saea

Table des matières

1 Introduction

1.1 Objectif : Digitalisation

Vous disposez d'un signal réel et souhaitez le représenter dans un ordinateur. Cela implique certaines contraintes, notamment un nombre fini de valeurs pour représenter l'ensemble du signal N. Chaque valeur ne peut pas prendre n'importe quelle valeur réelle, mais doit être l'une des k valeurs quantifiées fixes, où $b = \log_2(k)$.

Vulgarisation simple

Imaginez que vous essayez de dessiner un tableau célèbre avec un nombre limité de couleurs et de pixels. Plus vous avez de pixels et de nuances, plus votre représentation sera fidèle à l'original.

1.2 Processus de Digitalisation

Le processus de digitalisation peut être illustré par trois étapes : le signal continu, le signal échantillonné et le signal digitalisé (échantillonné et quantifié).

1.3 Échantillonnage et Quantification

L'échantillonnage consiste à prendre des valeurs discrètes d'un signal continu, tandis que la quantification consiste à limiter ces valeurs à un ensemble fini de niveaux.

2 Échantillonnage

2.1 Concept d'Échantillonnage

Le signal $\varphi(x)$ est décrit par ses valeurs pour tous les x. Cependant, représenter φ nécessite une infinité de valeurs $\varphi(x)$. L'objectif est de trouver un ensemble fini de nombres $\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_N$ pour représenter approximativement φ.

Fiche Récapitulative

Objectif : Résumer le concept principal de l'échantillonnage.
Principe central : Trouver un ensemble fini de valeurs pour représenter un signal continu.

Points essentiels : - Échantillonnage du signal - Quantification des valeurs - Représentation discrète

Formules clés :

— $\hat{\varphi}_i$ = valeurs échantillonnées

2.2 Stratégies d'Échantillonnage

Il n'existe pas d'unicité dans les stratégies d'échantillonnage et de reconstruction. Une stratégie courante consiste à mailler le domaine et à effectuer une reconstruction constante par morceaux.

2.3 Choix dans ce Tutoriel

Dans ce tutoriel, nous fixons la grille 1D pour un échantillonnage uniforme et la stratégie de reconstruction constante par intervalle de grille.

3 Critère L^2

3.1 Erreur Quadratique Moyenne (MSE)

Le MSE total est défini par :

$$MSE = \int_0^1 (\varphi(x) - \hat{\varphi}(x))^2 dx \tag{1}$$

Le MSE local est donné par :

$$MSE_i = \frac{1}{\Delta} \int_{I_i} (\varphi(x) - \hat{\varphi}_i)^2 dx \tag{2}$$

3.2 Condition d'Optimalité

La différenciation du MSE par rapport à $\hat{\varphi}_i$ donne la condition d'optimalité :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\varphi}_i} MSE = 0 \implies \hat{\varphi}_i = \frac{1}{\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \varphi(x) dx \tag{3}$$

Vulgarisation simple

Pour minimiser l'erreur, il faut choisir les valeurs échantillonnées comme la moyenne locale du signal sur chaque intervalle d'échantillonnage.

4 Critère L^1

4.1 Déviation Absolue Moyenne (MAD)

Le MAD total est défini par :

$$MAD = \int_0^1 |\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)| dx \tag{4}$$

4.2 Condition d'Optimalité

La condition d'optimalité pour le MAD implique l'utilisation de sous-différentiels :

$$\exists s, \frac{\partial}{\partial \hat{\varphi}_i} MAD = 0 \iff \exists s, \int_{I_i} \varphi(x) < \hat{\varphi}_i \, dx = \int_{I_i} \varphi(x) > \hat{\varphi}_i \, dx + s \int_{I_i} \varphi(x) = \hat{\varphi}_i \, dx \quad (5)$$

Vulgarisation simple

Pour minimiser la déviation absolue, les échantillons optimaux sont les médianes locales sur chaque intervalle d'échantillonnage.

5 Exemples

5.1 Exemple 1

Pour $\varphi(x) = x$, l'échantillonnage L^2 et L^1 donne des résultats différents en termes de MSE et MAD.

5.2 Exemple 2

Pour une fonction définie par morceaux, les résultats de l'échantillonnage L^2 et L^1 sont comparés.

6 Échantillonnage dans le Monde Discret

L'échantillonnage dans le monde discret est possible par sous-échantillonnage, où les échantillons optimaux sont les moyennes sur les intervalles discrets.