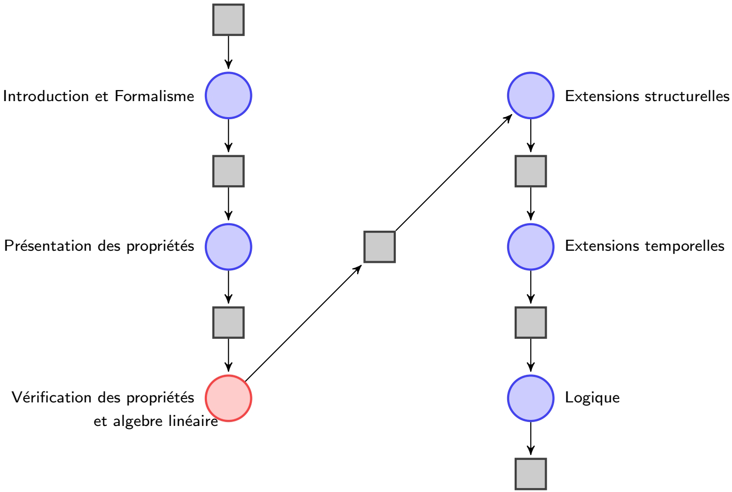
Réseaux de Petri:
Algèbre Linéaire

Pascal Racloz, Didier Buchs

Université de Genève

29 octobre 2018


Introduction et Formalisme
Présentation des propriétés
Vérification des propriétés
et algebre linéaire
Extensions structurelles
Extensions temporelles
Logique

Algèbre linéaire

- Etude des propriétés d'un réseau (caractère borné et vivacité) indépendamment d'un marquage initial
  - Structurellement borné : peu importe M_0, le Rdp sera toujours borné.
  - Répétitif : peu importe M_0, le RdP sera réexécutable.
- On parle des propriétés structurelles du réseau
- Ces techniques d'analyse se basent sur l'équation

$$M' = M + C.\overline{s}$$

représentant un premier pas vers la condensation de l'information (on considère $\overline{s}$ au lieu de la séquence s) et donc aussi une perte d'information

Une étape supplémentaire vers la condensation de l'information

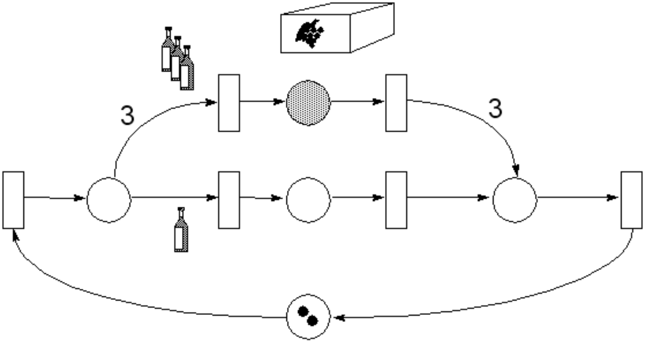
- Pondération des places
  Il s'agit d'effectuer le produit scalaire d'un marquage M par un vecteur f $\in \mathbb{N}^{|P|}$.
  Pour une place p la composante f(p) correspond à la pondération de la place p.
- L'état d'un réseau (i.e. son marquage) est réduit à un scalaire !

$$f^T.M \in \mathbb{N}$$

Semi-flot

Système de production

- unité par unité
- par lots de 3



Pondération des places

- Si s est une séquence de transitions telle que

$$M \xrightarrow{s} M'$$

alors de M' $=$ M $+$ C . $\overline{s}$ on déduit avec $f \in \mathbb{N}^{|P|}$

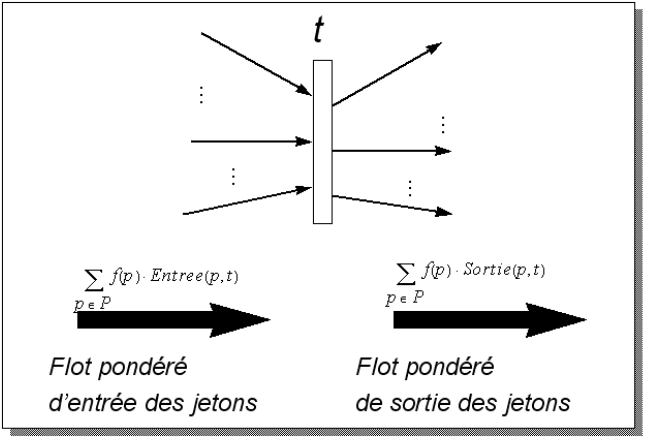
$$f^T.M' - f^T.M = f^T.C.\overline{s}$$

- La quantité

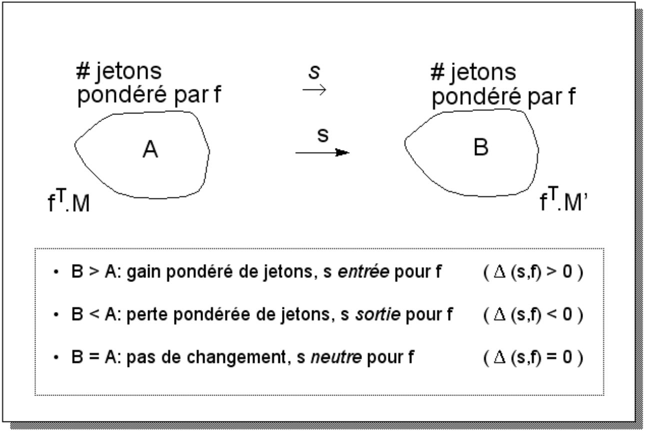
$$\Delta(s, f) = f^T.C.\overline{s}$$

est appelée *l'accroissement pondéré* par f du nombre de jetons lors du franchissement de s

Illustration



(Cont'd)



jetons
pondéré par f
s
jetons
pondéré par f
A
s
B
f^T.M
f^T.M'
• B > A: gain pondéré de jetons, s *entrée* pour f (Δ (s,f) > 0)
• B < A: perte pondérée de jetons, s *sortie* pour f (Δ (s,f) < 0)
• B = A: pas de changement, s *neutre* pour f (Δ (s,f) = 0)

Semi-flot : P-semi-flot et T-semi-flot

- Un P-semi-flot est une solution à coefficients entiers positif de l'équation (un flot est l'equivalent a coeficient dans les entiers relatifs) 0 est le vecteur avec que des zéros de taille $|T|$.

$$f^T.C = 0$$

- La propriété essentielle d'un semi-flot est donc que le compte pondéré des jetons associé à ce semi-flot est constant quelque soit l'évolution du réseau marqué.

$$f^T.M' - f^T.M = f^T.C.\bar{s} = 0$$

- Les P-semi-flots sont stables pour l'union et la somme et différence pondérée.
- P-semi-flot est équivalent à P-invariant.

Semi-flot : P-semi-flot et T-semi-flot (cont)

- Un T-semi-flot est une solution à coefficients entiers de l'équation (un flot est l'equivalent a coeficient dans les entiers relatifs) 0 est le vecteur avec que des zéros de taille $|P|$.

$$C.w = 0$$

- La propriété essentielle d'un T-semi-flot est donc que si le marquage initial permet le franchissement d'une séquence de transitions s telle que $\overline{s} = w$ alors on revient au marquage initial.

$$M' - M = C.w = 0$$

- Les T-semi-flots sont stables pour l'union et la somme et différence pondérée.
- T-semi-flot est équivalent à T-invariant.

P et T semi-flots

Support d'un P-semi-flot f :
$||f|| = \{p \in P | f(p) <> 0\}$
Support d'un T-semi flot g
$||g|| = \{t \in T | g(t) <> 0\}$
Le reseau R est couvert par des P-flots ssi $\forall p \in P, \exists$ P-semi flot f, tel que $p \in ||f||$. idem pour T.

Rappel : Algorithme de Farkas d'une ppfg de P-semi-flots

Calcul de la ppfg (plus petite famille génératrice)
On utilise la matrice $P \times T$ indexée d'incidence dans $\mathbb{Z}$ que l'on étend a une matrice (finie) $\wp(P \to \mathbb{N}) \times T$ indexée.
Les index de lignes seront donc des combinaisons de nom de places et de facteur multiplicateur de la forme : $I : P \to \mathbb{N}$.

L'arithmétique suivante s'applique sur les index,
$I, J, I_1, I_2 : P \to \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$:

- $J = k * I \Leftrightarrow \forall p, J(p) = (k * I)(p) = k * I(p)$
- $J = I/k \Leftrightarrow \forall p, J(p) = (I/k)(p) = I(p)/k$
- $J = I_1 + I_2 \Leftrightarrow \forall p, J(p) = (I_1 + I_2)(p) = I_1(p) + I_2(p)$
- $J = -I \Leftrightarrow \forall p, J(p) = (-I)(p) = -I(p)$
- $|\_| : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, |k| = k$ si $k > 0$ sinon $-k$

Rappel : Algorithme de Farkas dune ppfg de P-semi-flots

debut c la marice initiale

$I = 0$ $C_0 = c$ **tantque** il existe une ligne et une colonne **faire**

Choisir une colonne k, I=I+1

pour tout

couple de lignes d'index (i, j) telles que $c_{i,k} > 0$ et $c_{j,k} < 0$

faire Ajouter la ligne d'index

$(c_{i,k} * j + |c_{j,k}| * i)/pgcd(c_{i,k}, -c_{j,k})$ calculée par

$(c_{i,k} * c(j) + c_{j,k} * c(i))/pgcd(c_{i,k}, -c_{j,k})$ **finpour**

$(etape\ \ C_I = c)$

pour toute ligne i telle que $c_{i,k} \neq 0$ **faire**

Supprimer la ligne i **finpour**$(etape\ \ C'_I = c)$

pour tout couple de lignes (i,j) telles que $||c(j)|| \subset ||c(i)||$

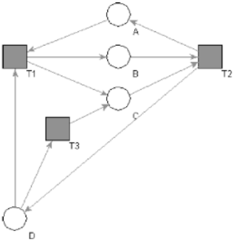
faire Supprimer la ligne i **finpour**$(etape\ \ C''_I = c)$

Supprimer les colonnes nulles **fintantque** $(etape\ \ C'''_I = c)$

L'ensemble des indices de lignes est une ppfg de P-semi-flot **fin**

Note : $||v||$ est le support du P-semi-flot.

- Algorithme de Farkas sur C



$$C = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T1 & T2 & T3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calcul des P-invariants

Premier cycle (k=T1) :

$$C = C_0 = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} C_1 = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ A+B \\ C+D \\ A+C \\ B+D \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_1' = \begin{array}{c} A+B \\ C+D \\ A+C \\ B+D \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} C_1''' = \begin{array}{c} A+B \\ C+D \\ A+C \\ B+D \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Calcul des P-invariants

2ème cycle (K=T3) :

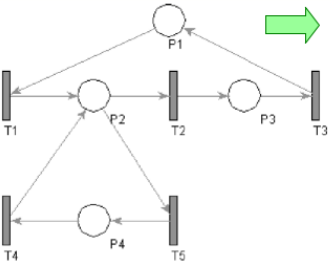
$$C_2 = \begin{array}{r} A+B \\ C+D \\ A+C \\ B+D \\ A+B+C+D \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_2' = \begin{array}{r} A+B \\ C+D \\ A+B+C+D \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2'' = \begin{array}{r} A+B \\ C+D \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_2''' = \begin{array}{r} A+B \\ C+D \end{array} \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

Solution : $\begin{array}{r} A+B \\ C+D \end{array}$

Calcul des T-invariants

- Algorithme de Farkas sur C^T



$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

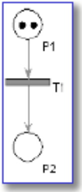
T1 + T2 + T3 = 0

T4 + T5 = 0

Propriétés des semi-flots

- $\exists f$ qui recouvre R tel que :
  - $f^T.C = 0 \Rightarrow$ conservatif
  - $f^T.C \leq 0 \Rightarrow$ structurellement borné
  - conservatif $\Rightarrow$ structurellement borné
- $\exists w$ qui recouvre R tel que :
  - $C.w = 0 \Rightarrow$ consistant
  - $C.w \geq 0 \Rightarrow$ répétitif
  - consistant $\Rightarrow$ répétitif

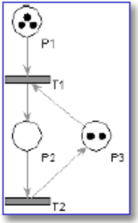
- Algorithme de Farkas sur C



$$C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

P1 + P2

P-invariant

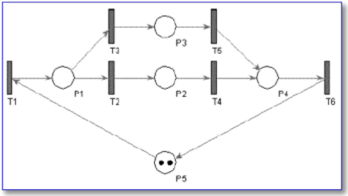


$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

P2 + P3

P-invariant

Exercice sur les invariants



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P1+P2+P3+P4+P5

P-invariants

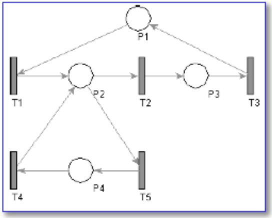
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

T1 + T2 + T4 + T6

T1 + T3 + T5 + T6

T-invariants

Exercice sur les invariants



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

P-invariants

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T1 + T2 + T3

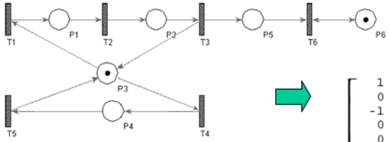
T4 + T5

T-invariants

Exclusion mutuelle et invariants

- Idée : utiliser les P-invariants d'un réseau et son marquage initial M_0 pour montrer que deux places ou plus sont nécessairement en exclusion mutuelle.

(un arc est mal positionné sur la figure ! !)



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un des deux P-invariant

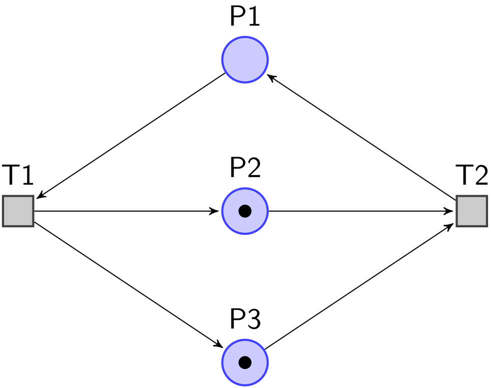
D'après Mo:

P1+P3+P4 = 1

$\Rightarrow$

Impossible que ces places soient marquées en même temps

Exercice sur les invariants



$$C = \begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice sur les invariants

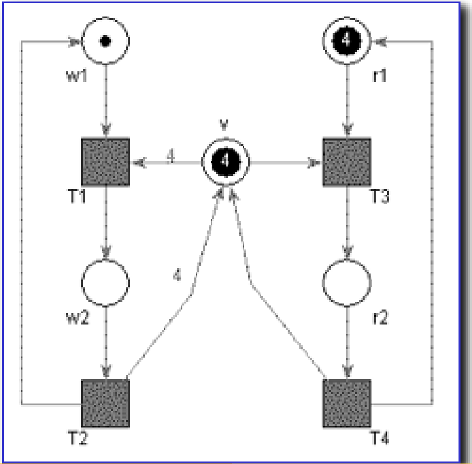
$$C_1 = \begin{array}{l} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P1+P2 \\ P1+P3 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_1' = \begin{array}{l} P1+P2 \\ P1+P3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1''' = \begin{array}{l} P1+P2 \\ P1+P3 \end{array} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Pour M_0, $\begin{array}{l} P1+P2=1 \\ P1+P3=1 \end{array}$ donc P1 et P2 sont en exclusion mutuelle, ainsi que P1 et P3.

Exercice sur les invariants

Si nous voulons vérifier que un lecteur ne peut lire pendant qu'un réxacteur écrit. Il s'agit donc de prouver que w2 et r2 sont mutuellement exclusive.



Exercice sur les invariants

Farkas :

$$C = \begin{array}{c} \\ w1 \\ w2 \\ r1 \\ r2 \\ v \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C_1 = \begin{array}{c} \\ w1 \\ w2 \\ r1 \\ r2 \\ v \\ w1 + w2 \\ v + 4w2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercice sur les invariants

Farkas :

$$C_1' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} T1 & T2 & T3 & T4 \end{array} \\ \begin{array}{l} r1 \\ r2 \\ w1 + w2 \\ v + 4w2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C_1''' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} T3 & T4 \end{array} \\ \begin{array}{l} r1 \\ r2 \\ w1 + w2 \\ v + 4w2 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercice sur les invariants

$$C_2 = \begin{array}{l c} & \begin{array}{cc} T3 & T4 \end{array} \\ \begin{array}{l} r1 \\ r2 \\ w1 + w2 \\ v + 4w2 \\ r1 + r2 \\ r2 + v + 4w2 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C_2' = \begin{array}{l c} & \begin{array}{cc} T3 & T4 \end{array} \\ \begin{array}{l} w1 + w2 \\ r1 + r2 \\ r2 + v + 4w2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C_2''' = \begin{array}{l} w1 + w2 \\ r1 + r2 \\ r2 + v + 4w2 \end{array} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$ solution

Exercice sur les invariants

D'après le marquage M_0

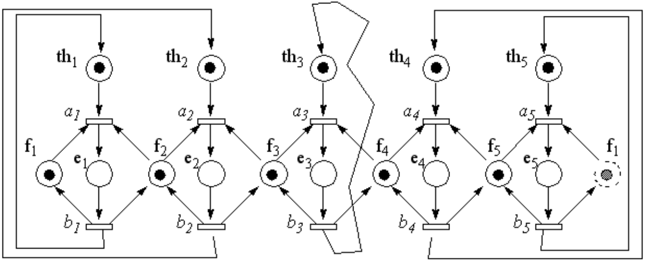
$$\begin{aligned} w1 + w2 &= 1 \\ r1 + r2 &= 4 \\ r2 + v + 4w2 &= 4 \end{aligned}$$

Analyse par cas :
Soit $w2 = 0$ soit $w2 = 1$ d'après $w1 + w2 = 1$

- cas 1 : $w2 = 0$
  donc w2 et r2 mutuellement exclusive trivialement
- cas 2 : $w2 = 1$
  - on a $r2 + v + 4w2 = 4$
  - donc $r2 + v + 4 = 4$
  - donc $r2 + v = 0$
  - nécessairement $r2 = 0$ CQFD

Preuve sur le modèle des philosophes

- Le réseau suivant est sans deadlock, i.e. il existe toujours une transition tirable (il n'y a pas de marquage puits)



Transitions — Marquage initial — Semi-flots

Places	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	m_0	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_8	i_9	i_{10}
th_1	-1					1					1	1									
th_2		-1					1				1		1								
th_3			-1					1			1			1							
th_4				-1					1		1				1						
th_5					-1					1	1					1					
e_1	1					-1						1					1	1			
e_2		1					-1						1					1	1		
e_3			1					-1						1					1	1	
e_4				1					-1						1					1	1
e_5					1					-1						1	1				1
f_1	-1				-1	1				1	1						1				
f_2	-1	-1				1	1				1							1			
f_3		-1	-1				1	1			1								1		
f_4			-1	-1				1	1		1									1	
f_5				-1	-1				1	1	1										1

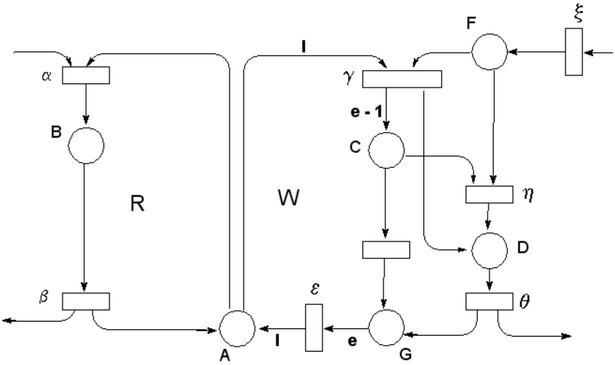
(Cont'd)

Soit M un marquage accessible depuis M_0

- Premier cas
  Il existe $i(1 \leq i \leq 5)$ tel que $M(e_i) \neq 0$
  alors trivialement la transition b_i est tirable
- Deuxième cas
  $\forall i(1 \leq i \leq 5) M(e_i) = 0$, en se basant sur le fait que $M(e_1) = 0$. On sait que
  - $M.i_1 = M0.i_1 = 1$
  - $M.i_6 = M0.i_6 = 1$
  - $M.i_7 = M0.i_7 = 1$ ...

  Alors obligatoirement par i_1 nous avons que $M(th_1) = 1$ et par i_6 que $M(f_1) = 1$ et que par i_7 que $M(f_2) = 1$ car les $M(e_5) = 0$ ou $M(e_2) = 0$ donc la transition a_1 est tirable.

Analyse paramétrée



$V(A, \gamma) = V(\varepsilon, A) = I, V(\gamma, C) = e - 1, V(G, \varepsilon) = e$ valuation unitaire pour les autres arcs

R a au plus I acces a la ressource alors que W a au plus e accès a la ressource (?)

Analyse :

- $\alpha et \beta$ debut utilisation ressource par processus de la classe R
- γ et η un début d'utilisation de ressource pour le processus de la classe W

Semi-flot de support $\{A, B, C, D, G\}$

- On a :
  - f(A) = f(B)
  - f(C)=f(D)=f(G)
  - l f(A) = e f(G)
- Marquage initial : $M_0(A) = l et M_o = 0$ pour les autres

Par exemple :

f(A) = f(B) = e et f(C) = f(G) = f(D) = l

$f^T M_0 = l.e$

Résumé

- Analyse linéaire : propriétés structurelles d'un rdp et indépendance d'un marquage initial.
- Pondération des places par un vecteur et semi-flots.