PRA
KALKULUS DASAR

SEBUAH PENGANTAR

Angga Nurohman

Art. No xxxxx
ISBN xxx–xx–xxxx–xx–x
Edition 0.0

Contents

Bagian I

Prinsip Dasar dan Tinjauan Aljabar

1. Bilangan Riil dan Fondasi Aljabar

Matematika adalah seni memberi bentuk pada bilangan.

Paul Erdős

Pada bab ini, kita akan mempersiapkan panggung pertunjukkan, mendefinisikan semesta bilangan yang akan digunakan ke depannya serta meninjau tata bahasa fundamental aljabar.

1.1 Bilangan real, Interval, dan Pertidaksamaan

Bilangan Rasional

Definisi 1.1 **Bilangan rasional** adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai perbandingan dua bilangan bulat $\frac{a}{b}$ dengan $b \neq 0$.

Bilangan rasional dapat dibagi menjadi:

1. Bilangan rasional pecahan biasa. Contohnya $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, …
2. Bilangan rasional pecahan campuran. Contohnya $3\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, …

Bilangan rasional dapat ditulis sebagai desimal dengan deret angka yang berulang teratur. Contohnya: $\frac{1}{8} = 0,125000\ldots$ (0 berulang teratur), $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ (3 berulang teratur), dan lainnya.

Bilangan Irasional

Definisi 1.2 Sebaliknya dari bilangan rasional, **bilangan irasional** adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk perbandingan dua bilangan bulat $\frac{a}{b}$ dengan $b \neq 0$.

Jika bilangan irasional ditulis dalam bentuk desimal, maka bilangan itu tidak mempunya pola angka yang berulang secara teratur.

Contoh 1.1 Bilangan irasional $\sqrt{3} = 1,732050807\ldots$ yang jika dilanjutkan sampai sekian angka di belakang koma akan tetap tidak mempunyai pola berulang secara teratur dan tidak akan pernah berakhir. Bilangan-bilangan seperti $\pi = 3,14159265\ldots$ dan $e = 2,71828\ldots$ adalah contoh lain dari bilangan irasional.

Bilangan real

Definisi 1.3 Himpunan **Bilangan real** adalah gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional. Himpunan bilangan real yang dilengkapi dengan sifat-sifat bilangan real disebut **sistem bilangan real**

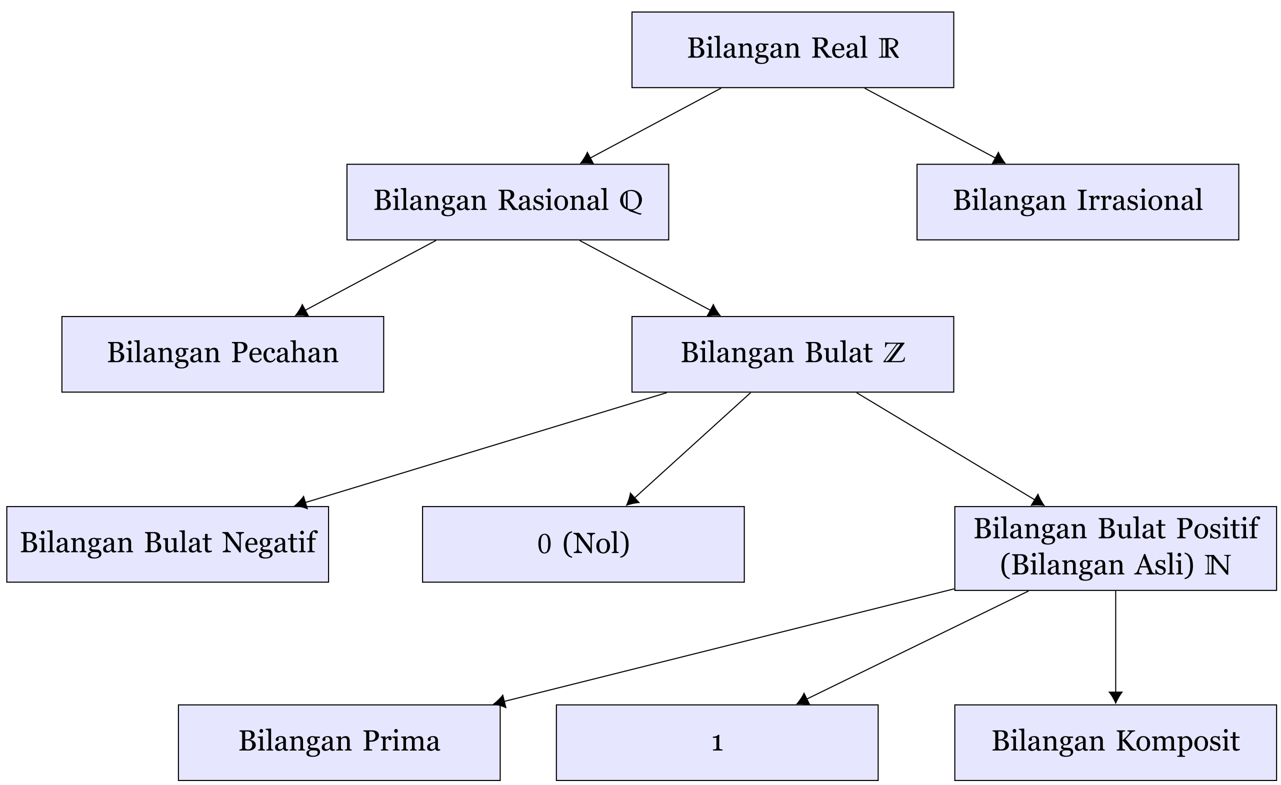
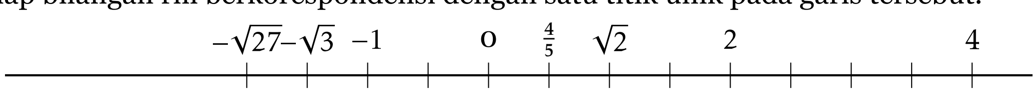


Figure 1.1: Struktur klasifikasi bilangan real

Himpunan bilangan ini dapat direpresentasikan secara visual pada garis bilangan, di mana setiap bilangan riil berkorespondensi dengan satu titik unik pada garis tersebut.



Pada contoh diatas terlihat bahwa kita selalu bisa memetakan (tapi dengan perkiraan) posisi setiap bilangan pada garis. Misalnya bilangan bulat $0,\ 2,$ dan 4 menempati tempatnya masing-masing dengan 0 lebih kiri dibanding 2, dan 2 lebih kiri dibanding 4. Bagaimana dengan bilangan rasional? Misalnya $\frac{4}{5}$ itu bernilai $0,8$ mendekati 1 tetapi lebih kiri. Oleh karena itu, $\frac{4}{5}$ berada ditempatkan sebelah kiri dekat dengan posisi 1. Bilangan irasional pun sama, yaitu misalnya $\sqrt{2}$ ditempatkan sebelah kiri 2 karena nilainya sekitar $1,4$. Setiap bilangan real memiliki satu posisi pada garis. Untuk menentukan posisi suatu bilangan bisa mengacu pada posisi dari bilangan lain yang nilainya mendekati bilangan tersebut.

Interval

Perlu dipahami pula tentang interval pada garis bilangan. Apakah yang dimaksud dengan interval?

Definisi 1.4 Interval merupakan himpunan bilangan real yang dibatasi oleh satu atau dua batas bilangan

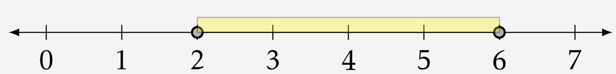
Contoh 1.2 Misalnya: $2 < x < 5$ artinya himpunan bilangan real yang nilainya lebih dari 2 tetapi kurang dari 5. Bilangan yang masuk dalam himpunan seperti 3, 4, $\frac{8}{3}$ disebut interior point. Sedangkan bilangan diluar himpunan seperti 10, -5, $\frac{1}{2}$ disebut exterior point.

Ada tiga jenis interval yaitu interval terbuka, interval tertutup dan interval gabungan. Berikut ini adalah contoh masing-masing interval dan cara penulisannya.

1. Interval Terbuka

Definisi 1.5 Suatu interval antara a dan b dikatakan **interval terbuka**, biasa ditulis (a, b) jika batas intervalnya tidak termasuk ke dalam interval. Atau dengan kata lain, jika $x \in (a, b)$, maka $a < x < b$.

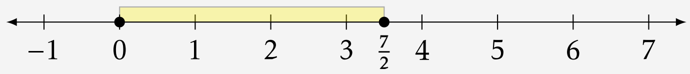
Contoh 1.3 Contoh: $2 < x < 6$ ditulis $(2, 6)$ artinya himpunan semua bilangan real yang lebih dari 2 dan kurang dari 6. Bilangan 2 dan 6 yang merupakan batas interval termasuk ke dalam exterior point. Interval ini apabila digambarkan pada garis bilangan akan menjadi sebagai berikut. Tanda pada batas angka 2 dan 6 berupa lingkaran tanpa isi karena 2 dan 6 tidak termasuk dalam himpunan bilangan real pada interval.



2. Interval Tertutup

Definisi 1.6 Suatu interval antara a dan b dikatakan **interval tertutup**, biasa ditulis $[a, b]$ jika batas intervalnya termasuk ke dalam interval. Atau dengan kata lain, jika $x \in [a, b]$, maka $a \leq x \leq b$.

Contoh 1.4 Contoh interval tertutup yaitu $0 \leq x \leq \frac{7}{2}$ dapat ditulis menjadi $x \in [0, \frac{7}{2}]$. Artinya yaitu himpunan bilangan real yang nilainya lebih dari atau sama dengan 0 dan kurang dari atau sama dengan $\frac{7}{2}$. Perbedaan dengan interval terbuka yaitu batas interval termasuk dalam interior point. Apabila digambarkan pada garis bilangan akan terlihat sebagai berikut.



3. Interval Gabungan

   Interval gabungan pada dasarnya merupakan gabungan dari interval terbuka dan interval tertutup.

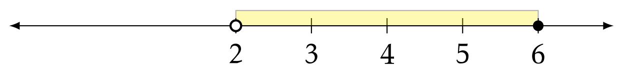
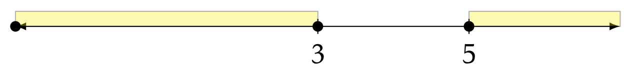
Interval	**Notasi**	**Garis Bilangan**
$2 < x \leq 6$	$(2, 6]$	
$x \geq 4$	$[4, \infty)$	
$x \leq 3 \vee x \geq 5$	$(-\infty, 3] \cup [5, \infty)$	

Table 1.1: Tabel Interval dan Garis Bilangan

Sifat-sifat Bilangan Real

1. Sifat Aljabar
   Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$, berlaku

   - $a + b = b + a$ (komutatif penjumlahan)
   - $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asosiatif penjumlahan)
   - Terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $0 + a = a + 0 = a$ (eksistensi elemen nol)
   - $\forall a \in \mathbb{R}$ terdapat $-a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (eksistensi elemen invers penjumlahan)
   - $a \cdot b = b \cdot a$ (komutatif perkalian)
   - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asosiatif perkalian)
   - Terdapat $1 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (eksistensi elemen unit 1)
   - Jika $a \neq 0$, maka terdapat $\frac{1}{a}$ sedemikian sehingga $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ (eksistensi elemen invers perkalian)
   - $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ (distributif perkalian atas penjumlahan)

2. Sifat Urutan

   - Trikotomi; jika $x, y \in \mathbb{R}$. maka salah satu dari tiga hubungan berikut berlaku: $x < y$, atau $x = y$, atau $x > y$.
   - Transitif; $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$.
   - Penambahan dan pengurangan; $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, jika $x < y$, maka $x \pm z < y \pm z$.

- Perkalian; jika $x < y$, maka $xz < yz$ untuk $z > 0$, dan $xz > yz$ untuk $z < 0$.

3. Sifat Kerapatan

   Sifat kerapatan bilangan real menyatakan bahwa terdapat banyak bilangan real di antara setiap dua bilangan real, sehingga tidak ada celah di antara bilangan-bilangan tersebut. Artinya, antara dua bilangan real apapun, selalu ada bilangan real lain di antaranya. Secara matematis,

   > **Properti 1.1** Untuk setiap dua bilangan real a dan b, akan selalu ada bilangan real c sedemikian sehingga $a < c < b$

1.2 Eksponen dan Radikal: Eksponen Bulat dan Rasional

Eksponen Bulat dan Rasional

Eksponen adalah konsep penting dalam matematika yang digunakan untuk menyatakan perkalian berulang dari suatu bilangan. Dalam konteks bilangan real, eksponen dapat berupa bilangan bulat atau rasional. Eksponen atau biasa disebut bilangan berpangkat adalah bentuk perkalian bilangan dengan bilangan yang sama (biasa disebut basis) secara berulang-ulang. Secara matematis,

Definisi 1.7 Misalkan a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif, maka a^n didefinisikan sebagai

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$$

dengan a diulang sebanyak n kali.

Radikal adalah cara lain untuk menyatakan eksponen pecahan. Akar ke-n dari suatu bilangan a, ditulis sebagai $\sqrt[n]{a}$, setara dengan $a^{1/n}$. Sifat-sifat eksponen juga berlaku untuk eksponen rasional, memungkinkan kita untuk menyederhanakan ekspresi seperti

Contoh 1.5

$$\sqrt[3]{x^6} = x^{6/3} = x^2$$

Secara umum operasi dengan eksponen diatur oleh sifat-sifat berikut

Properti 1.2 Sifat Eksponen
Untuk bilangan real a dan bilangan bulat m dan n.

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, untuk $a \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, untuk $a \neq 0$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, untuk $a \geq 0$ dan n genap
- $a^0 = 1$, untuk $a \neq 0$

Merasionalkan Penyebut

Merasionalkan penyebut adalah proses menghilangkan akar dari penyebut suatu pecahan agar bentuknya lebih sederhana. Cara ini dilakukan dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan bentuk yang dapat menghilangkan radikal di penyebut.

Contoh 1.6 Misalkan kita ingin menyederhanakan $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Langkah-langkah:

1. Kalikan pembilang dan penyebut dengan $\sqrt{3}$:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

2. Hasil akhir: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Jika penyebut berupa bentuk akar yang lebih kompleks, seperti $a+\sqrt{b}$, gunakan **konjugat** untuk merasionalkan.

Contoh 1.7 Sederhanakan $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$.

Kalikan pembilang dan penyebut dengan konjugat $3-\sqrt{5}$:

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Keterampilan ini sangat penting untuk menyederhanakan ekspresi dalam kalkulus dan aljabar, terutama ketika bekerja dengan limit atau integral yang melibatkan akar.

1.3 Polinomial dan Strategi Pemfaktoran

Polinomial

Definisi 1.8 **Polinomial** adalah ekspresi aljabar yang terdiri dari variabel dan koefisien, yang hanya melibatkan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pangkat bilangan bulat non-negatif dari variabel. Bentuk umum polinomial dalam satu variabel adalah Polinomial dapat ditulis dalam bentuk umum sebagai:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

di mana $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ adalah koefisien, a_n adalah koefisien utama, x adalah variabel, dan n adalah derajat polinomial

Contoh 1.8 Contoh polinomial:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$$

Di sini, $a_3 = 2$, $a_2 = -4$, $a_1 = 3$, dan $a_0 = -5$.

Operasi pada polinomial meliputi:

- Penjumlahan dan Pengurangan: Menggabungkan suku-suku sejenis (suku-suku dengan variabel dan pangkat yang sama).
- Perkalian: Menerapkan sifat distributif untuk mengalikan setiap suku dari satu polinomial dengan setiap suku dari polinomial lainnya.

Contoh 1.9 Misalkan kita ingin menjumlahkan dua polinomial $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$ dan $Q(x) = x^2 - 4x + 2$.
Langkah-langkah:

1. Gabungkan suku-suku sejenis:

$$P(x) + Q(x) = (2x^2 + x^2) + (3x - 4x) + (-5 + 2) = 3x^2 - x - 3$$

Strategi Pemfaktoran Polinomial

Pemfaktoran polinomial adalah proses penting dalam aljabar yang memungkinkan kita untuk menyederhanakan polinomial menjadi bentuk yang lebih mudah dikelola. Pemfaktoran membantu dalam menemukan akar-akar polinomial, menyelesaikan persamaan, dan menganalisis fungsi polinomial.

Definisi 1.9 **Pemfaktoran polinomial** adalah proses mengubah polinomial menjadi bentuk produk dari polinomial yang lebih sederhana.

Strategi pemfaktoran yang umum meliputi:

- Mengeluarkan Faktor Persekutuan Terbesar (FPB): Mencari faktor terbesar yang dapat dibagi oleh semua suku polinomial.
- Pemfaktoran Trinomial: Mencari dua binomial yang hasil kalinya adalah polinomial kuadratik yang diberikan, seringkali dalam bentuk $(x + p)(x + q)$.
- Pemfaktoran dengan Pengelompokan: Mengelompokkan suku-suku untuk menemukan faktor persekutuan dalam kelompok-kelompok tersebut.
- Selisih Kuadrat: Menggunakan rumus $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ untuk memfaktorkan perbedaan kuadrat.

Contoh 1.10 Misalkan kita ingin memfaktorkan polinomial $P(x) = x^2 - 5x + 6$. Langkah-langkah:

1. Cari dua bilangan yang hasil kalinya 6 (koefisien a_0) dan jumlahnya -5 (koefisien a_1). Bilangan tersebut adalah -2 dan -3.
2. Tulis polinomial dalam bentuk faktorisasi:

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)$$

1.4 Ekspresi Rasional: Penyederhanaan, Perkalian, dan Pembagian

Penyederhanaan Ekspresi Rasional

Ekspresi rasional adalah bentuk pecahan yang terdiri dari polinomial di pembilang dan penyebut. Penyederhanaan ekspresi rasional melibatkan pengurangan atau pembatalan faktor yang sama di pembilang dan penyebut.

Definisi 1.10 **Ekspresi rasional** adalah bentuk pecahan yang terdiri dari polinomial di pembilang dan penyebut, yaitu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ di mana $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial serta $Q(x) \neq 0$.

Contoh 1.11 Misalkan kita memiliki ekspresi rasional $\frac{x^2-4}{x^2-2x}$.
Langkah-langkah penyederhanaan:

1. Faktorkan pembilang dan penyebut:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}$$

2. Batalkan faktor yang sama $(x-2)$:

$$= \frac{x+2}{x}, \quad x \neq 2$$

Operasi pada Ekspresi Rasional

Operasi pada ekspresi rasional meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Dalam melakukan operasi ini, penting untuk menyamakan penyebut jika diperlukan.

- Penjumlahan dan Pengurangan: Untuk menjumlahkan atau mengurangkan ekspresi rasional, samakan penyebutnya terlebih dahulu.
- Perkalian: Kalikan pembilang dengan pembilang dan penyebut dengan penyebut.
- Pembagian: Untuk membagi ekspresi rasional, kalikan dengan invers dari ekspresi rasional kedua.

Contoh 1.12 Misalkan kita ingin menjumlahkan dua ekspresi rasional $\frac{2}{x+1}$ dan $\frac{3}{x-1}$.
Langkah-langkah:

1. Samakan penyebut:

$$\frac{2(x-1)+3(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x-2+3x+3}{(x+1)(x-1)}$$

2. Gabungkan suku-suku sejenis:

$$= \frac{5x+1}{(x+1)(x-1)}$$

1.5 Bilangan Kompleks: Unit Imajiner dan Operasinya

Unit Imajiner

Unit imajiner adalah bilangan yang didefinisikan sebagai i, di mana $i^2 = -1$. Bilangan kompleks adalah kombinasi dari bilangan real dan bilangan imajiner, dan dapat ditulis dalam bentuk $a + bi$, di mana a dan b adalah bilangan real.

Definisi 1.11 **Bilangan kompleks** adalah bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk $a + bi$, di mana a dan b adalah bilangan real dan i adalah unit imajiner.

Operasi pada Bilangan Kompleks

Operasi dasar pada bilangan kompleks meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

- Penjumlahan: Untuk menjumlahkan dua bilangan kompleks, jumlahkan bagian real dan bagian imajiner secara terpisah.
- Pengurangan: Untuk mengurangkan dua bilangan kompleks, kurangkan bagian real dan bagian imajiner secara terpisah.
- Perkalian: Untuk mengalikan dua bilangan kompleks, gunakan distributif dan ingat bahwa $i^2 = -1$.
- Pembagian: Untuk membagi dua bilangan kompleks, kalikan pembilang dan penyebut dengan konjugat penyebut.

Contoh 1.13 Misalkan kita memiliki bilangan kompleks $z_1 = 3 + 4i$ dan $z_2 = 1 - 2i$. Langkah-langkah:

1. Penjumlahan:

$$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (1 - 2i) = (3 + 1) + (4 - 2)i = 4 + 2i$$

2. Pengurangan:

$$z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + (4 + 2)i = 2 + 6i$$

3. Perkalian:

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(1 - 2i) = 3 - 6i + 4i - 8(-1) = 3 - 2i + 8 = 11 - 2i$$

4. Pembagian:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{3 + 6i + 4(-1)}{1^2 - (2)^2} = \frac{-1 + 6i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}i$$

1.6 Latihan

1. Tentukan apakah bilangan berikut merupakan bilangan rasional atau irasional:
   (a) $\frac{7}{3}$
   (b) $\sqrt{5}$
   (c) $0.272727\ldots$
   (d) π
2. Nyatakan himpunan bilangan real berikut dalam notasi interval:
   (a) $-2 < x \leq 4$
   (b) $x \geq 3$
   (c) $x < -1$ atau $x > 2$
3. Gambarkan pada garis bilangan interval berikut:
   (a) $(1, 5]$
   (b) $(-\infty, 0)$
4. Sederhanakan bentuk berikut dengan menggunakan sifat eksponen:
   (a) $2^3 \cdot 2^4$
   (b) $\frac{x^5}{x^2}$
   (c) $(a^2b)^3$
   (d) $16^{3/4}$
5. Rasionalkan penyebut dari pecahan berikut:
   (a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$
   (b) $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}}$
6. Faktorkan polinomial berikut:
   (a) $x^2 - 9$
   (b) $x^2 + 5x + 6$
   (c) $2x^2 - 8x$
7. Sederhanakan ekspresi rasional berikut:
   (a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x}$
   (b) $\dfrac{2x}{4x^2}$
8. Hitung hasil operasi berikut pada bilangan kompleks:
   (a) $(2 + 3i) + (4 - 5i)$
   (b) $(1 + 2i)(3 - i)$
   (c) $\dfrac{5 + i}{2 - i}$

2. Persamaan dan Pertidaksamaan dalam Satu Variabel

Matematika adalah bahasa yang digunakan untuk memahami alam semesta.

Galileo Galilei

Pada bab ini, kita akan membahas berbagai jenis persamaan dan pertidaksamaan yang sering ditemui dalam matematika, serta teknik-teknik dasar untuk menyelesaikannya. Kita juga akan belajar bagaimana memodelkan masalah dunia nyata dengan menggunakan persamaan. Bab ini akan menjadi dasar penting untuk memahami konsep-konsep yang lebih kompleks di bab-bab selanjutnya.

2.1 Persamaan Linear dan Kuadratik

Persamaan Linear

Definisi 2.1 Persamaan linear adalah persamaan polinomial berderajat satu dan grafiknya berbentuk garis lurus. Bentuk umum persamaan linear satu variabel adalah:

$$ax + b = 0$$

dengan $a \neq 0$, x adalah variabel, dan a, b adalah konstanta.

Contoh 2.1
- $2x - 4 = 0$
- $-x + 7 = 0$

Untuk menyelesaikan persamaan linear, kita mencari nilai x yang memenuhi persamaan tersebut.

1. $2x - 4 = 0$ $2x = 4$ $x = 2$
2. $-x + 7 = 0$ $-x = -7$ $x = 7$

Persamaan linear banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari, seperti menghitung harga total, kecepatan, dan masalah lain yang melibatkan hubungan linear antara variabel.

Persamaan Kuadratik

Definisi 2.2 Persamaan kuadratik adalah persamaan polinomial berderajat dua dan bentuk umumnya adalah:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan $a \neq 0$, x adalah variabel, dan a, b, c adalah konstanta.

Menyelesaikan persamaan kuadrat berarti menemukan nilai variabel (akar) yang membuat persamaan tersebut benar. Terdapat tiga metode utama untuk menyelesaikan persamaan kuadrat:

- Faktorisasi: Metode ini menguraikan persamaan kuadrat menjadi produk dari dua faktor linear. Misalnya, persamaan $x^2-6x-27 = 0$ dapat difaktorkan menjadi $(x-9)(x+3) = 0$, yang memberikan solusi $x = 9$ atau $x = -3$.
- Melengkapkan kuadrat sempurna: Metode ini mengubah persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ ke dalam bentuk $(x+p)^2 = q$. Proses ini melibatkan penambahan suatu nilai pada kedua ruas persamaan untuk menciptakan bentuk kuadrat sempurna di satu sisi.
- Rumus kuadratik (Rumus ABC): Ini adalah metode universal yang dapat digunakan untuk setiap persamaan kuadrat. Rumusnya adalah:

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Ekspresi $b^2 - 4ac$ di bawah akar disebut diskriminan, yang menentukan sifat akar-akar persamaan.

Definisi 2.3 Diskriminan adalah nilai yang digunakan untuk menentukan jumlah dan jenis akar dari persamaan kuadrat. Diberikan oleh rumus:

$$D = b^2 - 4ac$$

dengan $D > 0$ berarti ada dua akar real yang berbeda, $D = 0$ berarti ada satu akar real (akar kembar), dan $D < 0$ berarti tidak ada akar real (akar kompleks).

Contoh 2.2
- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Untuk menyelesaikan persamaan kuadratik, kita dapat menggunakan rumus kuadratik:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. $x^2-5x+6 = 0$ $a = 1, b = -5, c = 6$ Diskriminan: $D = (-5)^2-4(1)(6) = 25-24 = 1$ $x = \frac{5\pm1}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 2$

2. $2x^2+3x-2=0$ $a=2, b=3, c=-2$ Diskriminan: $D=(3)^2-4(2)(-2)=9+16=25$ $x=\frac{-3\pm5}{4} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}, x_2=-2$

2.2 Pertidaksamaan Polinomial dan Rasional

Pertidaksamaan Polinomial

Pertidaksamaan polinomial adalah pernyataan yang melibatkan polinomial dan simbol ketidaksamaan (misalnya, >, <, ≥, ≤). Bentuk umum dari pertidaksamaan polinomial satu variabel adalah:

$$P(x) > 0, \quad P(x) < 0, \quad P(x) \geq 0, \quad P(x) \leq 0,$$

dengan $P(x)$ adalah polinomial.

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan polinomial, kita perlu menemukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Selesaikan persamaan $P(x) = 0$ untuk menemukan titik potong dengan sumbu x.
2. Tentukan tanda dari $P(x)$ di setiap interval yang dibentuk oleh titik potong.
3. Pilih interval yang memenuhi pertidaksamaan.

Contoh 2.3 Selesaikan pertidaksamaan $x^2 - 4 > 0$.

1. Selesaikan $x^2 - 4 = 0$:
$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$
atau
$$x = -2$$
.
2. Tentukan tanda $P(x)$ di interval $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, dan $(2, \infty)$:
   - Untuk $x < -2$, misalkan $x = -3$:
   $$P(-3) = (-3)^2 - 4 = 5 > 0.$$
   - Untuk $-2 < x < 2$, misalkan $x = 0$:
   $$P(0) = 0^2 - 4 = -4 < 0.$$
   - Untuk $x > 2$, misalkan $x = 3$:
   $$P(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0.$$
3. Interval yang memenuhi pertidaksamaan adalah $(-\infty, -2)$ dan $(2, \infty)$.

Pertidaksamaan Rasional

Pertidaksamaan rasional adalah pernyataan yang melibatkan pecahan aljabar. Bentuk umum dari pertidaksamaan rasional satu variabel adalah:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan rasional, kita perlu menemukan nilai x yang membuat pecahan tersebut positif atau negatif. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Selesaikan persamaan $P(x) = 0$ dan $Q(x) = 0$ untuk menemukan titik potong dengan sumbu x.
2. Tentukan tanda dari $\frac{P(x)}{Q(x)}$ di setiap interval yang dibentuk oleh titik potong.
3. Pilih interval yang memenuhi pertidaksamaan.

Contoh 2.4 Selesaikan pertidaksamaan $\frac{x^2-1}{x-2} < 0$.

1. Selesaikan $x^2 - 1 = 0$:
$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$
atau
$$x = -1.$$
Selesaikan $x - 2 = 0$:
$$x = 2.$$
2. Titik potong dengan sumbu x adalah $x = -1$, $x = 1$, dan $x = 2$.
3. Tentukan tanda dari $\frac{P(x)}{Q(x)}$ di setiap interval yang dibentuk oleh titik potong:
   - Untuk $x < -1$, misalkan $x = -2$:
   $$\frac{(-2)^2 - 1}{-2 - 2} = \frac{3}{-4} < 0.$$
   - Untuk $-1 < x < 1$, misalkan $x = 0$:
   $$\frac{0^2 - 1}{0 - 2} = \frac{-1}{-2} > 0.$$
   - Untuk $1 < x < 2$, misalkan $x = 1.5$:
   $$\frac{(1.5)^2 - 1}{1.5 - 2} = \frac{0.25}{-0.5} < 0.$$
   - Untuk $x > 2$, misalkan $x = 3$:
   $$\frac{3^2 - 1}{3 - 2} = \frac{8}{1} > 0.$$
4. Interval yang memenuhi pertidaksamaan adalah $(-\infty, -1)$ dan $(1, 2)$.

2.3 Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Definisi 2.4 Pertidaksamaan nilai mutlak adalah pernyataan yang melibatkan nilai mutlak dari suatu ekspresi. Bentuk umum dari pertidaksamaan nilai mutlak adalah:

$$|A| > B$$

dengan A adalah ekspresi aljabar dan B adalah bilangan real.

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak, kita perlu mempertimbangkan dua kasus yaitu:

- Kasus 1: $A > B$ atau $A < B$ (tergantung tanda pertidaksamaan), sehingga A sendiri memenuhi pertidaksamaan tanpa nilai mutlak.
- Kasus 2: $-A > B$ atau $-A < B$, yaitu ekspresi di dalam nilai mutlak bernilai negatif namun setelah diubah tandanya tetap memenuhi pertidaksamaan.

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Selesaikan kedua kasus untuk menemukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan.
2. Gabungkan solusi dari kedua kasus untuk mendapatkan solusi akhir.

Contoh 2.5 Selesaikan pertidaksamaan $|2x - 3| < 5$.

1. Kasus 1: $2x - 3 < 5$
$$2x < 8 \Rightarrow x < 4$$
2. Kasus 2: $2x - 3 > -5$
$$2x > -2 \Rightarrow x > -1$$
3. Gabungkan solusi dari kedua kasus: $-1 < x < 4$.

2.4 Persamaan dan Pertidaksamaan: Pemodelan Masalah

Pemodelan dengan Persamaan Linear

Pemodelan dengan persamaan linear melibatkan penerapan konsep persamaan linear untuk menyelesaikan masalah dunia nyata. Misalnya, kita dapat menggunakan persamaan linear untuk menghitung biaya total pembelian barang, kecepatan, atau jarak tempuh.

Definisi 2.5 Pemodelan dengan persamaan linear adalah proses mengubah situasi nyata menjadi persamaan linear untuk memecahkan masalah tersebut.

Contoh 2.6 Seseorang membeli 3 buku tulis dan 2 pulpen dengan total harga Rp26.000. Jika harga sebuah buku tulis adalah Rp6.000, berapakah harga sebuah pulpen?
Model matematis: Misalkan harga sebuah pulpen adalah x rupiah.

$$\begin{aligned} 3 \times 6000 + 2x &= 26000 \\ 18000 + 2x &= 26000 \\ 2x &= 26000 - 18000 \\ 2x &= 8000 \\ x &= \frac{8000}{2} \\ x &= 4000 \end{aligned}$$

Jadi, harga sebuah pulpen adalah Rp4.000.

Pemodelan dengan Persamaan Kuadratik

Pemodelan dengan persamaan kuadratik melibatkan penerapan konsep persamaan kuadratik untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan hubungan kuadratik antara variabel. Misalnya, kita dapat menggunakan persamaan kuadratik untuk menghitung area segitiga, volume benda, atau lintasan proyektil.

Definisi 2.6 Pemodelan dengan persamaan kuadratik adalah proses mengubah situasi nyata menjadi persamaan kuadratik untuk memecahkan masalah tersebut.

Contoh 2.7 Misalkan sebuah bola dilempar vertikal ke atas dari tanah dengan kecepatan awal $v_0 = 20$ m/s. Tinggi bola setelah t detik diberikan oleh persamaan:

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

dengan $g = 10$ m/s^2 (percepatan gravitasi).
Pertanyaan: Setelah berapa detik bola akan kembali ke tanah?

Model matematis:

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$0 = 20t - 5t^2$$
$$0 = t(20 - 5t)$$

Jadi, $t = 0$ (saat dilempar) atau $20 - 5t = 0 \Rightarrow t = 4$.
Jadi, bola akan kembali ke tanah setelah 4 detik.

Pemodelan dengan Pertidaksamaan

Pemodelan dengan pertidaksamaan melibatkan penerapan konsep pertidaksamaan untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan batasan atau kondisi tertentu. Misalnya, kita dapat menggunakan pertidaksamaan untuk menentukan nilai maksimum atau minimum dari suatu variabel, atau untuk menemukan interval nilai yang memenuhi kondisi tertentu.

Definisi 2.7 Pemodelan dengan pertidaksamaan adalah proses mengubah situasi nyata menjadi pertidaksamaan untuk memecahkan masalah tersebut.

Contoh 2.8 Misalkan seorang siswa ingin membeli pensil seharga Rp2.000 per batang dan pulpen seharga Rp3.000 per buah. Ia hanya memiliki uang Rp20.000. Berapa banyak pensil (x) dan pulpen (y) yang dapat dibeli?
Model pertidaksamaannya:

$$2000x + 3000y \leq 20000$$

dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
Solusi: Siswa dapat membeli kombinasi pensil dan pulpen yang memenuhi pertidaksamaan di atas, misalnya $x = 5$, $y = 3$ (karena $2000 \times 5 + 3000 \times 3 = 19000 \leq 20000$).

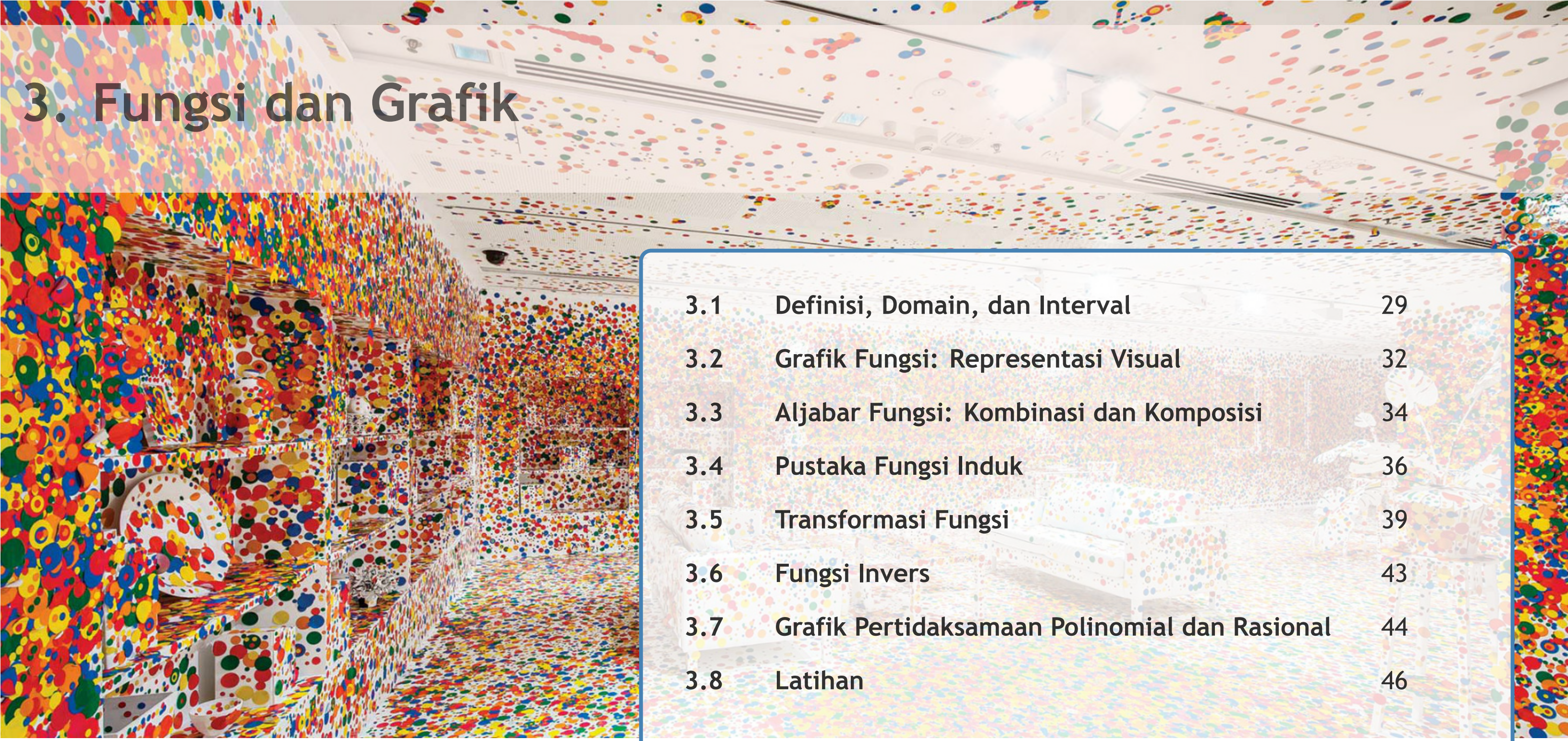
2.5 Latihan

1. Selesaikan persamaan linear berikut:
   (a) $3x - 7 = 2$
   (b) $5x + 4 = 19$
2. Selesaikan persamaan kuadratik berikut:
   (a) $x^2 - 8x + 15 = 0$
   (b) $2x^2 - 3x - 2 = 0$
3. Tentukan jenis akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 5 = 0$ dengan menggunakan diskriminan.
4. Selesaikan pertidaksamaan polinomial berikut:
   (a) $x^2 - 9 < 0$
   (b) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$
5. Selesaikan pertidaksamaan rasional berikut:
   (a) $\dfrac{x-2}{x+1} > 0$
   (b) $\dfrac{x^2-4}{x-3} \leq 0$
6. Selesaikan pertidaksamaan nilai mutlak berikut:
   (a) $|x - 5| < 3$
   (b) $|2x + 1| \geq 7$
7. Sebuah toko menjual pensil seharga Rp1.500 per batang dan buku tulis seharga Rp4.000 per buah. Jika seseorang memiliki uang Rp20.000, tuliskan model pertidaksamaan yang menyatakan banyak pensil (x) dan buku tulis (y) yang dapat dibeli.
8. Sebuah bola dilempar vertikal ke atas dengan kecepatan awal $v_0 = 16$ m/s. Tinggi bola setelah t detik diberikan oleh $h(t) = 16t - 4t^2$. Setelah berapa detik bola akan kembali ke tanah?
9. Seseorang membeli 4 buah roti dan 3 gelas susu dengan total harga Rp31.000. Jika harga sebuah roti adalah Rp5.000, berapakah harga sebuah gelas susu?
10. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x + 3 > 7$.

Bagian II

Semesta Fungsi dan Grafiknya

3. Fungsi dan Grafik



Sains tanpa agama adalah pincang,
agama tanpa sains adalah buta.

Albert Einstein

Pada bab ini, kita akan mempelajari konsep dasar fungsi, termasuk definisi, notasi, dan cara merepresentasikan fungsi dalam berbagai bentuk (tabel, grafik, dan rumus). Kita juga akan membahas domain, range, serta operasi-operasi pada fungsi seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan komposisi fungsi. Selain itu, bab ini akan memperkenalkan cara menggambar grafik fungsi dan menafsirkan sifat-sifat grafik, seperti titik potong, asimtot, dan perilaku fungsi di sekitar domainnya.

3.1 Definisi, Domain, dan Interval

Definisi Fungsi

Definisi 3.1 Fungsi adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap elemen dari himpunan pertama (domain) dengan tepat satu elemen dari himpunan kedua (kodomain). Fungsi sering dinyatakan dalam bentuk

$$f : A \to B,$$

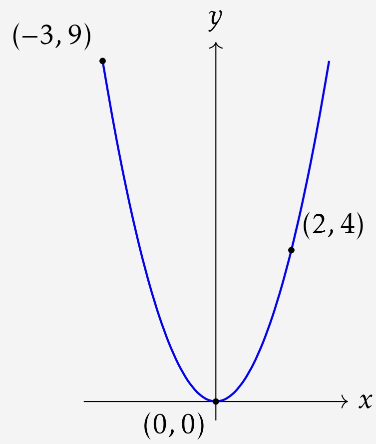
dimana A adalah domain dan B adalah kodomain.

Fungsi dapat direpresentasikan dengan berbagai cara, seperti menggunakan diagram panah, tabel, grafik, atau rumus. Dalam matematika, fungsi sering digunakan untuk memodelkan hubungan antara dua besaran. Misalnya, fungsi $f(x) = 2x + 3$ menyatakan bahwa setiap nilai x pada domain dipetakan ke nilai $2x + 3$ pada kodomain. Penting untuk diingat bahwa setiap elemen domain hanya boleh dipasangkan dengan satu elemen kodomain, sehingga tidak ada ambiguitas dalam pemetaan fungsi.

Contoh 3.1 Misalkan kita memiliki fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = x^2.$$

Fungsi ini menghubungkan setiap bilangan real x dengan kuadratnya. Sebagai contoh, jika $x = 2$, maka $f(2) = 4$; jika $x = -3$, maka $f(-3) = 9$. Dengan demikian, fungsi ini memetakan setiap bilangan real ke bilangan real lainnya. Fungsi ini juga dapat digambarkan secara grafis sebagai kurva parabola yang membuka ke atas, dengan sumbu simetri pada sumbu y dan titik minimum di titik $(0, 0)$.



Domain Fungsi

Definisi 3.2 Domain fungsi adalah himpunan semua nilai input yang diperbolehkan untuk fungsi tersebut. Dalam notasi, jika $f : A \to B$, maka domain dari f adalah semua anggota dalam himpunan A.

Domain fungsi sangat penting karena menentukan nilai-nilai yang dapat digunakan sebagai input untuk fungsi tersebut. Misalnya, dalam fungsi $f(x) = \sqrt{x}$, domainnya adalah $x \geq 0$ karena akar kuadrat dari bilangan negatif tidak terdefinisi dalam bilangan real.

Contoh 3.2 Misalkan kita memiliki fungsi

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}.$$

Fungsi ini tidak terdefinisi ketika $x = 2$ karena pembagian dengan nol tidak diperbolehkan. Oleh karena itu, domain dari fungsi ini adalah semua bilangan real kecuali $x = 2$, yang dapat dituliskan sebagai $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ atau dalam notasi interval sebagai $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

Range Fungsi

Definisi 3.3 Range fungsi adalah himpunan semua nilai output yang mungkin dihasilkan oleh fungsi tersebut. Dalam notasi, jika $f : A \to B$, maka range dari f adalah himpunan semua anggota dalam himpunan B yang dapat dicapai oleh fungsi f.

Range fungsi memberikan informasi tentang nilai-nilai yang dapat dihasilkan oleh fungsi ketika diberikan input dari domainnya. Misalnya, dalam fungsi $f(x) = x^2$, range-nya adalah semua bilangan real non-negatif karena kuadrat dari bilangan real selalu menghasilkan nilai non-negatif.

Contoh 3.3 Misalkan kita memiliki fungsi

$$f(x) = x^2.$$

Fungsi ini menghasilkan nilai-nilai non-negatif untuk setiap bilangan real x. Oleh karena itu, range dari fungsi ini adalah $[0, \infty)$, yang berarti semua bilangan real non-negatif termasuk nol.

Interval

Sudah dijelaskan di bab 1, interval adalah himpunan bilangan real yang terletak di antara dua titik tertentu. Interval dapat dinyatakan dalam bentuk notasi interval, seperti $[a, b]$ (termasuk a dan b), (a, b) (tidak termasuk a dan b), atau kombinasi keduanya. Interval juga dapat terbuka atau tertutup.

Definisi 3.4 Interval adalah himpunan bilangan real yang terletak di antara dua titik tertentu, yang dapat dinyatakan dalam notasi interval seperti $[a, b]$, (a, b), atau kombinasi keduanya.

Contoh 3.4 Misalkan kita memiliki interval $[1, 5]$. Ini berarti himpunan bilangan tersebut mencakup semua bilangan real antara 1 dan 5, termasuk kedua ujungnya. Jika kita memiliki interval $(2, 6)$, maka himpunan tersebut mencakup semua bilangan real antara 2 dan 6, tetapi tidak termasuk 2 dan 6 itu sendiri. Kombinasi dari kedua interval ini, seperti $[1, 2) \cup (2, 5]$, mencakup semua bilangan real dari 1 hingga 5, kecuali 2.

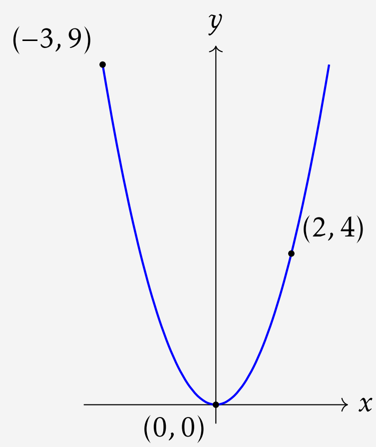
3.2 Grafik Fungsi: Representasi Visual

Grafik Fungsi

Grafik fungsi adalah representasi visual dari hubungan antara variabel input (biasanya pada sumbu x) dan variabel output (biasanya pada sumbu y). Grafik ini membantu kita memahami bagaimana fungsi berperilaku, termasuk sifat-sifat seperti pertumbuhan, penurunan, dan titik potong dengan sumbu x dan y.

Definisi 3.5 Grafik fungsi adalah representasi visual dari hubungan antara variabel input dan output dari suatu fungsi, yang biasanya digambarkan pada bidang koordinat Cartesian dengan sumbu x dan y.

Contoh 3.5 Misalkan kita memiliki fungsi $f(x) = x^2$. Grafik dari fungsi ini adalah sebuah parabola yang membuka ke atas, dengan titik minimum di titik $(0, 0)$. Grafik ini dapat digambarkan pada bidang koordinat Cartesian sebagai berikut:



Grafik ini menunjukkan bahwa untuk setiap nilai x, nilai y adalah kuadrat dari x. Misalnya, ketika $x = 2$, maka $y = 4$, dan ketika $x = -3$, maka $y = 9$. Grafik ini juga menunjukkan bahwa fungsi ini simetris terhadap sumbu y, karena $f(x) = f(-x)$ untuk setiap x.

Sifat-Sifat Grafik Fungsi

Sifat-sifat grafik fungsi mencakup berbagai karakteristik yang dapat diidentifikasi dari grafik tersebut, seperti:

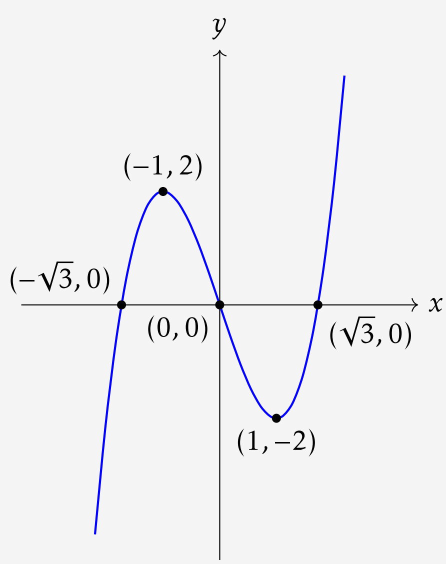
- Titik Potong dengan Sumbu x: Titik di mana grafik memotong sumbu x, yang merupakan solusi dari persamaan $f(x) = 0$.
- Titik Potong dengan Sumbu y: Titik di mana grafik memotong sumbu y, yang merupakan nilai $f(0)$.
- Monotonisitas: Apakah fungsi tersebut meningkat atau menurun pada interval tertentu. Fungsi f dikatakan meningkat pada interval I jika untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) < f(x_2)$.

- Keterbatasan: Apakah fungsi tersebut terbatas atas atau terbatas bawah. Fungsi f dikatakan terbatas atas jika ada bilangan real M sehingga $f(x) \leq M$ untuk semua x dalam domainnya, dan terbatas bawah jika ada bilangan real m sehingga $f(x) \geq m$ untuk semua x dalam domainnya.
- Simetri: Fungsi f dikatakan simetris terhadap sumbu y jika $f(-x) = f(x)$ untuk semua x dalam domainnya, dan simetris terhadap titik $(0, 0)$ jika $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x dalam domainnya.

Contoh 3.6 Misalkan kita memiliki fungsi $f(x) = x^3 - 3x$. Grafik dari fungsi ini memiliki beberapa sifat yang menarik:

- Titik potong dengan sumbu x terjadi ketika $f(x) = 0$, yaitu pada $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.
- Titik potong dengan sumbu y terjadi pada $f(0) = 0$, sehingga titik potongnya adalah $(0, 0)$.
- Fungsi ini meningkat pada interval $(-\infty, -1)$ dan $(1, \infty)$, dan menurun pada interval $(-1, 1)$.
- Fungsi ini tidak terbatas atas atau terbatas bawah, karena nilai $f(x)$ dapat menjadi sangat besar atau sangat kecil tergantung pada nilai x.
- Fungsi ini simetris terhadap titik $(0, 0)$, karena $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x dalam domainnya.

Grafik fungsi ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Grafik ini menunjukkan bahwa fungsi ini memiliki titik potong dengan sumbu x di tiga titik, yaitu $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$, dan titik potong dengan sumbu y di titik $(0, 0)$. Fungsi ini juga menunjukkan sifat monotonisitas, di mana fungsi ini meningkat pada interval $(-\infty, -1)$ dan $(1, \infty)$, serta menurun pada interval $(-1, 1)$. Selain itu, fungsi ini tidak terbatas atas atau terbatas bawah, karena nilai $f(x)$ dapat menjadi sangat besar atau sangat kecil tergantung pada nilai x. Terakhir, fungsi ini simetris terhadap titik $(0, 0)$, karena $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x dalam domainnya.

3.3 Aljabar Fungsi: Kombinasi dan Komposisi

Operasi pada Fungsi

Operasi pada fungsi mencakup penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan komposisi fungsi. Operasi ini memungkinkan kita untuk menggabungkan atau memodifikasi fungsi yang ada untuk membentuk fungsi baru.

Definisi 3.6 Operasi pada fungsi adalah proses matematis yang dilakukan pada dua atau lebih fungsi untuk menghasilkan fungsi baru. Operasi ini mencakup penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan komposisi fungsi.

Contoh 3.7 Misalkan kita memiliki dua fungsi $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2$. Kita dapat melakukan operasi berikut:

- Penjumlahan:
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x + 3) + (x^2) = x^2 + 2x + 3.$$
- Pengurangan:
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x + 3) - (x^2) = -x^2 + 2x + 3.$$
- Perkalian:
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x + 3)(x^2) = 2x^3 + 3x^2.$$
- Pembagian:
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 3}{x^2},$$
dengan syarat $g(x) \neq 0$.

Operasi-operasi ini menghasilkan fungsi baru yang dapat dianalisis lebih lanjut.

Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi adalah operasi yang menggabungkan dua fungsi sehingga output dari satu fungsi menjadi input untuk fungsi lainnya. Komposisi fungsi sering dinyatakan sebagai $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, yang berarti kita pertama-tama menerapkan fungsi g pada x, lalu menerapkan fungsi f pada hasilnya.

Definisi 3.7 Komposisi fungsi adalah operasi yang menggabungkan dua fungsi sehingga output dari satu fungsi menjadi input untuk fungsi lainnya. Komposisi fungsi dinyatakan sebagai
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Contoh 3.8 Misalkan kita memiliki fungsi $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2$. Komposisi fungsi ini dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= 2(x^2) + 3 \\ &= 2x^2 + 3.\end{aligned}$$

Dengan demikian, komposisi fungsi f dan g menghasilkan fungsi baru yang dinyatakan sebagai $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$.

Sifat-Sifat Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi memiliki beberapa sifat penting, antara lain:

- Asosiatif: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ untuk semua fungsi f, g, dan h.
- Identitas: Jika f adalah fungsi identitas, maka $(f \circ g)(x) = g(x)$ dan $(g \circ f)(x) = f(x)$ untuk semua fungsi g.
- Komutatif: Komposisi fungsi tidak selalu komutatif, yaitu $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ secara umum.
- Invers: Jika f adalah fungsi bijektif, maka ada fungsi invers f^{-1} sehingga $(f \circ f^{-1})(x) = x$ dan $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ untuk semua x dalam domain f.

Contoh 3.9 Misalkan kita memiliki fungsi $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2$. Kita dapat memeriksa sifat-sifat komposisi fungsi:

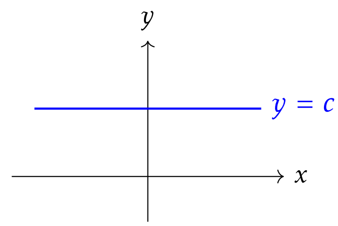
- Asosiatif: Jika kita memiliki fungsi $h(x) = x + 1$, maka $(f \circ g) \circ h = f(g(h(x)))$ dan $f \circ (g \circ h) = f(g(h(x)))$, sehingga asosiatif berlaku.
- Identitas: Fungsi identitas $i(x) = x$ memenuhi sifat identitas, yaitu $(i \circ g)(x) = g(x)$ dan $(g \circ i)(x) = g(x)$.
- Komutatif: Kita dapat melihat bahwa $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$ dan $(g \circ f)(x) = f(g(x))$ tidak sama, sehingga komutatif tidak berlaku.
- Invers: Jika f adalah fungsi bijektif, maka ada fungsi invers f^{-1} yang memenuhi sifat invers.

Dengan demikian, komposisi fungsi memiliki sifat-sifat yang penting untuk dipahami dalam konteks analisis fungsi dan grafik. Pembahasan mengenai invers sebuah fungsi akan dibahas di subbab berikutnya

3.4 Pustaka Fungsi Induk

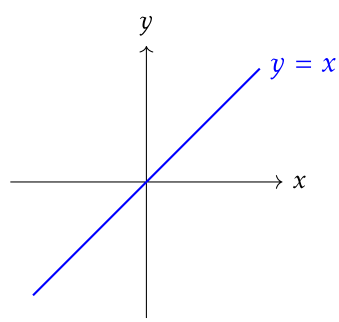
Pustaka fungsi induk (parent functions) adalah kumpulan fungsi dasar yang menjadi acuan utama dalam mempelajari berbagai transformasi dan sifat fungsi. Berikut adalah katalog visual dari beberapa fungsi esensial beserta grafik, domain, range, dan fitur utamanya.

1. Fungsi Konstan: $f(x) = c$



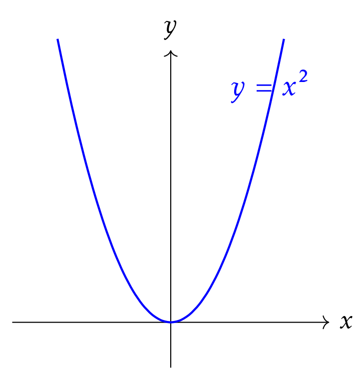
Domain: $\mathbb{R}$ **Range:** $\{c\}$ **Fitur:** Garis lurus horizontal.

2. Fungsi Identitas: $f(x) = x$



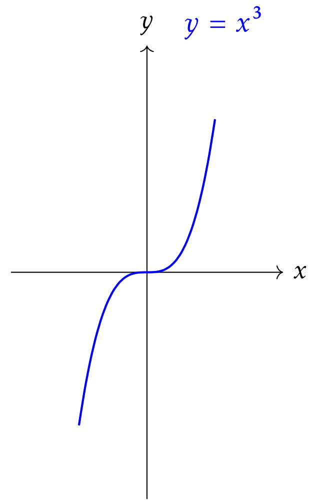
Domain: $\mathbb{R}$ **Range:** $\mathbb{R}$ **Fitur:** Garis miring melalui $(0, 0)$.

3. Fungsi Kuadrat: $f(x) = x^2$



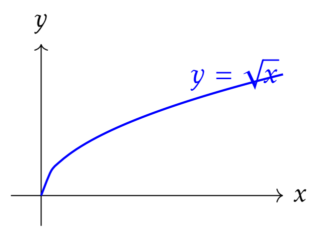
Domain: $\mathbb{R}$ **Range:** $[0, \infty)$ **Fitur:** Parabola simetris sumbu y, min di $(0, 0)$.

4. Fungsi Kubik: $f(x) = x^3$



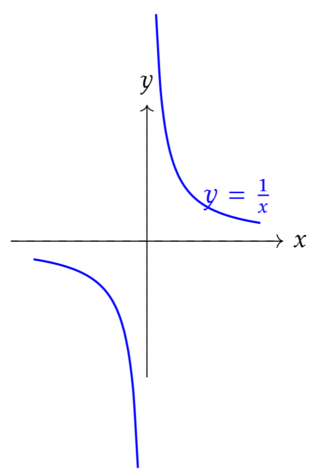
Domain: $\mathbb{R}$ **Range:** $\mathbb{R}$ **Fitur:** Simetris titik asal, monoton naik.

5. Fungsi Akar Kuadrat: $f(x) = \sqrt{x}$



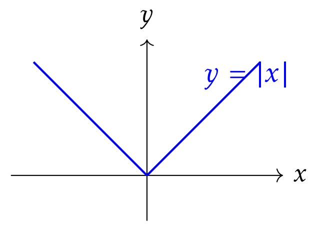
Domain: $[0, \infty)$ **Range:** $[0, \infty)$ **Fitur:** Hanya $x \geq 0$, mulai $(0, 0)$.

6. Fungsi Resiprokal: $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Domain: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ **Range:** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ **Fitur:** Asimtot $x = 0$, $y = 0$.

7. Fungsi Nilai Mutlak: $f(x) = |x|$



Domain: $\mathbb{R}$ **Range:** $[0, \infty)$ **Fitur:** Simetris sumbu y, sudut di $(0, 0)$.

Katalog visual ini akan menjadi referensi utama untuk memahami transformasi dan sifat berbagai fungsi dalam bab-bab berikutnya.

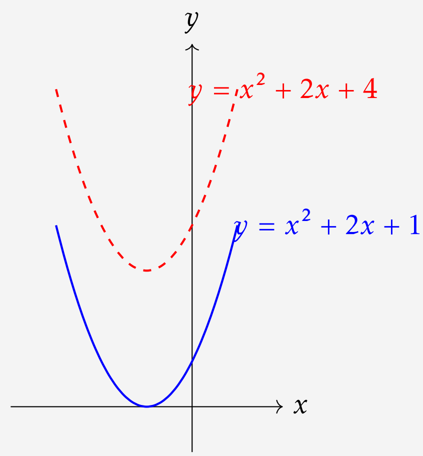
3.5 Transformasi Fungsi

1. Translasi

Translasi adalah pergeseran grafik fungsi ke atas, ke bawah, ke kiri, atau ke kanan. Translasi vertikal dilakukan dengan menambahkan atau mengurangi konstanta dari fungsi, sedangkan translasi horizontal dilakukan dengan mengubah variabel input.

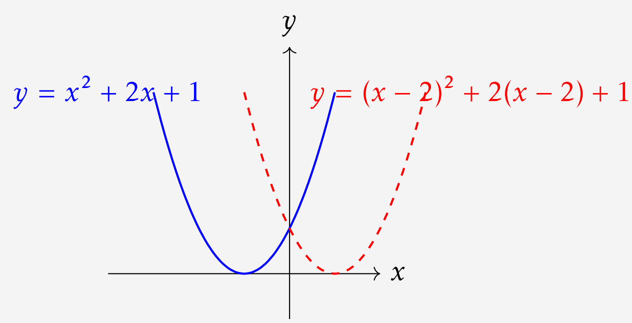
Definisi 3.8 Translasi adalah pergeseran grafik fungsi ke arah tertentu, baik secara vertikal maupun horizontal.

Contoh 3.10 Misalkan $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Grafik fungsi $f(x)$ dapat ditranslasi ke atas dengan menambahkan konstanta c sehingga menjadi $f(x) = x^2 + 2x + 1 + c$. Jika $c > 0$, grafik akan bergeser ke atas; jika $c < 0$, grafik akan bergeser ke bawah.



Grafik biru adalah $y = x^2 + 2x + 1$ (asli), sedangkan grafik merah putus-putus adalah $y = x^2 + 2x + 4$ (translasi ke atas sebesar 3 satuan).

Contoh 3.11 Jika kita ingin mentranslasi grafik $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ke kanan sejauh d satuan, kita dapat mengubah fungsi menjadi $f(x) = (x - d)^2 + 2(x - d) + 1$.

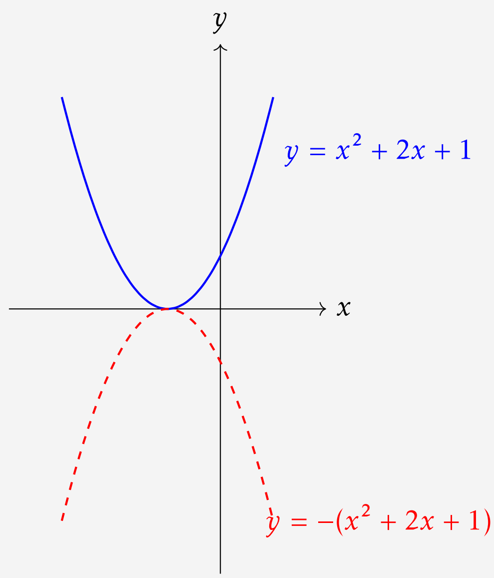


Grafik biru adalah $y = x^2 + 2x + 1$ (asli), sedangkan grafik merah putus-putus adalah $y = (x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$ (translasi ke kanan sejauh 2 satuan).

2. Refleksi

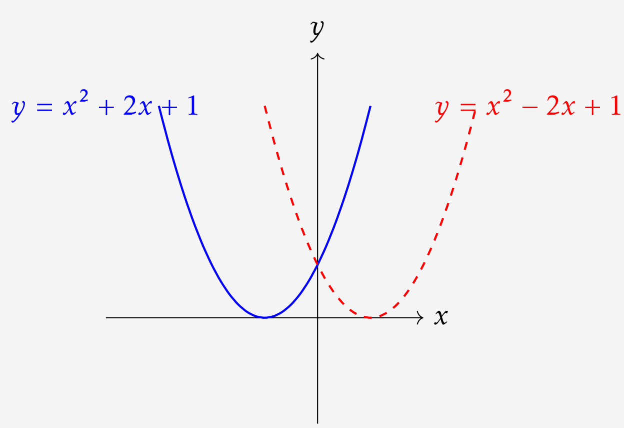
Refleksi adalah pembalikan grafik fungsi terhadap sumbu x atau sumbu y. Refleksi terhadap sumbu x dilakukan dengan mengubah tanda dari output fungsi, sedangkan refleksi terhadap sumbu y dilakukan dengan mengubah tanda dari input fungsi.

Contoh 3.12 Misalkan $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Grafik fungsi $f(x)$ dapat direfleksikan terhadap sumbu x menjadi $f(x) = -(x^2 + 2x + 1)$.



Grafik biru adalah $y = x^2 + 2x + 1$ (asli), sedangkan grafik merah putus-putus adalah $y = -(x^2 + 2x + 1)$ (refleksi terhadap sumbu x).

Contoh 3.13 Jika kita ingin merefleksikan grafik $f(x) = x^2 + 2x + 1$ terhadap sumbu y, kita dapat mengubah fungsi menjadi $f(x) = (-x)^2 + 2(-x) + 1$.



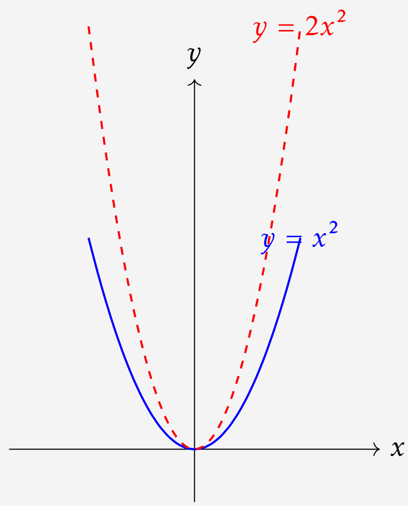
Grafik biru adalah $y = x^2 + 2x + 1$ (asli), sedangkan grafik merah putus-putus adalah $y = x^2 - 2x + 1$ (refleksi terhadap sumbu y).

3. Dilatasi

Dilatasi adalah perubahan skala grafik fungsi, baik secara vertikal maupun horizontal. Dilatasi vertikal dilakukan dengan mengalikan output fungsi dengan konstanta, sedangkan dilatasi horizontal dilakukan dengan mengalikan input fungsi dengan konstanta.

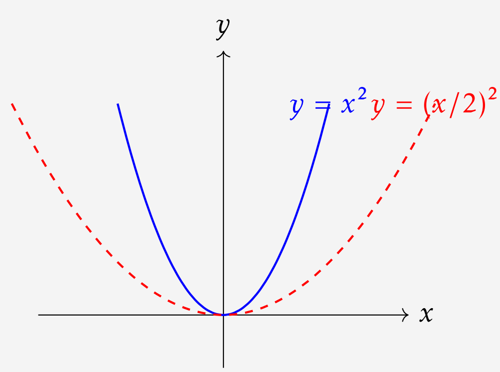
Definisi 3.9 Dilatasi adalah perubahan skala grafik fungsi, baik secara vertikal maupun horizontal, yang dilakukan dengan mengalikan output atau input fungsi dengan konstanta.

Contoh 3.14 Misalkan $f(x) = x^2$. Grafik fungsi $f(x)$ dapat didilatasi secara vertikal dengan mengalikan outputnya dengan konstanta k, sehingga menjadi $f(x) = k \cdot x^2$.



Grafik biru adalah $y = x^2$ (asli), sedangkan grafik merah putus-putus adalah $y = 2x^2$ (dilatasi vertikal dengan faktor 2).

Contoh 3.15 Jika kita ingin mendilatasi grafik $f(x) = x^2$ secara horizontal dengan mengalikan inputnya dengan konstanta k, kita dapat mengubah fungsi menjadi $f(x) = (x/k)^2$.



Grafik biru adalah $y = x^2$ (asli), sedangkan grafik merah putus-putus adalah $y = (x/2)^2$ (dilatasi horizontal dengan faktor 1/2).

4. Transformasi Umum

Transformasi umum dari fungsi $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai:

$$g(x) = a \cdot f(b(x - h)) + k,$$

di mana

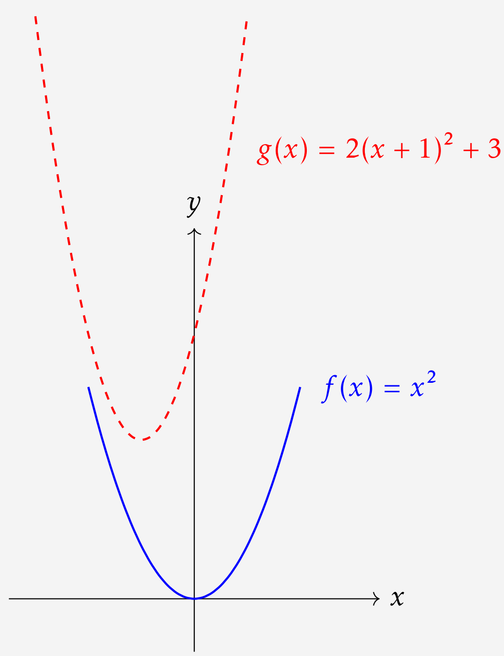
- a adalah faktor dilatasi vertikal (positif untuk refleksi terhadap sumbu x),
- b adalah faktor dilatasi horizontal (positif untuk refleksi terhadap sumbu y),
- h adalah translasi horizontal (positif untuk pergeseran ke kanan, negatif untuk pergeseran ke kiri),
- k adalah translasi vertikal (positif untuk pergeseran ke atas, negatif untuk pergeseran ke bawah).
- $g(x)$ adalah fungsi hasil transformasi.

Transformasi ini memungkinkan kita untuk mengubah grafik fungsi dasar menjadi grafik fungsi baru dengan berbagai modifikasi.

Contoh 3.16 Misalkan kita memiliki fungsi $f(x) = x^2$. Kita dapat menerapkan transformasi umum dengan memilih $a = 2$, $b = 1$, $h = -1$, dan $k = 3$. Maka, fungsi hasil transformasi adalah:

$$g(x) = 2 \cdot f(1(x + 1)) + 3 = 2 \cdot (x + 1)^2 + 3.$$

Grafik dari fungsi ini akan terlihat seperti berikut:



Grafik biru adalah $y = x^2$ (asli), sedangkan grafik merah putus-putus adalah hasil transformasi yang telah diterapkan.

3.6 Fungsi Invers

Definisi Fungsi Invers

Fungsi invers adalah fungsi yang membalikkan efek dari fungsi lain. Jika f adalah fungsi yang memetakan elemen dari himpunan A ke himpunan B, maka fungsi invers f^{-1} memetakan elemen dari himpunan B kembali ke himpunan A. Dengan kata lain, jika $f(x) = y$, maka $f^{-1}(y) = x$.

Definisi 3.10 Fungsi invers dari fungsi f adalah fungsi f^{-1} yang memenuhi

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{dan} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

untuk setiap x dalam domain f.

Fungsi invers memiliki beberapa sifat penting, antara lain:

- Jika f adalah fungsi satu-satu (injektif), maka f memiliki invers.
- Grafik dari fungsi invers f^{-1} dapat diperoleh dengan mencerminkan grafik f terhadap garis $y = x$.

Cara Mencari Fungsi Invers

Untuk mencari fungsi invers dari fungsi $f(x)$, kita dapat mengikuti langkah-langkah berikut:

1. Ganti $f(x)$ dengan y: $y = f(x)$.
2. Tukar x dan y: $x = f(y)$.
3. Selesaikan persamaan untuk y.
4. Ganti y dengan $f^{-1}(x)$.

Contoh 3.17 Misalkan kita memiliki fungsi $f(x) = 2x + 3$. Untuk mencari inversnya, kita lakukan langkah-langkah berikut:

1. Ganti $f(x)$ dengan y: $y = 2x + 3$.
2. Tukar x dan y: $x = 2y + 3$.
3. Selesaikan untuk y:
$$x - 3 = 2y \implies y = \frac{x-3}{2}.$$
4. Ganti y dengan $f^{-1}(x)$:
$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}.$$

Dengan demikian, fungsi invers dari $f(x) = 2x + 3$ adalah

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}.$$

3.7 Grafik Pertidaksamaan Polinomial dan Rasional

Pertidaksamaan Polinomial

Seperti yang telah dibahas pada subbab 2.2 di Bab 2, pertidaksamaan polinomial adalah pertidaksamaaan yang melibatkan polinomial. Bentuk umumnya adalah

$$P(x) > 0, \quad P(x) < 0, \quad P(x) \geq 0, \quad P(x) \leq 0,$$

di mana $P(x)$ adalah polinomial.

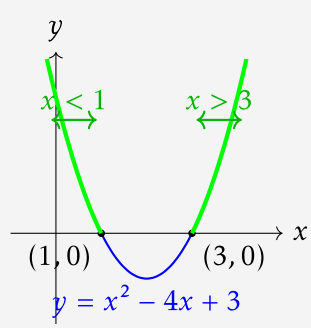
Grafik pertidaksamaan polinomial digunakan untuk menentukan himpunan solusi dari pertidaksamaan yang melibatkan polinomial. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan polinomial secara grafis, kita dapat mengikuti langkah-langkah berikut:

1. Gambarkan grafik fungsi polinomial $y = P(x)$ pada bidang koordinat Cartesian.
2. Tentukan titik-titik potong grafik dengan sumbu x (akar-akar polinomial), yaitu solusi dari $P(x) = 0$.
3. Amati bagian grafik yang berada di atas sumbu x ($P(x) > 0$) dan di bawah sumbu x ($P(x) < 0$).
4. Tentukan interval x yang memenuhi pertidaksamaan sesuai dengan tanda yang diminta ($>$, $<$, $\geq$, atau $\leq$).

Contoh 3.18 Tentukan himpunan solusi dari pertidaksamaan $x^2 - 4x + 3 > 0$ dengan bantuan grafik.

Penyelesaian:

- Bentuk polinomial: $P(x) = x^2 - 4x + 3$.
- Akar-akar: $x^2 - 4x + 3 = 0 \implies (x-1)(x-3) = 0 \implies x = 1$ atau $x = 3$.
- Gambarkan grafik parabola $y = x^2 - 4x + 3$:

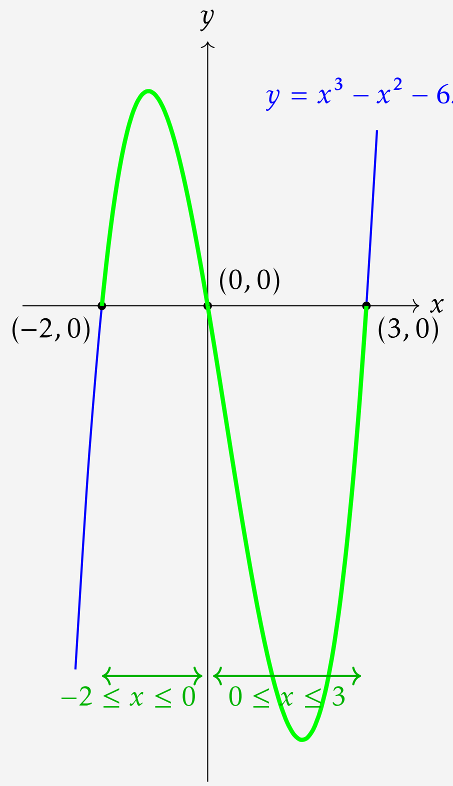


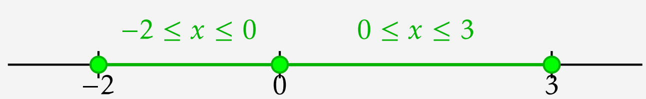
- Grafik berada di atas sumbu x untuk $x < 1$ dan $x > 3$.
- Karena pertidaksamaan $>$, maka $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Jadi, himpunan solusi adalah $x < 1$ atau $x > 3$.

Contoh 3.19 Tentukan himpunan solusi dari $x^3 - x^2 - 6x \leq 0$ secara grafis.
Penyelesaian:

- Faktorkan: $x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x - 3)(x + 2)$.
- Akar-akar: $x = 0$, $x = 3$, $x = -2$.
- Gambarkan grafik $y = x^3 - x^2 - 6x$:





- Grafik di bawah atau pada sumbu x pada interval $[-2, 0] \cup [3, \infty)$.

Jadi, himpunan solusi adalah $-2 \leq x \leq 0$ atau $x \geq 3$.

Dengan menggunakan grafik, kita dapat dengan mudah menentukan interval solusi pertidaksamaan polinomial dan memahami perilaku fungsi pada setiap interval.

3.8 Latihan

1. Diberikan fungsi $f(x) = 3x - 5$. Tentukan:
   (a) Domain dan range fungsi f.
   (b) Nilai $f(2)$ dan $f(-1)$.
2. Tentukan domain dari fungsi berikut:
   (a) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$
   (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$
3. Misalkan $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x + 1$. Hitung:
   (a) $(f + g)(x)$
   (b) $(f \circ g)(x)$
   (c) $(g \circ f)(x)$
4. Tentukan invers dari fungsi $f(x) = \dfrac{x + 2}{3}$.
5. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = |x - 2|$ dan tentukan titik potong dengan sumbu x dan y.
6. Diberikan fungsi $f(x) = x^2$. Lakukan transformasi berikut dan gambarkan grafiknya:
   (a) Translasi ke atas 3 satuan.
   (b) Refleksi terhadap sumbu x.
   (c) Dilatasi vertikal dengan faktor 2.
7. Tentukan himpunan solusi dari pertidaksamaan $x^2 - 6x + 8 < 0$ dengan bantuan grafik.
8. Diberikan fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x - 1$. Tentukan:
   (a) $(f \circ g)(x)$ dan domainnya.
   (b) $(g \circ f)(x)$ dan domainnya.
9. Jelaskan perbedaan antara domain dan range suatu fungsi, serta berikan contoh fungsi beserta domain dan range-nya.
10. Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 4x$. Tentukan interval x di mana $f(x) > 0$ dengan bantuan grafik.

4. Fungsi Eksponensial dan Logaritmik

Ilmu eksponensial dan logaritma adalah kunci untuk memahami pertumbuhan dan perubahan di alam semesta.

Roger Penrose

Pada bab ini, kita akan mempelajari fungsi eksponensial dan logaritmik, mulai dari definisi, sifat-sifat dasar, hingga aplikasinya dalam berbagai konteks. Bab ini membahas hubungan antara eksponensial dan logaritma, aturan-aturan operasi, serta cara menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan yang melibatkan kedua fungsi tersebut. Selain itu, akan dijelaskan bagaimana menggambar grafik fungsi eksponensial dan logaritmik, serta menafsirkan karakteristik grafik seperti domain, range, asimtot, dan titik potong. Bab ini juga menyoroti peran penting eksponensial dan logaritma dalam model pertumbuhan, peluruhan, dan fenomena alam lainnya.

4.1 Fungsi Eksponensial dan Grafiknya

Definisi Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial adalah fungsi yang memiliki bentuk umum $f(x) = a^x$, di mana a adalah bilangan positif dan $a \neq 1$. Fungsi ini memiliki karakteristik pertumbuhan yang cepat dan grafiknya selalu melengkung ke atas. Fungsi eksponensial sering digunakan untuk memodelkan fenomena pertumbuhan, seperti populasi, investasi, dan penyebaran penyakit.

Definisi 4.1 **Fungsi Eksponensial:** adalah fungsi yang dinyatakan dalam bentuk

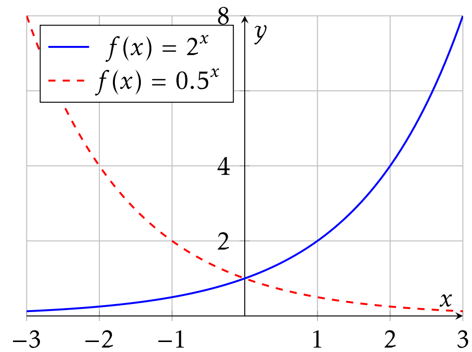
$$f(x) = a^x,$$

di mana $a > 0$ dan $a \neq 1$. Fungsi ini memiliki grafik yang selalu naik (jika $a > 1$) atau turun (jika $0 < a < 1$).

Grafik Fungsi Eksponensial dan Sifatnya

Grafik fungsi eksponensial $f(x) = a^x$ memiliki ciri khas sebagai berikut:

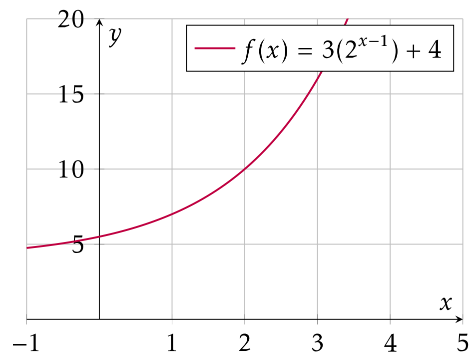
- **Perpotongan sumbu-y**: Grafik selalu memotong sumbu-y di titik $(0, 1)$, karena $f(0) = a^0 = 1$.
- **Asimtot horizontal**: Grafik memiliki asimtot horizontal pada $y = 0$, karena untuk $x \to -\infty$, $a^x \to 0$.
- **Pertumbuhan eksponensial**: Jika $a > 1$, grafik naik tajam ke kanan (pertumbuhan eksponensial).
- **Peluruhan eksponensial**: Jika $0 < a < 1$, grafik turun ke kanan (peluruhan eksponensial).



Transformasi Fungsi Eksponensial

Transformasi dapat diterapkan pada fungsi eksponensial, seperti pada fungsi $f(x) = 3(2^{x-1}) + 4$:

- **Translasi horizontal**: $x - 1$ menggeser grafik ke kanan 1 satuan.
- **Perkalian vertikal**: 3 mengalikan tinggi grafik (meregangkan secara vertikal).
- **Translasi vertikal**: $+4$ menggeser grafik ke atas 4 satuan.



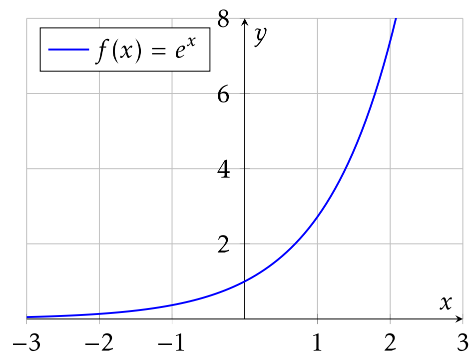
Grafik $f(x) = 3(2^{x-1}) + 4$ memiliki asimtot horizontal di $y = 4$ dan titik potong sumbu-y di $f(0) = 3(2^{-1}) + 4 = 3 \times \frac{1}{2} + 4 = 1.5 + 4 = 5.5$.

4.2 Fungsi Eksponensial Natural, e

Fungsi eksponensial natural adalah fungsi dengan basis e, di mana e adalah bilangan irasional yang kira-kira sama dengan 2.71828. Fungsi ini dinyatakan sebagai $f(x) = e^x$ dan memiliki sifat unik, yaitu laju pertumbuhannya sama dengan nilai fungsi itu sendiri. Fungsi eksponensial natural sering digunakan dalam kalkulus dan analisis matematis.

Grafik Fungsi Eksponensial Natural

Grafik fungsi eksponensial natural $f(x) = e^x$ mirip dengan grafik fungsi eksponensial lainnya, tetapi dengan laju pertumbuhan yang lebih cepat. Berikut adalah grafiknya:



Sifat-sifat Fungsi Eksponensial Natural

Fungsi eksponensial natural memiliki beberapa sifat penting:

- **Pertumbuhan Eksponensial**: Fungsi ini tumbuh sangat cepat seiring bertambahnya nilai x.
- **Laju Pertumbuhan**: Laju pertumbuhan fungsi ini pada titik x adalah sama dengan nilai fungsi itu sendiri, yaitu $f'(x) = e^x$.
- **Asimtot Horizontal**: Fungsi ini memiliki asimtot horizontal pada $y = 0$.
- **Titik Potong Sumbu y**: Fungsi ini memotong sumbu y pada titik (0,1).

4.3 Fungsi Logaritmik sebagai Invers dari Fungsi Eksponensial

Fungsi logaritmik adalah invers dari fungsi eksponensial. Jika fungsi eksponensial dinyatakan sebagai $y = a^x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka fungsi logaritmik didefinisikan sebagai:

Definisi 4.2 **Fungsi Logaritmik:** Fungsi logaritmik dengan basis a adalah

$$f(x) = \log_a(x)$$

dengan $x > 0$, $a > 0$, dan $a \neq 1$.

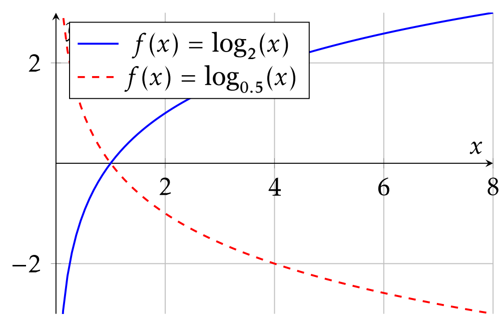
Fungsi logaritmik memenuhi hubungan kesetaraan berikut:

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

Kesetaraan ini adalah konsep inti dalam bab ini dan harus dipahami serta dilatih secara konsisten.

Grafik Fungsi Logaritmik

Grafik fungsi logaritmik diperoleh dengan mencerminkan grafik fungsi eksponensial $y = a^x$ terhadap garis $y = x$. Berikut adalah grafik fungsi logaritmik untuk beberapa basis:



Domain, Rentang, dan Asimtot Vertikal

- **Domain**: $x > 0$
- **Rentang**: Semua bilangan real ($-\infty < y < \infty$)
- **Asimtot vertikal**: Grafik memiliki asimtot vertikal pada $x = 0$

Logaritma Natural

Logaritma natural adalah logaritma dengan basis e, yaitu

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Kesetaraan yang berlaku:

$$y = \ln(x) \iff e^y = x$$

Gunakan kesetaraan $y = \log_a(x) \iff a^y = x$ untuk menyelesaikan berbagai soal logaritma dan eksponensial. Konsep ini adalah kunci utama dalam memahami dan menguasai materi logaritma.

4.4 Sifat-sifat Logaritma

Sifat-sifat logaritma yang paling sering digunakan adalah aturan produk, hasil bagi, dan pangkat. Sifat-sifat ini dapat diturunkan langsung dari hukum-hukum eksponen, sehingga tidak perlu dihafalkan sebagai aturan terpisah. Berikut penurunan masing-masing sifat:

1. Aturan Produk

Misalkan $M = \log_a(x)$ dan $N = \log_a(y)$. Maka $a^M = x$ dan $a^N = y$. Perhatikan:

$$xy = a^M \cdot a^N = a^{M+N}$$

Ambil logaritma basis a pada kedua ruas:

$$\log_a(xy) = \log_a(a^{M+N}) = M + N = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Jadi,

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)}$$

2. Aturan Hasil Bagi

Dengan cara serupa, misalkan $M = \log_a(x)$ dan $N = \log_a(y)$, maka $a^M = x$ dan $a^N = y$.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^M}{a^N} = a^{M-N}$$

Ambil logaritma basis a:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(a^{M-N}) = M - N = \log_a(x) - \log_a(y)$$

Jadi,

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)}$$

3. Aturan Pangkat

Misalkan $M = \log_a(x)$, maka $a^M = x$. Untuk r bilangan real,

$$x^r = (a^M)^r = a^{Mr}$$

Ambil logaritma basis a:

$$\log_a(x^r) = \log_a(a^{Mr}) = Mr = r\log_a(x)$$

Jadi,

$$\boxed{\log_a(x^r) = r\log_a(x)}$$

4. Rumus Ganti Basis

Untuk mengubah logaritma ke basis lain, gunakan:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Penurunan: Misalkan $y = \log_a(x)$, maka $a^y = x$. Ambil logaritma basis b pada kedua ruas:

$$\log_b(a^y) = \log_b(x) \implies y \log_b(a) = \log_b(x) \implies y = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Jadi,

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}}$$

Catatan Penting

Sifat-sifat di atas **tidak berlaku** untuk penjumlahan di dalam argumen logaritma, misalnya:

$$\ln(x + y) \neq \ln(x) + \ln(y)$$

Kesalahan ini sering terjadi jika sifat logaritma hanya dihafalkan tanpa memahami penurunan dan hubungan invers dengan eksponensial. Selalu gunakan penurunan di atas untuk mengingat dan membuktikan sifat-sifat logaritma.

4.5 Persamaan Eksponensial dan Logaritmik

Panduan Sistematis Menyelesaikan Persamaan Eksponensial dan Logaritmik

1. Persamaan Eksponensial

Langkah-langkah umum:

1. **Isolasi suku eksponensial**: Usahakan agar bentuk eksponensial (misal $a^{f(x)}$) berdiri sendiri di satu sisi persamaan.
2. **Ambil logaritma kedua sisi**: Pilih basis logaritma yang sesuai (bisa ln, $\log_{10}$, atau $\log_a$).
3. **Selesaikan untuk variabel**: Gunakan sifat logaritma untuk menurunkan pangkat menjadi perkalian, lalu selesaikan persamaan linear atau kuadrat yang muncul.
4. **Cek solusi**: Pastikan solusi yang diperoleh valid dalam konteks soal.

Contoh:

$$2^{x+1} = 10$$

Isolasi eksponensial:

$$2^{x+1} = 10$$

Ambil logaritma kedua sisi:

$$\log_2(2^{x+1}) = \log_2(10)$$

$$x + 1 = \log_2(10)$$

$$x = \log_2(10) - 1$$

1. Persamaan Logaritmik

Langkah-langkah umum:

1. **Gunakan sifat logaritma**: Gabungkan semua suku logaritma menjadi satu logaritma tunggal jika memungkinkan.
2. **Ubah ke bentuk eksponensial**: Gunakan kesetaraan $y = \log_a(x) \iff a^y = x$.
3. **Selesaikan untuk variabel**: Selesaikan persamaan yang muncul.
4. **Cek solusi asing**: Pastikan solusi tidak menghasilkan argumen logaritma yang negatif atau nol.

Contoh:

$$\log_3(x - 1) + \log_3(x + 1) = 2$$

Gabungkan logaritma:

$$\log_3\left((x - 1)(x + 1)\right) = 2$$

Ubah ke bentuk eksponensial:

$$(x - 1)(x + 1) = 3^2 = 9$$

$$x^2 - 1 = 9 \implies x^2 = 10 \implies x = \pm\sqrt{10}$$

Cek solusi: Karena $\log_3(x-1)$ dan $\log_3(x+1)$ harus terdefinisi ($x-1>0$ dan $x+1>0$), maka $x>1$. Jadi, solusi yang valid hanya $x=\sqrt{10}$.

Catatan Penting: Selalu lakukan pengecekan solusi akhir agar tidak ada solusi asing (solusi yang menyebabkan logaritma tidak terdefinisi atau hasil negatif).

4.6 Pemodelan dengan Fungsi Eksponensial dan Logaritmik

Aplikasi Dunia Nyata Fungsi Eksponensial dan Logaritmik

Fungsi eksponensial dan logaritmik sangat penting dalam berbagai bidang ilmu dan kehidupan sehari-hari. Berikut beberapa contoh aplikasi nyata:

1. **Bunga Majemuk**
   - *Bunga Majemuk Diskrit:* Jika uang sebesar P diinvestasikan dengan suku bunga r per periode selama n periode, maka nilai akhir investasi adalah
   $$A = P(1+r)^n$$
   - *Bunga Majemuk Kontinu:* Jika bunga dihitung secara kontinu, rumusnya menjadi
   $$A = Pe^{rt}$$
   di mana t adalah waktu (tahun), r adalah suku bunga per tahun, dan e adalah bilangan eksponensial.

2. **Pertumbuhan Populasi**
   - Populasi organisme sering kali bertambah secara eksponensial:
   $$P(t) = P_0 e^{kt}$$
   di mana P_0 adalah populasi awal, k adalah laju pertumbuhan, dan t adalah waktu.

3. **Peluruhan Radioaktif (Waktu Paruh)**
   - Jumlah zat radioaktif yang tersisa setelah waktu t mengikuti persamaan eksponensial:
   $$N(t) = N_0 e^{-kt}$$
   di mana N_0 adalah jumlah awal, k adalah konstanta peluruhan, dan waktu paruh $T_{1/2}$ terkait dengan k melalui
   $$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

4. **Hukum Pendinginan Newton**
   - Suhu benda yang didinginkan mengikuti persamaan eksponensial:
   $$T(t) = T_{\text{lingkungan}} + (T_0 - T_{\text{lingkungan}})e^{-kt}$$
   di mana T_0 adalah suhu awal, $T_{\text{lingkungan}}$ adalah suhu lingkungan, dan k adalah konstanta pendinginan.

5. **Skala pH**
   - pH larutan didefinisikan menggunakan logaritma:
   $$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+]$$
   di mana $[\text{H}^+]$ adalah konsentrasi ion hidrogen dalam mol/L. Skala pH menunjukkan bagaimana perubahan kecil dalam konsentrasi ion menghasilkan perubahan besar pada pH.

Aplikasi-aplikasi di atas menunjukkan **mengapa** fungsi eksponensial dan logaritmik sangat penting: mereka memodelkan pertumbuhan, peluruhan, perubahan suhu, dan bahkan skala kimia yang digunakan sehari-hari. Dengan memahami fungsi-fungsi ini, kita dapat menganalisis dan memprediksi fenomena nyata secara akurat.

4.7 Latihan

1. Hitung nilai $f(0)$ untuk fungsi $f(x) = 3(2^{x-1}) + 4$.
2. Tentukan domain dari fungsi $f(x) = \log_2(x - 3)$.
3. Jika $P(t) = 100e^{0.05t}$, berapa populasi setelah $t = 10$ tahun?
4. Selesaikan persamaan $2^{x+2} = 32$.
5. Jika $\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+]$ dan $[\text{H}^+] = 10^{-5}$ mol/L, berapa nilai pH larutan?
6. Jelaskan hubungan antara fungsi eksponensial dan fungsi logaritmik beserta contohnya.
7. Buktikan sifat logaritma $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ menggunakan definisi logaritma.
8. Sebuah zat radioaktif memiliki waktu paruh $T_{1/2} = 5$ tahun. Jika jumlah awal $N_0 = 100$ gram, tentukan rumus jumlah zat yang tersisa setelah t tahun dan hitung sisa zat setelah $t = 15$ tahun.
9. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \log_2(x)$ dan sebutkan domain, rentang, serta asimtotnya.
10. Seorang investor menanamkan uang sebesar $Rp\ 10.000.000$ dengan bunga majemuk 8% per tahun selama 6 tahun. Hitung nilai akhir investasi jika bunga dihitung secara kontinu.

5. Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri adalah jendela untuk memahami dunia periodik.

David Hilbert

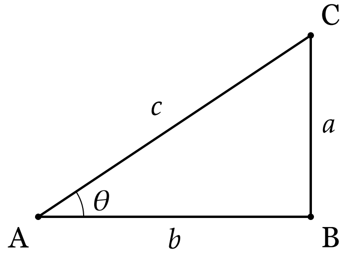
Pada bab ini, kita akan mempelajari fungsi trigonometri, mulai dari definisi, notasi, hingga aplikasinya dalam berbagai konteks. Bab ini membahas hubungan antara sudut dan rasio sisi segitiga, serta cara menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan yang melibatkan fungsi trigonometri. Selain itu, akan dijelaskan bagaimana menggambar grafik fungsi trigonometri, serta menafsirkan karakteristik grafik seperti periode, amplitudo, dan fase. Bab ini juga menyoroti peran penting fungsi trigonometri dalam model periodik, seperti gelombang, osilasi, dan fenomena alam lainnya.

5.1 Definisi dan Notasi

Trigonometri adalah cabang matematika yang mempelajari hubungan antara sudut dan panjang sisi-sisi dalam segitiga, khususnya segitiga siku-siku. Kata ”trigonometri” berasal dari bahasa Yunani, yaitu ”trigonon” (segitiga) dan ”metron” (ukuran).

Definisi Dasar

Dalam segitiga siku-siku, terdapat tiga fungsi trigonometri utama yang mendeskripsikan rasio antara sisi-sisi segitiga terhadap sudut-sudutnya:



- **Sinus** (sin): Perbandingan antara panjang sisi di depan sudut (θ) dengan panjang sisi miring.
- **Kosinus** (cos): Perbandingan antara panjang sisi samping sudut (θ) dengan panjang sisi miring.
- **Tangen** (tan): Perbandingan antara panjang sisi di depan sudut (θ) dengan panjang sisi samping sudut (θ).

Secara matematis, didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 5.1 Jika sebuah segitiga siku-siku memiliki sudut θ, sisi di depan sudut θ adalah a, sisi samping sudut θ adalah b, dan sisi miring adalah c, maka:

$$\sin\theta = \frac{a}{c}, \quad \cos\theta = \frac{b}{c}, \quad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

Selain tiga fungsi utama di atas, terdapat juga fungsi trigonometri lainnya, yaitu:

- **Kosekan** (csc): Kebalikan dari sinus, $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{a}$
- **Sekan** (sec): Kebalikan dari kosinus, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{b}$
- **Kotangen** (cot): Kebalikan dari tangen, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{b}{a}$

Notasi Sudut

Sudut dalam trigonometri biasanya dinyatakan dalam derajat (°) atau radian. Hubungan antara derajat dan radian adalah:

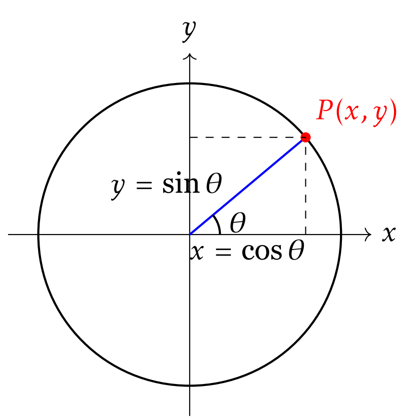
$$180^\circ = \pi \text{ radian}$$

Sehingga, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ radian dan 1 radian $= \frac{180^\circ}{\pi}$.

Lingkaran Trigonometri

Fungsi trigonometri juga dapat didefinisikan menggunakan lingkaran satuan, yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 dan pusat di titik $(0, 0)$ pada bidang koordinat. Jika sebuah titik $P(x, y)$ berada pada lingkaran satuan dan membentuk sudut θ terhadap sumbu x, maka:

$$x = \frac{\cos\theta}{1} = \cos\theta, \quad \text{dan} \quad y = \frac{\sin\theta}{1} = \sin\theta$$



Notasi Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri biasanya ditulis sebagai $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, dan seterusnya, di mana θ adalah sudut yang diukur dalam derajat atau radian. Notasi ini berlaku baik untuk sudut positif maupun negatif, serta untuk sudut yang lebih besar dari 360° atau 2π radian. Dalam analisis matematika, fungsi trigonometri juga dapat dinyatakan sebagai fungsi dari variabel x, misalnya $\sin x$, $\cos x$, dan $\tan x$, di mana x dapat berupa sudut atau bilangan real.

Selain notasi standar, terdapat juga notasi invers fungsi trigonometri, seperti arcsin, arccos, dan arctan, yang digunakan untuk menentukan nilai sudut dari suatu nilai fungsi trigonometri. Misalnya, jika $\sin\theta = y$, maka $\theta = \arcsin y$. Notasi ini sangat penting dalam pemecahan persamaan trigonometri dan aplikasi pada geometri serta kalkulus.

Fungsi trigonometri juga dapat diperluas ke bilangan kompleks menggunakan rumus Euler, yaitu $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, sehingga notasi dan konsep trigonometri menjadi sangat fundamental dalam analisis matematika tingkat lanjut.

Kesimpulan

Trigonometri sangat penting dalam berbagai bidang ilmu, seperti matematika, fisika, teknik, astronomi, dan lain-lain. Pemahaman tentang definisi dan notasi trigonometri merupakan dasar untuk mempelajari konsep-konsep lanjutan seperti grafik fungsi trigonometri, identitas trigonometri, persamaan dan pertidaksamaan trigonometri, serta aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari.

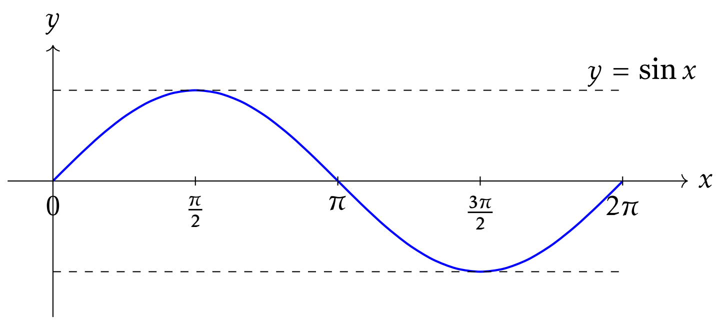
Selain sebagai alat untuk memecahkan masalah segitiga, trigonometri juga digunakan dalam analisis gelombang, pemodelan periodik, dan transformasi koordinat. Fungsi trigonometri menjadi kunci dalam memahami fenomena yang bersifat siklik atau berulang, seperti gerak harmonik, suara, cahaya, dan sinyal listrik.

Dengan menguasai konsep dasar dan notasi trigonometri, siswa dapat mengembangkan kemampuan berpikir analitis dan memecahkan berbagai persoalan matematika maupun aplikasi nyata. Trigonometri juga menjadi fondasi penting untuk studi lanjutan di bidang kalkulus, geometri analitik, dan matematika terapan.

5.2 Grafik Fungsi Trigonometri

Grafik Fungsi Sinus

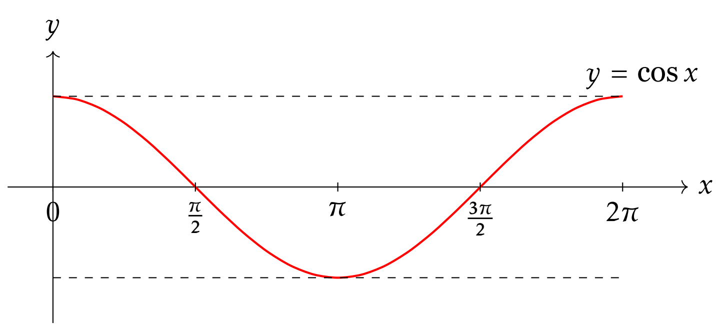
Grafik fungsi $y = \sin x$ berbentuk gelombang yang berulang secara periodik. Periode fungsi sinus adalah 2π, dengan amplitudo maksimum 1 dan minimum -1.



Definisi 5.2 Fungsi sinus $y = \sin x$ memiliki sifat periodik dengan periode 2π, yaitu $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ untuk setiap x.

Grafik Fungsi Kosinus

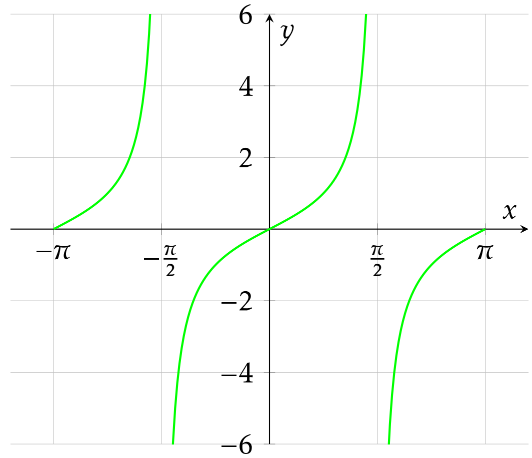
Grafik fungsi $y = \cos x$ juga berbentuk gelombang periodik dengan periode 2π, namun dimulai dari nilai maksimum pada $x = 0$.



Definisi 5.3 Fungsi kosinus $y = \cos x$ memiliki sifat periodik dengan periode 2π, yaitu $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ untuk setiap x.

Grafik Fungsi Tangen

Grafik fungsi $y = \tan x$ memiliki periode π dan terdapat asimtot vertikal pada $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Definisi 5.4 Fungsi tangen $y = \tan x$ memiliki periode π, yaitu $\tan(x+\pi) = \tan x$ untuk setiap x.

Transformasi Grafik Fungsi Trigonometri

Grafik fungsi trigonometri dapat mengalami berbagai transformasi, seperti perubahan amplitudo, periode, pergeseran, dan refleksi. Bentuk umum fungsi trigonometri yang telah ditransformasi adalah:

$$y = A\sin(Bx + C) + D$$

atau

$$y = A\cos(Bx + C) + D$$

dengan penjelasan sebagai berikut:

- A: **amplitudo**, menentukan tinggi maksimum dan minimum gelombang dari sumbu tengah. Nilai mutlak $|A|$ adalah amplitudo, sedangkan tanda A menentukan refleksi terhadap sumbu x (jika $A < 0$, grafik terbalik).
- B: **faktor periode**, mempengaruhi panjang satu siklus gelombang. Periode fungsi adalah $\frac{2\pi}{|B|}$ untuk sinus dan kosinus, serta $\frac{\pi}{|B|}$ untuk tangen.
- C: **pergeseran fase** (fase shift), menggeser grafik secara horizontal. Pergeseran ke kanan sebesar $-\frac{C}{B}$ jika $C > 0$, dan ke kiri jika $C < 0$.
- D: **pergeseran vertikal**, menggeser grafik ke atas jika $D > 0$ dan ke bawah jika $D < 0$.

Contoh Transformasi:

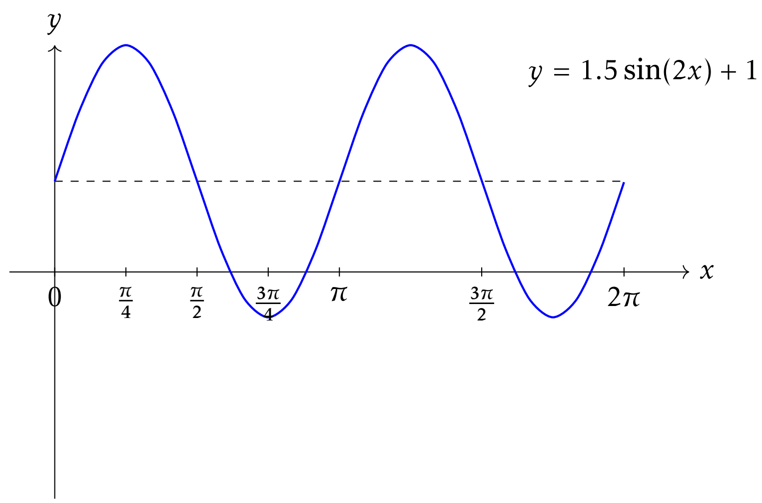
1. $y = 2\sin(x)$: Amplitudo 2, periode 2π, tanpa pergeseran.
2. $y = \sin(2x)$: Amplitudo 1, periode π (lebih rapat).

3. $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$: Pergeseran ke kanan $\frac{\pi}{4}$.
4. $y = -\cos(x) + 1$: Refleksi terhadap sumbu x dan naik 1 satuan.
5. $y = 0.5\sin(3x + \frac{\pi}{2}) - 2$: Amplitudo 0.5, periode $\frac{2\pi}{3}$, pergeseran ke kiri $\frac{\pi}{6}$, turun 2 satuan.

Langkah-langkah Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri yang Ditrasformasi:

1. Tentukan amplitudo ($|A|$), periode ($\frac{2\pi}{|B|}$), pergeseran fase ($-\frac{C}{B}$), dan pergeseran vertikal (D).
2. Identifikasi titik-titik penting: titik awal, titik maksimum, titik minimum, dan titik potong sumbu x.
3. Gambar sumbu x dan y, serta sumbu tengah (garis $y = D$).
4. Plot titik-titik penting sesuai transformasi.
5. Hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva halus berbentuk gelombang.
6. Ulangi pola sesuai periode.

Ilustrasi Transformasi:



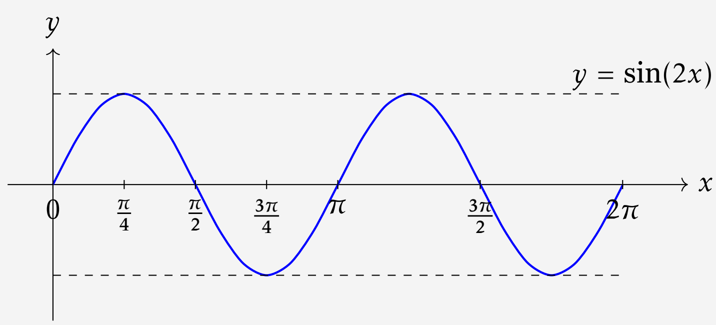
Transformasi grafik fungsi trigonometri sangat penting untuk memahami perilaku gelombang, analisis sinyal, dan pemodelan fenomena periodik dalam berbagai bidang ilmu.

Contoh 5.1 Gambarkan grafik fungsi $y = \sin(2x)$ dan tentukan periode serta amplitudonya.
Penyelesaian:

- Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- Amplitudo: 1
- Grafik akan berulang setiap π satuan pada sumbu x.

Langkah-langkah menggambar grafik $y = \sin(2x)$:

1. Tentukan periode: $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
2. Tentukan amplitudo: $A = 1$ (nilai maksimum dan minimum adalah 1 dan -1).
3. Buat sumbu x dan y, beri label titik-titik penting: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = 2\pi$.
4. Hitung nilai fungsi di titik-titik tersebut:
   - $x = 0$: $\sin(0) = 0$
   - $x = \frac{\pi}{4}$: $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
   - $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin(\pi) = 0$
   - $x = \frac{3\pi}{4}$: $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$
   - $x = \pi$: $\sin(2\pi) = 0$
5. Hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva halus berbentuk gelombang.
6. Ulangi pola gelombang setiap π satuan pada sumbu x.

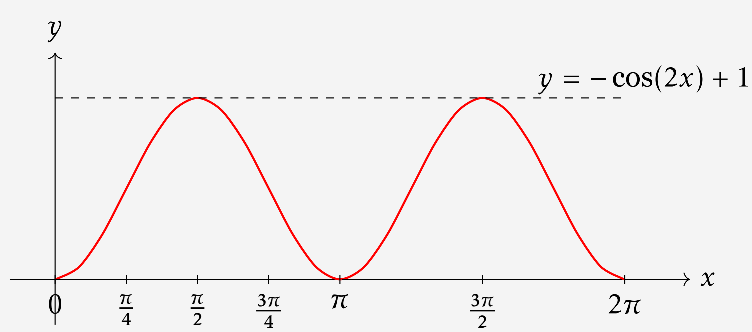


Contoh 5.2 Gambarkan grafik $y = -\cos(2x) + 1$ dan tentukan sifat-sifatnya.
Penyelesaian:

- Amplitudo: 1
- Periode: π
- Refleksi terhadap sumbu x
- Pergeseran vertikal: naik 1 satuan

Langkah-langkah menggambar grafik $y = -\cos(2x) + 1$:

1. Tentukan periode: $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
2. Amplitudo: $|A| = 1$.
3. Nilai maksimum: $y_{\text{max}} = -(-1) + 1 = 2$.
4. Nilai minimum: $y_{\text{min}} = -1 + 1 = 0$.
5. Titik-titik penting:
   - $x = 0$: $y = -\cos(0) + 1 = -1 + 1 = 0$
   - $x = \frac{\pi}{4}$: $y = -\cos(\frac{\pi}{2}) + 1 = 0 + 1 = 1$
   - $x = \frac{\pi}{2}$: $y = -\cos(\pi) + 1 = -(-1) + 1 = 2$
   - $x = \frac{3\pi}{4}$: $y = -\cos(\frac{3\pi}{2}) + 1 = 0 + 1 = 1$
   - $x = \pi$: $y = -\cos(2\pi) + 1 = -1 + 1 = 0$
6. Hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva halus berbentuk gelombang.
7. Ulangi pola setiap π satuan pada sumbu x.



5.3 Sifat-sifat Dasar

Identitas Trigonometri Dasar

Definisi 5.5 Identitas trigonometri adalah persamaan yang berlaku untuk semua nilai sudut yang memenuhi domain fungsi trigonometri. Identitas dasar yang paling penting adalah:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Identitas lain yang sering digunakan:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identitas Sudut Ganda dan Sudut Jumlah

Teorema 5.1 **(Identitas Penjumlahan Sudut)** Untuk setiap sudut a dan b berlaku:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Teorema 5.2 **(Identitas Sudut Ganda)**

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Identitas Perkalian dan Penjumlahan

Teorema 5.3 **(Identitas Perkalian)**

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

Contoh Penggunaan Identitas

Contoh 5.3 Buktikan bahwa $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.
Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} \sin 2x = 2\sin x \cos x &\implies \sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x \\ &\implies \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - 2\left(\frac{1}{4}\sin^2 2x\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \end{aligned}$$

Sifat Periodik dan Simetri

Definisi 5.6 Fungsi trigonometri memiliki sifat periodik dan simetri:

- **Periodik:** $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\tan(x + \pi) = \tan x$
- **Simetri:**
  - $\sin(-x) = -\sin x$ (ganjil)
  - $\cos(-x) = \cos x$ (genap)
  - $\tan(-x) = -\tan x$ (ganjil)

Nilai Khusus Fungsi Trigonometri

Contoh 5.4 Tentukan nilai $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$, dan $\sin 90^\circ$.
Jawaban:

$$\begin{array}{lcl} \sin 0^\circ &=& 0 \\ \sin 30^\circ &=& \frac{1}{2} \\ \sin 45^\circ &=& \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ &=& \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ &=& 1 \end{array}$$

5.4 Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri

Persamaan Trigonometri Dasar

Definisi 5.7 Persamaan trigonometri adalah persamaan yang melibatkan fungsi trigonometri dari suatu variabel (biasanya sudut) dan mencari nilai variabel tersebut yang memenuhi persamaan.

Contoh bentuk persamaan trigonometri dasar:

$$\sin x = k, \quad \cos x = k, \quad \tan x = k$$

dengan k adalah konstanta.

Contoh 5.5 Tentukan semua solusi dari persamaan $\sin x = \frac{1}{2}$ untuk $0^\circ \leq x < 360^\circ$.
Penyelesaian:

$$\sin x = \frac{1}{2} \implies x = 30^\circ \text{ atau } x = 150^\circ$$

Karena sin positif di kuadran I dan II.

Persamaan Trigonometri Umum

Solusi umum untuk persamaan trigonometri:

- $\sin x = k \implies x = \arcsin k + 360^\circ n$ atau $x = 180^\circ - \arcsin k + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = k \implies x = \arccos k + 360^\circ n$ atau $x = -\arccos k + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = k \implies x = \arctan k + 180^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$

Teorema 5.4 Jika $f(x)$ adalah fungsi trigonometri periodik dengan periode P, maka solusi persamaan $f(x) = k$ dapat dinyatakan sebagai $x_0 + nP$, dengan x_0 solusi utama dan $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. Karena $f(x)$ periodik dengan periode P, maka $f(x + P) = f(x)$ untuk setiap x. Jika x_0 adalah solusi dari $f(x) = k$, maka:

$$f(x_0) = k$$

Untuk setiap bilangan bulat n, berlaku:

$$f(x_0 + nP) = f(x_0) = k$$

Jadi, $x_0 + nP$ juga merupakan solusi dari $f(x) = k$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Sebaliknya, semua solusi dapat dinyatakan dalam bentuk tersebut karena sifat periodik fungsi. □

Persamaan Trigonometri Bertingkat

Persamaan dapat melibatkan lebih dari satu fungsi trigonometri atau sudut ganda/jumlah:

$$2\sin x - 1 = 0 \implies \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$$

Contoh 5.6 Selesaikan persamaan $\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$ untuk $0^\circ \le x < 360^\circ$.
Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= \sqrt{3}\cos x\\ 2\sin x\cos x &= \sqrt{3}\cos x\\ \cos x(2\sin x - \sqrt{3}) &= 0\end{aligned}$$

Jadi, $\cos x = 0$ atau $2\sin x - \sqrt{3} = 0$.

- $\cos x = 0 \implies x = 90^\circ, 270^\circ$
- $2\sin x = \sqrt{3} \implies \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = 60^\circ, 120^\circ$

Jadi, solusi: $x = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 270^\circ$

Pertidaksamaan Trigonometri

Definisi 5.8 Pertidaksamaan trigonometri adalah pertidaksamaan yang melibatkan fungsi trigonometri, misalnya:

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

Contoh 5.7 Tentukan himpunan solusi dari $\cos x < 0$ untuk $0^\circ \le x < 360^\circ$.
Jawaban: $\cos x < 0$ untuk $90^\circ < x < 270^\circ$

Penyelesaian Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri

Langkah-langkah umum:

1. Sederhanakan persamaan/pertidaksamaan menggunakan identitas trigonometri.
2. Tentukan solusi utama dalam satu periode.
3. Gunakan sifat periodik untuk mendapatkan solusi umum.
4. Jika ada batasan domain, tentukan solusi yang sesuai.

Contoh 5.8 Selesaikan pertidaksamaan $\tan x > 1$ untuk $0^\circ < x < 360^\circ$.
Penyelesaian: $\tan x > 1$ pada interval $45^\circ < x < 90^\circ$ dan $225^\circ < x < 270^\circ$

Contoh 5.9 Selesaikan persamaan $2\cos^2 x - 1 = 0$ untuk $0^\circ \le x < 360^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x - 1 &= 0 \\ 2\cos^2 x &= 1 \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2} \\ \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{atau} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Nilai $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ untuk $x = 45^\circ, 315^\circ$.
Nilai $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ untuk $x = 135^\circ, 225^\circ$.
Jadi, solusi: $x = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.

Contoh 5.10 Tentukan himpunan solusi dari pertidaksamaan $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ untuk $0^\circ \leq x < 360^\circ$.
Penyelesaian: $\sin x = -\frac{1}{2}$ pada $x = 210^\circ$ dan $x = 330^\circ$.
Karena grafik $\sin x$ di bawah $-\frac{1}{2}$ pada interval antara titik-titik tersebut di kuadran III dan IV, maka:

$$210^\circ \leq x \leq 330^\circ$$

Jadi, himpunan solusi adalah x pada interval $210^\circ \leq x \leq 330^\circ$.

5.5 Aplikasi Fungsi Trigonometri

Aplikasi dalam Segitiga

Definisi 5.9 Fungsi trigonometri digunakan untuk menentukan panjang sisi dan besar sudut dalam segitiga, terutama segitiga sembarang. Dua rumus penting adalah hukum sinus dan hukum kosinus.

Teorema 5.5 (Hukum Sinus) Untuk segitiga dengan sisi a, b, c dan sudut A, B, C di hadapan masing-masing sisi:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema 5.6 (Hukum Kosinus)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Contoh 5.11 Diketahui segitiga dengan $a = 7$, $b = 10$, dan sudut $C = 60^\circ$. Hitung panjang sisi c!

$$c^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \times 7 \times 10 \times \cos 60^\circ = 49 + 100 - 140 \times 0.5 = 149 - 70 = 79$$

$$c = \sqrt{79} \approx 8.89$$

Aplikasi dalam Geometri dan Koordinat

Definisi 5.10 Trigonometri digunakan untuk menentukan jarak, sudut, dan koordinat titik pada bidang datar maupun ruang.

Contoh 5.12 Titik P pada lingkaran satuan membentuk sudut 120° terhadap sumbu x. Tentukan koordinat P!

$$x = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad y = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Jadi, $P(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Aplikasi dalam Fisika

Definisi 5.11 Fungsi trigonometri digunakan dalam analisis gerak, gelombang, dan vektor.

Contoh 5.13 Sebuah benda bergerak dengan kecepatan v membentuk sudut θ terhadap sumbu x. Komponen kecepatan:

$$v_x = v\cos\theta, \quad v_y = v\sin\theta$$

Jika $v = 10$ m/s dan $\theta = 30^\circ$, maka $v_x = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8.66$ m/s, $v_y = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ m/s.

Aplikasi dalam Gelombang dan Sinyal

Definisi 5.12 Gelombang periodik, seperti suara dan cahaya, dimodelkan dengan fungsi trigonometri.

Contoh 5.14 Persamaan gelombang:

$$y(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

dengan A amplitudo, ω frekuensi sudut, dan ϕ fase awal.

Aplikasi dalam Navigasi dan Survey

Definisi 5.13 Trigonometri digunakan untuk menentukan arah, jarak, dan posisi dalam navigasi, astronomi, dan pemetaan.

Contoh 5.15 Seorang surveyor mengukur sudut elevasi 30° ke puncak gedung dari jarak 20 m. Tinggi gedung:

$$h = 20\tan 30^\circ = 20 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 11.55\,\mathrm{m}$$

Aplikasi dalam Matematika Lanjut

Definisi 5.14 Fungsi trigonometri digunakan dalam kalkulus (integral, turunan), bilangan kompleks, dan transformasi Fourier.

Teorema 5.7 (Rumus Euler)

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Contoh 5.16 Integral fungsi trigonometri:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

5.6 Latihan

1. Sederhanakan ekspresi berikut menggunakan identitas trigonometri:
   (a) $1 + \tan^2 x$
   (b) $2 \sin x \cos x$
2. Hitung nilai x untuk $0^\circ \leq x < 360^\circ$ yang memenuhi:
   (a) $\sin x = \frac{1}{2}$
   (b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Selesaikan persamaan trigonometri berikut:
   (a) $2 \sin x - 1 = 0$
   (b) $2 \cos^2 x - 1 = 0$
   (c) $\tan 2x = 0$
4. Tentukan himpunan solusi dari pertidaksamaan berikut untuk $0^\circ \leq x < 360^\circ$:
   (a) $\sin x > 0$
   (b) $\cos x < 0$
   (c) $\tan x \leq -1$
5. Gambarkan grafik fungsi berikut dan tentukan periode serta amplitudonya:
   (a) $y = 2 \sin x$
   (b) $y = \cos(2x)$
   (c) $y = -\sin(x) + 1$
6. Gunakan hukum sinus dan hukum kosinus untuk menyelesaikan soal berikut:
   (a) Dalam segitiga ABC, diketahui $a = 8$, $b = 6$, dan $\angle C = 45^\circ$. Hitung panjang sisi c.
   (b) Dalam segitiga ABC, diketahui $a = 5$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Hitung panjang sisi b.
7. Tentukan koordinat titik P pada lingkaran satuan jika sudut yang dibentuk terhadap sumbu x adalah:
   (a) 60°
   (b) 225°
8. Selesaikan pertidaksamaan trigonometri berikut:
   (a) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ untuk $0^\circ \leq x < 360^\circ$
   (b) $\tan x > 1$ untuk $0^\circ < x < 360^\circ$
9. **(Advance)** Hitung nilai integral berikut:
   (a) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$
   (b) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

Bibliography

[1] Robert F. Blitzer. *Precalculus: Mathematics for Calculus*. 6th. Pearson, 2013. ISBN: 9780321837349.

[2] Frank Demana et al. *Precalculus: Graphical, Numerical, Algebraic*. 8th. Pearson Education, 2010. ISBN: 9780131369898.

[3] Deborah Hughes-Hallett and Andrew M. Gleason. *Precalculus: Functions and Graphs*. John Wiley and Sons, 1992. ISBN: 9780471552317.

[4] Ron Larson. *Precalculus*. 9th. Cengage Learning, 2013. ISBN: 9781133949015.

[5] James Stewart. *Calculus: Early Transcendentals*. 8th. Cengage Learning, 2015. ISBN: 9781285741550.

[6] Michael Sullivan. *Precalculus*. 9th. Pearson Education, 2011. ISBN: 9780321716835.