① Méthode de Monte Carlo - Projet

Exercice 1 : (Déambulation vers la sortie)

1) On définit $S = \inf \{ m \in \mathbb{N}^* \mid W_m \notin]a;b[\}$

a) Montrons que : $\mathbb{P}(S > n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

On a : $\{S > n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{|X_i| \leq b-a\}$

Donc : $\mathbb{P}(S > n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{|X_i| \leq b-a\}\right)$

Par indépendance des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$\mathbb{P}(S > n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(|X_i| \leq b-a)$

Or, les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont identiquement distribués donc :

$\mathbb{P}(S > n) = \mathbb{P}(|X_1| \leq b-a)^n$

De plus : $\mathbb{P}(|X_1| \leq b-a) = \mathbb{P}(a-b \leq X_1 \leq b-a)$
$= \mathbb{P}(X_1 \in [a-b; b-a])$

Or, $[a-b; b-a]$ est strictement inclus dans le support de X_1 qui est $\mathbb{R}$: $[a-b; b-a] \subset \mathbb{R}$ car $b-a \neq +\infty$

d'où : $\mathbb{P}(X_1 \in [a-b; b-a]) < \mathbb{P}(X_1 \in \mathbb{R}) = 1$

Ainsi : $\mathbb{P}(S > n) = \mathbb{P}(|X_1| \leq b-a)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\mathbb{P}(|X_1| \leq b-a) < 1$

b) $T = \inf \{ m \in \mathbb{N}^* \mid W_m \notin]a;b[\}$

Montrons premièrement que : $\{T > n\} \subset \{S > n\}$

Soit que $T > n$ implique $S > n$: (Si $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) > n$ alors $S(\omega) > n$)

Soit $T > n$ donc : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $W_i \in]a;b[$

Par l'absurde supposons qu'il existe un $m \in [\![1;n]\!]$ tel que : $|X_m| > b-a$

Par hypothèse : $W_{m-1}, W_m \in]a;b[$

et on a : $W_m = W_{m-1} + X_m$

donc : $\begin{cases} W_m \leq b + X_m & ① \\ W_m \geq a + X_m & ② \end{cases}$

Si $X_m > 0$: alors $X_m > b-a$

et d'après ② : $W_m > a+b-a = b$

Or $W_m \in]a;b[$ ce qui est absurde

Si $X_m < 0$: alors $X_m < a-b$

et d'après ① : $W_m < b+a-b = a$

Or $W_m \in]a;b[$ ce qui est absurde

Conclusion : $\{T>n\} \subset \{S \geq n\}$

Montrons deuxièmement que T est fini presque sûrement

i.e : $\mathbb{P}(T<+\infty) = 1$

On a : $\{T<+\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{T\leq n\}$

On sait que $\{T\leq n\}$ est une suite croissante d'événements

donc d'après la propriété de continuité d'une probabilité :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{T\leq n\}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T\leq n)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} 1 - \mathbb{P}(T>n)$$

Or, $\{T>n\} \subset \{S>n\}$ donc par croissance de la mesure de probabilité :

$$\mathbb{P}(T>n) \leq \mathbb{P}(S>n) \Leftrightarrow -\mathbb{P}(T>n) \geq -\mathbb{P}(S>n)$$

Donc : $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{T\leq n\}\Big) \geq \lim_{n\to+\infty} 1 - \mathbb{P}(S>n) = 1-0 = 1$

Bilan : $1 \geq \mathbb{P}(T<+\infty) \geq 1$

donc $\mathbb{P}(T<+\infty) = 1$ et T fini p.s

2) Soient $(X_{ij})_{i\in[\![1;n]\!], j\in\mathbb{N}^*}$ iid de loi $\mathcal{N}(\mu,1)$

- L'estimateur de Monte Carlo classique de f est donné par :

$$\boxed{\hat{f}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{T_i} X_{ij} \geq b\right\}}}$$

avec $T_i = \inf\{m\in\mathbb{N}^* \mid W_m^i \notin]a;b[\}$

où $W_m^i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij}$

3) a) Réécrivons f par la méthode d'échantillonnage préférentiel :

$$f = \mathbb{E}_{\tilde{f}}\left[\mathbb{1}_{\left\{\sum_{k=1}^{T} X_k \geq b\right\}}\right]$$

avec $\tilde{f}$ la densité de la loi jointe du vecteur $(X_1, .. X_T)$ qui est égal au produit des densités de chaque variable par indépendance des X_k. De plus, comme les $(X_k)_{k\geq1}$ sont identiquement distribués selon $\mathcal{N}(\mu,1)$ alors :

$$\tilde{f}(X_1, .. X_T) = \prod_{k=1}^{T} f(X_k)$$ avec f la densité d'une $\mathcal{N}(\mu,1)$

- Par la méthode d'échantillonnage préférentiel, on a alors :

$$f = \mathbb{E}_{\tilde{g_0}}\left[\mathbb{1}_{\left\{\sum_{k=1}^{T} Z_k \geq b\right\}} \prod_{k=1}^{T} f(Z_k) \times \frac{1}{\tilde{g_0}(Z_1, .. Z_T)}\right]$$

avec $(Z_n)_{n\geq1}$ des variables aléatoires iid suivant $\mathcal{N}(0,1)$.
Par les mêmes arguments que $\tilde{f}$ pour $\tilde{g_0}$

$$f = \mathbb{E}_{g}\left[\mathbb{1}_{\left\{\sum_{k=1}^{T} Z_k \geq b\right\}} \prod_{k=1}^{T} \frac{f(Z_k)}{g_0(Z_k)}\right]$$ avec g_0 la densité d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Ce qui mène à l'estimateur d'échantillonnage préférentiel :

$$\boxed{\hat{\Delta}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{T_i} X_{ij} \geq b\right\}} \prod_{j=1}^{T_i} \frac{f(X_{ij})}{g(X_{ij})}}$$

f densité de $\mathcal{N}(\mu,1)$
g densité de $\mathcal{N}(0,1)$
$X_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1)$

avec $T_i = \inf \left\{ m \in \mathbb{N}^* \mid \sum_{j=1}^{m} X_{ij} \notin \,]a;b[\right\}$

b) $\underline{\theta = -\mu}$

Calculons le rapport $\prod_{j=1}^{T_i} \frac{f(X_{ij})}{g(X_{ij})}$

$$\frac{f(X_{ij})}{g(X_{ij})} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\exp(-(X_{ij}-\mu)^2/2)}{\exp(-(X_{ij}+\mu)^2/2)} = \exp\left(\frac{(X_{ij}+\mu)^2 - (X_{ij}-\mu)^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(X_{ij})}{g(X_{ij})} = \exp(2\mu X_{ij})$$

D'où : $\prod_{j=1}^{T_i} \frac{f(X_{ij})}{g(X_{ij})} = \exp\left(2\mu \sum_{j=1}^{T_i} X_{ij}\right)$

Ainsi : $\hat{\Delta}_n(-\mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{T_i} X_{ij} \geq b\right\}} \exp\left(2\mu \sum_{j=1}^{T_i} X_{ij}\right)$

Posons : $\tilde{h}(X_i) = \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{T_i} X_{ij} \geq b\right\}} \exp\left(2\mu \sum_{j=1}^{T_i} X_{ij}\right)$

On a : $(\tilde{h}(X_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ iid comme transformation mesurable (et intégrable) de variables aléatoires iid. (voir * à la fin)

Par conséquent :

$$\mathrm{Var}[\hat{\Delta}_n(-\mu)] = \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{h}(X_i)\right]$$ par indépendance des $(h(X_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[\tilde{h}(X_i)]$$ car les $(h(X_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont identiquement distribués

$$= \frac{1}{n} \mathrm{Var}[\tilde{h}(X_1)]$$

Or : $\mathrm{Var}[\tilde{h}(X_1)] = \mathbb{E}[\tilde{h}^2(X_1)] - \mathbb{E}^2[\tilde{h}(X_1)]$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}^2_{\left\{\sum_{j=1}^{T_1} X_{1j} \geq b\right\}} \exp\left(4\mu \sum_{j=1}^{T_1} X_{1j}\right)\right] - \mathbb{E}^2\left[\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{T_1} X_{1j} \geq b\right\}} \exp\left(2\mu \sum_{j=1}^{T_1} X_{1j}\right)\right]$$

② $\mathrm{Var}[\hat{h}(X_1)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^{T_1} X_{1j} \geq b\}} \exp(4\mu \sum_{j=1}^{T_1} X_{1j})]$

$$- f^2$$

car $\mathbb{1}^2_{\{\sum_{j=1}^{T_1} X_{1j} \geq b\}} = \mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^{T_1} X_{1j} \geq b\}}$ p.s

et par la méthode d'échantillonnage préférentiel pour le second terme

$\Rightarrow \mathrm{Var}[\hat{\Delta}_n(-\mu)] = \frac{1}{n}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^{T_1} X_{1j} \geq b\}} \exp(4\mu \sum_{j=1}^{T_1} X_{1j})] - f^2]$

Etant donné que $\sum_{j=1}^{T_1} X_{1j} \geq b > 0$ alors : $4\mu \sum_{j=1}^{T_1} X_{1j} < 0$

donc $\exp(4\mu \sum_{j=0}^{T_1} X_{1j}) \leq 1$ et par croissance de l'espérance :

$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^{T_1} X_{1j} \geq b\}} \exp(4\mu \sum_{j=1}^{T_1} X_{1j})] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^{T_1} X_{1j} \geq b\}}] = f$

D'où : $\mathrm{Var}[\hat{\Delta}_n(-\mu)] \leq \frac{1}{n}[f - f^2]$

Or : $\mathrm{Var}[\hat{f}_n] = \frac{1}{n}\mathrm{Var}[h(X_1)] = \frac{1}{n}[\mathbb{E}[h^2(X_1)] - \mathbb{E}^2[h(X_1)]]$

$= \frac{1}{n}[f - f^2] \geq \mathrm{Var}[\hat{\Delta}_n(-\mu)]$

Bilan : $\boxed{\mathrm{Var}[\hat{\Delta}_n(-\mu)] \leq \mathrm{Var}[\hat{f}_n]}$

* Pour être plus précis, $\hat{h}$ est une fonction du vecteur X_i mais aussi de T_i. Or, T_i dépend uniquement du vecteur X_i donc la suite $(T_i(X_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$ est iid. Dès lors, le couple $(X_i, T_i(X_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une suite iid donc $(\hat{h}(X_i, T_i(X_i)))_{i \in [\![1;n]\!]}$ est aussi iid.

4) On sait que l'estimateur d'échantillonnage préférentiel est sans biais donc : $\mathbb{E}[\hat{\Delta}_n(-\mu)] = f$

Or : $\mathbb{E}[\hat{\Delta}_n(-\mu)] \overset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^{T_i} x_{ij} \geq b\}} \exp(2\mu \sum_{j=1}^{T_i} x_{ij})]$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^{T_i} x_{ij} \geq b\}}] \exp(2\mu b) \quad \text{car } \mu < 0$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{T_i} x_{ij} \geq b) \exp(2\mu b)$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp(2\mu b)$$

Donc : $\boxed{f \leq \exp(2\mu b)}$

En faisant l'application numérique, on obtient : (environ)

$$\boxed{f \leq 4{,}54 \times 10^{-5}}$$

Ainsi, l'événement $\{W_T \geq b\}$ a une probabilité de se réaliser de l'ordre de 10^{-5}. Ainsi, si on prend un échantillon de $n = 10^5$, l'événement $\{W_T \geq b\}$ se réaliser une seule fois pour illustrer le principe.
C'est pourquoi on choisit $n = 10^6$ un échantillon plus large afin "d'être sûr" que l'événement $\{W_T \geq b\}$ se réalise un certain nombre de fois.

Exercice 2 : (Recette de financier)

1) a) Soit $T \in \mathbb{N}^*$, $W_T = \sum_{k=1}^{T} X_k$ avec $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite iid de $\mathcal{N}(\mu, 1)$.

W_T est la somme de T variables indépendantes de lois normales donc c'est une variable aléatoire de loi normale avec : $\mathbb{E}[W_T] = \sum_{k=1}^{T} \mathbb{E}[X_k] = \mu T$

$$Var[W_T] = \sum_{k=1}^{T} Var[X_k] = T$$

$$\boxed{W_T \sim \mathcal{N}(\mu T, T)}$$

On en déduit que pour une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i\geq 1}$ iid de loi $\mathcal{N}(\mu T, T)$, on a l'estimateur de Monte-Carlo classique de f :

$$\boxed{\hat{f_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \max \{ \lambda \exp(-\sigma Y_i) - K, 0 \}}$$

b) Au niveau de l'erreur quadratique moyenne, étant donné que $h(X) = \max\{\lambda \exp(-\sigma X) - K, 0\}$ est de carré intégrable et que $\hat{f_n}$ est un estimateur sans biais, d'après le cours on a montré que son erreur quadratique moyenne est $MSE(\hat{f_n}, f) = \frac{Var(h(Y))}{n} = Var[\hat{f_n}]$ (avec $Y \sim \mathcal{N}(\mu T, T)$)

On estime cette quantité en prenant la variance empirique de l'échantillon $(h(Y_1) \dots h(Y_n))$

2) a) Nous avons vu en cours que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $2\mu - X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Par conséquent, la transformation $\boxed{A(x) = 2\mu T - x}$ laisse la loi $\mathcal{N}$ invariante

On obtient ainsi un nouveau estimateur de f par la méthode de la variable antithétique :

$$\hat{f}_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{h(Y_i) + h \circ A(Y_i)}{2} \qquad Y_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu T, T)$$

$$\boxed{\hat{f}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\max\{\lambda \exp(-\sigma Y_i) - K, 0\} + \max\{\lambda \exp(-\sigma(2\mu T - Y_i)) - K, 0\}}{2}}$$

<u>Montrons que $Var[\hat{f}_n] \geq Var[\hat{f}_n(A)]$</u>

On a : $Var[\hat{f}_n(A)] = Var[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{h(Y_i) + h \circ A(Y_i)}{2}]$

$$= \frac{1}{4n^2} Var[\sum_{i=1}^{n} h(Y_i) + h \circ A(Y_i)]$$

La suite $(h(Y_i) + h \circ A(Y_i))_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires iid car c'est une transformation mesurable de la suite $(Y_i)_{i \geq 1}$ qui est iid.

Il en résulte :

$$Var[\hat{f}_n(A)] = \frac{1}{4n} Var[h(Y_1) + h \circ A(Y_1)]$$

$$= \frac{1}{4n} [Var[h(Y_1)] + Var[h \circ A(Y_1)] + 2\, cov(h(Y_1), h \circ A(Y_1))]$$

$h(Y_1)$ et $h \circ A(Y_1)$ ont même loi donc leurs variances sont identiques.

$$\Rightarrow Var[\hat{f}_n(A)] = \frac{1}{4n} [2 Var[h(Y_1)] + 2\, cov(h(Y_1), h \circ A(Y_1))]$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}[\hat{f_n}(A)] = \frac{1}{2n}[\operatorname{Var}[h(Y_1)] + \operatorname{cov}(h(Y_1), h\circ A(Y_1))]$$

$$= \frac{1}{n}\operatorname{var}[h(Y_1)]\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

avec $e = \dfrac{\operatorname{cov}(h(Y_1), h\circ A(Y_1))}{\operatorname{Var}[h(Y_1)]}$

Or d'après Cauchy-Schwartz :

$$\operatorname{cov}(h(Y_1), h\circ A(Y_1)) \leq \sqrt{\operatorname{Var}(h(Y_1))\operatorname{Var}(h\circ A(Y_1))}$$

$$= \operatorname{Var}[h(Y_1)]$$

car $h(Y_1)$ et $h\circ A(Y_1)$ ont même loi

D'où : $e \leq 1 \quad \Rightarrow (e+1)/2 \leq 1$

De plus : $\operatorname{Var}[\hat{f_n}] = \dfrac{1}{n}\operatorname{var}[h(Y_1)]$

Finalement : $\operatorname{Var}[\hat{f_n}(A)] = \operatorname{Var}[\hat{f_n}]\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Var}[\hat{f_n}(A)] \leq \operatorname{Var}[\hat{f_n}]}$$

Partie II

4) a) Soit $(X_i = (X_{1i}, X_{2i}))_{i \in [\![1;n]\!]}$ une suite de variables aléatoires iid suivant la loi de X, L'estimateur de Monte-Carlo classique de J est donné par :

$$\boxed{\hat{J}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \max\{\lambda_1 \exp(-\sigma_1 X_{1i}) + \lambda_2 \exp(-\sigma_2 X_{2i}) - K, 0\}}$$

5) a) On sait que X_1 et X_2 suivent une loi $\mathcal{N}(0,1)$ donc on a :

$$\mathbb{E}[\exp(-\sigma_1 X_1)] = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\sigma_1 x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x+\sigma_1)^2}{2}\right)}_{\text{densité d'une loi } \mathcal{N}(-\sigma_1, 1)} \exp\left(\frac{\sigma_1^2}{2}\right) dx$$

Donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(-\sigma_1 X_1)] &= \exp(\sigma_1^2/2) \\ \mathbb{E}[\exp(-\sigma_2 X_2)] &= \exp(\sigma_2^2/2) \end{aligned}}$$

Or par linéarité de l'espérance :

$$\boxed{\mathbb{E}[\lambda_1 \exp(-\sigma_1 X_1) + \lambda_2 \exp(-\sigma_2 X_2)] = \lambda_1 \exp(\sigma_1^2/2) + \lambda_2 \exp(\sigma_2^2/2)}$$

Partie III

7) Soit $X_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots X_{dj})$ avec $j \in [\![1;n]\!]$ un vecteur gaussien standard de $\mathbb{R}^d$.

L'estimateur de Monte-Carlo classique de p_σ est donné par :

$$\boxed{\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \max\left\{\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \exp(\sigma X_{ij}) - K, 0\right\}}$$

8) Soient $u \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|u\|^2 = 1$ et $Z = (Z_1, \dots Z_d)^T$ un vecteur gaussien standard de $\mathbb{R}^d$ indépendant de X donc $Z \sim \mathcal{N}_d(0_{\mathbb{R}^d}, I_d)$

Posons $Y = \langle X, u\rangle u + Z - \langle Z, u\rangle u$

On remarque que Y est une combinaison linéaire de vecteurs gaussiens donc c'est un vecteur gaussien.

On a : $Y = (Y_1, \dots Y_d)^T$ avec :

$$Y_i = \langle X, u\rangle u_i + Z_i - \langle Z, u\rangle u_i \quad \text{pour } i \in [\![1;d]\!]$$

Calculons l'espérance de Y

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_i] &= \mathbb{E}[\langle X, u\rangle u_i + Z_i - \langle Z, u\rangle u_i] \quad \text{) par linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbb{E}[\langle X, u\rangle u_i] + \mathbb{E}[Z_i] - \mathbb{E}[\langle Z, u\rangle u_i] \quad \text{) car } u \in \mathbb{R}^d \text{ est déterministe} \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{d} X_j u_j\right] u_i + 0 - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{d} Z_j u_j\right] u_i \\
&= \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}[X_j] u_j \, u_i - \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}[Z_j] u_j \, u_i
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[Y_i] = 0}$$

Bilan : $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ pour tout $i \in [\![1;d]\!]$ donc $\mathbb{E}[Y] = 0_{\mathbb{R}^d}$

8) Calculons la matrice de covariance de Y

Soit $i \in [\![1;d]\!]$

$$\mathrm{Var}[Y_i] = \mathrm{cov}(Y_i, Y_i)$$
$$= \mathrm{Var}\left[\sum_{j=1}^{d} X_j u_j u_i + Z_i - \sum_{j=1}^{d} Z_j u_j u_i\right]$$
$$= \mathrm{cov}\left(\sum_{j=1}^{d} X_j u_j u_i, \sum_{j=1}^{d} X_j u_j u_i\right)$$
$$+ \mathrm{cov}\left(\sum_{j=1}^{d} Z_j u_j u_i, \sum_{j=1}^{d} Z_j u_j u_i\right)$$
$$+ \mathrm{cov}(Z_i, Z_i)$$
$$- 2\,\mathrm{cov}\left(\sum_{j=1}^{d} X_j u_j u_i, \sum_{j=1}^{d} Z_j u_j u_i\right)$$
$$+ 2\,\mathrm{cov}\left(\sum_{j=1}^{d} X_j u_j u_i, Z_i\right)$$
$$- 2\,\mathrm{cov}\left(Z_i, \sum_{j=1}^{d} Z_j u_j u_i\right)$$

Par bilinéarité de la covariance et comme u est déterministe :

$$\mathrm{cov}(\langle X,u\rangle u_i, \langle X,u\rangle u_i) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{j'=1}^{d} u_j u_{j'} u_i^2 \,\mathrm{cov}(X_j, X_{j'})$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{d} u_j^2\right) u_i^2 = u_i^2 \quad \text{car } \|u\|^2 = 1$$

et car X est un vecteur gaussien standard donc $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

Par les mêmes arguments :

$\mathrm{cov}(\langle Z,u\rangle u_i, \langle Z,u\rangle u_i) = u_i^2$ et $-2\,\mathrm{cov}(Z_i, \langle Z,u\rangle u_i) = -2u_i^2$

$\mathrm{cov}(Z_i, Z_i) = 1$

Et par indépendance de X et de Z :

$$-2\,\mathrm{cov}(\langle X,u\rangle u_i, \langle Z,u\rangle u_i) = 2\,\mathrm{cov}(\langle X,u\rangle u_i, Z_i) = 0$$

Bilan : $\mathrm{Var}[Y_i] = u_i^2 + u_i^2 + 1 - 2u_i^2 = 1$

De même pour $i,j \in [\![1;d]\!]$ avec $i \neq j$:

$$\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = u_i u_j + u_i u_j + \mathrm{cov}(Z_i, Z_j) - \mathrm{cov}(Z_i, \sum_{k=1}^{d} Z_k u_k u_j) - \mathrm{cov}(Z_j, \sum_{k=1}^{d} Z_k u_k u_i)$$

$$= 2u_i u_j + 0 - u_i u_j - u_i u_j$$ car Z vecteur gaussien standard

$$\boxed{\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = 0}$$

Bilan : $\boxed{Y \sim \mathcal{N}_d(0_{\mathbb{R}^d}, I_d)}$

-> Y suit la même loi que X

9) On considère $(D_1, \dots D_L)$ une partition de $\mathbb{R}$.
Étant donné que X et $\langle X, u\rangle u + Z - \langle Z, u\rangle u$ ont même loi et que la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_d) & \to & \max\left\{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \exp(\sigma x_i) - K, 0\right\} \end{array}$$

est mesurable, on a :

$$p = \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(\langle X, u\rangle u + Z - \langle Z, u\rangle u)]$$

D'après le théorème de l'espérance totale en prenant la partition $(D_1, \dots D_L)$ on a :

$$p = \sum_{\ell=1}^{L} \mathbb{E}[f(\langle X, u\rangle u + Z - \langle Z, u\rangle u \mid \langle X, u\rangle \in D_\ell] \, \mathbb{P}(\langle X, u\rangle \in D_\ell)$$

Sachant que Y_ℓ suit la loi $\mathcal{L}(\langle X, u\rangle \mid \langle X, u\rangle \in D_\ell)$, il en découle : $p = \sum_{\ell=1}^{L} \mathbb{P}(\langle X, u\rangle \in D_\ell)\mathbb{E}[f(Y_\ell u + Z - \langle Z, u\rangle u)]$

$$\boxed{p = \sum_{\ell=1}^{L} \mathbb{P}(\langle X, u\rangle \in D_\ell)\,\mathbb{E}\left[\max\left\{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \exp(\sigma(Y_\ell u_i + Z_i - \langle Z, u\rangle u_i)) - K, 0\right\}\right]}$$

10) a) On choisit la partition :

$$\boxed{\begin{array}{l} D_1 =]-\infty ; q_{1/L}] \quad ; \quad D_L =]q_{\frac{L-1}{L}} ; +\infty[\\ \text{et } \forall i \in [\![2 ; L-1]\!], \quad D_i =]q_{\frac{i-1}{L}} ; q_{\frac{i}{L}}] \end{array}}$$

avec q_i le quantile d'ordre i de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

<u>En effet</u> : $\mathbb{P}(\langle X,u\rangle \in D_1) = F_{\langle X,u\rangle}(q_{1/L}) - \lim\limits_{t\to-\infty} F_{\langle X,u\rangle}(t)$

$\mathbb{P}(\langle X,u\rangle \in D_1) = \frac{1}{L}$ avec $F_{\langle X,u\rangle}$ la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ qui est <u>continue</u>

$\mathbb{P}(\langle X,u\rangle \in D_L) = \lim\limits_{t\to+\infty} F_{\langle X,u\rangle}(t) - F_{\langle X,u\rangle}(q_{\frac{L-1}{L}})$

$\mathbb{P}(\langle X,u\rangle \in D_L) = 1 - \frac{L-1}{L} = \frac{1}{L}$

<u>Et enfin</u> : $\mathbb{P}(\langle X,u\rangle \in D_i) = \frac{i}{L} - \frac{i-1}{L} = \frac{1}{L}$