Table des matières

1 Preuve de $\delta(g(t)) = \frac{\delta(t)}{|g'(0)|}$

Preuve. Par définition, nous avons que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t) f(t) dt = f(0). \tag{1}$$

Sans perte de généralité, supposons que $g(0) = 0$ et que g est localement lisse. Ensuite, soit $t = g(v)$, alors $\frac{\partial t}{\partial v} = g'(v)$, et $dt = |g'(v)| dv$, où nous avons supposé sans perte de généralité la monotonie autour de 0. En changeant t pour v dans l'équation (**??**), nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \delta(g(v)) f(v) dv &= \int_{g(\mathbb{R})} \delta(t) f(g^{-1}(t)) dg^{-1}(t) && (2)\\
&= \int_{g(\mathbb{R})} \frac{\delta(t)}{|g'(g^{-1}(t))|} dt && (3)\\
&= \frac{f(0)}{|g'(0)|} && (4)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(t)}{|g'(0)|} f(v) dv && (5)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\delta(g(v)) = \frac{\delta(t)}{|g'(0)|}$. □