PIF

Table des matières

1 Introduction au traitement et à la représentation des données

1.1 Traitement du signal

Le traitement du signal consiste à effectuer des opérations intelligentes sur un "signal" donné. Cela peut inclure un signal unique tel qu'une image, un ensemble de signaux comme des données, ou une distribution de signaux aléatoires. Les opérations typiques incluent le débruitage, le défloutage, le sous-échantillonnage ou sur-échantillonnage, la classification et la régression.

Intuition

Le secret d'un bon traitement du signal réside dans la recherche d'une bonne représentation du signal.

1.2 Exemples dans ce cours

Dans ce cours, nous nous concentrons sur le défloutage et le débruitage. L'objectif est de récupérer le signal propre en minimisant une certaine erreur. Par exemple, à partir d'un signal dégradé observé, nous cherchons à estimer le signal d'origine.

1.3 Modèle de traitement du signal

Le modèle de traitement du signal peut être décrit par une dégradation linéaire suivie d'un bruit aléatoire additif, et enfin une reconstruction linéaire. Différentes hypothèses sur le signal conduiront à différentes approches de résolution.

$$\varphi \to H\varphi \to \varphi_{\text{data}} = H\varphi + n \to \hat{\varphi} = M\varphi_{\text{data}} \tag{1}$$

Fiche Récapitulative

Objectif : Résumer le concept principal de cette section.
Principe central : Le traitement du signal vise à récupérer un signal propre à partir de données dégradées.

Points essentiels : - Dégradation linéaire - Bruit additif - Reconstruction linéaire

Formules clés :

- $\varphi_{\text{data}} = H\varphi + n$
- $\hat{\varphi} = M\varphi_{\text{data}}$

2 Filtrage pseudo-inverse

2.1 Modèle déterministe sans bruit

Dans un modèle déterministe sans bruit, la dégradation est linéaire et l'opérateur de dégradation H est connu. L'objectif est de trouver $\hat{\varphi} \approx \varphi$.

2.2 Monde idéal

Dans un monde idéal, H est inversible. Ainsi, $M = H^{-1}$ et $\hat{\varphi} = M\varphi_{\text{data}} = H^{-1}H\varphi = \varphi$, ce qui permet une reconstruction parfaite.

$$M = H^{-1} \tag{2}$$

$$\hat{\varphi} = H^{-1}H\varphi = \varphi \tag{3}$$

2.3 Monde réel

Dans le monde réel, H n'est pas inversible, ce qui entraîne une perte d'information. La question devient alors : comment concevoir M pour que $\hat{\varphi} \approx \varphi$?

2.4 Hypothèse 1

L'hypothèse 1 suppose que H est diagonalisable dans une base unitaire. Ainsi, $H = U\Lambda U^*$, où les colonnes de U forment une base orthonormale.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$x^U = \begin{pmatrix} x_1^U \\ \vdots \\ x_n^U \end{pmatrix} = U^* x \tag{5}$$

2.5 Hypothèse 2

L'hypothèse 2 suppose que $M = U\Sigma U^*$ est diagonalisable dans la même base. Cela conduit à des solutions où $\hat{\varphi} = M\varphi_{\text{data}} = U\Sigma\Lambda U^*\varphi$.

$$\varphi_{\text{data}} = H\varphi = U\Lambda U^*\varphi \tag{6}$$

$$\hat{\varphi} = U\Sigma\Lambda U^*\varphi \tag{7}$$

À retenir

Les coefficients du signal restauré satisfont $\hat{\varphi}_i^U = \sigma_i \lambda_i \varphi_i^U$. Pour concevoir M, nous voulons que $\varphi \approx \hat{\varphi}$, ce qui implique $\varphi^U \approx \hat{\varphi}^U$.

2.6 Choix des coefficients

Pour un choix obligatoire, si $\lambda_i \neq 0$, alors $\sigma_i = \frac{1}{\lambda_i}$, ce qui permet une récupération parfaite des coefficients. Si $\lambda_i = 0$, alors $\sigma_i \lambda_i = 0$, et le coefficient n'est pas récupérable.

$$\lambda_i \neq 0 \implies \sigma_i = \frac{1}{\lambda_i} \tag{8}$$

$$\lambda_i = 0 \implies \sigma_i = 0 \tag{9}$$

2.7 Erreur de reconstruction

L'erreur de reconstruction est donnée par :

$$\|\varphi - \hat{\varphi}\|_2^2 = \|U\varphi^U - U\hat{\varphi}^U\|_2^2 \tag{10}$$

$$= \sum_i |\varphi_i^U - \hat{\varphi}_i^U|^2 \tag{11}$$

$$= \sum_{i \text{ s.t. } \lambda_i = 0} |\varphi_i^U|^2 \tag{12}$$

Vulgarisation simple

L'énergie de φ dans le noyau de H ne peut pas être récupérée, ce qui entraîne une perte d'information.

2.8 Filtrage pseudo-inverse avec a priori

Les filtres pseudo-inverses apparaissent en utilisant des a priori sur la solution. Par exemple, en minimisant la norme L^2 de $\hat{\varphi}$ sous la contrainte $H\hat{\varphi} = \varphi_{\text{data}}$, on obtient le filtre pseudo-inverse.

$$\hat{\varphi} =_{\hat{\varphi}} \|\hat{\varphi}\|_2^2 \quad \text{s.t. } H\hat{\varphi} = \varphi_{\text{data}} \tag{13}$$

Fiche Récapitulative

Objectif : Résumer le concept principal de cette section.
Principe central : Le filtrage pseudo-inverse utilise des a priori pour récupérer un signal à partir de données dégradées.

Points essentiels : - Hypothèses sur la diagonalisabilité - Choix des coefficients - Erreur de reconstruction

Formules clés :

- $\hat{\varphi} = M\varphi_{\text{data}}$
- $\|\varphi - \hat{\varphi}\|_2^2 = \sum_{i \text{ s.t. } \lambda_i = 0} |\varphi_i^U|^2$