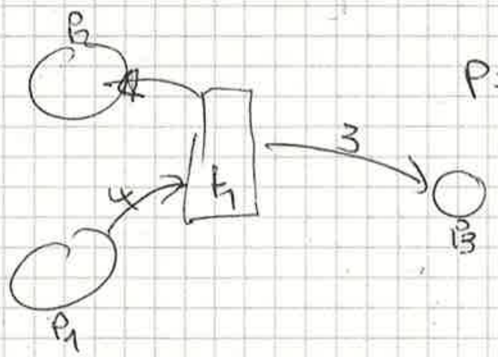
1.1 Définition formelle des RdP

- Un réseau Place/Transition est quadruplet $R = (P, T, \text{Entrée}, \text{Sortie})$
avec : - P un ensemble finis place
- T un ensemble fini de transitions
- Entrée : $P \times T \to \mathbb{N}$ (application d'incidence avant)
- Sortie : $P \times T \to \mathbb{N}$ (application d'incidence arrière)

Ex :



$P = \{p_1 ; p_2 ; p_3\}$ $\quad T = \{T_1\}$

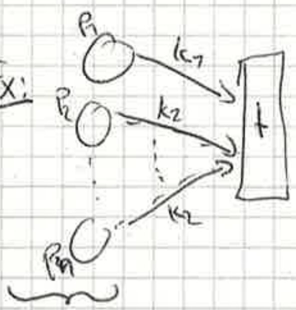
Entrée $(p_1, t_1) = 4$
Entrée $(p_2, t_1) = 0$
Sortie $(p_3, t) = 3$

1.2 Définition formelle des règles de franchissabilité des transitions

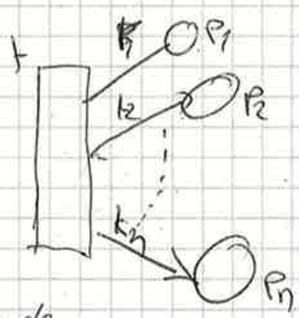
i) Retour sur quelques définition :
- Soit $p \in P$ une place et $t \in T$ une transition. alors :
- p est une place d'entrée de t si $k = \text{entrée}(p, t) > 0$
- p est une place de sortie de t si $k = \text{sortie}(p, t) > 0$
- Marquage : application $M : P \to \mathbb{N}$ donne pour chaque place le nbr de jetons

ii) Transition :
- t est une transition d'entrée de p si $k = \text{sortie}(p, t) > 0$
- t est une transition de sortie de p si $k = \text{entrée}(p, t) > 0$

Ex :



places d'entrée de t $\quad k_i = \text{entrée}(p_j, t) > 0$



place de sortie de t $\quad k = \text{sortie}(p_j, t) > 0$

iii) Règles :
- Une transition t est tirable pour un marquage ssi $\forall p \in P, M(p) \geq \text{Entrée}(p, t)$

- Si t est tirable depuis M, le tir de t produit un nouveau marquage M' donné par

$$\forall p \in P, \quad M'(p) = M(p) - \text{entrée}(p, t) + \text{sortie}(p, t)$$

Notation

- t tirable depuis M

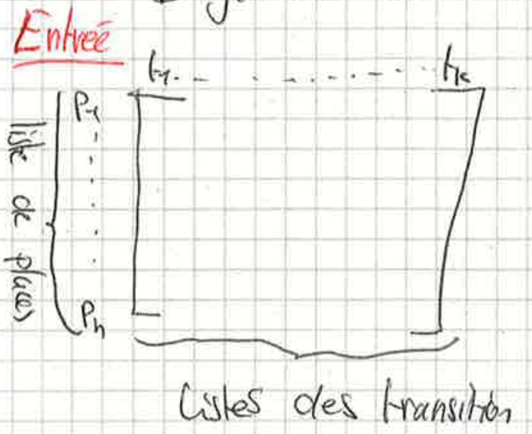
  $M \xrightarrow{t}$

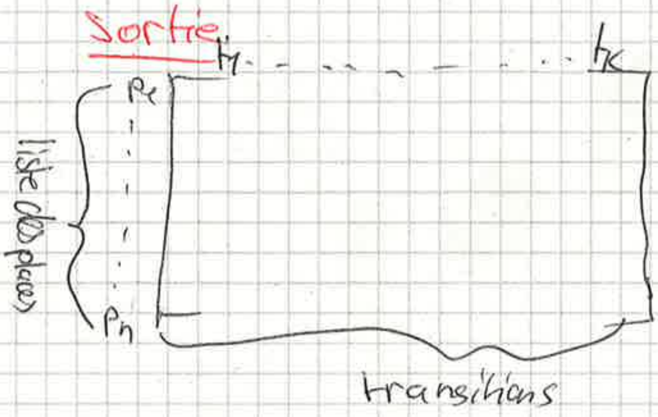
- tir de t depuis M donnant M'

  $M \xrightarrow{t} M'$

1.3 Utilisation de l'algèbre linéaire pour définir la franchissabilité des transitions :

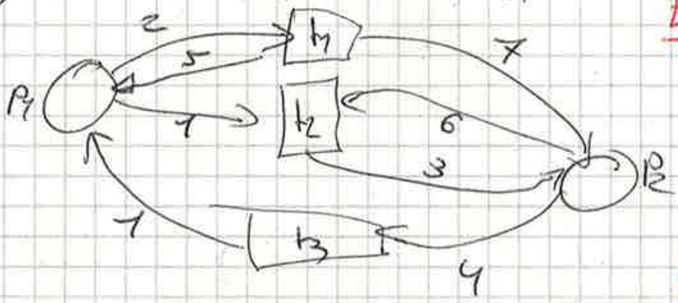
- Définition de la matrice :





- Exemples :

i) Soit le RdP suivant.



Entrée :

$$\begin{array}{c|ccc} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline P_1 & 2 & 1 & 0 \\ P_2 & 0 & 6 & 4 \end{array}$$

Sortie :

$$\begin{array}{c|ccc} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline P_1 & 5 & 0 & 1 \\ P_2 & 7 & 3 & 0 \end{array}$$

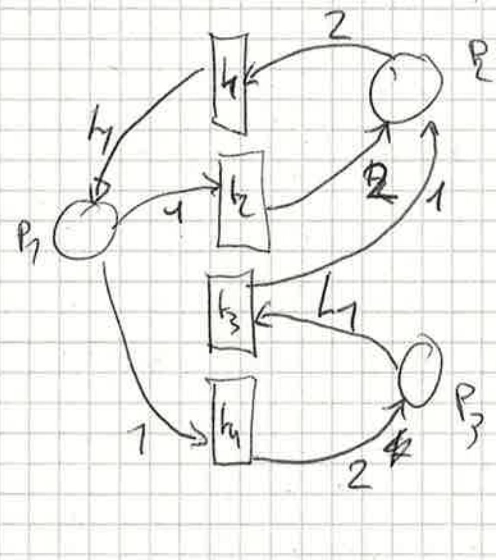
ii) Création de Reseau selon les matrices :

Entrée :

$$\begin{array}{c|cccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \hline P_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ P_2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ P_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Sortie :

$$\begin{array}{c|cccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \hline P_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ P_2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ P_3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$



→

Matrice d'incidence:

La matrice d'incidence d'un réseau, notée C, est définie par

$$\forall p \in P, \forall t \in T \quad C(\underset{\text{ligne}}{p}, \underset{\text{colo}}{t}) = \text{Sortie}(p,t) - \text{Entrée}(p,t)$$

1.4 Propriétés des séquences de franchissements, vecteurs caractéristiques et équation fondamentales

- Séquence de franchissements
  - Suite de transition franchissable successivement
  - Défini à partir d'un marquage donné
  - On note:

$$S = T_1T_2 \quad \text{et } M_0 \xrightarrow{S} M_2$$

- Vecteur caractéristiques:
  - $S = t_1t_2 \dots t_n$ $t_i \in T$ tel que $\bar{S}(t)$ donne le nombre d'occurence de la transition t dans S $\bar{S} : T \rightarrow \mathbb{N}$
  - Ex:

Soit la fréquence $t_1t_2t_2t_3t_1 \; t_3t_4t_5$

$$\bar{S} = \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - Propriétés: $S = S_1 * S_2$ (concaténation

$$\bar{S} = \bar{S_1} + \bar{S_2}$$

- Equation fondamentale

$$M' = M + C \cdot \bar{S}$$

- Quelques définition pour compléter question chapitre 1
  - → Marquage accessibles

Un marquage M' est un marquage accessible s'il existe une suite de transition $S \in T$ tel que $M \xrightarrow{S} M'$

l'ensemble est noté $A(R, M)$

2.5 Monotonicité et répétitivité de transitions

- Monotonie

- L'augmentation du nombres de jetons dans les places d'un marquage préserve la possibilité de franchissement si

$\forall s \in T^*,\ M_1 \xrightarrow{s} M$ et $M_1 \subseteq M_2$

alors

$M_2 \xrightarrow{s} M + (M_2 - M_1)$

- Séquences répétitive

- Définition Une séquence de transition est dite répétitive si pour tout marquage M tel que

$M_1 \xrightarrow{s}$ ~~M_2~~

alors

$\forall n \in \mathbb{N}^+,\ M \xrightarrow{s^n}$

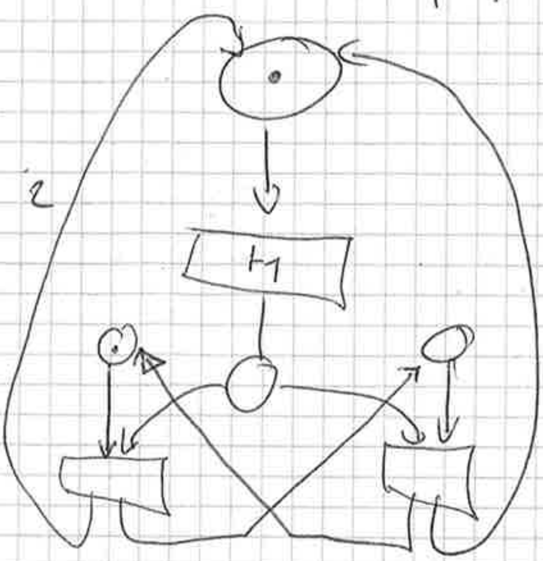
- Condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseaux marqué ait la d'être infiniment actif
- Théorème:

$M \xrightarrow{s} M'$ et $M \subseteq M'$

$\Leftrightarrow$

s est répétitive

- Exemple:



$(t_1 t_2 t_1 t_3)^*$ est une séquence répétitive

2.6 Bornitude et répétitivité des séquences de transition.

- Bornitude
    - Définit et caractérise la possibilité d'une place d'accumuler une quantité bornée ou pas de jetons

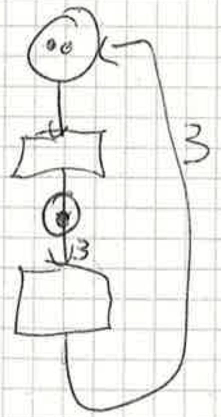
        - place k-bornée

            Pour un réseau R et un marquage et un marquage M_0, une place p (R, M_0) si $\forall M$ accessible depuis M_0, $M(p) \leq K$

        - Sinon la place est non bornée. On a:

        - p k-bornée $\Leftrightarrow \forall M \in A(R, M_0), M(p) \leq k$

    - Un réseaux marqué est borné si toutes ses places sont bornée
    - Les réseaux 1-borné sont appelés réseaux saufs
    - Structurellement borné: r.d.P bornés pour tout marquage initial fini

Ex:  structurellement borné

- Séquence répétitive

    - Une séquence répétitive est dite croissante si pour tout couple de marquage M, M' tel que

$$M \xrightarrow{S} M'$$

alors

$$M'(p) \geq M(p)$$

$\Rightarrow$ Un réseau (R, M_0) est non-borné ssi $\exists$ S répétitive et croissante tel pour une place p, un marquage M accessible depuis M_0 t.q

$$M \xrightarrow{S}$$

2.7 Monotonicité, ~~répétitivité~~ quasi-vivacité, vivacité et blocage

- Quasi-Vivacité

  - La quasi-vivacité d'une transition signifie que depuis le marquage initial de cette transition peut être franchie au moins une fois. Autrement dit pour un réseau marqué (R, M_0)

    $t \in T$ quasi-vivante $\Leftrightarrow \exists M (R, M_0), M \xrightarrow{t}$

  - Si une transition n'est pas quasi-vivante $\Rightarrow$ elle sert à rien!

  - Un réseau est quasi-vivant si toutes les transitions le sont

- Monotonie

  Une transition quasi-vivante pour (R, M) le reste pour $(R^{\#}, M')$ avec $M' \subseteq M$

- Vivacité

  - Quelque soit l'évolution du réseau à partir de M_0 la transition est toujours possible. Autrement dit, pour un réseau marqué (R, M_0)

    $t \in T$ vivante $\Leftrightarrow \forall M \subset (R, M_0)$, t est quasi-vivante

  - Réseau vivant $\Rightarrow$ toutes les transition sont quasi-vivant

- Monotonie : L'augmentation de nombres de jetons dans les places d'un marquage préserve la possibilité de franchissement d'une séquence de transit°

  $\forall S \in T^*$, $M_1 \xrightarrow{S} M$ et $M_1 \subseteq M_2$

  alors

  $M_2 \xrightarrow{S} M + (M_2 - M_1)$

- blocage

  - Marquage puit :

    Un marquage puit est un marquage à partir duquel aucune transition n'est tirable

  - Un réseau marqué est sans blocage si aucun de ses marquages accessible n'est un marquage puit

⚠ Un réseau peut être sans blocage bien qu'aucune que ses transitions ne soit vivante

2.8 Etat d'accueil, réversibilité, répétitivité et consistance

- Etat d'accueil
  - Un RdP a un état d'accueil M_a pour un marquage initial M_0 si $\forall M_i \in A(R, M_0)$ accessible il existe une séquence s tel que

$$M_i \xrightarrow{s} M_a$$

- Réversibilité

  Un RdP est réinitiabilisable (réversible) pour un marquage M_0 si M_0 est un état d'accueil

- Un RdP est consistant s'il existe un marquage initial M_0 et une séquence franchissable s qui contient s qui contient au moins une fois chaque transition t.q.

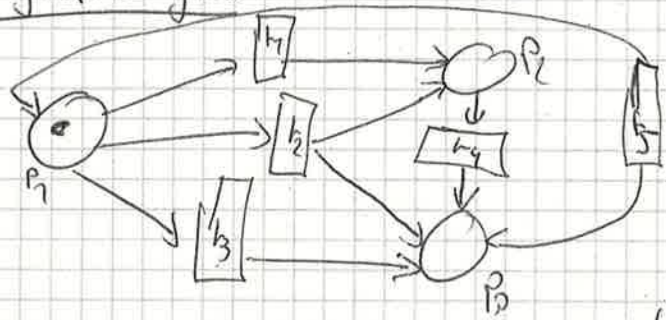
$$M_0 \xrightarrow{s} M_0$$

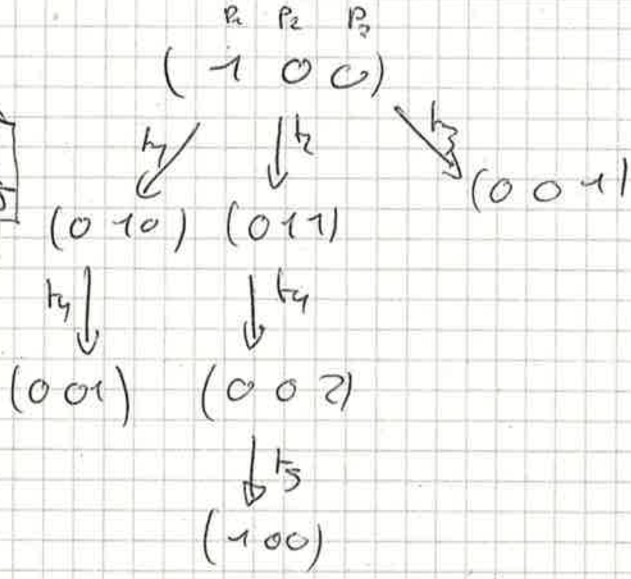
3.9 Définition du graphe de marquage, définition du graphe de Couverture

Pour étudier un réseau, on va construire son graphe de marquage accessible !

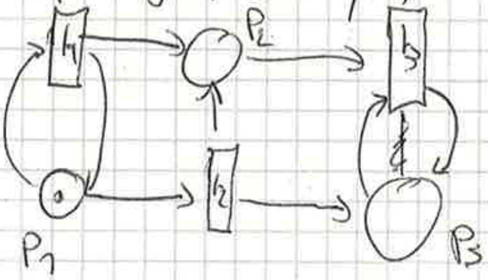
- Si le graphe est fini, c'est un graphe de marquage
- Si le graphe est infini, on appel ça le graphe de couverture pour en déduire certaine propriété.

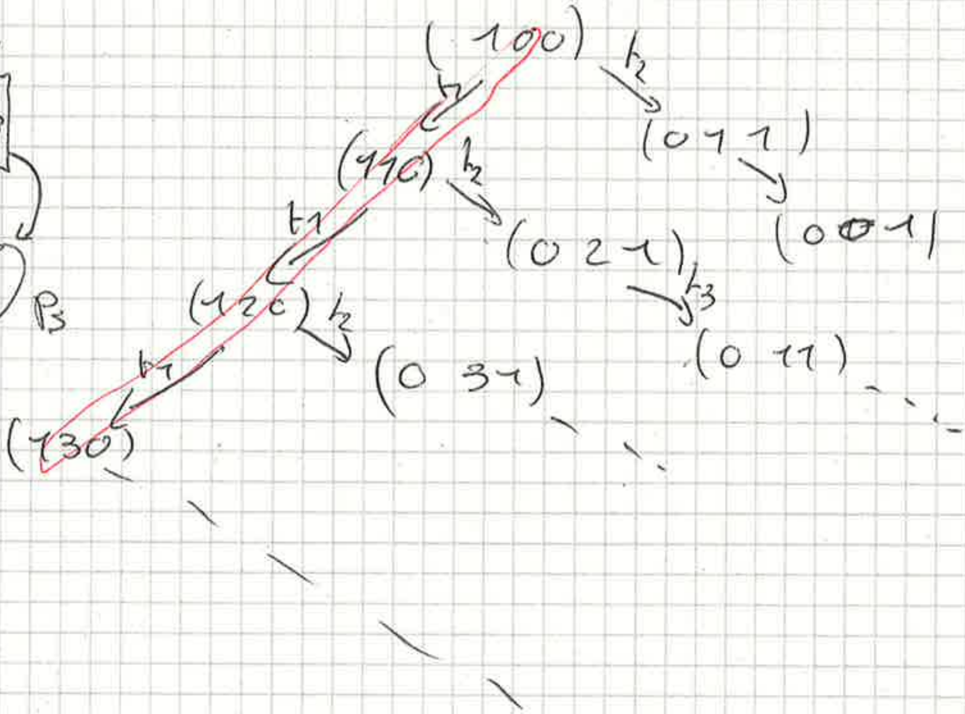
Ex graphe fini





Exemple graphe infini





3.10 Algorithme de construction du graphe de couverture

- Notation

i) ω Représente une quantité arbitrairement grande de jetons ($\omega \notin \mathbb{N}$)

$\forall n$, on a
$$\omega + n = \omega \quad n < \omega$$
$$\omega - n = \omega \quad \omega \leq \omega$$

ii) $\mathbb{N}_\omega = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$; $\mathbb{N}_\omega^m$ = Vecteur à m composante dans $\mathbb{N}_\omega$

Pour $Q \in \mathbb{N}_\omega^{|P|}$, $Q^{-1}(\omega) = \{ p \in P : Q(p) = \omega \}$

iii) L'arborescence de couverture, notée $AC(N)$ où $N = (R, M_0)$ (est un réseau marqué), est une arborescence $(S, X, \mu, \lambda; r)$ où :

- les sommet S sont des vecteurs $\mathbb{N}_\omega^m$ $\mu : S \to \mathbb{N}_\omega^m$
- r est la racine, $\mu(r) = M_0$
- Les arcs $X \subseteq S \times S$ sont étiqueté par des transitions de T, $\lambda : X \to T$

- L'algorithme

1) Racine r est étiquetée par M_0

2) Un sommet s étiqueté par $Q \in \mathbb{N}_\omega^m$ n'a pas de successeur ssi

i) il existe déjà un sommet étiqueté par Q entre r et s

ou

ii) Soit il n'existe pas de transitions t t.q. $Entrée(., t) \subseteq Q$

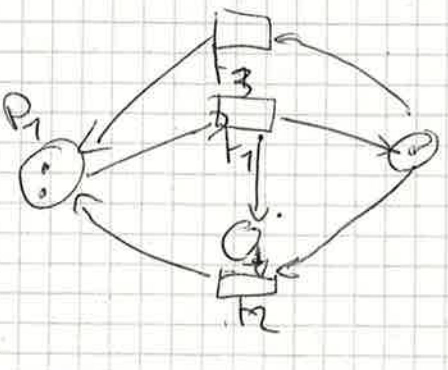
3) Si s étiqueté par Q ne vérifie pas (2), alors pour toute transitions t t.q. $Entrée(., t) \leq Q$ alors il existe s' successeur de s. L'arc (s, s') est étiqueté par t et le sommet étiqueté par Q' comme suit :

i) S'il existe sur le chemin de r à s' un sommet s'' étiqueté par Q'' avec $Q'' \leq Q + C(., t)$, alors pour tout p t.q. $Q''(p) \leq Q(p) + C(p, t)$ on a $Q'(p) = \omega$ (diverge)

ii) Sinon, $Q'(p) = Q(p) + C(p, t)$

4) Recommence en 2 avec sommet inexploré

Ex :



5.1.1 Preuve d'atteignabilité entre deux types de graph

- Definition

  - Le degré d'un graphe est le nombre d'arcs sortant d'un noeud
  - Lemme Koening : Soit A un arbre de degré fini, ~~et~~ comportant un nombre de noeuds infinis. L'arbre A admet une branche infinie
  - Lemme d'extraction : Soit $m_0, m_1 \dots$ une suite infinie de vecteur $\mathbb{N}^m$. Alors cette suite admet une sous-suite ~~convergen~~ croissante.

- Preuve de la terminaison :

absurde $\Rightarrow$ l'arbre de couverture est fini

1) Koening $\Rightarrow$ Arbre contient une branche infinie, Par le lemme d'extraction on peut donc extraire une sous branche infinie croissante

2) Par l'aritmétique $\mathbb{N}_{\omega}^{m}$, les ω ne peuvent disparaitre sur une branche. On suppose que deux noeuds sur une même branche aient ω-composantes $\Rightarrow$ aucune création de nouvelles ω composante $\Rightarrow$ contradiction avec la condition de poursuite de l'exploration

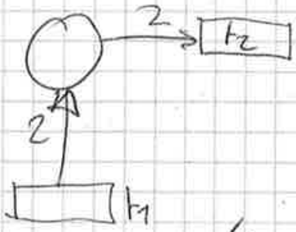
3) Nombres de création de nouvelles composante ω est bornée par la taille en place $\Rightarrow$ contradiction

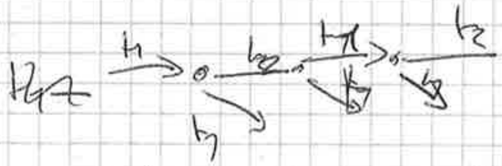
3.12 Perte d'information liée au graphe de couverture

- Le symbole ω ~~correspond~~ correspond à une perte d'informat°
- Le graphe ne permet pas de ~~repon~~ répondre à certaine question:
  - L'accessibilité ~~du réseau~~ d'un marquage
  - La vivacité du réseau

Ex:

Le réseau





graphe de couvert.

$(0) \xrightarrow{t_1} (\omega)$ t_1 t_2

Le mot $t_1 t_2 t_2$.
étiquette bien un ~~mot~~ chemin de graphe de couverture partant de M_0 et portant la séquence n'est pas tirable depuis M_0

3.13 Preuve des propriétés sur des système grâce au graphe de Couverture

- Dans le cas d'un réseau borné, un marquage M est atteignable ssi le graph des marquage accessible contient M.

- Dans le cas d'un réseau non-borné, il est impossible de vérifier à l'aide d'un graphe de couverture si M est accesible. On peut vérifier qu'il existe M' t.q. $M' \subseteq M$

- Une transition t d'un RdP borné est vivante ssi, partant d'un noeud quelconque du graphe des marquages accessible, il exist un chemin orienter contenant un arc marqué t. La transition t est vivante ssi chaque composante fortement connexe et sans arc arc sortant contient arc marqué t.
- Un RdP borné est vivant ssi chaque composante fortement connexe du graphe qui n'a pas d'arc sortant contient au moins un arc marqué par chaque transition.
- Un RdP borné est sans blocage ssi chaque noeud de son graphe est origine d'au moins un arc.

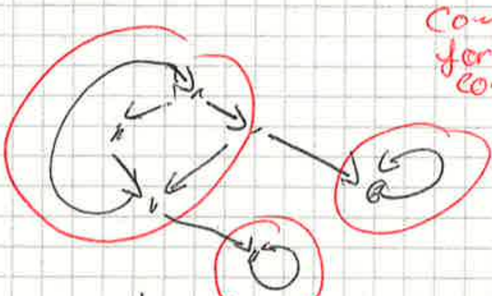
3.4 Utilisation des composantes fortement connexe pour la preuve de vivacité ou non-vivacité

- Définitio

- Composante fortement connexe d'un graphe :

Sous-graphe tel qu'il existe un chemin orienté entre tout point A et tout point B de ce sous-graphe

Ex:



- Arc sortant d'une composante fortement connexe :
  arc qui a comme sommet d'origine un sommet de cette composante et comme extremité un sommet qui n'appartient à cette composante

- Preuve

i) Une transition t d'un RdP non borné n'est pas vivante si le graphe de couverture possède une composante fortement connexe sans arc sortant dans laquelle aucun arc n'est marqué t.

ii) Un RdP non borné n'est pas vivant si son graphe de couverture possède au moin une composante fortement connexe sans arc sortant et dont l'union des transitions attachées aux arcs n'est pas l'ensemble des transitions

iii) Un RdP non borné est avec blocage si son graph de couverture contient un noeud qui n'est l'origine d'aucun arc

iv)

4.15 Définition et calcul des P et T-invariant

- Définition

- pondération : Pour condenser l'information. On pondère chaque place et on obtient un vecteur de poids : $m = |P|$; $f_1 \ldots f_m$ poids des place p_i

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^m \text{ t.q } f_i = \text{poids de place } p_i$$

On peut réduire l'état du réseau à : $f^T \cdot M$

- Accroissement pondéré : Soit s une séquence t.q $M \xrightarrow{s} M'$. L'évolution de l'état à partir de l'équation fondamentale : $M' = M + C \cdot \bar{s}$

On a : $f^T \cdot M' = f^T \cdot M + f^T \cdot C \cdot \bar{s} \Leftrightarrow f^T \cdot C \cdot \bar{s} = f^T \cdot M' - f^T \cdot M$

On note $\Delta(s, f) = f^T \cdot C \cdot \bar{s} \in \mathbb{N}$ si $f^T \cdot C \leq 0 \Rightarrow$ réseau structurellement borné

- T-semi flot : Une séquence s tirable tel que l'état du réseau est conservé : $M' - M = C \cdot \bar{s} = \bar{0}$

T-semi flot $\sim$ T invariant

- Calcul

Voir Cours

4.16 Preuve de l'exclusion mutuelle à l'aide d'invariant, principe généraux et application

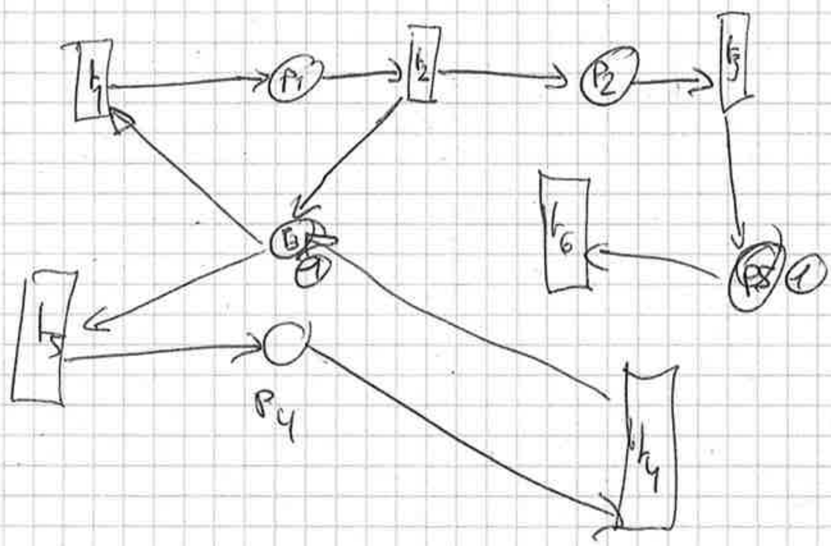
Principe général de l'exclusion mutuelle à l'aide d'invari

Idée : Utilisé les p-invariant d'un réseau et sont marquage initial. Montrer que deux places au plus sont nécessairement en exclusion mutuelle

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cancel{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \\ \hline p_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ p_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ p_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

un des deux p-invariants



D'après ~~la figure~~

M_0

$p_1 + p_3 + p_4 = 1$

Impossible que ces deux soient marquée en même temps

4.17 Preuve du non blocage à l'aide d'invariant

Soit M un tirage accessible depuis M_0

1) $\exists i$ t.q $1 \leq i \leq 5$ tel que $M(e_i) \neq 0$, alors la transition b_i est tirable

2) $\forall i$ (avec $1 \leq i \leq 5$), $M(e_i) = 0$, on a donc

$M_i \cdot I_1 = M_0 \cdot I_1 = 1$
$M_i \cdot I_6 = M_0 \cdot I_6 = 1$
$M_i \cdot I_7 = M_0 I_7 = 1$

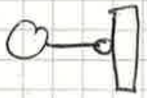
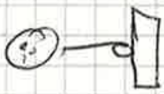
Alors ~~par~~ obligatoirement par I_1 on a que $M(th_1) = 1$ et par I_6 que $M(f_1) = 1$ et par I_7 que $M(f_7) = 1$

car les $M(e_5) = 0$ et $M(e_2) = 0$. Donc la transition est tirable

5.18 Définition et expressivité des réseaux de Petri à arc inhibiteur

Motivations extensions
- Certaine propriété ne peuvent pas être exprimée à l'aide des réseaux usuels
- Réduction de la taille de modélisation
- Besoin d'une meilleur information sur les jetons

Arc inhibiteur:
- Transition tirable ssi place vide

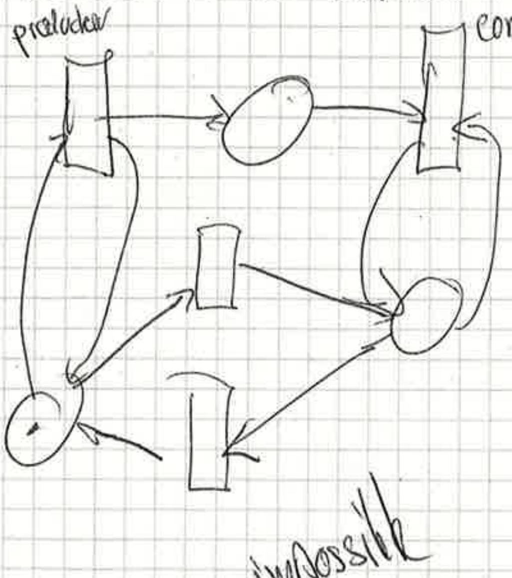
ex:  tirable  pas tirable

Remarque
- Grand pouvoir d'expression
- les propriétés (bornée, etc...) deviennent indécidable
- Notion de séquence répétitive croissante n'implique plus la divergence.

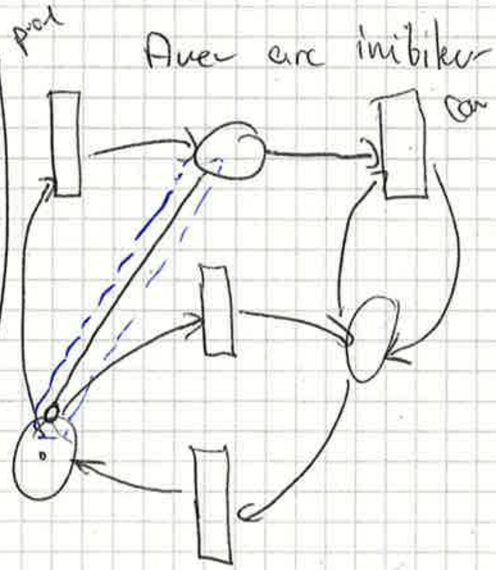
Exemple producteur - consommateur

"Une fois que le consommateur a décider de consommer il consomme tout le buffer." Lorsque le producteur passe la main, il ne peut produire qu'une fois le buffer vide.

Sans arc inhibiteur



Avec arc inibiteur



5.13 Relation des arcs inhibiteur avec les réseaux à capacité et les places complémentaire.

- Définition du test à zéro

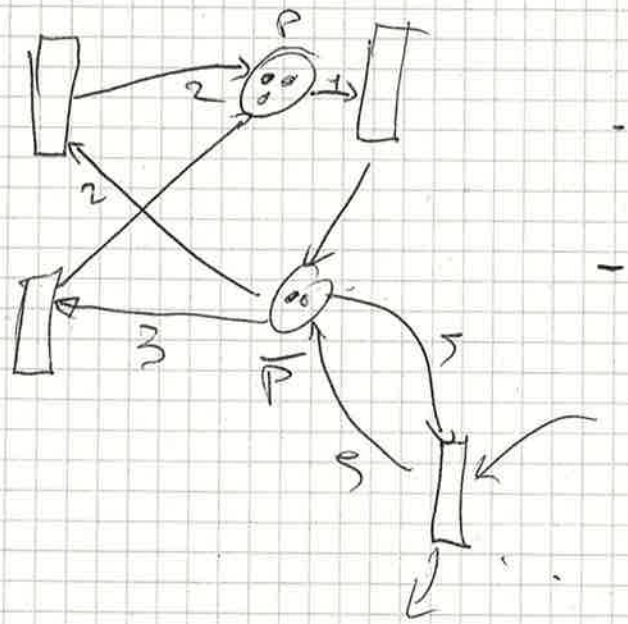
  - Dans le cas général, impossible de tester si le contenu d'une place est vide ⇒ impossible de définir un RdP pour lequel une transition est tirable que si une place donnée ne contient pas de jetons

  Ex → producteur / consommateur

- Solution

  ~~Avec les arcs inhibiteur~~, utilisation de la place complémentaire

  On a p bornée par 5 et $\bar{p}$ sa place compl.



- $M(p) + M(\bar{p}) = 5$

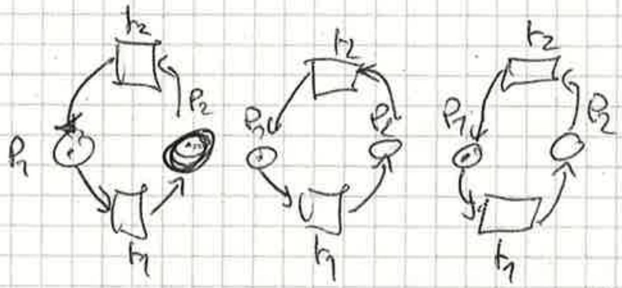
- t tirable ⇒ $M(p) = 0$

6.20. Structure des réseaux colorés (définition de la syntaxe)

- Remarque
  - Les jetons sont typés
  - Le nombres de types et de valeurs de type sont finis
  - Permet de représenter de manière compacte des système avec des composantes aux comportement identique

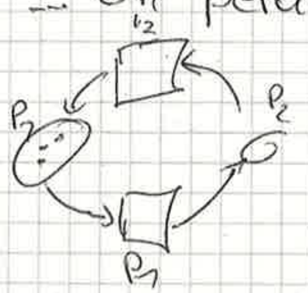
Exemple

Si on a les systèmes...

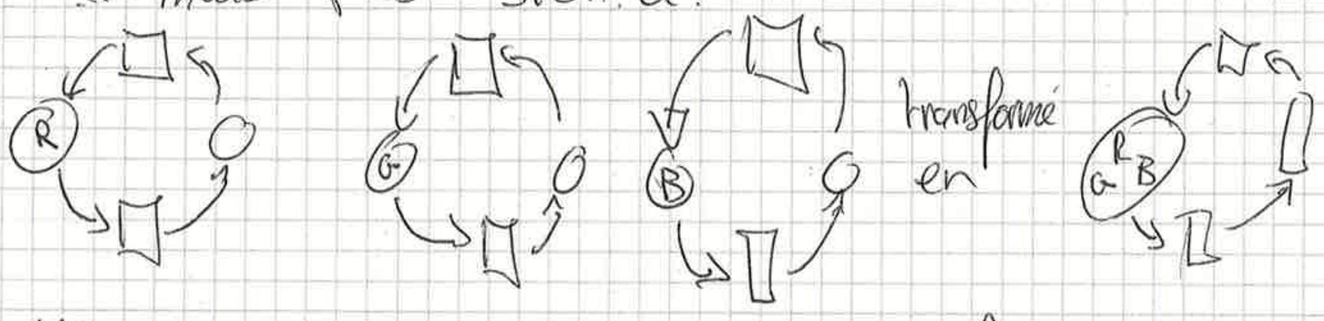


(3x le m̃)

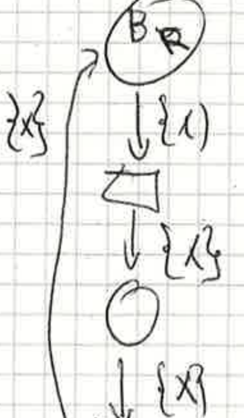
... on perde de l'information en les transformant en



... mais pas si on a!



Notation



avec

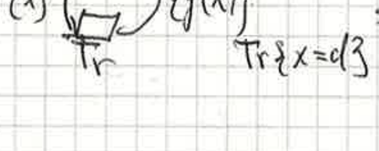
X variable, {B ; R} valeur

Notion de fonction et binding

Si on a:

$f(g)=d$

$f(d)=g$

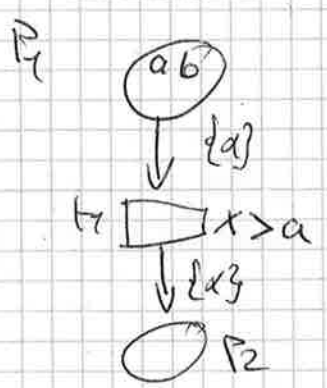


$\Rightarrow$

La transition applique la fonction

→

Condition exemple



- Synthaxe:

Types = ensemble de nom de types = $\{t_1, t_2, \dots t_n\}$

X = variable

$Exp(t_i)$ ensemble des expressions de types t_i, $t_i \in Types$

$Exp(t_i, X)$ = " " " " " " avec variables

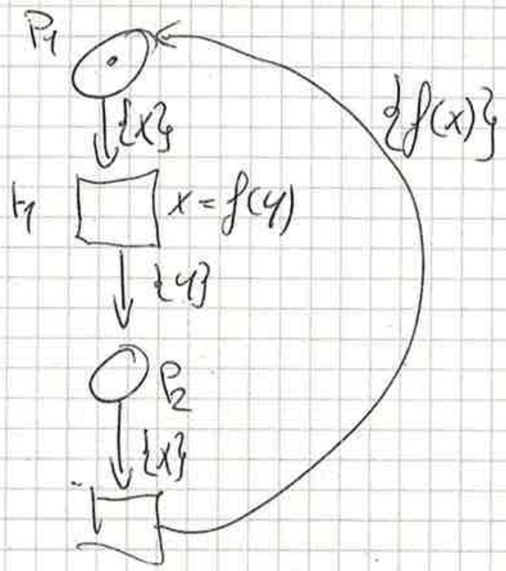
dans X, $t_i \in Types$

6.21 Pliage/Dépliage des réseaux colorés

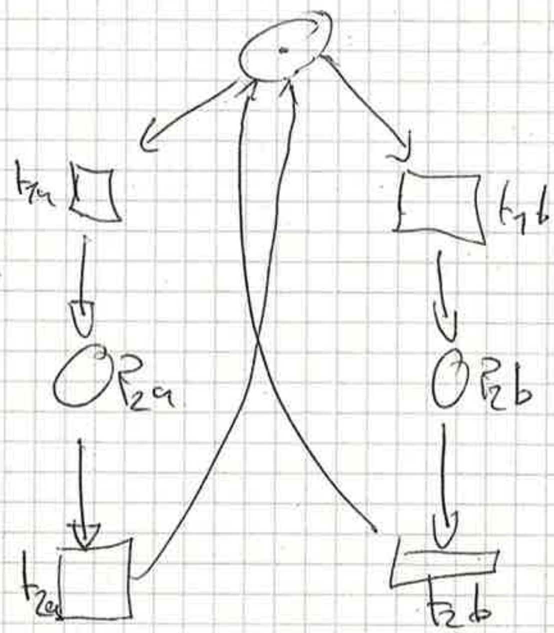
- Reproduire une partie 6.20

- <u>Exemple</u>

Soit le système



peut être déplié en

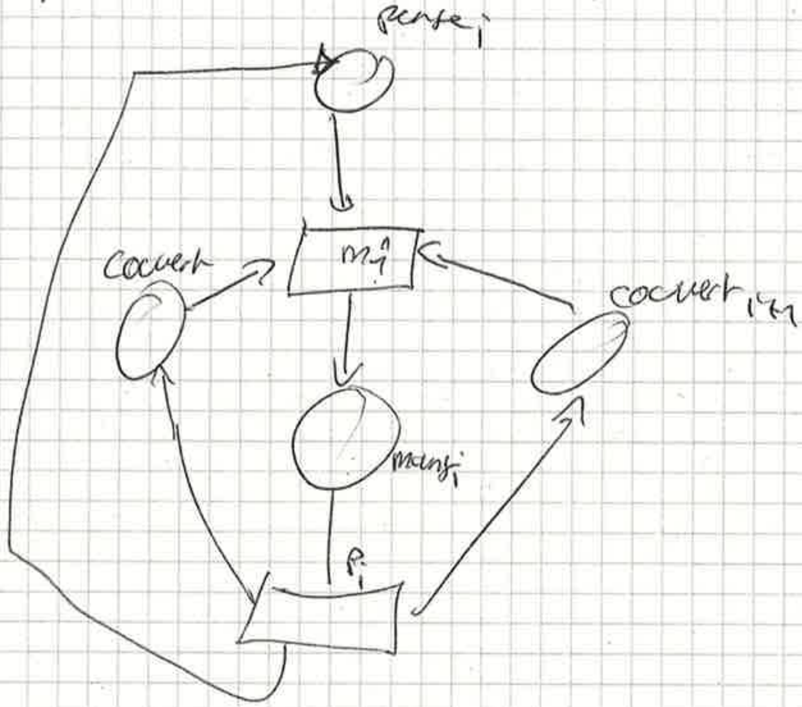


$f(a) = \langle . \rangle$

6.20 Modelisation de problème à 100'000 philosophes

Problème de n philosophes

Savent n philosophes autour d'une table. Chacun a devant lui de la nourriture et un couvert à sa gauche et à sa droite (n couverts). Chacun pense ou mange. Un philosophe peut manger que s'il a ses deux couverts, et libère quand il pense:



7.2.3 Définition de la logique propositionnelle (Syntaxe et Sémantique)

- Définition
  - proposition : énoncé qui peut être vrai ou faux
  - Sémantique : évaluation (le sens) des formules

- Sémantique
  formules

  - Le sens, et une valeur prise, dans un ensemble D, appelé domaine d'interprétation
  - Domaine d'interprétation : ensemble {Vrai ; faux} ou {0,1}
- Un modèle d'une formule Φ est une interprétation M t.q. $\Phi(M) = V$
- ______ d'un ensemble ______ $F = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ est une interprétation ~~tel~~ M tel que $M(\Phi_1) = \dots = M(\Phi_n) = V$
- Satisfaisabilité : s'il existe au moins un domaine de F on dit que F est satisfaisable (consistant). Si c'est pas le cas, F est inconsistant

124 Formes normal CNF et DNF, utilisation pour la recherche de modèle (DPLL)

Définition

- Une formule est en forme normale conjonctive (CNF) si elle est de la forme $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$ où chaque C_i appelé clause est de la forme $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_n$, où les l_i sont appelés les littéraux, sont des formules atomique (donc des variables)

Ex: $(a \vee b) \wedge (\neg b \cancel{\vee} c \vee a) \wedge (a \vee \neg b \vee c)$

- Une formule est ~~en~~ forme normale dissjonctive (CNF) si elle est de la forme $D_1 \vee D_2 \vee \dots \vee D_n$ où les D_i sont de la forme $l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_m$ où les l_i sont des littéraux

Algoritme DPLL

— Sert à trouver un modèle pour une formule Φ en CNF

1) Si ~~a~~ une clause est littérale, (une seule variable), on peut fixer la valeur de cette variable, et mettre à jour les autres variables
2) Si une variable est pure (n'apparaît que en ~~vrai~~ positif ou ~~faux~~ négatif, on peut fixer sa valeur pour rendre vraie toutes les clauses où elle apparait, et éliminer ses clauses.
3) S'il n'y a pas 2 ou 3, on choisit un littéral k et on essaye de trouver pour $\Phi \wedge k$ ou $\Phi \wedge \neg k$
4) Si à un moment donné n'est composée que de littéraux et qu'elle est consistante → On a un modèle

Si on a généré une clause vide, on n'arrivera pas à trouver de modèle. On essaye avec d'autre valeur de variables

7.25 Systèmes formels généraux, notion de système formels pour la logique (Hilbert, séquents)

- Système formel général
  - composé de :
    - Un alphabet (ensemble de symboles)
    - grammaire permettant de construire des formules syntaxiquement correctes à partir des symboles
    - D'un ensemble de règle d'inférence produisant une formule à partir d'une autre formule
    - ensemble d'axiomes
  - ~~Est~~ Les théorèmes sont une suite de formule que l'on peut inférer à partir des axiomes en appliquant les règles.

- Système formel pour la logique

On utilise les mêmes symbole et formule que pour la logique des proposition.
On cherche donc des axiomes et des règles d'inférence pour produire des raisonnements valide.

Ex 1 Hilbert
- Une seules règle d'inférence : modus ponens

$$\frac{\vdash F \quad \vdash (F \to G)}{\vdash G}$$

Si F et F→G sont des théorème alors G est un théorème

- axiomes

i) $\vdash F \to (G \to F)$
ii) $\vdash (F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$
iii) $\vdash ((\neg F \to \neg G) \to (G \to F))$

engendrent infinité d'axiome car F, G et H peuvent être n'importe quel formule

Ex 2 Sequent.

Un Séquent est un jugement de la forme $A_1, \dots A_m \vdash B_1, \dots, B_m$

Si A_i thm alors B_i thm

un sequent représente une étape de démonstration

7.26 Preuves par séquents : Règle de déduction de jugement pour les connecteurs $\neg, \vee, \wedge$

- Règle :

$$\frac{\text{Premise}}{\text{conclusion}}$$

Règle	nom	Règ	nom
$\overline{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$	basic	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$	$\neg r$
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\neg l$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$	$\vee r$
$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\vee l$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma\ \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$	$\wedge r$
$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\wedge l$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\cancel{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \quad \Gamma \vdash \Delta, A \to B}$	$\to r$
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\to l$		

Exemple démontrer $(p \wedge (p \to q)) \to q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{basic}}{p \vdash q, p} \qquad \overset{\text{basic}}{q, p \vdash q}}{p, p \to q \vdash q}\ \to l\ (\Gamma = p, \Delta = q)}{p \wedge (p \to q) \vdash q}\ \wedge l}{\vdash (p \wedge (p \to q)) \to q}\ \to r$$

7.27 Preuve par réfutation avec le principe de résolution

- Définition:

principe de résolution: ~~Resolution~~

Une seule règle d'inférence, qui fonctionne sur un ensemble de clause $\Rightarrow$ CNF nécessaire

- Règle

~~$C_1=(p \vee q \vee \neg r \vee s)$ $C_2=(q \vee \neg p \vee t)$ résolution sur p et $\neg p$ résolvant $(q \vee \neg r \vee s \vee q \vee t)$~~

Si on a:

$$C_1 = (p \vee L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$$
$$C_2 = (\neg p \vee M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_n)$$

le résolvant de C_1 et C_2 est ~~la~~ la clause

$$L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m \vee M_1 \vee \dots \vee M_n$$

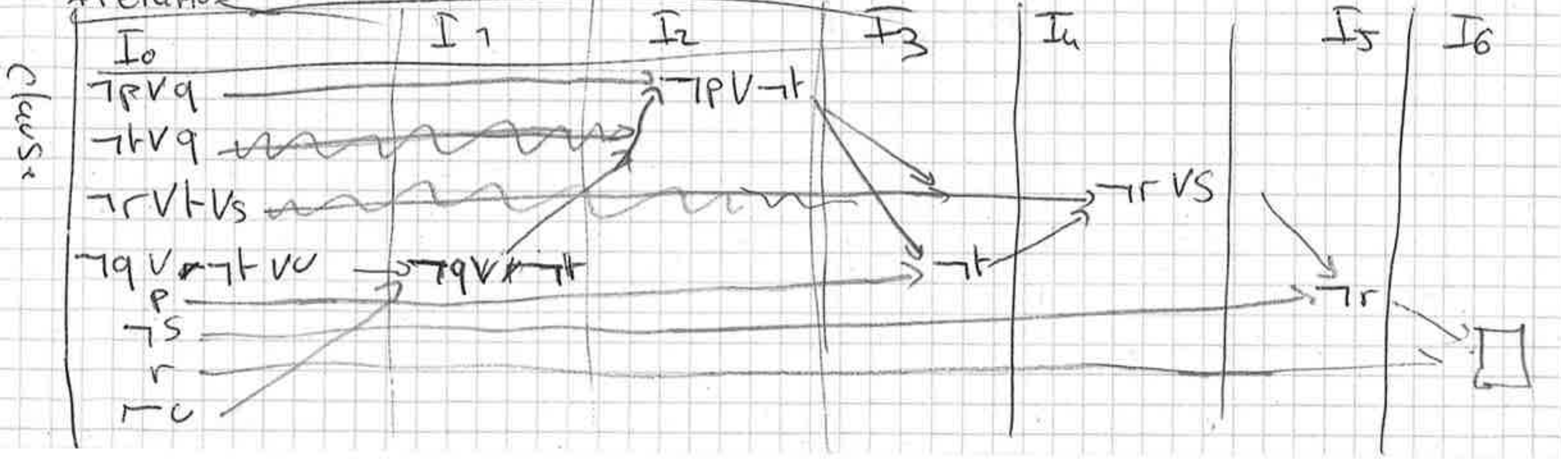
- Théorème: Le résolvant de C_1 et C_2 est satisfiable ssi C_1 et C_2 le sont.

~~i) Définit vecteur $S[0] = S$ (ensemble de clause à prouver~~

Exemple: $\{(p \vee t) \rightarrow q,\ r \rightarrow (t \vee s),\ (q \wedge t) \rightarrow u,\ p,\ \neg s,\ r\} \models u$

i) On met sous forme de clause et on ajoute $\neg u$

- $(p \vee t) \rightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg t \vee q) \Rightarrow$ 2 clause $(\neg p \vee q)$ et $(\neg t \vee q)$
- $r \rightarrow (t \vee s) \equiv \neg r \vee (t \vee s) \equiv \neg r \vee t \vee s$
- $(q \wedge t) \rightarrow u \equiv \neg q \vee \neg t \vee u$
- $\neg u$



8.28. Sémantique de la logique des prédicats (interprétation et model)

Définition

- Un prédicat d'un ~~e~~ langage est une propriété des objets du domaine considérer, exprimé dans le langage en question
- Un prédicat d'un n-uplet d'objet s'interprète ~~comme~~ par une fonction à n argument sur l'univers du discours

- Quantification utilisation de la ~~sémantique~~ quantification des variables pour exprimer de manière compact des énoncé de type universel

Grammaire terme = constante | des variable | fonction

Connecteur = $\wedge \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow$

Modèle

Un modèle d'une formule A est une interprétation M tel que $M(a) = v$.

Pour les formules ouvertes on considère en général que M est un modèle si pour évaluation v, $M_v(a) = V$

8.29 Équivalence et Formes normales Prenex

Équivalence

Les équivalences des proposition restent valides (Morgan, Distributivité etc.

i) $\neg(\forall x A) \equiv \neg A$

ii) $\neg(\exists x A) \equiv \forall x \neg A$

iii) $(\forall x A) \wedge B) \equiv \forall x (A \wedge B)$ [1]

iv) ~~$(\forall x A) \vee (\forall x B) \equiv$~~ $(\forall x A) \vee B \equiv \forall x (A \vee B)$ [1]

v) $(\exists x A) \wedge B \equiv \exists x (A \wedge B)$ [1]

vi) $(\exists x A) \vee B \equiv \exists x (A \vee B)$ [1]

vii) $(\forall x A) \wedge (\forall x B) \equiv \forall x (A \wedge B)$

viii) $(\forall x A) \vee (\forall x B) \equiv \forall x (A \vee B)$

ix) $(\forall x A) \equiv (\forall x A) \wedge A[t/x]$

x) $(\exists x A) \equiv \exists x A \vee A[t/x]$

1. Si x n'est pas libre dans B

Forme Prenex

équivalence permettent de mettre les quantificateur au début

① $\neg(\forall x A) \equiv \exists x \neg A$ et $\neg(\exists x A) \equiv \forall x \neg A$ à applique au début pour mettre les négations à l'intérieur et quantificateur

② appliquer $(Q x A) \theta B \equiv Q x (A \theta B)$ avec $Q = \exists$ ou $\forall$ et $\theta = \wedge$ ~~et~~ ou $\vee$ pour étendre la portée des quantificateur

8.30 Preuve par séquent : règle de déduction de jugement pour les quantificateur logique, exemple

- $\dfrac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta}\ \forall l$ - $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A[y/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A}\ \forall r$

- $\dfrac{A[y/x], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta}\ \exists l$ - $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A}$

- $A[t/x]$ est la formule A où la variable libre x est remplacée par le terme t. Ce terme ne doit pas ~~contenir~~ contenir de variable libre qui est liée dans A

- Restriction dans $\forall r$, $\exists l$ la variable y ne doit pas être libre dans aucune formule du séquent inférée.

Ex:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(x) \vdash A(x)}\ \text{basic}}{\vdash A(x) \to A(x)}}{\vdash \forall x (A(x) \to A(x))}\ \forall R$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{pas de preuve}}{A(x) \vdash A(y)}\ \forall R}{A(x) \vdash \forall x A(x)}\ \to R}{\vdash A(x) \to \forall x A(x)}$$

⚠ l'ordre d'application des règles n'est pas unique et certains choix ne permettent pas de réaliser la preuve.

P.34 Principe de résolution pour la logique des prédicats

- Résolution pour la logique des prédicats
  - i) mettre les formules prenex
  - ii) Skolemiser
  - iii) mettre en forme normale conjonctive

La règle de résolution ~~t~~ en logique stipule qu'étant donné deux clauses :

$$C_1 = p \vee L_1 \vee \dots \vee L_m \quad \text{et} \quad C_2 = \neg p \vee M_1 \vee \dots \vee M_n$$

le résolvant de C_1 et C_2 sur p (pas forcément en première position est la clause :

~~On peut~~ $C_r = L_1 \vee \dots \vee L_m \vee M_1 \vee \dots \vee M_n$

On peut effectuer la résolution sur deux littéraux $P(t_1, \dots, t_n)$ et ~~...~~ $\neg P(u_1, \dots, u_n)$ non seulement s'ils sont égaux mais également si les t_i et u_i sont unifiable

- Définition unifiable

Deux formules sont unifiable s'il existe une substitution des variables par des termes qui les rend identiques

Ex :

- $P_1(x; a; y)$ et $P_2(c; a; z)$ où "a" et "c" constantes sont unifiable

  $x \to c$ et $y \to z$ on a $P_1(c; a; z) = P_2(c; a; z)$

- $P_1(x; a; y)$ et $P_2(c; b; z)$ ~~est~~ pas unifiable car a et b ne peuvent pas être unifiée (on peut remplacer une constante par une autre)

$\longrightarrow$

· Exemple de résolution

On veut prouver que le thm $\forall x, A(x) \rightarrow \neg \exists z \neg A(z)$ revient à montrer que $\neg(\forall x A(x) \rightarrow \neg \exists \neg A(z))$ est inconsistant

i) forme prénex

$$\neg(\neg \forall x A(x) \vee \neg \exists z \neg A(z)) \equiv (\forall x A(x) \wedge \exists z \neg A(z))$$

$$\equiv \exists z (\forall x\ A(x) \wedge \neg A(z)) \equiv \exists z \forall x (A(x) \wedge \neg(A(z))$$

ii) Skolemisation $z \rightarrow k$

$$\equiv \forall x (A(x) \wedge \neg A(k))$$

iii) Deux clause

$A(x)$ et $\neg A(k)$

$x = k$ $A(k)$ et $\neg A(k)$

8.32 Théories logiques, exemples, modélisation logique

- Définition

  - Théorie : Une théorie est un ensemble de formule

  - Théorie fermée Une théorie est dite fermée toutes ses conséquences logique

  - Théorie axiomatisable Une théorie T est axiomatisable si on peut trouver un ensemble de formule G tel que T soit formé de toutes les conséquences logiques de G : $T = \{ g \mid G \models g \}$

  - théorie égalitaire
    On dit d'une théorie qu'elle est égalitaire si son vocabulaire comprend le prédicat binaire = et si elles contient les axiome

    1) réflexivité $\forall x, (x = x)$
    - symétrie $\forall x, y\ (x = y \to y = x)$
    - transitivité $\forall x, y, z\ (x = y \wedge y = z \to x = z)$
    - Un axiome de substitution pour chaque $\forall x_1, \ldots, x_n\ \forall y_1, \ldots y_n\ (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \wedge p(x_1, \ldots x_n) \to p(y_1, \ldots y_n)$
    - un axiome de substitution pour chaque fonct $\to f(x_1, \ldots x_n) = f(y_1, \ldots y_k)$

- Exemples

  - théorie fermée $T_1 = \{ p(a), q(a), p(b), \forall x\ (p(x) \to q(x)) \}$ n'est pas fermée car $q(b)$ n'est pas dans T_1

  - Théorie axiomatique : $T = \{ r(a), r(b), s(c), s(d), t(a,c), t(a,d), t(b,c), t(b,d), t(c,a), t(d,a), t(c,b), t(d,b) \}$ est axiomatisable avec les axiomes :
    $r(a); r(b); s(c); s(d); \forall x, y\ ((r(x) \wedge s(y)) \to (t(x,y) \wedge t(y,x)))$

- Principe de modélisation logique

  1) Définir les vocabulaire (prédicats, fonctions, constante)
  2) Définir les axiomes