Logique des prédicats

G. Falquet

Centre universitaire d'informatique

18 décembre 2018

Motivations

Si on considère l'expression linguistique de la signification des propositions on s'aperçoit qu'elles sont en général composées

- d'objets (ce dont on parle)
- d'un prédicat (ce qu'on en dit), souvent représenté par un verbe.

  Jules est grand

prédicat : est grand, objet : Jules

  Lucie mange une pomme

prédicat : mange, objets : Lucie et pomme

L'un des buts de la logique des prédicats est par conséquent de ne plus considérer les propositions comme des objets monolithiques, mais de décrire plus précisément leur structure.
Pour mettre en évidence le prédicat et les objets d'une proposition (simple) on écrira celles-ci sous la forme :

$$pr\acute{e}dicat(objet_1, objet_2, \ldots)$$

Par exemple :

$$estGrand(Jules)$$

$$mange(Jules, pomme)$$

Ce qui permet aussi de voir les propositions atomiques comme des fonctions à valeur booléennes (les prédicats) qui portent sur des objets d'un domaine étudié.

Quantification

En logique des propositions il est très difficile d'exprimer des énoncés quantifiés.

Exemple

On modélise un échiquier par 64 variables propositionnelles $v_1, v_2, \ldots, v_{64}$ indiquant l'occupation ou non de chaque case.
La proposition « toutes les cases sont libres » doit s'écire

$$\neg v_1 \wedge \cdots \wedge \neg v_{64}$$

La proposition « il y a une case occupée » s'écrira quand à elle

$$v_1 \vee \cdots \vee v_{64}$$

Si un système comprend plus de variables on arrivera à des formules de très grande taille.

Quantification

En logique des prédicat on utilisera la quantification des variables pour exprimer de manière compacte des énoncés de type universel

Pour tout $x$si $x$est un chat alors c'est un félin

ou existentiel

Il existe un nombre entier x supérieurs à 3 et tel que x^2 est inférieur 20.

Fonctions

La logique des prédicats contient la notion de fonction.
Les fonctions considérées sont des fonctions à 0, 1 ou plusieurs paramètres.

Exemple

- age (unaire) : *Personnes* $\rightarrow \mathbb{N}$
- distance (binaire) : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.
- 2008 (0-aire) : constante

Vocabulaire pour un langage logique

Un vocabulaire (ou signature) W pour un langage logique des prédicats est composé de symboles de différentes catégories :

- variables $(x, y, z, ...)$
- constantes $(a, b, c, ...)$
- fonctions $(f, g, h, ...)$
- prédicats $(p, q, r, ...)$

De plus, chaque symbole de fonction ou prédicat possède une arité (nombre de paramètres)

Grammaire

```
terme = constante | variable
        | fonction "(" terme { "," terme } ")"
atome = prédicat "(" terme { "," terme } ")"
formule = atome
          | \forall   variable formule | \exists   variable
          | \lnot  formule
          | formule connecteur formule
connecteur = ∧ | ∨ | → | ↔
```

Exemple

- $\forall x(\exists y(p(y,x) \vee q(y,y)) \rightarrow r(x,a))$
- $\forall x(etudiant(x) \rightarrow \exists y(fac(y) \wedge inscrit(x,y)))$

Variables libres et liées

Les variables qui apparaissent dans une formule sont dites libres ou liées, selon le principe suivant :

- toutes les variables d'une formule sans quantificateur sont libres si x est libre dans w ,
- x est liée dans $\forall\, xw$ et dans $\exists x\, w$

Exemple. Dans

$$\forall x(p(x) \vee r(y, x))$$

x est liée y est libre

Cas d'homonymie

Dans

$$(\exists x(p(x) \wedge q(x))) \vee r(x)$$

- x est liée dans la partie à gauche de $\vee$ et x est libre dans la partie de droite.

En fait la formule contient deux variables nommées x
écriture équivalente plus claire :

$$(\exists x(p(x) \wedge q(x))) \vee r(y)$$

Formules fermées et ouvertes

Une formule dont toutes les variables sont liées est dite fermée ou proposition.

Une formule avec une ou des variables libres est dite ouverte.

Notation : $w(x_1, .., x_k)$ indique que $x_1, .., x_k$ sont libres dans w

Exemple, $w(x, z) = p(x) \vee \exists y\, q(x, y, z)$ est une formule ouverte où x et z sont libres.

Interprétation d'un vocabulaire

Une interprétation de W (ou structure relationnelle sur W) est la donnée de :

un ensemble non vide D , le domaine de l'interprétation

une fonction $\mathcal{I}$ qui associe

- à chaque symbole de constante c une valeur $\mathcal{I}(c)$ de D
- à chaque symbole de fonction f à n arguments une fonction totale $\mathcal{I}(f) : D^n \rightarrow D$
- à chaque symbole de prédicat p à k arguments une relation k-aire $\mathcal{I}(p) \subseteq D^k$ i.e. un ensemble de k-uplets $(d_1, ..., d_k)$.

Valuation des variables et des termes

Pour pouvoir interpréter des formules ouvertes (contenant des variables) libres il faut ajouter une valuation ν des variables.
ν est une fonction de l'ensemble des variables dans le domaine D.

La valeur $\mathcal{I}_\nu$ d'un terme est alors définie par

- constante : $\mathcal{I}_\nu(a) = \mathcal{I}(a)$
- variable : $\mathcal{I}_\nu(x) =_\nu (x)$
- fonction : $\mathcal{I}_\nu(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathcal{I}(f)(\mathcal{I}_\nu(t_1), \ldots, \mathcal{I}_\nu(t_n))$

Exemple

Structure et valuation

- $D = 0, 1, 2, 3$
- $\mathcal{I}(a) = 0, \mathcal{I}(b) = 1, \mathcal{I}(c) = 2, \mathcal{I}(d) = 3$
- $\mathcal{I}(f) = \begin{cases} (0,0) & \mapsto & 0 \\ (0,1) & \mapsto & 2 \\ (1,0) & \mapsto & 2 \\ \ldots & \mapsto & 3 \quad \text{pour les autres} \end{cases}$
- $\nu(x) = 1, \nu(y) = 0$

$\Rightarrow$

- $\mathcal{I}_\nu(a) = 0$
- $\mathcal{I}_\nu(f(a, x)) = \mathcal{I}(f)(0, 1) = 2$
- $\mathcal{I}_\nu(f(x, f(y, b))) = \mathcal{I}(f)(1, \mathcal{I}(f)(0, 1)) = \mathcal{I}(f)(1, 2) = 3$

Interprétation des formules

formules atomiques : $\mathcal{I}_\nu(p(t1, \ldots, tn)) = \mathbf{v}$ si et seulement si
$(\mathcal{I}_\nu(t_1), \ldots, \mathcal{I}_\nu(t_n)) \in \mathcal{I}(p)$

formules universelles : $\mathcal{I}_\nu(\forall x \Phi(x)) = v$ si et seulement si
pour tout élément $d \in D$: $\mathcal{I}_{\nu, x \to d}(\Phi(x)) = \mathbf{v}$ où $\nu, x \to d$ est la valuation égale à ν sauf pour x qui vaut d

formules existentielles : $\mathcal{I}_\nu(\exists x \Phi(x)) = \mathbf{v}$ si et seulement
il existe un élément $d \in D$: $\mathcal{I}_{\nu, x \to d}(\Phi(x)) = \mathbf{v}$

les connecteurs logiques sont interprétés comme en logique des propositions.

Exemple

prédicats :	*connaît* (binaire)
domaine :	D = {marie, paul, anna}
interprétation :	$\mathcal{I}(m) = marie, \mathcal{I}(p) = paul, \mathcal{I}(a) = anna$
	$\mathcal{I}(connait) = \{(marie, paul), (paul, marie), (paul, anna)\}$
valuation :	$\nu(z) = anna$

$\mathcal{I}_\nu\,(connait(z, m)) = \mathbf{f}$	$(anna, marie) \notin \mathcal{I}(connait)$
$\mathcal{I}_\nu\,(\exists x\, connait(x, m)) = \mathbf{v}$	$\mathbf{v}$ pour $x = paul$
$\mathcal{I}_\nu\,(\forall x\, connait(p, x)) = \mathbf{f}$	$\mathbf{f}$ pour $x = paul$
$\mathcal{I}_\nu\,(\forall x \exists y\, connait(y, x)) = \mathbf{v}$	choisir $y = paul$ pour $x = maire$, $y = marie$ pour $x = paul$, $y = paul$ pour $x = anna$

Modèles et équivalence

Définitions

Un modèle d'une formule fermée A est une interpréation $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M}(A) = \mathbf{v}$.

> *Pour les formules ouvertes on considère (en général) que $\mathcal{M}$ est un modèle si pour toute valuation ν, $\mathcal{M}_\nu(A) = \mathbf{v}$.*

B est une conséquence logique de A si tout modèle de A est aussi un modèle de B

Définition

Deux formules A et B sont équivalentes si pour toute interprétation $\mathcal{I}$ et toute valuation ν,

$$\mathcal{I}_\nu(A) = \mathcal{I}_\nu(B)$$

Équivalences utiles

Les équivalences connues en logique des propositions restent valides : de Morgan, distributivité, etc. et il y en a de nouvelles

$\neg(\forall x A) \equiv \exists x \neg A$

$\neg(\exists x A) \equiv \forall x \neg A$

$(\forall x A) \wedge B \equiv \forall x (A \wedge B)$ [1]

$(\forall x A) \vee B \equiv \forall x (A \vee B)$ [1]

$(\exists x A) \wedge B \equiv \exists x (A \wedge B)$ [1]

$(\exists x A) \vee B \equiv \exists x (A \vee B)$ [1]

$(\forall x A) \wedge (\forall x B) \equiv \forall x (A \wedge B)$

$(\exists x A) \vee (\exists x B) \equiv \exists x (A \vee B)$

$(\forall x A) \equiv (\forall x A) \wedge A[t/x]$ (x remplacé par n'importe quel terme t)

$(\exists x A) \equiv (\exists x A) \vee A[t/x]$

1. si x n'est pas libre dans B

Forme Prenex

Les équivalence permettent de manipuler les formules de manière à amener tous les quantificateurs au début.

1. appliquer $\neg(\forall x A) \equiv \exists x \neg A$ et $\neg(\exists x A) \equiv \forall x \neg A$ pour mettre les négations à l'intérieur des parenthèses et les quantificateurs à l'extérieur
2. appliquer $(QxA)\theta B \equiv Qx(A\theta B)$ (où $Q = \exists$ ou $\forall$ et $\theta = \wedge$ ou $\vee$) pour étendre la portée des quantificateurs à toute la formule (transformer $\alpha \rightarrow \beta$ en $\neg\alpha \vee \beta$ si nécessaire)

Exemples

$$
\begin{aligned}
&(\forall x\, p(x,a)) \rightarrow (\exists y\, q(y))\\
&\equiv \neg(\forall x\, p(x,a)) \vee (\exists y\, q(y))\\
&\equiv (\exists x\, \neg p(x,a)) \vee (\exists y\, q(y))\\
&\equiv \exists x(\neg p(x,a) \vee (\exists y\, q(y)))\\
&\equiv \exists x \exists y(\neg p(x,a) \vee q(y))\\
&\equiv \exists x \exists y(p(x,a) \rightarrow q(y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\exists x\, p(x,a)) \rightarrow (\exists y\, q(y))\\
&\equiv \neg(\exists x\, p(x,a)) \vee (\exists y\, q(y))\\
&\equiv (\forall x\, \neg p(x,a)) \vee (\exists y\, q(y))\\
&\equiv \forall x(\neg p(x,a) \vee (\exists y\, q(y)))\\
&\equiv \forall x \exists y(\neg p(x,a) \vee q(y))\\
&\equiv \forall x \exists y(p(x,a) \rightarrow q(y))
\end{aligned}
$$

Skolemisation

Idée : lorsque on a une formule du type

$$\forall x \exists y \; p(x, y) \tag{1}$$

cela signifie que pour chaque x on peut trouver au moins un y tel que $p(x, y)$ est vrai.
On introduit un nouveau symbole de fonction f et on réécrit la formule 1 comme

$$\forall x \; p(x, f(x))$$

- S'il y a plusieurs quantificateurs universels, la fonction dépend de toutes les variables qui viennent avant y dans la formule.
- S'il n'y a aucun quantificateur avant $\exists y$, on remplace y par une nouvelle constante (fonction 0-aire)

Exemple

1. $A_1 = \forall x \forall y \exists z (E(x,y) \rightarrow A(x,z)).$
$$sk(A_1) = \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow A(x, f(x,y))).$$
2. $A_2 = \forall x \exists u \forall y \exists z (P(x,u) \rightarrow (Q(u,y) \wedge R(y,z))).$
$$sk(A_2) = \forall x \forall y (P(x, f(x)) \rightarrow (Q(f(x), y) \wedge R(y, g(x,y)))).$$
3. $A_3 = \exists x \forall z P(z,x)$
$$sk(A_3) = \forall z P(z,k)$$

Skolemisation et satisfiabilité

La skolemisation d'une formule fermé produit une proposition universelle
La skolemisation ne conserve pas le sens des formules. En général $sk(A)$ n'est pas équivalente à A, mais

Théorème

A est satisfiable si et seulement si $sk(A)$ l'est.

Par conséquent, pour démontrer que

$$\{f_1, \ldots, f_n\} \models g$$

on peut démontrer (par exemple avec le principe de résolution pour la logique des prédicats) que

$$\{sk(f_1), \ldots, sk(f_n), sk(\neg g)\}$$

est inconsistant.