang yang gemar minum jamu dan minum teh juga gemar minum kopi.
   (d) Semua pembohong Indonesia bukan orang bijaksana maupun cendekiawan.
   (e) Beberapa cendekiawan Indonesia yang minum jamu tidak minum teh dan tidak juga kopi.
   (f) Seorang bijaksana tidak minum kopi maupun teh.
   (g) Beberapa cendekiawan bukan orang bijaksana.
   (h) Semua orang yang gemar minum jamu juga minum teh tetapi tidak kopi.

2. Dimisalkan:

$\mathscr{S}$	=	himpunan data penelitian.
P	=	himpunan data penelitian yang sesuai prediksi.
O	=	himpunan data penelitian yang dapat diamati.
L	=	himpunan data penelitian yang lepas dari pengamatan.
B	=	himpunan data penelitian yang benar.
K	=	himpunan data penelitian yang memperkuat hipotesis.
H	=	himpunan data penelitian yang memperlemah hipotesis.

Terjemahkan masing-masing pernyataan berikut ini ke dalam bentuk simbolik.

(a) Semua data yang sesuai prediksi dapat diamati.
(b) Beberapa data yang lepas dari pengamatan adalah data yang sesuai prediksi.
(c) Semua data yang sesuai prediksi yang lepas dari pengamatan merupakan data yang menguatkan hipotesis.
(d) Tidak ada data yang dapat diamati yang tidak sesuai dengan prediksi.
(e) Tidak ada data benar yang teramati yang tidak sesuai prediksi.
(f) Beberapa data yang lepas dari pengamatan yang memperlemah hipotesis.
(g) Beberapa data benar yang termasuk memperkuat hipotesis adalah data yang teramati tetapi tidak sesuai prediksi.
(h) Beberapa data yang lepas dari pengamatan yang tidak sesuai prediksi adalah data yang memperlemah hipotesis.
(i) Semua data yang lepas dari pengamatan yang sesuai prediksi termasuk data yang teramati dan terbukti memperkuat hipotesis.

3. Buatlah diagram Venn yang sesuai untuk pernyataan-pernyataan yang diberikan berikut ini, dan kemudian jawablah pertanyaan yang ada berdasarkan diagram Venn yang Anda buat. (Jawaban tidak tunggal.)

(a) Tidak ada anchaq yang bukan bechaq, dan tidak ada bechaq yang bukan anchaq. Bagaimanakah hubungan anchaq dan bechaq?
(b) Jika diketahui bahwa setiap keluarga Woodi termasuk keluarga Coobi dan bahwa beberapa keluarga Looqi tidak termasuk

keluarga Coobi. Bagaimana hubungan keluarga Woodi dan keluarga Looqi yang dapat Anda simpulkan dari keterangan tersebut.

(c) Semua mahasiswa adalah orang pandai. Tidak ada orang pandai yang tidak suka belajar. Bagaimana hubungan antara mahasiswa dan orang yang suka belajar berdasarkan premis-premis tersebut?

(d) Setiap nikmat yang Anda dapat pasti bermanfaat. Beberapa karya yang Anda hasilkan tidak bisa bermanfaat. Bagaimana hubungan yang mengaitkan antara karya yang Anda punyai dan nikmat yang Anda dapat?

(e) Rasa syukur adalah bagian dari keberhasilan. Tidak ada keberhasilan yang tidak memberikan kebahagiaan. Bagaimana hubungan yang dapat Anda simpulkan mengenai rasa syukur dan kebahagiaan?

—o0o—

Bab 6

Relasi

Bab ini membahas tentang *relasi* yang menghubungkan besaran-besaran, dengan penekanan pada relasi biner beserta sifat-sifat dan operasinya. Relasi merupakan salah satu bagian mendasar untuk pengembangan matematika. Bab ini menjembatani dari logika dasar ke teori logika lanjut beserta kajian terapannya.

6.1 Pasangan Terurut dan Definisi Relasi

Pasangan terurut adalah pasangan objek-objek yang dibedakan dengan urutannya. Hal ini jelas berbeda dengan himpunan yang tidak mempermasalahkan urutan anggota-anggotanya. Pasangan terurut dua objek ditulis dengan (a, b), dengan a disebut *komponen pertama* dan b disebut *komponen ke-dua* dalam pasangan urutan tersebut. Gagasan utama pasangan terurut adalah mengenai kesamaan, yang didefinisikan bahwa dua pasangan terurut dikatakan sama apabila komponen-komponen yang seletak adalah sama. Dalam bentuk simbolik dapat dituliskan

$$(a,b) = (c,d) \iff a = b \wedge c = d$$

Dengan pengertian ini, sebagai contoh, dapat periksa bahwa

$$\{1,2\} = \{2,1\}$$

tetapi

$$(1,2) \neq (2,1)$$

Selanjutnya dapat didefinisikan tripel terurut, yakni urutan rangkap tiga, dengan menggunakan pengertian pasangan terurut. Dalam hal ini, tripel terurut adalah pasangan terurut dengan komponen pertamanya berupa pasangan terurut, yaitu

$$(a,b,c) = ((a,b),c)$$

Secara umum, didefinisikan n-tupel terurut sebagai pasangan terurut:

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n) = ((a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}),a_n)$$

Pembahasan dalam buku ini akan lebih banyak bekerja dengan pasangan terurut, sedangkan untuk n-tupel terurut hanya sesekali dibicarakan sebagai contoh atau pembanding. Kesamaan tripel terurut: $(a,b,c) = (p,q,r)$ jika dan hanya jika $a = p$, $b = q$, dan $c = r$. Hal ini dapat dijelaskan berikut ini. Dengan pengertian tripel terurut, kesamaan tersebut adalah

$$((a,b),c) = ((p,q),r)$$

dan dengan kesamaan pasangan terurut didapat

$$(a,b) = (p,q) \qquad \text{dan} \qquad c = r$$

dengan kesamaan pasangan terurut lagi didapat

$$a = p, \qquad b = q, \qquad \text{dan} \quad c = r$$

Perlu juga diperhatikan bahwa penambahan unsur yang sama pada suatu himpunan tidak berarti apa-apa, dan berbeda dengan tripel terurut, misalnya:

$$\{1,2,2\} = \{1,2\} \qquad \text{tetapi} \qquad (1,2,2) \neq (1,2)$$

sebab $(1,2,2) = ((1,2),2)$ sementara itu $(1,2) \neq 1$.

Salah satu pasangan terurut yang cukup sering digunakan adalah pasangan terurut yang dibangun dari dua himpunan yang diketahui. Didefinisikan ***hasil-kali Cartesian*** dari dua himpunan A dan B, ditulis dengan $A \times B$, sebagai himpunan semua pasangan terurut dengan komponen pertama anggota A dan komponen ke-dua anggota B. Jadi, untuk $C = A \times B$ didapat

$$C = \{(a,b) \ : \ a \in A \ \text{ dan } \ b \in B\}$$

CONTOH 6.1.1 Untuk $P = \{a,b\}$ dan $Q = \{1,2,3\}$, dapatkan $R = P \times Q$.

Penyelesaian. Pasangan-pasangan terurut dengan komponen pertama di A dan komponen ke-dua di B dapat ditabelkan sebagai berikut:

$\times$	1	2	3
a	$(a,1)$	$(a,2)$	$(a,3)$
b	$(b,1)$	$(b,2)$	$(b,3)$

Jadi,

$$R = \{(a,1),\ (a,2),\ (a,3),\ (b,1),\ (b,2),\ (b,3)\}. \qquad \blacktriangleleft$$

Untuk dua kelompok, dua keluarga, atau secara umum dua himpunan (atau lebih), sering diperlukan pengetahuan tentang hubungan diantaranya. Kata “relasi” sudah sangat biasa dijumpai dalam pembicaraan sehari-hari, yang sebenarnya juga mengungkapkan hubungan atau kaitan antara dua dua himpunan (atau lebih) yang ditentukan oleh hubungan antar objek-objek dalam dua himpunan tersebut. Dalam bahasan disini suatu relasi dilambangkan dengan huruf besar. Misal untuk mengungkapkan relasi antara Soekarno dan Megawati, dapat dituliskan dengan

(Soekarno) A (Megawati)

dengan A melambangkan relasi ayah. Dengan cara serupa, dapat ditulis suatu relasi K yang didefinisikan untuk setiap x dan y, dengan xKy jika dan hanya jika x lebih kecil dari y. Perhatikan bahwa contoh xKy di atas juga dibicarakan pada Bab 4 dengan K suatu predikat.

Untuk relasi lebih dari dua, akan lebih mudah penulisannya dengan meletakkan simbol relasi di bagian depan dan diikuti objek-objek yang dikaitkannya secara berurutan. Misalnya, didefinisikan relasi T untuk setiap x, y, dan z dengan $T(x, y, z)$ jika dan hanya jika x dan y orang tua z. Sebagai contoh T(Soekarno, Fatmawati, Megawati).

Dalam pengertian sehari-hari dapat dengan mudah dipahami hubungan antara dua hal. Akan tetapi pengertian hubungan tersebut kadang sangat samar, meskipun disaat yang lain sangat tepat. Secara tegas disini dikatakan bahwa sebarang himpunan n-tupel terurut adalah relasi. Salah satu relasi yang sering digunakan adalah ***relasi biner*** yang didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut. Dengan definisi ini, relasi *cinta* adalah termasuk relasi biner dengan (x, y) yang berarti x cinta y. Relasi *lebih kecil dari* juga suatu relasi biner dengan (x, y) yang berarti x lebih kecil dari y.

Jika relasi biner adalah himpunan pasangan terurut, maka relasi antara tiga objek adalah himpunan triple terurut, dan seterusnya secara umum relasi untuk n objek akan berupa himpunan n-tupel terurut. Relasi ini sering dikenal dengan "n-ary" yakni relasi yang anggota-anggotanya n-tupel. Khusus untuk $n = 2$ disebut relasi biner.

Karena suatu relasi adalah suatu himpunan, maka dapat digunakan "$\in$" untuk menunjuk sesuatu yang memenuhi suatu relasi. Sebagai contoh, lebih baik menggunakan ungkapan simbolik

$$(\text{Johan, Jihan}) \in C$$

daripada

$$\text{Johan } C \text{ Jihan}$$

untuk menyatakan bahwa Johan mencintai Jihan. Demikian juga ditulis

$$(\text{Johan, Jihan, Joan}) \in T$$

daripada

$$T(\text{Johan, Jihan, Joan})$$

untuk menyatakan, misalnya, Johan dan Jihan adalah orangtua Joan.

Perlu diingat bahwa relasi adalah himpunan yang memuat pasangan terurut, sedangkan pasangan terurut sendiri bukanlah relasi. Sebagai contoh

$(19, \text{Flores})$	bukan relasi
$\{(19, \text{Flores})\}$	relasi
$\{\{(19, \text{Flores})\}\}$	bukan relasi

Untuk selanjutnya, berikut ini adalah beberapa istilah yang sering digunakan untuk relasi biner. Jika B adalah relasi biner maka ***domain*** dari B, dinotasikan dengan $\mathscr{D}(B)$, didefinisikan sebagai himpunan semua komponen pertama dari pasangan terurut dalam relasi tersebut; secara simbolik:

$$\mathscr{D}(B) = \big\{x \,:\, \exists y[(x, y) \in B]\big\}.$$

Sebagai contoh, misal A adalah relasi yang memuat (x, y) dengan hubungan (anak, ibu), maka $\mathscr{D}(A)$ adalah himpunan semua orang, karena setiap orang mempunyai ibu (kecuali Adam dan Hawa tentunya). Jika

$$K = \big\{\, (\emptyset, \text{Plato}),\ (\text{Romeo}, \text{Juliet}),\ (123, \text{Sabang})\, \big\}$$

maka

$$\mathscr{D}(K) = \{\emptyset,\ \text{Romeo},\ 123\}.$$

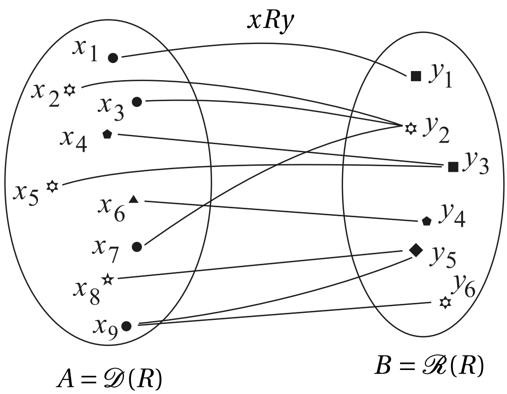
Range dari relasi biner B, dinotasikan dengan $\mathscr{R}(B)$, adalah himpunan semua komponen ke-dua dari pasangan terurut dalam relasi tersebut; secara simbolik dapat ditulis

$$\mathscr{R}(B) = \big\{y \,:\, \exists x[(x, y) \in B]\big\}.$$

Perhatikan kembali contoh relasi A di atas, bahwa $\mathscr{R}(A)$ adalah himpunan perempuan yang jadi ibu. Untuk contoh tersebut, irisan dari $\mathscr{D}(A)$ dan $\mathscr{R}(A)$ jelas tidak kosong, sebab semua ibu juga sebagai anak dari ibu yang lain. Untuk relasi K di atas, didapat

$$\mathscr{R}(K) = \big\{\text{Plato},\ \text{Juliet}, \text{Sabang}\big\}.$$

Suatu relasi R yang menghubungkan himpunan A (sebagai domain) dan himpunan B (sebagai range) dapat diilustrasikan dengan diagram seperti pada Gambar 6.1. Berdasarkan aturan relasi pada diagram



Gambar 6.1: *Relasi antara A dan B*

tersebut, relasi R adalah

$$R = \big\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_2), (x_4, y3), (x_5, y_3), (x_6, y_4), (x_7, y2), (x_8, y_5), (x_9, y_5), (x_9, y_6)\big\}$$

Perhatikan bahwa suatu relasi memungkinkan menghubungkan satu unsur di domain dengan lebih dari satu unsur di range. Pada diagram di atas, satu unsur x_9 dikaitkan dengan y_5 dan y_6. Sebagai contoh, relasi (ibu,anak) yang memungkinkan seorang ibu mempunyai beberapa anak. Sebaliknya, ada kemungkinan beberapa unsur di domain mempunyai hubungan dengan satu unsur di range. Untuk contoh diagram pada Gambar 6.1 unsur-unsur x_2, x_3, dan x_7 dihubungkan oleh R dengan satu unsur y_2; contohnya relasi (anak,ibu) yang mengaitkan beberapa orang anak dengan satu orang ibu.

SOAL-SOAL LATIHAN 6.1

---

1. Pandang $A = \{a, b\}$, $B = \{\emptyset\}$, $C = \{(a, b), (a, \emptyset)\}$.

   (a) Apakah $\mathscr{D}(C)$ himpunan bagian dari A?

(b) Apakah $\mathscr{R}(C)$ himpunan bagian dari B?
(c) Apakah C himpunan bagian dari hasil-kali Cartesian $A \times B$?

2. Dapatkan $\mathscr{D}(B)$ dan $\mathscr{R}(B)$ dari relasi biner B berikut ini. Kemudian jelaskan hubungan kedua himpunan tersebut.

   (a) B adalah relasi dengan bentuk hubungan (ayah,anak).
   (b) B adalah relasi dengan anggota (x, y) untuk x kakak laki-laki dari y.
   (c) B adalah relasi yang memuat semua pasangan terurut (m, h) dengan hubungan h adalah hewan yang memakan m.
   (d) B adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) untuk semua bilangan bulat x yang merupakan kelipatan bilangan bulat y.
   (e) B adalah relasi yang menghimpun (b, p) dengan b benda di angkasa raya yang dikelilingi planet p.

6.2 Sifat-sifat Relasi Biner

Pada bagian ini diuraikan sifat-sifat penting relasi biner, yang pada kenyataannya memainkan peran penting dalam lingkup yang cukup luas dan beragam dalam konteks ilmiah.

Suatu relasi (biner) B dikatakan ***refleksif di himpunan*** H jika untuk setiap $x \in H$ maka $(x, x) \in B$. Secara simbolik ditulis

$$B \text{ refleksif di } H \iff \forall x[x \in H \Rightarrow xBx].$$

Sebagai contoh, misal B_1 adalah relasi yang memuat semua pasangan terurut (a, b) apabila a mencintai b. Dalam contoh ini, B_1 refleksif di $\mathscr{D}(B_1)$ maupun di $\mathscr{R}(B_1)$, sebab setiap orang mencintai dirinya sendiri. Contoh lain, misal diberikan

$$H = \{0, 1\}$$
$$G = \{\text{ya, tidak, boleh}\}$$

dan

$$B_2 = \{(0,0),\ (0,\text{tidak}),\ (1,1),\ (1,\text{ya}),\ (\text{boleh, boleh})\}$$

maka relasi B_2 reflefsif di H tetapi tidak refleksif di G. Perhatikan bahwa setiap relasi adalah refleksif di $\emptyset$.

Suatu relasi B dikatakan irrefleksif di himpunan H jika untuk setiap $x \in H$ tidak berlaku xBx, atau secara simbolik dinyatakan

$$B \text{ irrefleksif di } H \iff \forall x[x \in H \Rightarrow \neg(xBx)].$$

Sebagai contoh, relasi yang menghubungkan ibu-anak adalah irrefleksif, sebab semua ibu bukan ibu dari dirinya sendiri. Demikian juga relasi $<$, tidak ada bilangan yang lebih kecil dari bilangan itu sendiri. Sedangkan untuk relasi B_2 di atas, terlihat bahwa B_2 tidak refleksif dan juga tidak irrefleksif di G. Dari sedikit contoh tersebut, dapat diamati bahwa sebarang relasi B di himpunan H mempunyai salah satu dari tiga sifat berikut:

(a) refleksif

(b) irrefleksif

(c) tidak (a) juga tidak (b)

Ketiga kemungkinan tersebut adalah saling lepas untuk sebarang himpunan $H \neq \emptyset$, tetapi jelas sebarang relasi akan refleksif sekaligus irrefleksif di $H = \emptyset$.

Suatu relasi B adalah ***simetrik di himpunan*** H jika untuk setiap x dan y di H, apabila $(x, y) \in B$ maka $(y, x) \in B$. Dengan bentuk simbolik ditulis:

$$B \text{ simetrik di } H \iff \forall x, y[x \in H \wedge y \in H \wedge xBy \Rightarrow yBx].$$

Sebagai contoh, relasi yang menghubungkan antar saudara sepupu adalah simetrik, sedangkan relasi cinta tidak. Demikian juga relasi adik-kakak adalah bukan relasi simetrik.

Pada contoh terakhir di atas tidak disebutkan himpunannya, yang berarti sifat itu berlaku di himpunan semestanya *(dalam hal ini himpunan semua orang) yang dianggap sudah jelas. Harus diingat bahwa jika tidak disebutkan himpunannya berarti keberlakuan sifat yang terkait adalah di himpunan semesta yang sesuai dan sudah jelas, bukan di sebarang himpunan.*

Suatu relasi B dikatakan ***asimetrik di himpunan*** H jika untuk semua x dan y di H, apabila xBy maka tidak berlaku yBx. Dalam bentuk simbolik, hal ini dituliskan

$$B \text{ asimetrik di } H \iff \forall x, y[x \in H \wedge y \in H \wedge xBy \Rightarrow \neg(yBx)].$$

Relasi ibu-anak jelas asimetrik, sedangkan relasi cinta bukan relasi simetrik juga bukan asimetrik. Demikian juga relasi "≤" bukan relasi simetrik dan bukan asimetrik.

Suatu relasi B adalah ***antisimetrik di himpunan*** H jika untuk setiap x dan y di H, apabila $(x, y) \in B$ dan $(y, x) \in B$ maka $x = y$. Dalam bentuk simbolik hal ini ditulis:

$$B \text{ antisimetrik di } H \iff \forall x, y[x \in H \wedge y \in H \wedge xBy \wedge yBx \Rightarrow x = y].$$

Sebagai contoh, relasi "≤" adalah relasi antisimetrik, demikian juga relasi inklusi himpunan "⊆" adalah relasi antisimetrik. Periksalah bahwa sebarang relasi yang asimetrik di H pasti antisimetrik di H!

Perhatikan bahwa suatu relasi bisa tidak simetrik, tidak asimetrik, juga tidak antisimetrik. Contoh yang paling sederhana adalah relasi cinta.

Suatu relasi B adalah ***transitif di himpunan*** H jika untuk setiap x, y, dan z di H, apabila (x, y) dan (y, z) di B maka $(x, z) \in B$. Secara simbolik hal ini dinyatakan:

$$B \text{ transitif di } H \iff \forall x, y, z[x \in H \wedge y \in H \wedge z \in H \wedge xBy \wedge yBz \Rightarrow xBz].$$

Relasi "≤" dan "⊆" jelas transitif, tetapi relasi ibu-anak bukan relasi transitif. Untuk contoh yang lain, pandang

$$C = \{\text{Soetomo}, 19, 8\}$$
$$D = \left\{\text{Tjokroaminoto}, 19, 8\right\}$$
$$B_3 = \{(\text{Soetomo}, 19),\ (\text{Soetomo}, 8),\ (19, \text{Soetomo}),\ (19, 8)\}$$

Tampak bahwa B_3 transitif di P tetapi tidak di Q. Transitifitas dapat dilihat dari adanya pasangan terurut (19, Soetomo) dan (Soetomo,8). Untuk memastikan transitifitas itu, haruslah (19,8) berada di B_3, dan kenyataannya demikian. Cara menguji transitifitas seperti contoh B_3 tersebut dapat menyesatkan, sebab secara umum tidak benar memutuskan bahwa suatu relasi bersifat transitif hanya dengan memeriksa satu kasus seperti itu. Untuk kasus yang berkaitan dengan himpunan tak-hingga, diperlukan cara yang sistematik untuk memeriksa sifat-sifat seperti di atas. Akan tetapi, kasus seperti itu diluar bahasan buku pengantar ini.

Suatu relasi B dikatakan ***terhubung*** di himpunan H jika untuk setiap x dan y di H, apabila $x \neq y$ maka xBy atau yBx. Dalam bentuk simbolik hal ini dapat dinyatakan

$$B \text{ terhubung di } H \iff \forall x, y[x \in H \wedge y \in H \wedge x \neq y \Rightarrow xBy \vee yBx].$$

Berdasarkan definisi di atas, dapat dikatakan bahwa suatu relasi B terhubung di H apabila setiap dua unsur di H yang berlainan terhubung ole relasi B. Relasi "$\leq$" dan "$<$" adalah contoh relasi yang terhubung di himpunan bilangan real.

Sifat lain yang mirip dengan keterhubungan adalah sifat berikut ini. Suatu relasi B dikatakan ***terhubung kuat*** di himpunan H jika untuk setiap x dan y di H, maka xBy atau yBx. Dalam bentuk simbolik:

$$B \text{ terhubung di } H \iff \forall x, y[x \in H \wedge y \in H \Rightarrow xBy \vee yBx].$$

Jelas bahwa suatu relasi yang terhubung kuat pasti terhubung. Relasi "$\leq$" adalah contoh relasi yang terhubung kuat, tetapi "$<$" tidak terhubung kuat di himpunan bilangan real.

SOAL-SOAL LATIHAN 6.2

Klasifikasikan tiap relasi biner B di himpunan H pada Soal 1–7 berdasarkan definisi yang sudah dibahas, dan berikan penjelasan yang memperkuat klasifikasi Anda.

1. B adalah relasi kakek, H himpunan semua orang.
2. Relasi xBy jika dan hanya jika $x > y - 1$ di H himpunan semua bilangan real.
3. Relasi xBy jika dan hanya jika $x < y - 1$ di H himpunan semua bilangan real.
4. $H = \{1, 2, \text{Trimurti}\}$, dan $B = \{(1, 2),\ (2, 1),\ (\text{Trimurti}, 1)\}$.

5. $H = \{1,3,7\}$, dan $B = \{(1,1),\ (3,3),\ (7,7)\}$.
6. $H = \{\text{Chairil}, \text{Anwar}, 1\}$, dan $B = \{(0,0),\ (\text{Chairil}, \text{Anwar}),\ (0,1)\}$.
7. H himpunan semua orang, dan relasi xBy apabila x orang yang satu tahun lebih muda dari y.
8. Misal $A = \{\text{Diponegoro}, \text{Surapati}\}$. Buatlah contoh, jika memungkinkan, relasi yang irrefleksif, simetrik, atau transitif di A.
9. Buatlah contoh hubungan kekeluargaan yang merupakan relasi transitif dan juga intransitif.
10. Buatlah contoh relasi biner yang tidak refleksif, tidak simetrik, dan juga tidak transitif.
11. Jika B suatu relasi simetrik, tunjukkan bahwa $\mathscr{D}(B) = \mathscr{R}(B)$.
12. Jika B suatu relasi simetrik dan transitif, tunjukkan bahwa B refleksif di $\mathscr{D}(B)$.

6.3 Beberapa Relasi Biner

Beberapa operasi biner dengan sifat-sifat dan kombinasinya yang telah dibahas pada subbab sebelumnya, akan dilengkapi pada subbab ini dengan beberapa relasi biner lain yang juga sangat banyak berguna.

Suatu relasi (biner) yang refleksif, simetrik, dan sekaligus transitif di himpunan H disebut relasi ***ekivalensi*** di H. Relasi kesamaan, yaitu "=", adalah contoh relasi ekivalensi di himpunan semua bilangan. Contoh yang lain adalah relasi "x dan y mempunyai berat badan sama," yang jelas tidak mengatakan x orang yang sama dengan y. Contoh dalam geometri adalah relasi "x mempunyai bentuk sama sebagaimana y," yang dalam hal ini bisa jadi x suatu segitiga sama-kaki dan y segitiga sama-sisi.

Hal penting yang berkaitan dengan suatu relasi ekivalensi di H adalah terbentuknya ***partisi*** H menjadi himpunan-himpunan bagian yang saling asing. Masing-masing himpunan bagian tersebut mempunyai anggota-anggota yang mempunyai sifat sama. Misalnya, himpunan semua orang dapat dipartisi oleh relasi “berat badan sama,” yang membentuk himpunan-himpunan bagian dengan anggota orang-orang yang mempunyai berat badan sama. Hal ini dirumuskan lebih jelas berikut ini.

Misal B relasi ekivalensi di H, dan untuk setiap $x \in H$ dibangun himpunan $[\![x]\!]$ sebagai berikut:

$$y \in [\![x]\!] \iff (y \in H \wedge xBy)$$

Notasi $[\![x]\!]$ dibaca dan diartikan sebagai ***kelas ekivalen-B*** dari x di H, atau kelas ekivalen-B *yang dibangun* oleh x. Mudah diperiksa bahwa setiap unsur dari H menjadi anggota tepat satu kelas ekivalen-B di H. Perhatikan bahwa kelas-kelas ekivalen-B di H membentuk partisi untuk H.

Dengan uraian di atas, dapat dipahami perbedaan (dan persamaan) relasi kesamaan “=” dengan relasi ekivalensi. Satu hasil penting dari uraian di atas adalah bahwa

$$[\![x]\!] = [\![y]\!] \text{ jika dan hanya jika } xBy$$

Secara intuitif, pernyataan di atas mengungkapkan bahwa x dan y berada di kelas ekivelen-B yang sama jika dan hanya jika keduanya dihubungkan oleh relasi ekivalensi B. Dengan bahasa yang lebih umum, dua objek adalah anggota kelas ekivalen-B yang sama apabila keduanya mempunyai sifat yang sama.

Relasi biner yang lain yang cukup banyak digunakan adalah relasi ***pengurutan***. Relasi ini mengurutkan anggota suatu himpunan dalam berbagai pengertian urutan lemah dan kuat. Urutan kuat, seperti $\leq$ dan $<$ untuk bilangan real telah lebih dulu dikenal. Urutan yang lebih lemah merupakan perumuman dari urutan kuat.

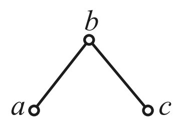
Suatu relasi B adalah ***pengurutan-semu*** dari himpunan H jika dan hanya jika B refleksif dan transitif di H. Relasi inklusi $\subseteq$ adalah contoh relasi pengurutan-semu dari himpunan semua himpunan. Relasi $\leq$ adalah relasi pengurutan-semu dari himpunan semua bilangan. Untuk contoh yang lain, misalkan

$$P = \{a,\ b,\ \Omega\}$$
$$B_1 = \{(a,a),\ (b,b),\ (\Omega,\Omega),\ (a,b),\ (b,\Omega),\ (b,a),\ (a,\Omega)\}.$$

Dapat diperiksa bahwa B_1 adalah pengurutan-semu untuk P.

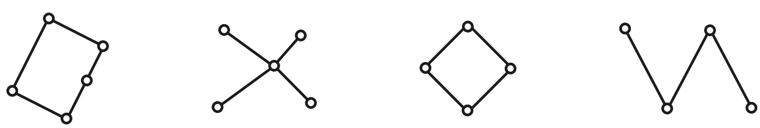
Relasi B dikatakan sebagai ***pengurutan parsial*** dari himpunan H jika dan hanya jika B refleksif, antisimetrik, dan transitif di H. Dengan kata lain, pengurutan parsial dari himpunan H adalah pengurutan-semu antisimetrik dari H. Relasi $\leq$ dan $\subseteq$ adalah pengurutan parsial. Sedangkan contoh relasi B_1 di atas bukan pengurutan parsial dari P (periksalah!).

Suatu pengurutan parsial B dari himpunan H dapat disajikan dalam diagram Hasse. Lingkaran kecil menyajikan unsur dari H dan garis yang menghubungkan dua unsur x dan y (dari kiri ke kanan) menunjukkan adanya hubungan antara dua unsur tersebut, yakni xBy. Sebagai contoh, Gambar 6.2 menyajikan diagram Hasse untuk pengurutan parsial dari $\{a, b, c\}$ sedemikian sehingga aBb dan cBb. Dalam contoh ini $B = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, b), (c, c)\}$.



Gambar 6.2: *Contoh pengurutan parsial*

Contoh yang lain untuk pengurutan parsial adalah seperti beberapa diagram pada Gambar 6.3.



Gambar 6.3: *Contoh diagram Hasse untuk pengurutan parsial*

Suatu relasi B disebut ***pengurutan sederhana*** dari himpunan H jika dan hanya jika B refleksif, antisimetrik, transitif, dan terhubung di H. Dengan kata lain, pengurutan sederhana di H adalah pengurutan parsial yang terhubung di H. Relasi "$\leq$" adalah contoh pengurutan sederhana di himpunan bilangan real. Sedangkan relasi inklusi "$\subseteq$" bukan pengurutan sederhana di himpunan dari semua himpunan, sebab relasi "$\subseteq$" tidak terhubung di himpunan dari semua himpunan; perhatikan bahwa untuk $a \neq b$ selalu berlaku $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ dan juga $\{b\} \nsubseteq \{a\}$. Contoh diagram Hasse pada Gambar 6.2 dan Gambar 6.3 semuanya bukan penyajian urutan sederhana. Diagram Hasse untuk menyajikan pengurutan sederhana hanya berupa satu garis, seperti diberikan pada Gambar 6.4

Gambar 6.4: *Contoh pengurutan sederhana*

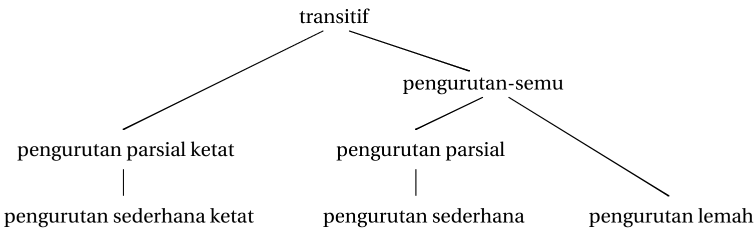
Relasi inklusi sejati "⊂" dan relasi lebih kecil "<" berkaitan erat dengan "⊆" dan "≤", tetapi "⊂" dan "<" bukan pengurutan parsial. Karena pentingnya peran "⊂" dan "<" sebagai relasi pengurutan, maka didefinisikan pengertian pengurutan parsial ketat. Suatu relasi B adalah ***pengurutan parsial ketat*** dari himpunan H jika dan hanya jika B asimetrik dan transitif di H. Contoh pengurutan parsial ketat adalah relasi suami-istri dalam himpunan semua orang. Sifat asimetrik relasi ini cukup jelas, dan sifat transitifnya dipenuhi karena tidak bisa terjadi tiga orang x, y, dan z sedemikian sehingga x suami y, dan y suami z, yang berarti y sebagai istri sekaligus sebagai suami, atau y seorang perempuan dan juga laki-laki.

Perlu diperhatikan mengenai istilah "pengurutan parsial ketat" disini kata "ketat" bukan kata yang menerangkan "pengurutan parsial," sebab pengurutan parsial ketat bukanlah jenis tertentu dari pengurutan parsial. Namun demikian, diagram Hasse untuk pengurutan parsial dan pengurutan parsial ketat yang bersesuaian adalah sama.

Relasi "≤' dan "<" mengilhami definisi pengurutan parsial dan pengurutan parsial ketat. Selain itu, relasi-relasi tersebut juga memunculkan gagasan pengurutan sederhana ketat. Suatu relasi B adalah ***pengurutan sederhana ketat*** dari himpunan H jika dan hanya jika B asimetrik, transitif, dan terhubung di H. Dari sisi lain dapat dikatakan bahwa pengurutan sederhana ketat dari H adalah pengurutan parsial ketat terhubung. Relasi "<" adalah contoh untuk pengurutan sederhana ketat yang mudah dipahami.

Suatu relasi B adalah ***pengurutan lemah*** dari himpunan H jika dan hanya jika B transitif, dan terhubung kuat di H.

Berikut ini diberikan satu diagram (Gambar 6.5) untuk mempermudah memahami kaitan antara berbagai jenis pengurutan yang dibahas dalam subbab ini. Dari diagram tersebut dapat dilihat apabila satu pengurutan merupakan jenis khusus dari pengurutan yang lain yang berada di atasnya. Misalnya, dapat diketahui bahwa setiap pengurutan parsial adalah juga termasuk pengurutan-semu, tetapi tidak setiap pengurutan-semu termasuk pengurutan parsial. Karena semua relasi pengurutan yang dibahas adalah relasi transitif, maka titik transitif dipakai sebagai kasus paling umum pada diagram.



Gambar 6.5: *Kaitan antar relasi pengurutan*

SOAL-SOAL LATIHAN 6.3

---

1. Diantara relasi pada Soal No. 1–7 pada §6.2, manakah yang termasuk relasi ekivalensi?

2. Dapatkah Anda memberikan contoh hubungan kekeluargaan yang termasuk relasi ekivalensi di himpunan semua orang?

3. Misal T adalah relasi dengan xTy jika dan hanya jika x dan y lahir di provinsi yang sama, dan misal P himpunan semua orang yang lahir di suatu provinsi di Indonesia.

   (a) Ada berapa banyakkah kelas ekivalen-T dari P?
   (b) Berada di kelas ekivalen-T yang manakah $[\![\text{Soekarno}]\!]$?
   (c) Berada di kelas ekivalen-T yang manakah $[\![\text{Habibi}]\!]$?

4. Berikan contoh pengurutan-semu yang bukan pengurutan parsial, dan contoh pengurutan-semu yang bukan relasi ekivalensi.
5. Jelaskan relasi-relasi pada Soal Latihan No. 1–7 pada §6.2 termasuk relasi pengurutan yang mana.
6. Misal H himpunan semua pasangan nikah, dan xNy jika dan hanya jika yang laki-laki (yaitu x) lebih rendah dari pasangan perempuannya (yaitu y). Apakah N suatu pengurutan sederhana ketat di H? Jika tidak, mengapa?
7. Relasi ekivalensi termasuk juga relasi pengurutan. Dimanakah tepatnya letak relasi ekivalensi pada diagram Gambar 6.5?
8. Untuk relasi-relasi berikut ini, gambarkan diagram Hasse untuk relasi yang termasuk pengurutan parsial.
   (a) $B_1 = \{(a,b),\ (a,c),\ (b,d),\ (a,d),\ (c,d)\}$
   (b) $B_2 = \big\{(\text{Soeharto}, \text{Habibi}),\ (\text{Habibi}, \text{Makassar}),\ (\text{Makassar}, \text{Jogja})\big\}$
   (c) $B_3 = \big\{(p,p),\ (q,q),\ (r,r),\ (p,r)\big\}$
   (d) $B_4 = \{(1,0),\ (0,1)\}$
   (e) $B_5 = \{(1,2),\ (1,5),\ (5,3),\ (1,3),\ (5,4),\ (1,4)\}$

6.4 Operasi pada Relasi

Untuk suatu himpunan semesta $\mathscr{S}$, didefinisikan ***relasi universal*** atas $\mathscr{S}$ sebagai himpunan semua pasangan terurut (x,y) dengan $x \in \mathscr{S}$ dan $y \in \mathscr{S}$, yaitu hasil-kali Cartesian $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$.

Relasi adalah salah satu bentuk himpunan, karena itu sudah wajar jika operasi-operasi pada himpunan dapat diterapkan. Tentu saja diharapkan dapat dilihat adanya sifat-sifat tertentu dari penerapan operasi-operasi pada himpunan. Sebagai contoh, jika R dan S dua relasi, maka $R \cap S$ adalah relasi yang memuat irisan dari R dan S, yakni $x(R \cap S)y$ jika dan hanya jika xRy dan xSy. Demikian pula $R \cup S$ adalah gabungan dari R dan S, yaitu $x(R \cup S)y$ jika dan hanya jika xRy atau xSy. Sedangkan $R \setminus S$ adalah relasi dengan $x(R \setminus S)y$ jika dan hanya jika xRy dan tidak xSy.

Misal xLy apabila x saudara laki-laki dari y, dan xPy apabila x saudara perempuna dari y, maka $x(L \cup P)y$ apabila x saudara kandung dari y; tetapi $L \cap P$ adalah relasi kosong. Dapat diperiksa bahwa $L \setminus P = L$, sebab himpunan pasangan terurut L dan P adalah saling asing.

Jika $R \subseteq S$ maka dikatakan R ***subrelasi*** dari S. Jadi hubungan saudara laki-laki adalah subrelasi dari hubungan saudara kandung.

Jika diketahui himpunan semesta $\mathscr{S}$, dan U adalah relasi universal atas $\mathscr{S}$, yakni $U = \mathscr{S} \times \mathscr{S}$, maka R^c untuk suatu relasi R di himpunan bagian dari $\mathscr{S}$ adalah $U \setminus R$.

Selain operasi-operasi yang diuraikan di atas, masih dapat didefinisikan beberapa operasi yang memanfaatkan kenyataan bahwa relasi adalah himpunan yang sangat khusus yang memuat pasangan-pasangan terurut. ***Konvers*** dari suatu relasi R, dinotasikan dengan $\breve{R}$, adalah suatu relasi sedemikian sehingga untuk semua x dan y, berlaku $x\breve{R}y$ jika dan hanya jika yRx. Jika

$$R = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,4)\}$$

maka

$$\breve{R} = \{(2,1),\ (3,1),\ (4,2)\}$$

Jika R dan S dua relasi biner, maka ***hasil-kali relatif*** dari R dan S, ditulis R/S, adalah suatu relasi yang berlaku bagi x dan y jika dan hanya jika ada z sedemikian sehingga berlaku R antara x dan z dan berlaku S bagi z dan y. Secara simbolik:

$$x(R/S)y \iff \exists z[xRz \ \wedge \ zSy]$$

SOAL-SOAL LATIHAN 6.4

1. Jika didefinisikan

xAy	berarti	x ayah dari y
xIy	berarti	x ibu dari y
xLy	berarti	x saudara laki-laki dari y
xPy	berarti	x saudara perempuan dari y

apakah yang dapat Anda katakan tentang:

(a) $x(A/I)y$

(b) $x(I/P)y$

(c) $x(I/A)y$

(d) $x(P \cup B)y$

(e) $x[P/(I \cup A)]y$

(f) $x[(L \cup P)/(I \cup A)]y$

(g) $x(I \cup A)\breve{}\,y$

(h) $x(\breve{I} \cup A)y$

(i) $x[(\breve{I} \cup \breve{A})/(L \cup P)]y$

(j) $x[(\breve{I} \cup \breve{A})/[(L \cup P)/(I \cup A)]y$

2. Dengan menggunakan notasi pada Soal 1, nyatakan ungkapan berikut ini dalam bentuk simbolik:

   a. x adalah kakek atau nenek dari y
   b. x adalah cucu dari y
   c. x adalah saudara kakek dari y
   d. x adalah saudara sepupu dari y

3. Perhatikan relasi-relasi berikut ini:

$$A = \{(1,2),\ (5,10),\ (2,3),\ (1,3),\ (4,4)\}$$
$$B = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$$
$$C = \{(1,2),\ (2,1)\}$$
$$D = \{(1,2),\ (2,1),\ (1,1),\ (2,2)\}$$

   (a) Apakah masing-masing relasi di atas mempunyai sifat refleksif, simetri, atau transitif?
   (b) Apakah $(\mathscr{D}(C) \cup \mathscr{R}(C)) \subseteq \mathscr{D}(A)$?
   (c) Apakah $\mathscr{D}(\breve{D}) \subseteq (\mathscr{D}(C) \cup \mathscr{R}(C))$?
   (d) Adakah diantara empat relasi di atas yang merupakan relasi ekivalensi?
   (e) Apakah B merupakan subrelasi dari A?
   (f) Apakah C merupakan subrelasi dari D?
   (g) Bagaimanakah relasi universal atas $\mathscr{D}(C) \cup \mathscr{R}(C)$?
   (h) Adakah diantara empat relasi di atas yang sama dengan konversnya?
   (i) Sebutkan anggota-anggota dari C/B. Apakah $C/B = B/C$?
   (j) Relasi apakah yang berlaku antara D/C dan C/D?

4. Bagaimanakah konvers dari relasi $\leq$ untuk bilangan real?

5. Apakah relasi $<$ merupakan subrelasi dari $\leq$?

6. Pandang $\mathbb{R}$ sebagai himpunan semua bilangan real. Ditetapkan satu titik asal, dan kumpulan keseluruhan titik pada bidang datar dipandang sebagai hasil-kali Cartesian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Satu garis lurus di bidang adalah himpunan bagian tertentu dari $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   (a) Berbentuk bangun geometri apakah berikut ini:
      i. gabungan dua garis lurus
      ii. irisan dua garis lurus
      iii. selisih dua garis lurus

   (b) Jika L suatu garis lurus, bagaimana hubungan geometriknya dengan konversnya $\breve{L}$?

   (c) Diberikan dua garis lurus, apakah hasil-kali relatifnya berupa garis lurus?

——o0o——

Daftar Pustaka

Copi, I. M. (1979), *Symbolic Logic*, 5^{th} edn, Prentice Hall, Singapore.

Rubin, J. E. (1997), *Mathematical Logic: Applications and Theory*, Holt, Rinehart, and Winston, New York.

Suppes, P. (1999), *Introduction to Logic*, Dover Publications, Inc., New York.

Suppes, P. & Hill, S. (2002), *First Course in Mathematical Logic*, Dover Publications, Inc., New York.

Waner, S. & Costenoble, S. R. (2001), *Finite Mathematics*, 2^{nd} edn, Brooks/Cole Publishing Co., New York.

—o0o—

Indeks