

Величину

$$\lambda = \frac{1}{2h} = \frac{1}{2 \cdot |q\alpha - p|}$$

назовем коэффициентом выгоды. Его смысл очень прост: коэффициент выгоды показывает, во сколько раз фактическая абсолютная погрешность меньше максимально возможной. Чем больше 2, тем выгоднее приближение. Очевидно,

$$1 \leq \lambda < \infty$$

$$\lambda h = \frac{1}{2}$$

Не следует думать, что более мелкие доли всегда дают более точное приближение! Может случиться, что при нанесении на числовую ось восьмых долей число α занимает менее выгодное положение, чем при нанесении седьмых. Сделаем опыт с числом π , аппроксимируя его разными долями - от первых до десятых. Вычисления опущены, читатель может воспроизвести их сам.

q	приближенное значение π	верхняя граница абсолютной погрешности	Δ	h	λ
1	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{2} = 0,5000$	0,1416	0,1416	3,5
2	$\frac{1}{3} = 0,333$	$\frac{1}{3} = 0,2500$	0,1416	0,2832	1,8

Эта таблица показывает, что для аппроксимации и седьмые доли резко выгоднее ближайших соседних долей. Фактическая погрешность в 56 раз меньше, чем можно думать, судя по размеру долей *)

На рисунке 2 показано расположение числа π на числовой оси. Случайно

(а впрочем, случайно ли?) π оказывается очень близко к $3\frac{1}{7}$. Если бы нам заранее предписали аппроксимировать так, чтобы абсолютная

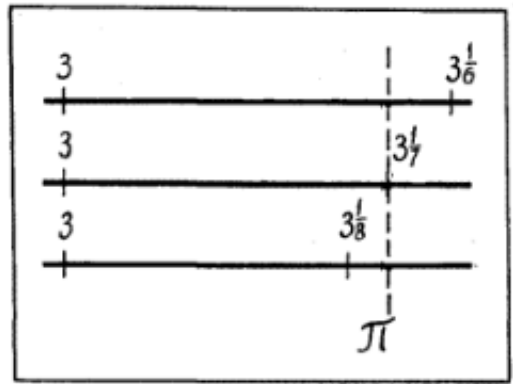


Рис. 1

погрешность не превысила 0,0013, какие доли выбрали бы? Мы записали бы условие $\frac{1}{2q} \geq 0,1300$, откуда $q \geq 4385$, а Архимед достиг той же точности, взяв гораздо меньший знаменатель.

Теперь вы убедились, читатель, что Архимед выбрал седьмые доли не случайно?

Через много веков голландский математик Адриан Меций дал приближенное значение

$$\pi \approx \frac{355}{113}$$

Число Меция обладает теми же удивительными свойствами, что и число Архимеда: знаменатель 113 гораздо

*) Вычисление дает $\lambda = \frac{1}{2 \cdot 0,0089} = 56,2$. Чтобы правильно получить цифры десятых, надо взять и с пятью цифрами после запятой