Annexe A

Problème du map-making

Le signal que l'on traite a la forme de l'équation **??**. On écrit le bruit comme $\vec{n} = \vec{d} - \mathbf{A} \cdot \vec{s}$ où $\vec{d}$ sont les données, $\mathbf{A}$ la matrice de mélange et $\vec{s}$ le signal que l'on cherche. On prend ici un bruit gaussien que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} P(\vec{n}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\,|N|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{n}^t \cdot N^{-1} \cdot \vec{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\,|N|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\vec{d} - \mathbf{A} \cdot \vec{s}\right)^t \cdot N^{-1} \cdot \left(\vec{d} - \mathbf{A} \cdot \vec{s}\right)\right) \end{aligned}$$

On appelle dans notre cas N la matrice de covariance du bruit et $|N|$ son déterminant. On cherche maintenant à maximiser cette fonction, ce qui revient à minimiser l'argument de l'exponentielle. On note maintenant la probabilité $P\left(\vec{n}\right)$ la likelihood $\mathcal{L}\left(\vec{n}\right)$:

$$-2\log\mathcal{L}\left(\vec{n}\right) = \underbrace{-2\log\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\,|N|}}\right]}_{\text{constant } = K} + \left(\vec{d} - \mathbf{A} \cdot \vec{s}\right)^t \cdot N^{-1} \cdot \left(\vec{d} - \mathbf{A} \cdot \vec{s}\right)$$

On peut maintenant noter $-2\log\mathcal{L}\left(\vec{n}\right) = \chi^2$ la fonction que l'on cherche à minimiser. Dans le cas idéal, on peut écrire :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\chi^2}{\partial\vec{s}^t} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial\vec{s}^t}\left(\left(\vec{d} - \mathbf{A} \cdot \vec{s}\right)^t \cdot N^{-1} \cdot \left(\vec{d} - \mathbf{A} \cdot \vec{s}\right)\right) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial\vec{s}^t}\left[\left(\vec{d}^t \cdot N^{-1} - \vec{s}^t\mathbf{A}^t \cdot N^{-1}\right) \cdot \left(\vec{d} - \mathbf{A} \cdot \vec{s}\right)\right] = 0 \\ &-\vec{s}^t \cdot \mathbf{A}^t \cdot N^{-1} \cdot \left(\vec{d} - \mathbf{A} \cdot \vec{s}\right) = 0 \\ &\vec{s} = \left(\mathbf{A}^t \cdot N^{-1} \cdot \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^t \cdot N^{-1} \cdot \vec{d} \end{aligned}$$

On voit ici qu'il est possible de calculer le signal $\vec{s}$ que l'on recherche à partir de la matrice de mélange $\mathbf{A}$, des données $\vec{d}$ ainsi que de l matrice de covariance du bruit N. Or on voit ici un problème important puisque l'élément $\left(\mathbf{A}^t \cdot N^{-1} \cdot \mathbf{A}\right)^{-1}$ est une matrice immense de l'ordre de 10^{16} éléments ce qui pose des problèmes computationnelle important. Il est cependant possible de contourner ce problème grâce à des astuces et du calcul massivement parallèle mais un autre approche est à privilégier pour résoudre le problème du map-making.

On peut maintenant injecter cette équation dans celle du dessus afin de retirer le signal $\vec{s}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
-2\log\mathcal{L}_{\text{spec}} &= K + \left(\vec{d} - \mathbf{A} - \vec{s}\right)^t N^{-1} \left(\vec{d} - \mathbf{A} - \vec{s}\right) \\
&= K + \left[\vec{d} - \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^t N^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^t N^{-1}\vec{d}\right]^t N^{-1} \left[\vec{d} - \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^t N^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^t N^{-1}\vec{d}\right] \\
&= K + \left(\mathbf{A}^t N^{-1}\vec{d}\right)^t \left(\mathbf{A} N^{-1t}\mathbf{A}^t\right)^{-1} \mathbf{A}^t N^{-1}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^t N^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^t N^{-1}\vec{d} \\
&= K + \left(\mathbf{A}^t N^{-1}\vec{d}\right)^t \left(\mathbf{A}^t N^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1} \left(\mathbf{A}^t N^{-1}\vec{d}\right)
\end{aligned}$$

Annexe B

Démonstration des équations de Friedmann

L'univers est régit par les équations d'Einstein que l'on peut écrire sous la forme :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{B.0.1}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, une contraction du tenseur de Riemann décrivant la géométrie de l'espace-temps, $g_{\mu\nu}$ est la métrique considérée, Λ est la constante cosmologique et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion. On commence par calculer les composantes non-nulles du tenseur de Ricci à partir des symboles de Christoffel définit par :

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \tag{B.0.2}$$

En considérant la métrique **??**, on peut donner les symboles de Christoffel non-nulles :

indice i	Composantes non-nulles
i = 0	$\Gamma^0_{11} = \frac{\dot{a}a}{1-kr^2}, \quad \Gamma^0_{22} = \dot{a}ar^2, \quad \Gamma^0_{33} = \dot{a}ar^2 \sin^2\theta$
i = 1	$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma^1_{22} = -r\left(1-kr^2\right), \quad \Gamma^1_{33} = -r\left(1-kr^2\right)\sin^2\theta$
i = 2	$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$
i = 3	$\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta$

On peut maintenant définir le tenseur de Ricci qui est une contraction du tenseur de Riemann (ou trace) tel que :

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} \tag{B.0.3}$$

De la même manière que pour les symboles de Christoffel, on peut définir les composantes non-nulles de ce tenseur.

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\
R_{11} &= \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\
R_{22} &= r^2 \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k \right) \\
R_{33} &= r^2 \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k \right) \sin^2 \theta
\end{aligned}
$$

Pour la suite il sera plus simple de définir $R_{ij} = g_{ij} \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k \right) \frac{1}{a^2(t)}$. Il suffit de définir le scalaire de courbure qui est :

$$
\begin{aligned}
R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\
&= \frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{1 - kr^2}{a^2(t)} \left(\frac{a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k}{1 - kr^2} \right) + \\
& \frac{1}{a^2(t)r^2} r^2 \left(a\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k \right) + \frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin^2 \theta \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2(t) + 2k \right) \\
&= \frac{6}{a^2(t)} \left(a\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k \right)
\end{aligned}
$$

En réécrivant les équations d'Einstein pour la composante 00, on obtient :

$$
\begin{aligned}
& -\frac{3\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{1}{2} \frac{6}{a^2(t)} \left(a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + k \right) - \Lambda = 8\pi G \rho \\
& \longrightarrow H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2(t)}
\end{aligned}
$$

De même pour les composantes ij, on obtient la deuxième équation de Friedmann :

$$
\begin{aligned}
& \frac{g_{ij}}{a^2(t)} \left(a\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k \right) - \frac{1}{2} g_{ij} \frac{6}{a^2(t)} \left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k \right) + \Lambda g_{ij} = 8\pi G P g_{ij} \\
& -\frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} - H^2 - \frac{k}{a^2(t)} + \Lambda = 8\pi G P \\
& \longrightarrow \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}
\end{aligned}
$$

On a donc bien au final les deux équations de Friedmann en partant de la métrique FLRW.

Annexe C

Détection du champs électrique

On part pour cela de l'orientation du champs électrique juste après la lame demi-onde auquel on ajoute l'effet du polariseur. On obtient :

$$\begin{aligned}
\vec{E}' &= J_{\text{pol}} J_{\text{HWP}} \vec{E} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2\theta E_x + \sin 2\theta E_y \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On a ici les composantes du champs électrique après être passé dans la lame demi-onde suivie d'un polariseur. On peut maintenant écrire la norme au carré du champs électrique tel que $\left|\vec{E}\right|^2 = (E_x \cos 2\theta + E_y \sin 2\theta)^2$. Il est possible d'obtenir le résultat voulu en prenant la valeur moyenne et en y intégrant les paramètres de stokes définit avec la matrice de cohérence **??**.

$$\begin{aligned}
< \left|\vec{E}\right|^2 > &=< E_x^2 \cos^2 2\theta > + < E_y^2 \sin^2 2\theta > +2 < E_x E_y \cos 2\theta \sin 2\theta > \\
&=< E_x^2 > \cos^2 2\theta + < E_y^2 > \sin^2 2\theta + 2 < E_x E_y > \cos 2\theta \sin 2\theta \\
&= (I + Q) \cos^2 2\theta + (I - Q) \sin^2 2\theta + 2U \cos 2\theta \sin 2\theta \\
&= I \left[\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta\right] + Q \left[\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta\right] + U \sin 4\theta \\
&= I + Q \cos 4\theta + U \sin 4\theta
\end{aligned}$$

Annexe D

Matrices de corrélation

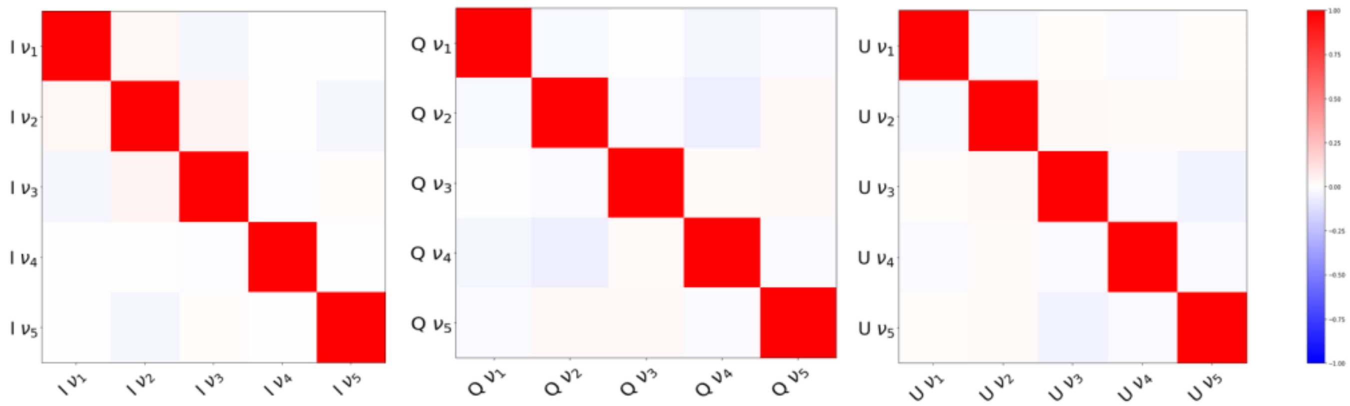

FIGURE D.1 – Matrices de corrélation pour un bruit blanc.

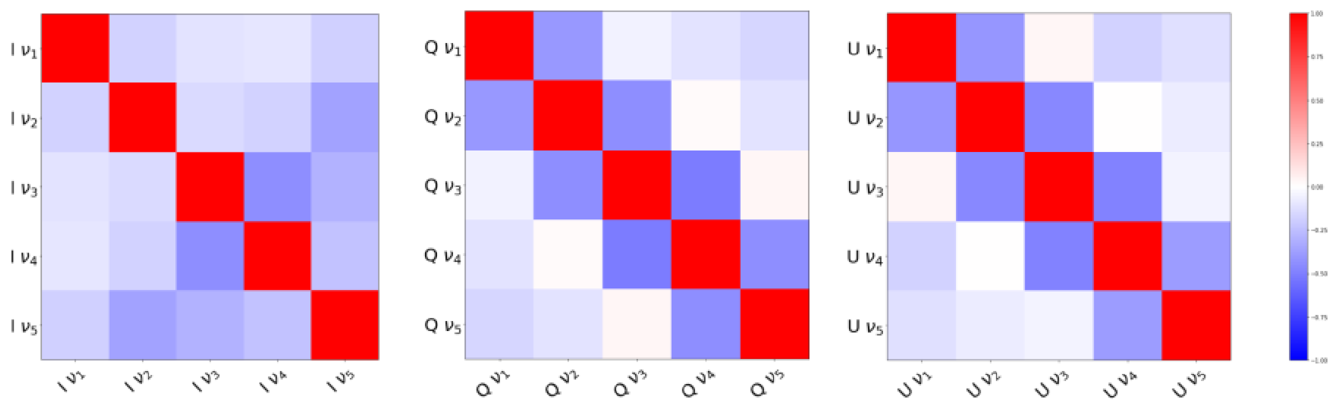

FIGURE D.2 – Matrices de corrélation typique de QUBIC.