Logique des propositions

1. On considère un langage logique dont les symboles sont les connecteurs logiques et les variables p, q, r, s, t.. Soit les fonctions d'interprétation

$$I = \{p \mapsto v, q \mapsto v, r \mapsto f, s \mapsto v, t \mapsto f\}$$

   et

$$J = \{p \mapsto f, q \mapsto v, r \mapsto f, s \mapsto f, t \mapsto v\}$$

   Déterminez l'interprétation des formules suivantes selon I et J :

   (a) $p \Rightarrow (q \wedge r)$

   (b) $(p \wedge \neg(q \vee \neg t)) \Rightarrow (s \vee (p \wedge \neg r))$

2. Pour chacun des ensembles de formules ci-dessous trouvez tous ses modèles.

   (a) $\{p_1 \wedge p_2, p_2 \wedge p_3, p_3 \wedge p_4, p_5 \wedge p_6\}$

   (b) $\{\neg(p \vee \neg t), (t \Leftrightarrow (p \wedge \neg r)) \Rightarrow \neg p\}$

3. Trouvez des formules satisfaisant les critères ci-dessous :

   (a) la formule contient 4 variables et possède un seul modèle.

   (b) la formule contient 4 variables et possède deux modèles.

   (c) la formule contient 4 variables et possède 15 modèles.

4. Démontrez les équivalences suivantes

   (a) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

   (b) $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee r$

   (c) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \equiv (p \vee r) \Rightarrow q$

5. Mettez en FNC cette formule puis utilisez l'algorithme DPLL pour trouvez un modèle

$$(b \vee c \Rightarrow d) \wedge (\neg(\neg b \wedge \neg c)) \wedge (d \Rightarrow (\neg e \wedge f)) \wedge (f \Rightarrow (e \vee g))$$

6. Utilisez DPLL pour montrer que t est une conséquence logique de

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge r \wedge ((p \wedge s) \Rightarrow t) \wedge (r \Rightarrow s)$$

7. (Modélisation) On considère une route (Suisse) équipée d'un feu qui peut être rouge, orange ou vert (il règle à la fois les deux sens de circulation). On modélise l'état du feu par trois variables :
— r : le feu rouge auto est allumé,
— v : le feu auto vert est allumé,
— o : le feu auto orange est allumé.

   (a) Avec ces variables définissez les invariants du feu, c'est-à-dire toutes les formules qui doivent absolument rester vraies en toute circonstance pour respecter le fonctionnement légal du feu.

   (b) Réduisez l'ensemble d'invariants de manière à ce qu'il n'y ait pas de redondance, i.e. éliminez les formules qui sont des conséquences logiques des autres