LİSE KİTAPLARI: III. SINIF

HENDESE

AHMET NAZMİ ve HİLMİ

1930
İSTANBUL
DEVLET MATBAASI

Maarif Vekâleti Millî Talim ve Terbiye Dairesinin 1714 numaralı ve 10 / 7 / 1929 tarihli emrile 3000 nüsha tab'edilmiştir.

Müstevi ve Mücessem Hendeseye

LÂHİKA

BİRİNCİ FASIL

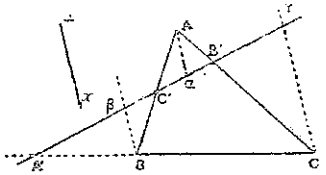
Katılar

1. Dava — Eğer bir ABC müsellesinde BC, CA, AB dılıları ayni bir müstekim tarafından A', B', C' noktalarında kat'olunursa mezkûr dılılar üzerinde bu suretle tayin edilen kıt'alar arasında

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$$

münasebeti mevcuttur.

Filhakika, A'C'B' katına muvazi olmıyan bir x'x mihverini nazarı itibara alalım (şekil: 1) ve A,B,C reislerinden bu mihvere muvaziler resm ile bu muvazilerin mezkûr katı kat'ettiği noktaları α, β, γ ile gösterelim. Bu muvaziler üzerinde müşterek müspet cihet olarak x'x mihveri üzerindeki müspet cihet kabul edildiğine göre şeklin tekmil halleri için



Şekil: 1

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{\beta B}}{\overline{\gamma C}}, \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{\gamma C}}{\overline{\alpha A}}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{\alpha A}}{\overline{\beta B}}$$

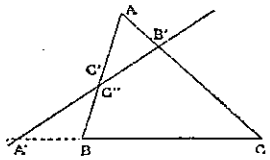
elde olunur. Bu üç müsavat taraf tarafa zarbolundukta

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{\beta B}}{\overline{\gamma C}} \cdot \frac{\overline{\gamma C}}{\overline{\alpha A}} \cdot \frac{\overline{\alpha A}}{\overline{\beta B}} = +1$$

elde olunmakla dava sabit olur.

Mukabil dava *(Ménélaüs davası)* — **Bir ABC müsellesinin BC, CA, AB dılıları üzerinde**

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$$



Şekil: 2

münasebetine tevafuk edecek veçhile A',B',C' gibi üç nokta alınırsa bu üç nokta bir müstekim istikametinde kâindir.

Filhakika, A'B' müstekiminin AB yi kat'ettiği noktayı C'' ile gösterelim (şekil: 2). Esas dava mucibince

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = +1 \qquad (1)$$

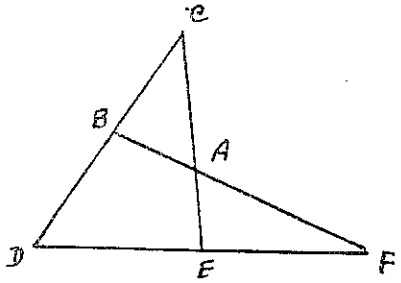
yazılabilip bu münasebetin (1) münasebetile mukayesesinden de

$$\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

elde olunur. Binaenaleyh C'' noktası C' noktasile intibak eylemekle matlup sabit olur.

2. Bu mukabil dava üç noktanın bir müstekim istikametinde bulunduğunu ispata yarar.

Misal I — Bir tam münharifin üç kutrunun muntasıf noktaları bir müstekim istikametinde kâindir.



Şekil: 3

Lâalettayin üçü mütelâki ve ikisi muvazi olmıyan dört müstekimin teşkil ettiği şekle **tam münharif** adı verilir (şekil: 3). Mezkûr müstekimlere tam münharifin **dılıları** denildiği gibi bu müstekimlerin ikişer, ikişer tekatu noktalarına da **reisleri** denir. Bir reisten iki dılı geçer.

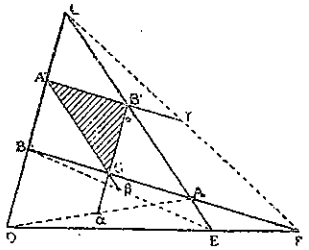
Diğer iki dılı ikinci bir reiste tekatu eder ki bu iki re'se **mukabil reisler** veya **karşılıklı reisler** tesmiye olunur.

Karşılıklı iki reisten geçen müstekime de **kutur** adı verilir.

Tam münharifin dört dıl'ı, altı re'si, üç kutru vardır.

Bu izahat anlaşıldıktan sonra bir tam münharifin AD,BE,CF kuturlarının muntasıf noktaları α,β,γ olsun (şekil: 4).

Mezkûr münharifin üç dıl'ı tarafından teşkil edilen ABC müsellesini nazarı itibara alalım. Kolayca görüleceği veçhile bu müsellesın dılılarının A', B', C' muntasıf noktaları arasını ikişer, ikişer vasleden müstekimler α,β,γ noktalarından geçer. Şuhalde α,β,γ noktaları nazir nazire A'B'C' müsellesinin B'C',C'A',A'B' dılıları üzerinde kâin olduğundan mezkûr noktaların bir müstekim istikametinde bulunduklarını ispat için yukarıda zikredilen mukabil dava mucibince,



Şekil: 4

$$\frac{\overline{\alpha B'}}{\overline{\alpha C'}} \cdot \frac{\overline{\beta C'}}{\overline{\beta A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma A'}}{\overline{\gamma B'}} = +1$$

olduğunu veya

$$\frac{\overline{\alpha B'}}{\overline{\alpha C'}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}, \quad \frac{\overline{\beta C'}}{\overline{\beta A'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}, \quad \frac{\overline{\gamma A'}}{\overline{\gamma B'}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$$

müsavatlarını nazarı itibara alarak

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} = +1$$

veya

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = +1 \qquad (2)$$

olduğunu ispat etmek kifayet eder.

Halbuki ABC müsellesinin dılıları üzerinde alınan D,E,F noktaları bir müstekim istikametinde bulunduğundan yukarıda zikredilen esas dava mucibince, (2) müsavatı doğru olmakla dava sabit olur.

3. Misal II — Paskal davası — Bir daire dahiline mersum her müseddeste karşılıklı dılıların telâki noktaları bir müstekim istikametinde kâindir.

Daire dahiline mersum her hangi bir müseddesin reisleri A,

B, C, D, E, F; dılıları 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve karşılıklı dılıların telâki noktaları da U, V, W olsun (şekli: 5). 1, 3, 5 veya PQR müsellesini nazarı itibara alalım ve bu müsellesi 2, 4, 6 katılarile katedelim:

Esas dava mucibince,

$$\frac{\overline{WP}}{\overline{WQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} = 1$$

$$\frac{\overline{UQ}}{\overline{UR}} \cdot \frac{\overline{DR}}{\overline{DP}} \cdot \frac{\overline{EP}}{\overline{EQ}} = 1$$

$$\frac{\overline{VR}}{\overline{VP}} \cdot \frac{\overline{FP}}{\overline{FQ}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = 1$$

yazılabilir.

Bu üç müsavat taraf tarafa zarp ve

$$\overline{BQ} \cdot \overline{AQ} = \overline{FQ} \cdot \overline{EQ}$$

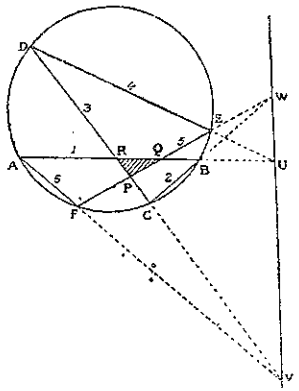
$$\overline{CR} \cdot \overline{DR} = \overline{BR} \cdot \overline{AR}$$

$$\overline{EP} \cdot \overline{FP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$$

olduğuna dikkat edilerek

$$\frac{\overline{WP}}{\overline{WQ}} \cdot \frac{\overline{UQ}}{\overline{UR}} \cdot \frac{\overline{VR}}{\overline{VP}} = 1$$

elde olunur. Bu sonuncu müsavata nazaran PQR müsellesinin dılıları üzerinde bulunan w, U, V noktaları bir müstekim istikametinde kâin olmakla dava sabit olur.



Şekil: 5

Hususî haller. 1° Karşılıklı iki dılı ve meselâ 1 ve 4 dılıları gayrimahdut surette sıfıra yaklaştığı yani A,B ve D,E noktaları yekdiğerile muntabık olduğu takdirde dahi yukarıki ispat doğrudur. Bu halde 1 ve 4 dılıları daireye mümas olduklarından aşağıdaki dava elde olunur:

Daire dahiline mersum bir münharifte karşılıklı dılıların tekatu noktaları ve karşılıklı reislerdeki mümasların tekatu noktaları bir müstekim istikametinde kâin dört noktadan ibarettir.

2° Eğer 1,3,5 dılıları gayrimahdut surette sıfıra yaklaşırlarsa yukarıki ispat yine doğrudur. Bu takdirde PQR müsellesinin dılıları daireye mümas olduklarından aşağıdaki dava elde olunur:

Bir müsellesin reislerinden haricine mersum daireye resmolunan mümaslar müsellesin mukabil dılılarını bir müstekim istikametinde kâin üç noktada kat'ederler.

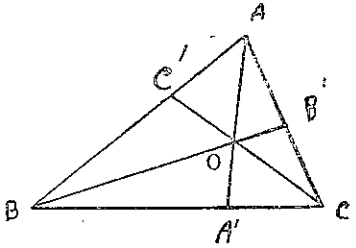
4. Dava — Bir ABC müsellesinin A,B,C reislerini müsellesin müstevisi dahilinde kâin bir O noktasına vasleden müstekimler müsellesin BC,CA,AB dılılarını A′,B′,C′ noktalarında kat'ettiğine nazaran

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

dir (şekil: 6).

Filhakika, BOB′ katı tarafından kat'olunan AA′C müsellesinden

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 1$$



Şekil: 6

elde olunduğu gibi CC′ katı tarafından kat'edilen AA′B müsellesinden de

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 1$$

elde olunur. Bu iki müsavat taraf tarafa taksim ve $\overline{CB} = -\overline{BC}$ olduğuna dikkat olunarak

$$-\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

veya

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$$

olduğundan

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

elde olunmakla dava sabit olur.

Mukabil dava *(Céva davası)*— **Bir** ABC **müsellesinin** BC, CA, AB **dılıları üzerinde**

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

müsavatına tevafuk edecek veçhile A', B', C' **noktaları alınırsa** AA', BB', CC' **müstekimleri ayni bir noktada telâki ederler.**

Filhakika, AA', BB' müstekimlerinin telâki noktası O olsun. CO müstekimi AB dıl'ını bir C'' noktasında kat'eder. Binaenaleyh esas dava mucibince,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -1$$

yazılabilir. Bu müsavat farzımızdaki müsavat ile mukayese edilerek

$$\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

elde olunur. Binaenaleyh C', C'' noktaları yekdiğerile intibak etmekle matlup sabit olur.

5. Bu dava üç müstekimin ayni bir noktada telâki eylediklerini ispata yarar.

Misal I. Bir müsellesin vasıtları ayni bir noktada telâki eder.

Filhakika, bir ABC müsellesinin vasıtları AA',BB''CC' olsun. A',B',C' noktaları nazir nazire BC,CA,AB dılılarının muntasıf noktaları olduklarından

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}, \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

nispetleri (—1) e müsavidir. Binaenaleyh

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

olup matlup sabit olur.

Misal II. Bir müsellesin dahilî nasıfları ayni bir noktada telâki eder.

Filhakika, bir ABC müsellesinin dahilî nasıfları AA', BB', CC' olsun. BC, CA, AB dılıları nazir nazire a, b, c ile gösterilirse

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{c}{b}, \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{a}{c}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{b}{a}$$

elde olunur. Bu üç müsavat taraf tarafa zarbolunarak

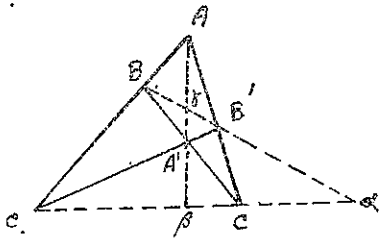
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

olmakla matlûp sabit olur.

6. Madde 1 ve 4 te ispat edilen iki davanın tatbikatından olmak üzere aşağıdaki davayı da söylüyoruz.

Dava. Bir tam münharifin her kutru diğer iki kutru tarafından müellefen taksim olunur.

Filhakika, kuturları AA', BB', CC' olan ABA'B'CC' tam münharifini nazarı itibara alalım (şekil: 7).



Şekil: 7

AA', BB' kuturlarının CC' kutrunu kat'ettiği noktalar β, α olsun. Madde 1 deki esas dava mucibince BB' katı tarafından kat'olunan ACC' müsellesinden

$$\frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha C'}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA}} = 1$$

elde olunduğu gibi ayni müselleste reisleri A' noktasına vasleden müstekimlere madde 4 teki esas dava tatbik olunarak

$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta C'}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA}} = -1$$

elde olunur. Bu iki müsavatın mukayesesinden derhal

$$\frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha C'}} = -\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta c'}}$$

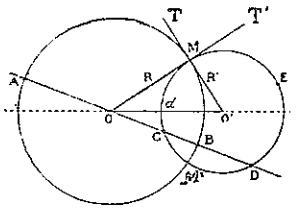
elde olunur ki bu da (α β c c') fırkasının müellef olduğunu ispat eder. AA', BB' kuturlarının telâki noktası γ ile gösterilerek (βγAA'), (γαBB') fırkalarının da müellef oldukları ayni veçhile ispat olunur.

İKİNCİ FASIL

§ 1.— Yekdiğerini kaimen kat'eden daireler

7. Tarif— Müşterek noktalarından birindeki mümasları yekdiğerine amut olan iki daireye **mezkûr noktada yekdiğerini kaimen kat'ediyor** denir.

Meselâ O, O′ dairelerini alalım; bu dairelerin müşterek M noktalarındaki mümasları MT, MT′ olsun (şekil: 7 mükerrer). Eğer bu mümaslar yekdiğerine amut ise MT′ müması OM nısıf kuturile ve MT müması da O′M nısıf kuturile intibak eder. OMO′ müsellesi M noktasında kaim zaviyeli olduğundan merkezler arasındaki mesafe d ile ve daire lerin nısıf kuturları R, R′ ile gösterildiğine göre



Şekil: 7 mükerrer.

$$d^2 = R^2 + R'^2 \qquad (1)$$

yazılabilir.

Bilmukabele OMO′ müsellesi M noktasında kaim zaviyeli ise yani (1) münasebeti mevcut ise MT müması O′M yani (R′) ve MT′ müması da OM yani (R) ile intibak eyler. Binaenaleyh MT, MT′ mümasları yekdiğerine amut olup daireler yekdiğerini M noktasında kaimen kat'eder.

Mezkûr dairelerin ikinci M′ tekatu noktaları nazarı itibara alınırsa bu noktadaki mümaslar M noktasındaki mümasların OO′ müstekimine nazaran mütenazırlarından ibarettir. bundan istintaç olunur ki iki daire yekdiğerini tekatu noktalarının birinde kaimen kat'ederse diğerinde dahi kaimen kat'eder. Bunun içindir ki mezkûr dairelere sadece **yekdiğerini kaimen kat'eden daireler denir.**

Yukarıki izahattan anlaşılacağı veçhile **iki dairenin yekdiğerini kaimen kat'etmesi için lâzım ve kâfi olan şart**

$$d^2 = R^2 + R'^2$$

münasebetinin mevcut olmasından ibarettir.

8. O, O′ gibi iki dairenin yekdiğerini kaimen kat'etmesi

için bu dairelerden birinin mekrezinin ve meselâ O merkezinin diğer daireye nazaran kuvvetinin O dairesinin nısıf kutrunun murabbaına müsavi olması lâzım ve kâfidir.

1°. Bu şart lâzımdır— Filhakika, mezkûr daireler M noktasında yekdiğerini kaimen kat'ediyorsa OM nısıf kutru M noktasında O′ dairesine mümastır. Binaenaleyh O noktasının O′ dairesine nazaran kuvveti OM^2 veya R^2 na müsavidir.

2°. Mezkûr şart kâfidir— Filhakika, O merkezinin O′ dairesine nazaran kuvvetinin R^2 na müsavi olduğunu farzedelim. O noktasından O′ dairesine bir OM mümasını resmedelim. Buhalde O noktasının O′ dairesine nazaran kuvveti $\overline{OM}^2$ na müsavi olup $\overline{OM}^2 = R^2$ veya $OM = R$ elde olunur. Binaenaleyh M noktası her iki daireye ait ve OMO′ müsellesi de M noktasında kaim zaviyelidir.

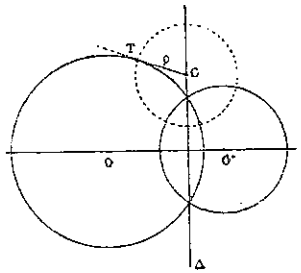
Netice I— İki dairenin yekdiğerini kaimen kat'etmesi için bu dairelerden birinin bir kutrunun diğer daire tarafından müellefen taksim edilmesi lâzım ve kâfidir.

Filhakika, bundan evvelki şart

$$\overline{OA}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OD}$$

müsavatile ifade olunabilir (şekil: 7 mükerrer). Bu müsavat gösteriyor ki A, B, C, D noktaları bir müellef dırka teşkil etmektedir.

Netice II— Sabit bir daireyi kaimen kat'eden ve sabit bir C noktasından geçen bütün daireler sabit ikinci bir D noktasından geçerler (C noktasının bu noktadan geçen AB kutruna nazaran müzdevici).



Şekil: 8

Netice III— Umumî surette C, E **gibi sabit iki noktadan geçen ve verilen bir daireyi kaimen kat'eden ancak bir daire mevcuttur.** (CDE dairesi) (şekil: 7 mükerrer).

9. Dava— Verilen iki daireyi kaimen kat'eden dairelerin merkezlerinin hendesî mahalli mezkûr iki dairenin cezrî mihverinin bu dairelerin haricinde bulunan parçasından ibarettir.

Filhakika, C noktası verilen iki (O), (O′) dairelerini kaimen kat'eden bir dairenin merkezi ise (şekil: 8) bu noktanın mezkûr dairelerden herbirine nazaran kuvveti ayni ve bu sonuncu dairenin

p nısıf kutrunun p^2 murabbaına müsavidir. Binaenaleyh mezkûr nokta verilen dairelerin cezrî mihverî üzerinde kâindir. Bilmukabele C noktası verilen dairelerin cezrî mihverinin dairelerin haricinde bulunan parçası üzerinde kâin bir nokta ise mezkûr nokta (O), (O′) dairelerine nazaran p^2 ile gösterilebilen ayni **müspet bir kuvvete** malikolup merkezi C ve nısıf kutru p olan daire (O), (O′) dairelerini kaimen kateder.

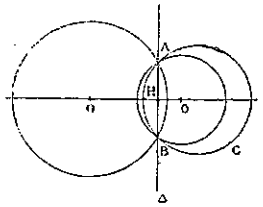
Temrin — Verilen üç daireyi kaimen kateden bir daire tersim etmek matluptur. Mesele her vakit mümkün müdür.?

§ 2. Daire huzmeleri

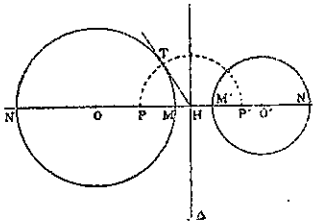
10. İkişer, ikişer ayni cezrî mihvere malik olan dairelerin heyeti umumiyesine **daire huzmesi** tesmiye olunur.

Bir humzeye ait iki daire (O), (O′) olsun. Üç hal mümkündür:

1°. (O), (O′) **daireleri mütekatıdır** (şekil: 9). Buhalde Δ cezrî mihverî bu dairelerin A,B müşterek noktalarından geçer.



Şekil: 9



Şekil: 10

A, B noktaları huzmeyi teşkil eden dairelerin kâffesine nazaran ayni sıfır kuvvetini haiz olacağından mezkûr dairelerin kâffesinin A, B noktalarından geçmesi lâzımgelir. Bu A, B noktalarına huzmenin **kaide noktaları** adı verilir.

3° (O), (O′) **daireleri mütekatı değildir** (şekil: 10) — Mezkûr dairelerin Δ cezrî mihverinin merkezler hattı üzerindeki H amut mevkii huzmeyi teşkil eden dairelerin kâffesine nazaran ayni kuvvete malik olduğundan

$$\overline{HM}.\overline{HN}=\overline{HM'}.\overline{HN'}=\overline{HM''}.\overline{HN''}=\cdots$$

elde olunur. H noktası MN, M′N′, M″N″,... kutrlarının kâffesinin haricinde kâin olduğundan

$$\overline{HP}^2=\overline{HP'}^2=\overline{HM}.\overline{HN}$$

müsavatına tevafuk eden P, P′ gibi iki nokta bulmak mümkündür. Bir dairenin huzmeye ait bir daire olabilmesi için MN veya M′N′ veya M″N″... kutrunun nihayet noktalarının PP′ kıt'asını müellefen taksim etmesi lâzım ve kâfidir. Bu noktalara **gaye noktaları** veya **poncelet noktaları** tesmiye olunur. Bu nokta-

ları tersim için H noktasından huzmeye ait dairelerden birine HT müması resmedilerek H noktasının iki tarafında bu mümasın tulüne müsavi HP, HP′ tulleri alınır. Mezkûr P,P′ noktaları huzmenin noktaya müncer olmuş dairelerinden ibarettir.

3°. (O), (O′) **dairelerî yekdiğerine mümastır.** Bu takdirde huzmeye ait tekmil daireler (o), (o′) dairelerine temas noktalarında mümas olan dairelerden ibarettir.

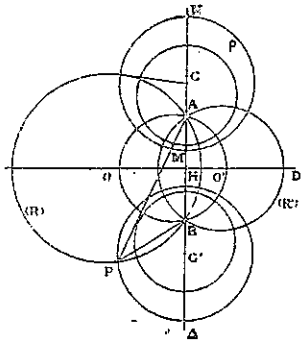
İhtar — Eğer bir huzmenin kaide noktaları mevcut ise gaye noktaları mevcut olmadığı gibi bunun mukabili de doğrudur.

Müzdeviç daire huzmeleri.

11. Dava — Bir daire verilen iki daireyi kaimen kat'ederse bu iki daire ile muayyen olan huzmeye ait dairelerin kâffesini dahi kaimen kat'eder.

Filhakika, verilen iki daire (O), (O′) ve bu d aireleri kaimen kat'eden bir (C) dairesinin merkezi de C olsun (şekil: 8). Bu C noktasının (o), (o′) dairelerine nazaran kuvveti ayni ve (C) dairesinin P nısıf kutrunun P^2 ndan ibarettir. Şuhalde mezkûr nokta verilen iki dairenin cezrî mihverî üzerinde kâin ve huzmeye ait dairelerin kâffesine nazaran kuvveti P^2 dır. Binaenaleyh (C) dairesi huzmeye ait bütün daireleri kaimen kat'eder.

12. Dava — Bir huzmeye ait daireleri kaimen kat'eden daireler diğer bir huzme teşkil ederler. Malûm olduğu veçhile (O) ve (O′) gibi iki daireyi (ve binaenaleyh bu dairelerle muayyen olan huzmeye ait tekmil daireleri [madde 11]) kaimen kat'eden (C) dairelerinin merkezlerinin hendesî mahalli mezkûr huzmenin cezrî mihverinden ibarettir. Şimdi ispat edeceğiz ki (C) daireleri bir huzme teşkil ederler. Filhakika, O noktasının (C) dairelerinden herbirine nazaran kuvveti ayni ve R^2 ndan ibaret olduğu gibi O′ noktasının (C) dairelerinden herbirine nazaran kuvveti de ayni ve R'^2 ndan ibarettir. Binaenaleyh OO′ müstekimi mezkûr (C) dairelerinin kâffesinin müşterek cezrî mihveridir.



Şekil: 11

Bu iki huzmeye **müzdeviç huzmeler** denir; bunlardan birine ait her daire diğerine ait tekmil daireleri kaimen kat'eder.

İhtar — Eğer birinci (O,O′) huzmesi mütekatı dairelerden mürekkep ise ikinci kuzme mütekatı olmıyan dairelerden mürekkeptir. Zira H noktasının (C) dairesine nazaran kuvveti müspet olan (8 netice 1) $\overline{HM}.\overline{HN}=\overline{HA}^2$ miktarından ibarettir (şekil: 11). Eğer ikinci (C,C′) huzmesi mütekatı olmıyan dairelerden mürekkep bir kuzme ise birinci huzme mütekatı dairelerden mürekkeptir. Zira, bu dairelerin, bilhassa ikinci huzmeye ait ve A, B gaye noktalarından ibaret olan daireleri kaimen kat'etmeleri yani bu noktalardan geçmeleri iktiza eder.

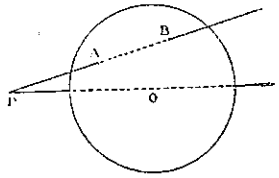
Mezkûr iki huzmeden birinin gaye noktaları diğerinin kaide noktalarından ibarettir.

ÜÇÜNCÜ FASIL

Bir noktanın bir küreye nazaran kuvveti

Müstevi hendesede bir noktanın bir daireye nazaran kuvvetini tarif ve buna ait davaları ispat etmiştik. Şimdi de bu mefhumu bir küreye teşmil edeceğiz:

13. Dava — Bir P noktasından bir küreyi A ve B noktalarında kat'etmek üzere bir katı resmolunursa $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ hasılı zarbının kıymeti sabit yani katın vaziyetine gayritâbidir (şekil: 12).

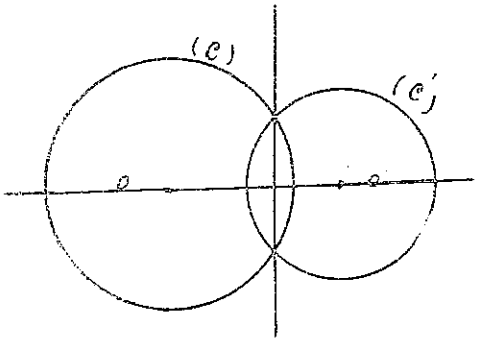


Şekil: 12

Filhakika, bu hasılızarp, P noktasının kürenin AOB müstevisile maktaı olan büyük daireye nazaran kuvvetinden ibarettir.

Binaenaleyh mezkûr hasılızarbın kıymeti (O=Pd vazolunarak) d^2-R^2 dır (müstevi hendese, 259). Bu kıymet ise hakikaten katın vaziyetine tâbi değildir. Bu hasılızarbın sabit kıymetine P noktasının küreye nazaran kuvveti tesmiye olunur.

14. Dava — İki küreye nazaran ayni kuvveti haiz olan noktaların hendesî mahalli, merkezler hattına amut bir müstevidir.



Şekil: 12 mükerrer.

Bu müsteviye müzkûr iki kürenin **cezrî müstevisi** tesmiye olunur. Filhakika, mezkûr iki küreyi merkezler hattından geçen lâalettayin bir P müstevisi ile kat'edelim.

Bu müstevi küreleri (C) ve (C') gibi iki büyük daireye göre kat'eder (şekil: 12 mükerrer.)

Matlup hendesî mahallin P müstevisi dahilindeki kısmı, (C) ve (C') dairelerinin cezrî mihverinden başka birşey değildir. P müstevisi merkezler hattı etrafında devrettirilecek olursa mezkûr cezrî mihver merkezler hattına amut bir müstevi tevlit eyler ki işte bu müstevi matlup hendesî mahalden ibarettir.

İhtar — Eğer verilen iki küre yekdiğerini kat'ediyorsa cezrî müstevi, mezkûr kürelerin faslı müşterek dairesinin müstevisinden ibarettir. Eğer verilen küreler yekdiğerine mümas ise cezrî müstevi, temas noktasındaki mümas müsteviden ibarettir.

15. Dava — Merkezleri ayni bir müstekim istikametinde bulunmıyan üç küre verildiğine göre ikişer ikişer alınan bu üç kürenin cezrî müstevileri merkezler müstevisine amut ayni bir müstekime göre tekatu ederler. Bu müstekim üç küreye nazaran ayni kuvvete malik olan noktaların hendesî mahallidir.

Mezkûr müstekime verilen üç kürenin **cezrî mihveri** tesmiye olunur. Verilen üç kürenin merkezleri O,O',O'' olsun. Bu noktalar bir müstekim istikametinde bulunmadıklarından (O) ve (O'), (O) ve (O'') kürelerinin cezrî müstevileri bir D müstekimine göre tekatu ederler. Bu müstekimin her noktası (O) ve (O'), (O) ve (O'') kürelerine nazaran ayni kuvveti haiz olduğundan (O') ve)O'') kürelerine nazaran da ayni kuvveti haizdir. Binaenaleyh D mütekimi (O') ve (O'') kürelerinin cezrî müstevisi dahilinde dahi bulunup dava sabit olur.

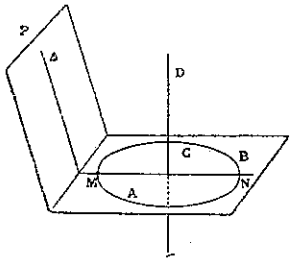
Mezkûr D müstekiminin merkezler müstevisine amut olduğu kolayca görülebilir.

16. Dava. Merkezleri ayni bir müstevi dahilinde kâin olmıyan dört küre verildiğine göre ikişer, ikişer alınan bu dört kürenin altı cezrî müstevisi (veya üçer üçer alınan bu dört kürenin dört cezrî mihveri) ayni bir noktadan geçer.

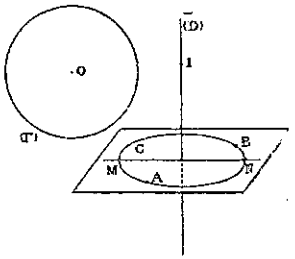
Bu noktaya mezkûr dört kürenin **cezrî merkezi** tesmiye olunur. Verilen dört kürenin merkezleri O, O', O'', O''' olsun. Bu dört nokta ayni müstevi dahilinde bulunmadıklarından (O) ile (O'), (O) ile (O''), (O) ile (O''') kürelerinin cezrî müstevileri bir 1 noktasında tekatu ederler. Bu nokta verilen dört (O), (O'), (O''), (O''') küresine nazaran ayni kuvveti haiz olduğundan diğer cezri müsteviler üzerinde dahi bulunup dava sabit olur.

17. Mes'ele I. A, B, C gibi verilen üç noktadan geçen ve verilen bir p müstevisine mümas olan bir küre tersim etmek matluptur (şekil: 13).

ABC dairesinin mihveri D ve bu mihverin P müstevisi üzerindeki mürtesemi de Δ olsun. Matlûp kürenin merkezi D mihveri üzerinde bulunduğu gibi P müstevisinin temas noktası da Δ üzerinde kâindir. Bundan maada mes'elede bir tenazur müstevisi olan D Δ müstevisi küreyi bir büyük daireye göre kat'eyler ki bu dairenin bir taraftan Δ müstekimine mümas olması ve diğer taraftan D Δ müstevisinin ABC dairesini kat'ettiği M,N noktalarından geçmesi lâzımgelir. Bu suretle mes'ele müstevi hendesede halledilmiş olan iki noktadan geçen ve bir müstekime mümas olan bir dairenin tersimi mes'elesine müncer olur.



Şekil: 13



Şekil: 14

Mes'ele II. A,B,C gibi verilen üç noktadan geçen ve verilen bir (O) küresine mümas olan bir kürenin tersimi matlûptur (şekil 14).

ABC dairesinin mihveri D olsun. Matlup kürenin I merkezi D üzerinde kaimdir. Diğer taraftan OI merkezler hattı üzerinde bulunacağından bu sonuncu noktanın (O) küresinin OD müstevisi ile (mes'elede tanazur müstevisi) faslı müştereki olan büyük (Γ) dairesi üzerinde bulunması lâzım gelir. OD müstevisi matlup küreyi bir büyük daireye göre kat'eyler ki bu dairenin bir taraftan büyük (Γ) dairesine mümas olması ve diğer taraftan OD müstevisinin ABC dairesini kat'ettiği M,N noktalarından geçmesi iktiza eder. Bu suretle mes'ele iki noktadan geçen ve bir daireye mümas olan bir dairenin tersimi mes'elesine müncer olur.

Sekizinci Kitap

Tahviller

Bir F şeklini tahvil etmek demek muayyen tersimat ianesile mezkûr şekilden diğer bir F′ şeklini istintaç etmek demektir.

Müstevi ve mücessem hendesede intikal, deveran, tenazur, mümaselet gibi bazı tahvilleri görmüştük. Şimdi de diğer bazı tahvilleri tetkik ve mütalea edeceğiz,

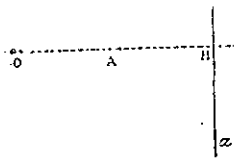
BİRİNCİ FASIL

Kutup ve kutbiyeler

§ 1. Müstevi dahilinde tahvil

18. Tarif — Bir O noktasile bir R müstekim kıt'asının verildiğini farzedelim. Müstevinin lâalettayin bir noktası A olsun (şekil: 15).

OA müstekimi üzerinde $\overline{OA}.\overline{OH}=R^2$... (1) müsavatına tevafuk edecek veçhile bir H noktasını tayin ve bu noktadan OA müstekimine amut a müstekimini resmedelim. Tamamen muayyen olan bu a müstekimine A noktasının, O merkezine ve R kuvvetine nazaran, **mütehavvilesi** denir. a müstekimine A noktasının O merkezine ve mısif kutru R olan **müveccih daireye** nazaran **kutbiyesi** dahi denildiği gibi A noktasına da a müstekiminin **kutpu** denir (şekil: 16).

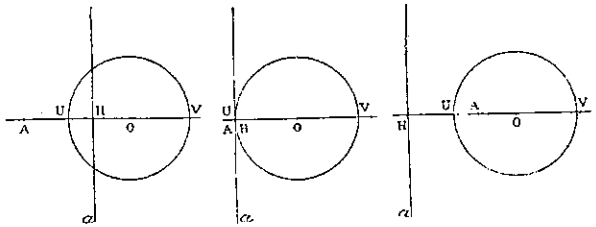


Şekil: 15

(1) Müsavatından kolayca istintaç olunacağı veçhile eğer A noktası müveccih dairenin haricinde kâin ise H noktası dahilinde ve A noktası müveccih dairenin dahilinde kâin ise H noktası haricinde kâindir. A noktası müveccih daire üzerinde kâin ise

H noktası A ile muntabık olup a müstekimi mezkûr dâireye bu noktada mümas olur (şekil: 16).

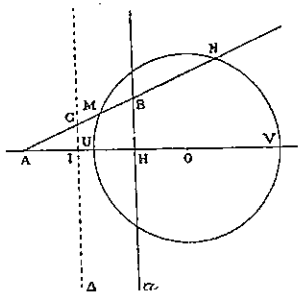
Eğer A noktası verilen bir Δ istikametinde gayrimahdut surette



Şekil: 16

uzaklaşırsa H noktası gayrimahdut surette O merkezine ve a müstekimi de Δ istikametine amut olan kutra yaklaşır. Eğer A noktası verilen bir Δ istikametinde gayrimahdut surette O merkezine yaklaşırsa a müstekimi de Δ ya amut bir istikamette gayrimahdut surette uzaklaşır.

19. Dava — A noktasından resmolunan bir katı müveccih dâireyi M,N ve A nın a kutbiyesini bir B noktasında kat'ederse A ve B noktaları M,N noktalarına nazaran müellef müzdeviç noktalardan ibarettir (şekil: 17).



Şekil: 17

Evvelâ katın O merkezinden geçtiğini ve müveccih dâireyi U ve V noktalarında kat'ettiğini farzedelim.

$$\overline{OA}\,.\,\overline{OH} = \overline{OU}^2 = \overline{OV}^2$$

olduğundan A ve H noktaları U, V noktalarına nazaran müellef müzdeviç noktalardır. Şimdi katın O merkezinden geçmediğini farzedelim. OA müstekimine AH ın I muntasıf noktasında amut olan müstekim Δ ve bu müstekimin AMN katını kat'ettiği nokta da C olsun. A, H, U, V noktaları müellef bir fırka teşkil ettiklerinden

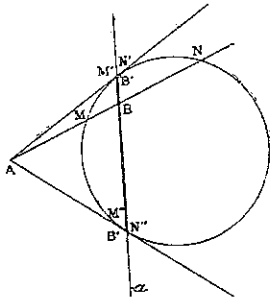
$$\overline{IA}^2 = \overline{IU}\,.\,\overline{IV}$$

yazılabilir. Binaenaleyh I noktası A noktasile verilen (O) dâiresine nazaran ayni kuvveti haiz olduğundan Δ müstekimi A noktasile (O) dâiresinin cezrî mihverinden ibarettir. Şuhalde $\overline{CA}^2 = \overline{CM}\cdot\overline{CN}$

elde olunur. Diğer taraftan C noktası AB kıt'asının muntasıf noktası olduğundan A ve B noktaları M,N noktalarına nazaran hakikaten müellef müzdeviç noktalardan ibaret olup dava sabit olur. Bu muhakeme ve istidlâl tarzı, A noktası müveccih dâirenin gerek hariç ve gerek dahilinde bulunsun, doğrudur.

Lâzime — Eğer A dan resmolunan bir müstekim müveccih dâireyi M ve N noktalarında kat'ederse A noktasının M ve N noktalarına nazaran B müzdevicinin hendesî mahalli, A noktasının kutbiyesinden ibarettir (kısmen veya kâmilen).

Yukarıki davada ispat olunduğu veçhile B noktası A noktasının kutbiyesi üzerinde kâin ise mezkûr nokta A noktasının M,N noktalarına nazaran müzdevicidir(şekil: 17). Bilmukabele, A noktasının M, N noktalarına nazaran müzdevici tek bir nokta olduğundan bu, ancak B noktasından ibarettir.



Şekil: 18

A noktası müveccih dâirenin dahilinde kâin ise A dan resmolunan müstekim mezkûr dâireyi kat'ettiğinden A noktasının kutbiyesi kâmilen kendesî mahalli teşkil eder.

A noktası müveccih dâire üzerinde kâin ise hendesî mahal yine kâmilen kutbiyeden ibarettir. Zira AMN katı A noktasındaki mümasla intibak eylediğinde A noktasının B müzdevici gayri muayyen olur. Eğer A noktası müveccih dâirenin haricinde kâin ise (şekil: 18):

1°. Kutbiye A dan resmolunan mümasların temas noktalarından geçer.

2°. A nın müellef müzdeviçlerinin hendesî mahalli, A dan resmolunan mümasların temas noktaları arasına vasledilen veterden ibarettir.

20. Dava — Bir dâire ile bir A noktası verildiğini farz ve bu noktadan AMN, AM'N' gibi lâalettayin iki katı resmedelim. MN', NM' müstekimlerinin tekatu noktası E ve MM', NN' müstekimlerinin tekatu noktası da F ile gösterilirse EF müstekimi A noktasının verilen dâireye nazaran kutbiyesinden ibarettir (şekil: 19).

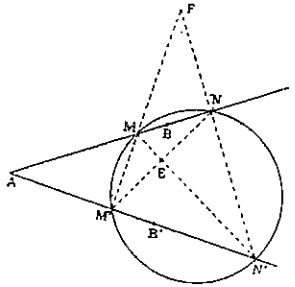
Filhakika, A noktasının MN kıt'asına nazaran müzdevici B ve M'N' kıt'asına nazaran müzdevici de B' olsun.

ABMN müellef fırkası E noktasından AM'N' müstekimi üzerine

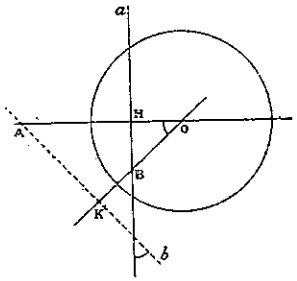
irtisam ettirilerek görülür ki B, E, B′ noktaları bir müstekim istikametindedir. Keza ayni fırka F noktasından irtisam ettirilerek görülür ki F, B, B′ noktaları da ayni bir müstekim istikametindedir. İki noktası müşterek olduğu için bu iki müstekim ayni bir müstekimden ibarettir. Ve bu müstekim B, B′ noktalarından geçtiği için A noktasının kutbiyesidir. Bu dava ianesile bir noktanın bir daireye nazaran kutbiyesi yalnız cetvel vastasile tersim olunabilir.

21. Dada — Bir A noktasının *a* kutbiyesi bir B noktasından geçerse B noktasının *b* kutbiyesi de A noktasından geçer (şekil: 20).

Bir noktanın kutbiyesi ancak bir tane olduğundan davamızı ispat için A noktasından OB kutruna resmedilen AK amudunun B



Şekil: 19



Şekil: 20

noktasının kutbiyesinden ibaret olduğunu ispat etmek kifayet eder. Filhakika, H ve K noktalarındaki zaviyeler kaime olduğundan kutru AB olan daire H ve K noktalarından geçer; binaenaleyh

$$\overline{OA} \cdot \overline{OH} = \overline{OB} \cdot \overline{OK}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, farzımız mucibince, $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$ olduğundan $\overline{OB} \cdot \overline{OK} = R^2$ olup matlup sabit olur.

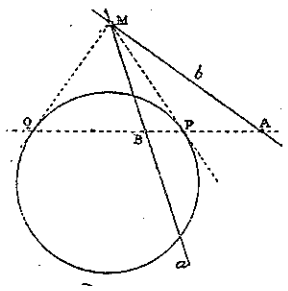
22. Müzdeviç noktalar — A ve B gibi iki noktadan birinin kutbiyesi diğerinden geçerse bu noktalara müveccih daireye nazaran **müzdeviç noktalar** tesmiye olunur. Bu noktalardan lâakal biri dairenin haricinde kâindir. Zira, müveccih dairenin dahilinde kâin bir noktanın kutbiyesi mezkûr dairenin kâmilen haricinde kâindir.

Eğer AB müstekimi müveccih daireyi P ve Q noktalarında kat'ederse A ve B noktaları P ve Q noktalarına nazaran müellef müzdeviç noktalardir (şekil: 21).

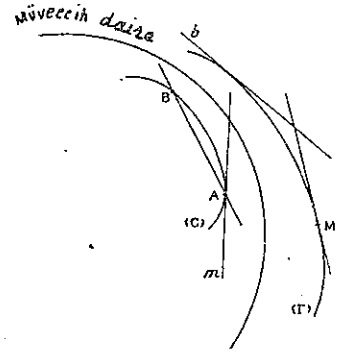
Temrin — A, B gibi iki noktanın bir (O) dairesine nazaran müzdeviç noktalardan ibaret ulabilmesi için kutrü AB olan dairenin (O) dairesini kaimen kat'etmesi lâzım ve kâfidir.

23. Müzdeviç müstekimler İki müstekimden birinin kutpu diğeri üzerinde kâin olursa bu müstekimlere **müzdeviç müstekimler** tesmiye olunur.

Bu müstekimlerden lâakal biri muveccih daireyi kat'eder, zira bir daireyi kat'etmiyen müstekimin kutpu mezkûr daire dahilinde kâindir.



Şekil: 21



Şekil: 22

Mezkûr müstekimlerin M tekatu noktaları daire haricinde kâin ise (şekil: 21) bu müstekimler M den daireye resmedilen mümaslarla müellef bir huzme teşkil ederler.

Mütekabil kutbî şekiller.

24. Merkezi O ve nısıf kutru R olan bir müveccih daire nazarı itibara alalım (şekil: 22).

Müstevi dahilinde kâin bir A noktasına, daireye nazaran kutbiyesinden ibaret olan *a* müstakimini tekabül ettirelim. Bu suretle müstevi dahilinde kâin noktalara birtakım müstekimler tekabül ettiren bir **tahvil** elde edilmiş olur. A noktası bir (C) münhanisini resmederse *a* kutbiyesinin zarfı bir (Γ) münhanisinden ibaret olur, yani *a* kutbiyesi de aleddevam bir (Γ) münhanisine mümas olur

ki bu münhani zikrettiğimiz tahvilde (C) münhanisine tekabül ettirilir.

(C) **münhanisinin A noktasındaki** m **mümasının kutpu,** a **kutbivesinin kendi zarfı olan** (Γ) **münhanisine mümas olduğu M noktasından ibarettir.** Filhakika, (C) münhanisinin A ya yakın bir noktası B ve bu noktanın kutbiyesi de b olsun (şekil: 22). B noktası gayrimahdut surette A noktasına yaklaştığında AB katı gayrimahdut surette m mümasına yaklaşır. Ayni zamanda b müstekimi de gazrimahdut surette a müstekimine ve bu iki müstekimin telâki noktası da a müstekiminin kendi zarfına mümas olduğu noktaya yaklaşır. Halbuki mezkûr telâki noktası AB müstekiminin kutpudur (§ 21). Binaenaleyh gaye de mezkûr nokta m mümasının kutpu olmakla matlup sabit olur.

Bu izahattan anlaşılacağı veçhile (C) münhanisinin bir **temas unsuruna** yani (C) münhanısinin bir noktasile bu noktadaki mümasına (Γ) münhanisinin bir temas unsuru ayni bir mümas ile temas noktası tekabül eder.

Ayni tarzda muhakeme edilerek görülür ki (Γ) münhanisinden itibaren yapılan ayni tahvil (C) münhanisini hâsıl eder. Binaenaleyh bu iki münhani arasında tekabül mevcuttur.

Bu izah ettiğimiz tarzda yekdiğerine tekabül eden iki şekle **mütekabil kutbî şekiller** denir.

25. Yukarıda zikrettiğimiz tahvili bilhassa A, B, C, ... gibi bir takım noktalarla $m, n, p, ...$ gibi birtakım müstekimlerden terekküp eden bir şekle tatbik edelim.

A, B, C, ... noktalarına bu noktaların kutbiyelerinden ibaret olan $a, b, c, ...$ müstekimleri ve $m, n, p, ...$ müstekimlerine de bu müstekimlerin kutuplarından ibaret olan M, N, P, ... noktaları tekabül eder. İki A. B noktası arasına vasledilen müstekime (hendesî mahal), a, b müstekimlerinin telâki noktası (zarf) tekabül eder. İki m, n müstekiminin telâki noktasına (zarf), M, N noktaları arasına vasledilen müstekim (hendesî mahal) tekabül eder.

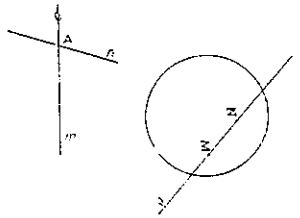
Misaller:

I. m,n müstekimleri ve A telâki noktası	M,N noktaları ve bu noktalar arasına vasledilen MN müstekimi (şekil: 23)
II. üç a, b, c müstekimi	üç A,B,C noktası (Şekil: 24)
III. üç A,B,C noktası ve üç AB, CB, CA müstekimi	üç a,b,c müstekimi ve ab, bc, ca telâki noktaları (Şekil: 24)

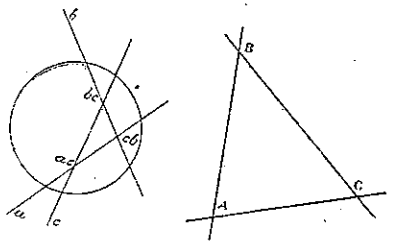
Bu tahvilin en mühim faidesi bir (F) şekline ait noktalar arasında mevcut bir hassadan (F) şeklinin mütekabil kutbîsi olan (F') şekline ait müstekimler arasındaki bir hassanın istintaç olunabilmesi ve bunun mukabilinin de doğru olmasıdır.

Bu suretle tekabül eden hassalara **mütev'em hassalar** denir. Bu tahvili mütalea için şekillerin hassaları iki kısma ayrılır:

1° Birtakım hassalarda, mesaha fikri ithal edilmeksizin, yalnız



Şekil: 23



Şekil: 24

nokta ve müstekimler nazarı itibara alınır. Bu hassalara **tersimî hassalar** adı verilir.

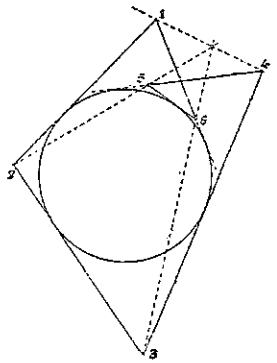
2° Zaviye, mesafe ve sahalar gibi mesaha edilebilen miktarlara taallûk eden hassalara da **mesahavî veya adedî hassalar** denir.

26. I. **Tersimî hassalar.** Bu hassaları tahvil için aşağıdaki tarzda Madde 21 deki dava kullanılır:

1° Birtakım müstekimler mütelâki ise bu müstekimlerin kutupları bir müstekim istikametindedir;

2° Birtakım noktalar bir müstekim istikametinde kâin ise bu noktaların kutbiyeleri mütelâkidir.

Misal. Madde 2 deki paskal davası müseddesin haricine mersum daireye nazaran mütekabil kutbiyeler vasıtasile tahvil olunursa aşağıdaki dava elde olunur:



Şekil: 25

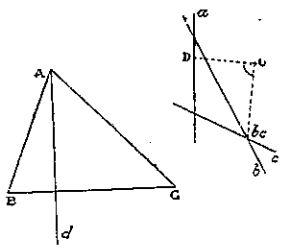
(Brianchon) Briyanşon davası — Bir daire haricine mersum lâalettayin bir müseddeste karşılıklı reisler arasına vasledilen üç müstekim mütelâkidir (şekil: 25).

II. **Adedî hassalar** — Bu hassalar iki nokta ile bu noktaların kutbiyelerinden mürekkep şeklin adedî hassalarından istifade olunarak tahvil olunur. Meselâ (Şekil: 20) de A,B noktalarile bu noktaların a,b kutbiyelerinden mürekkep olan şekil nazarı itibara alınırsa derhal görülür ki:

İki A,B noktalarını müveccih dairenin merkezine vasleden müstekimler arasındaki zaviye, bu iki noktanın a,b kutbiyeleri arasındaki zaviyeye müsavidir.

Şimdi bu hassadan istifade ederek bir müsellesin irtifalarının mütelâki olması hassasını mütekabil kutbiyeler vasıtasile tahvil edelim.

Verilen bir müsellesin reisleri A,B,C; A dan resmolunan irtifaı d; A,B,C noktalarının mütehavvil-leri yani kutbiyeleri a,b,c; nihayet müveccih dairenin merkezi de o olsun (şekil: 26). a irtifaının D kutpunu arayalım. Mezkûr kutup bir taraftan A noktasının a kutbiyesi üzerinde kâin olduğu gibi diğer taraftan da O (bc) müstekimine O noktasından resmolunan amut üzerinde kâindir (zira, DO (bc) ve (d,BC) zaviyeleri yekdiğerine müsavidir). Bu suretle aşağıdaki tev'em dava elde edilmiş olur:



Şekil: 26

Bir müselles ile bu müsellesin müstevisi dahilinde bir O noktası verildiğine nazaran bu noktayı müsellesin reislerine vasleyliyen müstekimlere birer amut resmolunursa bu amutlar müsellesin mütekabil dilliarını bir müstekim istikametinde bulunan üç noktada kat'ederler.

İhtar — Bu ve buna mümasil diğer ispatların kat'î olarak doğru olabilmesi için herhangi bir $a\ b\ c$ müsellesine diğer bir ABC müsellesinin mütehavvilesi nazarile bakılabileceğini nazarı dikkata almak icap eder.

27. Dava — Bir müstekim istikametinde bulunan dört nokta bir müellef fırka teşkil ederlerse bu noktaların kutbiyeleri müellef bir huzme teşkil ettiği gibi bunun mukabili de doğrudur.

Filhakika, bir müstekim istikametinde bulunan ve müellef bir fırka teşkil eden dört nokta A,B,C,D olsun. Bu noktaların kutbiyeleri ayni bir noktadan geçtikleri gibi müveccih dairenin merkezi O olduğuna göre, nazir nazire OA,OB, OC,OD müstekimlerine de amutturlar. Binaenaleyh mezkûr kutbiyelerin teşkil ettikleri huzme ile O.ABCD huzmesi yekdiğeri üzerine kabili tatbiktir. Halbuki bu sununcu huzme müellef bir huzme olduğundan kutbiyeler dahi müellef bir huzme teşkil edip dava sabit olur.

28. Dava — Eğer bir daire üzerinde alınan A,B,C,D gibi dört noktayı dairenin lâalettayin bir M noktasına vasleden müstekimler bir müellef huzme teşkil ederlerse A,B,C,D noktalarındaki mümaslar dairenin lâalettayin bir mümasını bir müellef fırka teşkil eden dört noktada kat'ederler.

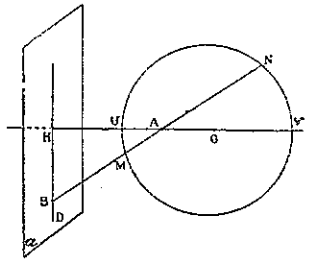
Filhakika daireye lâalettayin bir P noktasında mümas olan müstekim T ve A,B,C,D noktalarındaki mümasların bu müstekimi kat'ettiği noktalar da nazir nazire $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ olsun. Kolayca görüleceği veçhile M.ABCD ve P.ABCD huzmeleri yekdiğeri üzerine kabili tatbik ve binaenaleyh P.ABCD huzmesi müellef bir huzmedir. Diğer taraftan $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ noktaları nazirnazire P.ABCD huzmesini teşkil eden müstekimlerin kutuplarından ibarettir. Binaenaleyh bundan evvelki dava mucibince $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ noktaları bir müellef fırka teşkil edip dhva sabit olur.

§ 2.— Fezada tahvil

29. Tarif — Bir O noktasile bir R müstekim kıt'asının verildiğini farzedelim. Fezanın lâalettayin bir noktası A olsun (şekil: 27). OA müstekimi üzerinde

$$\overline{OA}.\overline{OH} = R^2 \qquad (1)$$

müsavatına tevafuk edecek veçhile H noktasını tayin ve bu noktadan OA müstekimine amut a müstevisini resmedelim. Tamamen muayyen olan bu a müstevisine A noktasının, O merkezine ve R^2 kuvvetine nazaran **mütehavvilesi** tesmiye olunur.



Şekil: 27

a müstevisine A noktasının O merkezine ve mısif kutru R olan müveccih küreye nazaran **kutbî müstevîsi** dahi denildiği gibi A noktasına da a müstevisinin **kutbu** denir (şekil: 27).

Eğer A noktası müveccih kürenin haricinde kâin ise H noktası dahilinde ve A noktası müveccih kürenin dahilinde kâin ise H noktası haricinde kâindir. A noktası müveccih küre üzerinde kâin ise H noktası A ile muntabık olup a müstevisi mezkûr küreye bu noktada mümas olur. Eğer A noktası verilen bir Δ istikametinde gayrimahdut surette uzaklaşırsa H noktası gayrimahdut surette O merkezine ve a müstevisi de Δ istikametine amut olan kutrî müsteviyeye yaklaşır. Eğer A noktası verilen bir Δ istikametinde gayri-

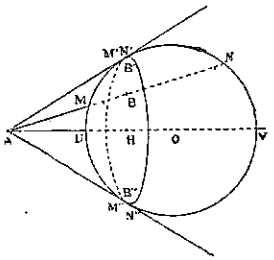
mahdut surette O merkezine yaklaşırsa a müstevisi de Δ ya amut bir π müstevisi istikametinde gayrimahdut surette uzaklaşır.

30. Dava — A noktasından resmolunan bir katı müveccih küreyi M,N ve A nın a kutbî müstevisini bir B noktasında kat'ederse A ve B noktaları M,N noktalarına nazaran müellef müzdeviç noktalardan ibarettir (şekil: 28).

Filhakika, şekli O M N kutrî müstevisile kat'edelim. Bu müstevi küreyi büyük bir daireye göre ve a müstevisini de A noktasının mezkûr daireye nazaran kutbiyesi olan D müstekimine göre kat'eder. Binaenaleyh madde 19 daki dava mucibince A ve B noktaları M,N noktalarına nazaran müellef müzdeviç noktalardan ibarettir.

Lâzime — A dan resmolunan bir müştekim müveccih küreyi M ve N noktalarında kat'ederse A noktasının M ve N noktalarına nazaran B müzdevicinin hendesî mahalli, A noktasının kutbî müstevisinden ibarettir (kısmen veya kâmilen). İspat madde 19 daki lâzimenin ispatının aynidir.

A noktası müveccih kürenin haricinde bulunduğu zaman hensesî mahal, A noktasından küreye resmolunan mümas mahrutun temas dairesinin dahilinde kâindir (şekil: 28).



Şekil: 28

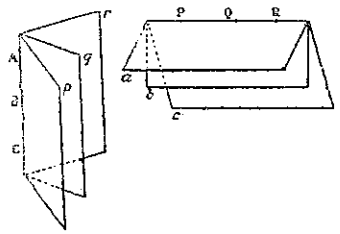
31. Dava — Bir A noktasının kutbî müstevisi bir B noktasından geçerse B noktasının kutbî müstevisi de A noktasından geçer.

Filhakika şekli OAB kutrî müstevisile kat'edelim. Bu müstevinin A ve B noktalarının kutbî müstevilerile faslı müşterekleri mezkûr nortaların makta büyük dairesine nazaran kutbiyelerinden başka birşey değildir. Halbuki madde 21 deki dava mucibince B noktasının kutbiyesi ve binnetice mezkûr noktanın kutbî müstevisi A noktasından geçmekle dava sabit olur.

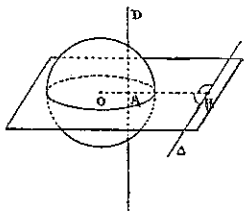
32. Müzdeviç noktalar — Müzdeviç müsteviler — A ve B gibi iki noktadan birinin kutbî müstevisi diğerinden geçerse mezkûr noktalara müveccih küreye nazaran, **Müzdeviç noktalar** denildiği gibi birinin kutbu diğeri üzerinde kâin olan iki müsteviye de, müveccih küreye nazaran **müzdeviç müsteviler** denir.

Müzdeviç müstekimler — A ve B gibi iki nokta ile muayyen olan bir müstekim ile (şekil: 29) bu müstekimden geçen iki p,q müstevisini nazarı itibara alalım. A,B noktalarının a,b kutbî müstevileri p,q müstevilerinin P,Q kutuplarindan geçer. Eğer müteharrik bir C noktası AB müstekimini resmederse bu noktanın C kutbî müstevisi PQ müstekimi etrafında devreyler. Ayni veçhile, bir R noktası PQ müstekimini resmederse bu noktanın r kutbî müstevisi AB müstekimi etrafında devreder. Bu iki AB ve (a,b) (veya PQ) müstekimine **müzdeviç müstekimler** denir.

Kolaylıkla görüleceği veçhile bir D müstekimi verildiğine göre (şekil: 30) bu müstekimin Δ müzdevici iki şartla muayyen olur ki o şartlar da D yi havi olan kutrî müsteviye amut olmak ve D müstekiminin, bu müstevî dahilinde kâin büyük daireye nazaran kutbundan geçmekten ibarettir. Bu keyfiyet diger bir tarzda ifade olunarak denilebilir ki:



Şekil: 29



Şekil: 30

Müzdeviç iki müstekim yekdiğerine kaimdir; Bu müstekimlerin müşterek amudü kürenin merkezinden geçer ve bu müşterek amudün AH amut mevkileri yekdiğerine $\overline{OA}\cdot\overline{OH}=R^2$ münasebetile merbuttur.

Bu münasebetten derhal istintaç olunabileceği veçhile **müzdeviç iki müstekimden biri kürenin haricinde kâin olup diğeri de küreyi kat'eder.**

Mezkûr iki müstekimden küreyi kat'edeni, diğerinden resmolunan mümas müstevilerin temas noktalarından geçer.

33. Metekabil kutbî şekiller — Nokta, müstevi ve müstekimlerden mürekkep bir F şeklini nazarı itibara alalım. Bu nokta, müstevi ve müstekimlerin verilen bir müveccih küreye nazaran kutbî müstevi, kutup ve müzdeviç müstekimlerinden terekküp eden F′ şekline F şeklinin **mütekabil kutbiyeler vasıtasile mütehavvilesi** veya sadece **mütekabil şekil** tesmiye olunur. Bilmukabele

F şekli de F′ şeklinin kutbî mütekabilidir. Bu iki şeklin hassaları madde 31 deki davadan başka bir şey olmıyan aşağıdaki iki kaziyeden biri kullanılarak mütalea ve tetkik olunur:

1° A,B,C... **gibi birtakım noktalar bir** *p* **müstevisi dahilinde kâin ise mezkûr noktaların** *a,b,c*... **kutbî müstevileri** *p* **nin kutbundan ibaret olan bir** P **noktasından geçtiği gibi bunun mukabili de doğrudur.**

2° A, B, C... **gibi birtakım noktalar bir** D **müstekimi üzerinde kâin ise mezkûr noktaların** *a,b,c*... **kutbî müstevileri** D **nin müzdevici olan bir** Δ **müstekiminden geçer ve bunun mukabili de doğrudur.**

İKİNCİ FASIL

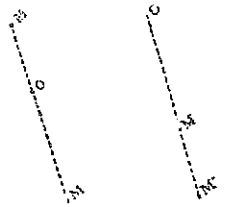
Akis

§ 1. Umumî hassalar

34. Tarif Bir O noktasile bir R kıt'asının verildiğini farzedelim.

Her hangi bir M noktasına OM müstekimi üzerinde $\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = K$ (burada $K = \pm R^2$ dır) müsavatına tevafuk edecek veçhile bir M′ noktası tekabül ettirelim. K nın işareti tesbit edildiğine göre tamamen muayyen olan bu M′ noktasına M noktasının O **akis merkezine** ve K **kuvvetine** nazaran **makûsü** tesmiye olunur (şekil: 31).

Bu tariften derhal anlaşılacağı veçhile M noktası da ayni merkez ve ayni kuvvete nazaran M′ noktasının makûsüdür. Şuhalde bu tahvil mütekabildir. K müspet ise M ve M′ noktaları O naktasının ayni tarafında vaki olup akis **müspettir.**



Şekil: 31

Böyle bir akiste kendi makûslerile intibak eden namütenahi nokta vardır ki bu noktalar müstevi dahilinde merkezi O ve nısıf kutru R olan bir daire ve fezada da bir küre teşkil ederler.

Bu daire veya küreye **akis daire** veya **akis hüresi** adı verilir.

K menfi ise M, M′ noktaları O noktasının muhtelif taraflarında kâin olup akis **menfidir.** Böyle bir akiste hiç bir nokta kendi makûsile intibak eylemez.

Eğer M noktası bir Δ istikametinde gayrimahdut surette uzaklaşırsa M′ noktası ayni istikamette gayrimahdut surette O noktasına yaklaşır. Eğer M noktası bir F şeklini resmederse M′ noktası da bir F′ şeklini resmeder ki bu sonuncu şekle F seklinin, O merkezine ve K kuvvetine nazaran, **makûsü** denir.

Mezkûr iki şekle **mütekabil şualar vasıtasile yekdiğerinin mütehavvilesi** dahi tesmiye olunur.

35. Dava— A, B **gibi iki nokta ile bu noktanın** A′, B′ **makûsleri verildiğine nazaran:**

1°. A, B, A′, B′ **noktarı ayni bir daire üzerinde kâindir.**

2°. AB, A′B′ **kıt'aları yekdiğerine:**

$$A'B' = AB \cdot \frac{|K|}{OA \cdot OB}$$

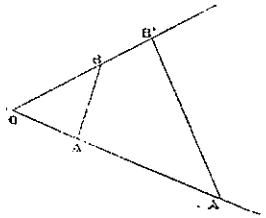
Münasebetile merbuttur (şekil: 32).

1° Filhakika,

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

olduğundan A,A′,B,B′ noktaları bir daire üzerinde kâindir (müstevi hendese, 255).

2° A ve A′, B ve B′ noktalarının her ikisi nazir nazire O noktasının ayni tarafında veya muhtelif tarafında bulundukları gibi $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ veya $\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$ olduğundan OAB, OA′B′ müsellesleri yekdiğerine müşabih (ikinci müşabehet hali) ve binaenaleyh



Şekil: 32

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA \cdot OA'}{OA \cdot OB} = \frac{|K|}{OA \cdot OB}$$

eyva

$$A'B' = AB \cdot \frac{|K|}{OA \cdot OB}$$

olup dava sabit olur.

36. Dava— F′, F″ **gibi iki şekil ayni bir** F **şeklinin ayni** O **merkezine ve muhtelif** K′, K″ **kuvvetlerine nazaran makûsleri ise mezkûr** F′, F″ **şekilleri** O **noktasına ve** $\frac{K''}{K'}$ **nispetine göre yekdiğerinin mümasilidir.**

F şeklinin lâalettayin bir noktası M ve bu noktanın F′, F″ şekillerindeki makûsleri de M′, M″ olsun.

$$\overline{OM}.\overline{OM'} = K', \overline{OM}.\overline{OM''} = K'' \text{ olup buradan da}$$

$$\frac{\overline{OM''}}{\overline{OM'}} = \frac{K''}{K'}$$

elde olunur. Diğer taraftan M′, M″ noktaları O naktasile bir müstekim istikametinde bulunduklarından dava sabit olur.

Bilhassa aynı O merkezine ve R^2 ve $-R^2$ kuvvetlerine nazaran iki akis O noktasına nazaran mütenazır olan iki F′, F″ şeklini verir.

Görülüyorki intihap olunan akis kuvveti ne olursa olsun elde olunan şekillerin cinsi değişmiyor. Şekillerin cinsi ancak akis merkezinin tebeddülüle değişir.

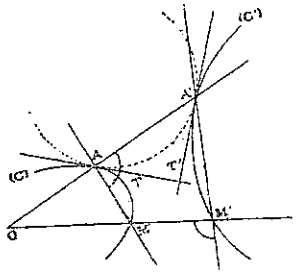
Akis, zaviyeleri değiştirmez.

37. Dava— C, C′ **gibi yekdiğerinin makûsü olan iki münhaniye mezkûr münhanilerin** A, A′ **gibi iki mütekabil noktasında resmolunan mümaslar mezkûr noktalar arasına vasledilen müstekim ile mütesaviyüssakayn bir müselles teşkil ederler** (şekli: 33).

C, C′ münhanileri üzerinde A, A′ noktalarına yakın mütekabil M, M′ noktalarını alalım. A, A′, M, M′ noktaları bir daire üzerinde kâin olduklarından

$$\widehat{AM,AA'} = \widehat{M'M,M'A'}$$

dır. Eğer M noktası gayrimahdut surette A noktasına yaklaşırsa M′ noktası da ayni zamanda gayrimahdut surette A′ noktasına yaklaşır.



Şekil: 33

Bu halde AM, A′M′ müstekimlerinin gayeleri nazir nazire C, C′ münhanilerinin A, A′ noktalarındaki AT, A′T′ mümaslarından ibaret olur. Binaenaleyh gayede dahi

$$\widehat{AT,AA'} = \widehat{AA',A'T'}$$

olmakla dava sabit olur.

Bu dava aşağıdaki tarzda dahi ifade olunabilir:

C, C′ **gibi yekdiğerinin makûsü olan iki münhaniye** A, A′ **gibi mutekabil iki noktada resmolunan** AT, A′T′ **mümasları, müstevi henbesede,** AA′ **kıt'asına muntasıf noktasında amut olan müstekime ve mücessem hendesede, mezkûr kıt'aya muntasıf noktasında amut olan müsteviye nazaran yekdiğerinin mütenazırından ibarettir.**

Lâzime— İki makûs sathın A **ve** A′ **gibi iki mütekabil noktalarındaki mümas müsteviler** AA′ **ve muntasıf noktasında amut olan müsteviye nazaran yekdiğerinin mütenazırıdır.**

Malûm olduğu veçhile bir sathın bir A noktasındaki mümas müstevisi, mezkûr satıh üzerinde A dan geçen C_1 ve C_2 gibi iki münhaniye A noktasından resmolunan mümaslar vasıtasile tarif ve tayin olunur. Mezkûr sathın makûsü olan satha A nın mütekabili olan A′ noktasından resmolunan mümas müstevi de, C_1, C_2 münhanilerinin makûsleri olan C'_1, C_2' münhanilerine A′ noktasından resmolunan mümaslar vasıtasile tarif ve tayin olunabilir. Bu sonuncu mümaslar nazir nazire evvelki mümasların AA′ ye muntasıf noktasında amut olan müsteviye nazaran yekdiğerinin mütenazırları olduklarından A ve A′ noktalarındaki mümas müsteviler için dahi keyfiyet ayni olup matlup sabit olur.

38. Neticeler I. Bir A noktasında tekatu eden iki münhaninin zaviyesi (yani bu münhanilerin A noktasındaki mümaslarının zaviyesi) makûslerinin A nın mütekabili olan A′ noktasındaki zaviyesine müsavidir.

Filhakika, müstevi hendesede A noktasındaki iki mümasın teşkil ettiği zaviye A′ noktasındaki iki mümas arasındaki zaviyenin AA′ ye muntasıf noktasında amut olan müstekime nazaran mütenazırı olduğu gibi mücessem hendesede de mezkûr iki zaviye AA′ ye muntasıf nohtasında amut olan müsteviye nazaran yekdiğerinin mütenazırıdır.

II. Bir A noktasında tekatu eden iki sathın zaviyesi (yani bu satıhların bu noktadaki mümas müstevilerinin zaviyesi) makûslerinin A nın mütekabili olan A′ noktasındaki zaviyelerine müsavidir.

Filhakika, A noktasında tekatu eden iki satıh ile bu satıhların A′ noktasında tekatu eden makûsleri nazarı itibara alınırsa A noktasındaki mümas müstevilerin teşkil eyledikleri iki vecihli hadde zaviye ile A′ noktasındaki mümas müstevilerin teşkil ettikleri iki vecihli hadde zaviye AA′ ye muntasıf noktasında amut olan müsteviye nazaran yekdiğerinin mütenazırı ve binaenaleyh yekdiğerine müsavidir.

III. Bir A noktasında tekatu eden bir satıh ile bir münhaninin zaviyesi mezkûr satıh ve münhaninin makûslerinin A nın mütekabili olan A′ noktasındaki zaviyesine müsavidir.

İspat yukarıdakilere müşabihtir.

İhtar — Bu üç netice «**akis, zaviyeleri değiştirmez**» diye telhis olunur.

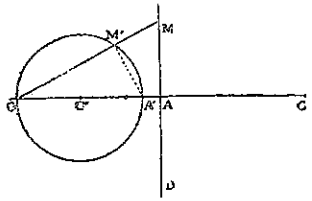
39. Hususî hal — İki münhani veya iki satıh veya bir satıh ve bir münhani bir A noktasında yekdiğerine mümas ise bunların makûsleri de A nın makûsu olan A′ noktasında yekdiğerine mümastır.

§ 2. — Müstevi dahilinde akis

Bir müstekimin makûs şekli

Eğer akis merkezi müstekim üzerinde kâin ise aşikâr surette mezkûr müstekimin makûsü kendisinden ibarettir.

40. Dava — Bir müstekimin kendi üzerinde bulunmıyan bir O merkezine nazaran makûs şekli, akis merkezinden geçen bir dairedir. O noktasından verilen D müstekimine OA amudunu resmedelin (şekil: 34). A noktasının makûsu A′, D müstekimin lâalettayin bir noktası da M olsun. M′ noktasının M nokatsının makûsü olabilmesi için $OA \cdot OA' = OM \cdot OM'$ olması yani dört A,A′,M,M′ noktalarının ayni bir daire üzerinde bulunması yani $\widehat{OM'A'}$ zaviyesinin $\widehat{OAM}$ zaviyesine müsavi ve binaenaleyh kaime olması lâzım ve kâfidir. Şuhalde M′ noktasının hendesî mahalli, kutru OA′ olan daireden ibaret olup dava sabit olur.



Şekil: 34

Temrin — Yukarıki dairenin C′ merkezinin O nun D müstekimine nazaran mütenazırı olan C noktasının makûsü olduğunu ispat ediniz.

41. Mukabil dava — Bir müstekim ile bir daire, iki muhtelif tarzda yekdiğerinin makûsü gibi nazarı itibara alınabilir.

Bir D müstekimile bir (C′) dairesini nazarı mülâhazaya alalım (şekil: 34). Bu müstekim ile daire yekdiğerinin makûsü ise akis merkezi, bundan evvelki dava mucibince, ancak D müstekimine amut OA′ kutrunun müntehalarından biri olabilir.

Filvaki merkezleri nazir nazire O,A′ noktaları ve kuvvtleri de $OA.\overline{OA'}$, $\overline{O'A}.\overline{A'A}$ olan iki akis D müstekimile (C′) dairesini yekdiğerine tahvil eder. Binaenaleyh bu iki şekil yani verilen müstekim ile daire yalnız iki akiste yekdiğerine tekabül eyler.

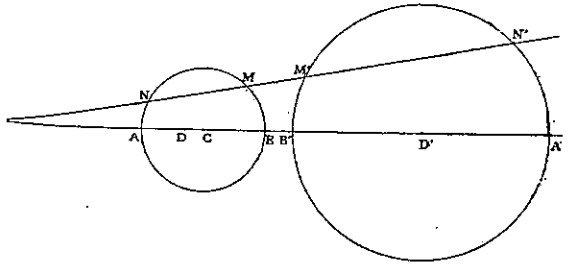
Eğer müstekim daireye mümas ise temas noktası artık akis

merkezi olamayıp mezkûr iki şekli yekdiğerine tahvil eden ancak bir akis vardır. Bu aksin merkezi de temas noktasının kutran mukabili olan noktadan ibarettir.

Bir dairenin makûs şekli.

42. Dava I — Akis merkezinden geçen bir dairenin makûsü, merkezden resmolunan kutra amut bir müstekimdir (madde 40 taki davanın mukabili).

Akis merkezi O, dairenin merkezi C',O nun kutran mukabili olan nokta A', nihayet A' nün makûsü de A olsun (şekil: 34). Madde 40 taki esas davada ispat olunduğu veçhile OA' ye A noktasından amut olarak resmolunan D müstekimile (C') dairesi yekdiğerinin makûsünden ibaret olmakla dava sabit olur.



Şekil: 35

Dava II — Akis merkezinden geçmiyen bir dairenin makûsü yine bir dairedir.

O akis merkezinden geçmiyen bir (C) dairesinin lâalettayin bir noktası M olsun (şekil: 35). Evvelâ akis kuvvetinin O noktasının (C) dairesine nazaran $P = OM.\overline{ON}$ kuvvetinden ibaret olduğunu farzedelim.

Bu takdirde aşikâr surette (C) dairesinin makûsü kendisinden ibarettir.

Şimdi akis kuvvetinin lâalettayin bir K kıymetini aldığını farzedelim.

Bu takdirde, madde 36 daki dava mucibince, (C) dairesinin makûsü, mümaselet merkezi O ve mümaselet nispeti $m = \frac{K}{P}$ olmak üzere (C) dairesinin mümasilinden ibaret bir (D') dairesi olur ki bu da davamızın doğruluğunu ispat eder.

Temrin — İspat etmek matluptur ki (D') dairesinin D' merkzi, O noktasının A ve B ye nazaran müzdevici olan D noktasının makûsünden ibarettir (şekil: 35).

43. Mukabil dava — Lâalettayin iki daire umumî surette iki muhtelif tarzda yekdiğerinin makûsü gibi nazarı itibara alınabilir.

Filhakika, (C) ve (D') gibi iki daire nazarı mülâhazaya alalım (Şekil: 35).

Bu daireler yekdiğerinin makûsü ise akis merkezi, esas dava mucibince, mezkûr iki dairenin iki mümaselet merkezinden biri ve meselâ O olabilir.

Halbuki esas dava ispat olunduğu veçhile (C) dairesinin O noktasına ve m nispetine göre mümasili olan (D') dairesi ayni zamanda, O nuktasının (C) dairesine nazaran kuvveti p ile gösterildiğine göre, (C) dairesinin o akis merkezine ve $K = mp$ akis kuvvetine nazaran makûsünden ibarettir.

Binaenaleyh verilen iki daire ancak iki akiste hakikaten yekdiğerine tekabül etmekle dava sabit olur. Bununla beraber iki istisna hali vardır:

1° **Daireler yekdiğerine mümastır** — Bu takdirde bir mümaselet merkezi olan temas noktası artık bir akis merkezi değildir.

2° **Daireler yekdiğerine müsavidir** — Bu takdirde iki akisten birinin merkezi namütenahiye uzaklaşmıştır.

44. İki dairenin aksi mümasil noktaları — (D'), (C) gibi iki daire nazarı mülâhazaya alalım (şekil: 35). Bu iki dairenin ayni zamanda akis merkezinden ibaret olan mümaselet merkezlerinden biri O olsun. Bu iki dairenin N,M' gibi iki noktası mümaselet vasıtasile yekdiğerine tekabül ederse bu noktalara **mümasil noktalar** denildiği gibi mezkûr dairelerin M,M' gibi iki noktası da akis vasıtasile yekdiğerine tekabül ederse mezkûr noktalara da **aksi mümasil noktalar** tesmiye olunur. Ayni zamanda hem mümasil ve hem de aksi mümasil olan noktalar verilen dairelere O noktasından resmolunan mümasların (eğer bu mümaslar mevcut ise) temas noktalarıdır. Akis mümasillerile intibak eden yegâne noktalar iki dairenin müşterek noktalarından (bu noktalar mevcut ise) ibarettir.

İki veterden birinin müntehaları diğerinin aksi mümasillerinden ibaret ise bu iki vetere **aksi mümasil veterler** denir.

Aksi mümasil veterler aşağıdaki hassalara maliktir:

1° **İki aksi mümasil veterin müntehaları ayni bir daire üzerinde kâindir** (35).

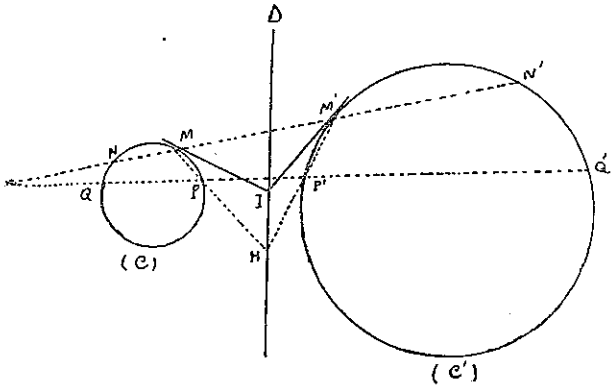
Bu daire, nazarı mülâhazaya alınan akiste kendisinin makû-

südür. Mezkûr daire verilen iki daireyi ayni zaviyeye göre kat'eder. Bilhassa mezkûr daire verilen dairelerden birine mümas veya kaim ise diğerine de mümas veya kaimdir.

2° **Verilen iki dairenin iki aksi mümasil veteri mezkûr dairelerin cezrî mihveri üzerinde tekatu eder.**

Filhakika, verilen iki daire (C), (C') ve bu dairelerin iki aksi mümasil veteri de MP, M'P' olsun (şekil: 36).

Bu aksi mümasil veterlerin tekatu noktasını H ile gösterelim.



Şekil: 36

Mezkûr veterlerin müntehaları ayni bir daire üzerinde kâin olduklarında (1°)

$$\overline{HM} \cdot \overline{HP} = \overline{HM'} \cdot \overline{HP'}$$

yazılabilir. Bu müsavat gösteriyor ki H noktası (C) ve (C') dairelerine nazaran ayni kuvvete maliktir. Binaenaleyh mezkûr H noktası verilen dairelerin Δ cezrî mihveri üzerinde kâindir.

3° **Verilen iki daireye iki aksi mümasil noktadan resmolunan mümaslar mezkûr dairelerin cezrî mihveri üzerinde tekatu ederler.**

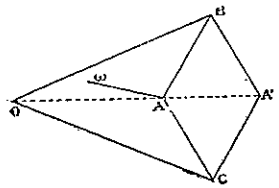
Filhakika, OMM' katı sabit kalmak üzre OPP' katının gayrimahdut surette birinci katıa yaklaştığını farzedelim (şekil: 36).

MP, M'P' müstekimlerinin gayeleri nazır nazire verilen iki dairenin M, M' noktalarındaki mümaslarından ibaret olduğu gibi H noktasının gayesi de bu mümasların I tekatu noktasından ibaret olur.

H noktası daima cezrî mihver üzerinde kalmak üzere yerini değiştirdiğinden I noktası dahi cezrî mihver üzerinde bulunup matlup sabit olur.

45. Poseliye (Peaucellier) nin âkisi — **Âkis** tesmiye olunan birtakım aletler vardır ki verilen bir şeklin makûsü olan şekli çizmeğe yararlar. Peaucellier nin âkisi bir ABA'C mainini teşkil eden yekdiğerine müsavi ve mafsallanmış sulp kollardan müteşekkildir (şekil: 37).

Karşılıklı B ve C reslerine yekdiğerine müsavi diğer iki kol daha mafsallanmıştır ki bu kolların müntehaları aletin yegâne sabit noktası olan O noktasında yekdiğerile birleştirilmiş ve mafsallanmıştır.



Şekil: 37

A, A', O noktaları nazir nazire B ve C noktalarından ayni uzaklıkta bulunduklarından mütemadiyen BC ye muntasıf noktasından resmolunan amut üzerinde bir müstekim istikametinde kalırlar. Bundan maada $\overline{OA} \cdot \overline{OA'}$ hasılı zarbına, O noktasının merkezi B olan ve A,A' noktalarından geçen daireye nazaran kuvveti nazarile bakılabilir. Binaenaleyh $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2$ olup OA·OA' hasılı zarbının daima sabit kaldığı anlaşılır. Hulâsa alet şeklini değiştirdiğinde A ve A' noktaları O noktasına nazaran yekdiğerinin makûsü kalır.

Peaucellier nin aleti aşağıdaki hususlara yarar:

1°. Dairevî bir hareketi müstekim bir harekete tahvile: Filhakika, A noktasının, bu noktaya mafsallanmış ω müntehası sabit ve tulü ωA olan sulp bir kol vasıtasile, O noktasından geçen bir daire üzerinde harekete tâbi tutulduğunu farzedelim. Bu takdirde A' noktası bir müstekim üzerinde hareket eder.

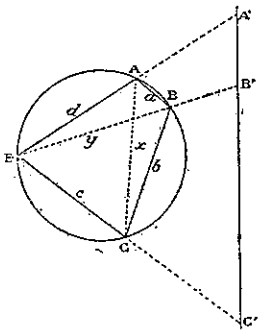
2°. Büyük nısıf kuturlu daire kavisleri çizmeğe (coğrafya haritaları): Filhakika A noktasının nısıf kutru R olan bir daire üzerinde harekete tâbi tutulduğunu ve O noktasının bu daireye nazaran p kuvvetinin de kâfi derece küçük olduğunu farzedelim. Bu takdirde A noktası nısıf kutru $\frac{KR}{p}$ ve binaenaleyh kâfi derece büyük olan bir daire üzerinde hareket eder.

Aşikâr surette Peaucellier nin âkisi ancak kollarının tullerinin müsait olduğu hudut dahilinde iş görebilir.

Tatbikat

46. (Ptolémée) Batlamyus davaları— I. Daire dahiline mersum muhaddep bir münharifin kuturlarının hasılı zarbı, karşılıklı dılılarının hasılı zarpları mecmuuna müsavidir.

Daire dahiline mersum muhaddep bir ABCD münharifini nazarı itibara alalım (şekil: 38). Bu münharifin dılıları $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ ve kuturları da $AC = x$, $BD = y$ olsun. Merkezi D olan bir akis vasıtasile bu münharifi tahvil edelim. Münharif haricine mersum daire A, B, C noktalarının A′, B′, C′ makûslerinden geçen bir müstekime tahavvül eder. Eğer B mezkûr münharifin D resinin karşısında bulunan resinden ibaret ise A ve C noktaları DB nin muhtelif taraflarında kâin olup binnetice A′ ve C′ noktaları da DB nin ve binaenaleyh B′ noktasının muhtelif taraflarında kâindir.



Şekil: 38

Şuhalde,

$$A'C' = A'B' + B'C'$$

yazılabilip buradan da K akis kuvveti olduğuna göre, madde 35 deki dava mucibince,

$$\frac{K.\,AC}{DA.\,DC} = \frac{K.\,AB}{DA.\,DB} + \frac{K.\,BC}{DB.\,DC}$$

veya

$$\frac{x}{cd} = \frac{a}{dy} + \frac{b}{yc}$$

veya nihayet

$$xy = ac + bd$$

elde olunur.

Mukabil dava.— Muhaddep bir münharifte kuturların hasılı zarbı karşılıklı dılıların hasılı zarpları mecmuuna müsavi ise mezkûr münharif daire dahiline kabili tersimdir.

Filhakika, muhaddep bir ABCD münharifini nazarı itibara alalım (şekil: 38) ve bu münharifte

$$AC.\,DB = AB.\,DC + DA.\,BC$$

olduğunu farzedelim. Yine D noktası merkez ve K akis kuvveti olmak üzere bu şekli tahvil edelim. A,B,C noktalarının makûsleri A′, B′, C′ olsun. Verilen müsavatın her iki tarafı DA. DC. DB hasılı zarbile taksim edilerek

$$\frac{AC}{DA.\,DC} = \frac{AB}{DA.\,DB} + \frac{BC}{DB.\,DC}$$

veya her iki taraf K ile zarp olunarak

$$\frac{K.\,AC}{DA.\,DC} = \frac{K.\,AB}{DA.\,DB} + \frac{K.\,BC}{DB.\,DC}$$

elde olunur. Halbuki madde 35 mucibince,

$$A'C' = \frac{K.\,AC}{DA.\,DC}, \qquad A'B' = \frac{K.\,AB}{DA.\,DB}, \qquad B'C' = \frac{K.\,BC}{DB.\,DC}$$

olduğundan yukarki müsavat

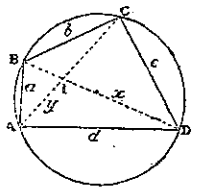
$$A'C' = A'B' + B'C'$$

suretinde yazılabilir.

Bu müsavat gösteriyor ki A′, B′, C′ noktaları bir müstekim istikametindedir. Binaenaleyh A, B, C noktaları D den geçen bir daire üzerinde kâin olup dava sabit olur.

47. Dava II— Daire dahiline mersum bir münharifte kuturların yekdiğerine nispeti, bu kuturların nihayet noktalarına müntehi dılıların hasılı zarpları mecmularının yekdiğerine nispetine müsavidir.

Daire dahiline mersum ve kuturları I noktasında tekatu eden ABCD münharifini nazarı itibara alalım (şekil: 39). Müşabih IAB, ICD müselleslerinden



Şekil: 39

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD} \qquad \text{veya} \qquad \frac{IB}{AB} = \frac{IC}{CD}$$

veya

$$\frac{IB}{AB.\,BC} = \frac{IC}{BC.\,CD}$$

elde olunduğu gibi ayni veçhile diğer müşabih müselleslerden istifade ederek

$$\frac{IA}{AD.AB}=\frac{IB}{AB.BC}=\frac{IC}{BC.CD}=\frac{ID}{CD.AD}$$

elde olunur. Nihayet bu müsavi nispetlerin birincisile üçüncüsünün ve ikincisile dördüncüsünün hadleri nazir nazire cemedilerek

$$\frac{AC}{AD.AB+BC.CD}=\frac{BD}{AB.BC+CD.AD}$$

veya

$$\frac{x}{y}=\frac{ab+cd}{ad+bc}$$

elde olunmakla dava sabit olur.

Mukabil dava.— Muhaddep bir münharifte karşılıklı dılıların yekdiğerine nispeti bu kuturların nihayet noktalarına müntehi dılıların hasılı zarpları mecmularının yekdiğerine nispetine müsavi ise mezkûr münharif daire dahiline kabili tersimdir.

Bir ABCD münharifini nazarı itibara alalım ve madde 46 daki iş'ar tarzı ayni olmak üzere

$$\frac{x}{y}=\frac{ab+cd}{ad+bc}$$

olduğunu farzedelim. Şimdi bu münharifin bir daire dahiline kabili tersim olduğunu ispat edeceğiz.

Filhakika, bir daire dahiline dılıları a, b, c, d olmak üzere bir $A'B'C'D'$ münharifini tersim edelim [1].

Bu münharifin kuturları x', y' olsun. Binaenaleyh esas dava mucibince

$$\frac{x'}{y'}=\frac{ab+cd}{ad+bc}$$

veya

$$\frac{x'}{y'}=\frac{x}{y}$$

elde olunur.

Şimdi farzedelim ki $x>x'$ olsun. Şuhalde yukarıki müsavat mucibince $y>y'$ olur. Bu keyfiyet bir kerre anlaşıldıktan sonra ABC, A'B'C' müselleslerini nazarı itibara alalım. Bu müselleslerin

[1] Bu tersimatın mümkün olduğunun ispatını okuyuculara bırakıyoruz.

nazir nazire ikişer dıl'ı müsavi ve üçüncü x, x' dılıları gayrimüsavidir. Binaenaleyh (müstevi hendese, 53) $\widehat{A}>\widehat{A'}$ olur. Ayni veçhile muhakeme yürütülerek

$$\widehat{B}>\widehat{B'},\quad \widehat{C}>\widehat{C'},\quad \widehat{D}>\widehat{D'}$$

ve binaenaleyh

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}>\widehat{A'}+\widehat{B'}+\widehat{C'}+\widehat{D'}$$

olduğu görülür ki bu da gayrimümkündür; zira bu mecmulardan her biri dört kaimeye müsavidir.

Şuhalde bizzarure $x=x', y=y'$ dür.

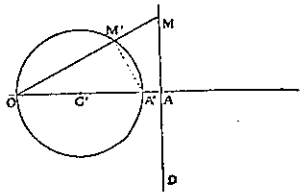
Binaenaleyh nazir nazire müsavi ve ayni tarzda mevzu müselleslerden mürekkep oldukları için verilen ABCD münharifi daire dahiline mersum A'B'C'D' münharifine müsavi olmakla dava sabit olur.

§ 3. Fezada akis

Bir müstevinin makûs şekli

Eğer akis merkezi müstevi dahilinde kâin ise bu müstevinin makûs şekli aşikâr surette kendisinden ibarettir.

Aksi halde müstevinin makûs şeklinin bir küreden ibaret olduğu aşağıdaki davadan anlaşılacaktır.



Şekil: 40

48. Dava— Bir P müstevisinin kendi dahilinde bulunmıyan bir O merkezine nazaran makûsü, akis merkezinden geçen bir küredir. Filhakika, O noktasından P müstevisine resmedilen amut OA ve A noktasının makûsü de A' olsun (şekil: 40). OA dan resmolunan bir müstevi verilen P müstevisini bir D müstekimine göre kat'eder. D müstekimi üzerinde kâin noktaların makûslerinin hendesî mahalli kutru OA olan daireden ibarettir.

Bu suretle elde olunan şekil OA etrafında devrettirilecek olrsa D müstekimi P müstevisini tevlit ettiği gibi kutru OA' olan daire de P müstevisinin makûsü olan şekli tevlit eder. Binaenaleyh bu makûs şekil kutru OA olan küreden ibarettir.

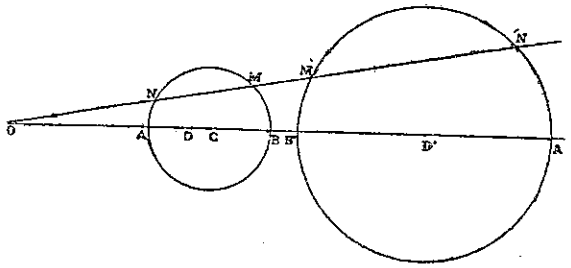
Mukabil dava — Bir müstevi ile bir küreye iki muhtelif tarzda yekdiğerinin makûsü nazarile bakılabilir.

Bu dava, şekil verilen müsteviye amut bir kutrî müstevi ile katı ve madde 41 deki dava tatbik olunarak kolayca ispat olunur.

Bir kürenin makûs şekli

49. Dava I — Akis merkezinden geçen bir kürenin makûsü akis merkezinden geçen kutra amut bir müstevidir.

Filhakika, verilen kürenin merkezi C′ ve bu küre üzerinde



Şekil : 41

kâin akis merkezi de O olsun (şekil: 40). Bu küreyi OC′ müstekiminden geçen bir müstevi ile kat'edelim. O noktasının makta büyük dairesinde kutren mukabili olan nokta A′ ve bu noktanın makûsü de A olsun. Nihayet makta müstevisi dahilin de OA ya A noktasından resmolunan amudu D′ ile gösterelin. (Madde 42, dava I) mucibince D müstekimi makta büyük dairesinin O merkezine nazaran makûsünden ibarettir. Bu suretle elde olunan şekil OC′ etrafında devrettirilecek olursa makta büyük dairesi verilen küreyi tevlit ettiği gibi D müstekimi de bu kürenin makûsü olan şekli tevlit eder. Binaenaleyh bu makûs şekil OC′ kutruna amut bir müstevi olmakla dava sabit olur.

50. Dava II — Akis merkezinden geçmiyen bir kürenin makûsü yine bir küredir.

O akis merkezinden geçmiyen bir (C) küresini nazarı itibara alalım (şekil : 41). Mezkûr kürenin lâalettayin bir noktası M ve O noktasının küreye nazaran kuvveti de $p = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$ olsun. (C) küresinin, O merkezine ve p kuvvetine göre, makûsu aşikâr surette kendisinden ibarettir. Eğer akis kuvveti lâalettayin bir K kıymetini alacak olursa (C) küresinin makûsu, madde 36 mucibince,

kendisinin O noktasına ve $m = \frac{k}{p}$ nispetine göre mümasili olan bir (D′) küresinden ibaret olup dava sabit olur.

51. Mukabil dava — Lâalettayin iki küre umumî surette muhtelif iki tarzda yekdiğerinin makûsü gibi nazarı itibara alınabilir.

Bu dava madde 43 te olduğu gibi ispat olunur (şekil: 41). Akis merkezleri verilen iki kürenin mümaselet merkezlerinden ibarettir.

Madde 43 teki istisna halleri burada da mevcuttur.

52. İki kürenin aksi mümasil noktaları — Aksi mümasil nokta ve aksi mümasil veterlerin tarifleri (madde: 44) tekinin aynidir. Madde 44 te olduğu gibi görüleceği veçhile:

İki çift aksi mümasil nokta, ayni bir daire üzerinde kâindir.

İki aksi mümasil veter, cezrî müstevi dahilinde tekatu eder.

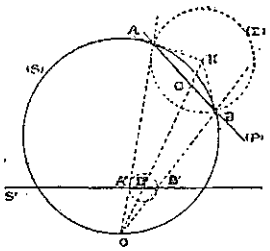
İki küreye aksi mümasil noktalarda resmolunan mümas müsteviler, cezrî müstevi dahilinde kâin bir müstekime göre tekatu ederler.

Bir dairenin makûs şekli

53. Dava — 1° Bir (C) dairesinin kendi müstevisi dahilinde bulunmıyan bir O merkezine nazaran makûsü yine bir dairedir;

2°. Bu sonuncu dairenin müstevisi, O noktasile (C) dairesinin tayin ettiği küreye O noktasında mümas olan müsteviye muvazidir.

3°. Mezkûr dairenin D′ merkezi, O noktasile (C) dairesinin tayin ettiği küreye (C) dairesi boyunca mümas olan mahrutun resi K olduğuna göre, OK müstekimi üzerinde kâindir.



Şekil : 42

Şekil müstevisi olarak verilen şeklin tenazur müstevinsini yani O akis merkezile verilen dairenin C merkezinden geçen ve bu dairenin P müstevisine amut olan müsteviyi alalım (şekil: 42). Bu müstevi (C) dairesini bir AB kutruna göre ve O (C) küresini (yani O noktasile (C) dairesinden geçen küreyi) O,A,B noktalarından geçen bir büyük (S) dairesine göre kat'eder.

1°. (C) dairesinden namütenahi küre geçer; bu kürelerden lâalettayin ikisini intihap edelim. Bu kürelerin makûsleri yekdi-

ğerini kat'eden iki küredir. Bu iki kürenin faslı müşterekleri olan (C') dairesi (C) dairesinin makûsünden ibaret olmakla davanın birinci kısmı sabit olur.

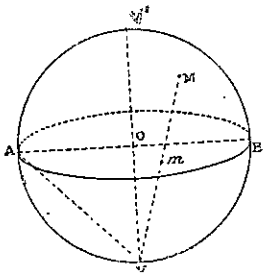
2° ve 3°. Davanın ikinci ve üçüncü kısımlarını ispat için O (C) veya (S) küresile (AB) dairesi boyunca (S) küresini kaimen kat'eden (Σ) küresini alalım. (S) küresinin makûsü (A'B') dairesinin müstevisinden ibaret olan bir (S') müstevisidir. (Σ) küresinin makûsü ise (S') müstevisini (A'B') dairesi boyunca kaimen kat'eden bir (Σ') küresinden ibarettir. Yani (Σ') küresinin D' merkezi (A'B') dairesinin dahi merkezidir. Halbuki yekdiğerinin makûsü olan iki kürenin merkezleri akis merkezile ayni bir müstekim istikametinde kâin olduğundan mezkûr D' merkezi OK üzerinde kâin olup matlûp sabit olur.

İhtar — Yekdiğerinin makûsü olan (C), (C') daireleri ayni bir küre üzerinde kâindir.

Tatbikat.

I. Menazırî irtisam.

54. Bir küre ile bu kürenin **irtisam merkezi** denilen sabit bir V noktasını ve kutuplarından biri V noktası olan bir büyük dairenin P müstevisini ve nihayet kürenin lâalettayin bir M noktasını nazarı itibara alalım (şekil: 43). VM müstekiminin P müstevisini kat'ettiği m noktasına M noktasının P müstevisi üzerindeki **menazırî mürtesemi** tesmiye olunur.



Şekil : 43

M noktası küre üzerinde bir (C) münhanisini resmederse m noktası da P müstevisi dahilinde (C) münhanisinin menazırî mürteseminden ibaret olan bir (C) münhanisini resmeder.

Verilen küre ile P müstevisi, V akis merkezine ve V noktasının kutren mukabili olan nokta V' olduğuna göre, $VO \cdot \overline{VV'} = \overline{VA}^2 = 2R^2$ kuvvetine nazaran, yekdiğerinin makûsü olan iki şekildir. M, m noktaları bu akiste yekdiğerinin makûsü olan noktalardır. Görülüyorki menazırî irtisam, aksin bir hususî halinden başka bir şey değildir. Binaenaleyh menazırî irtisam aşağıdaki hassalara maliktir.

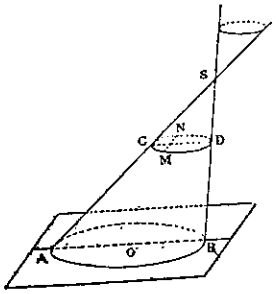
Menazırî irtisam zaviyeleri değiştirmez;

İrtisam merkezinden geçmiyen bir dairenin menazırî mürtesemi yine bir dairedir; bu dairenin merkezi, irtisam merkezini verilen daire boyunca kürenin haricine mersum bulunan mahrutun resine vasleden müstekim üzerinde kâindir.

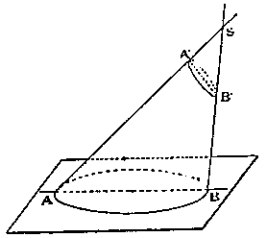
İrtısam merkezinden geçen dairelerin mürtesemleri müstekimlerden ibarettir.

II. Kaidesi daire olan mail mahrutun aksi muvazi maktaları.

55. Tarifler — Bir SAB müsellesi $\widehat{SB'A'} = \widehat{SAB}$ olacak veçhile bir A'B' katı ile kat'olunursa AB, A'B' müstekimlerine, SA, SB müstekimlerine nazaran, **aksi muvazi müstekimler** denir (şekil: 45). Kolayca görüleceği veçhile ABB'A' münharifi bir daire dahiline kabili tersimdir.



Şekil : 44



Şekil : 45

Bu anlaşıldıktan sonra kaidesi daire olan bir mail SAB mahrutunu nazarı itibara alalım (şekil: 44). Bu mahrutun kaide müstevisine muvazi müstevilerle olan tekmil maktaları merkezleri SO üzerinde kâin bir takım dairelerden ibarettir. Bundan istintaç olunur ki SO dan geçen ve kaide müstevisine amut olan SAB müstevisi mahrutun bir tenazur müstevisidir. Bu müsteviye **esas müstevi** denir. SAB mahrutu SAB esas müstevisine AB müstekiminin SA, SB müvellitlerine nazaran, aksi muvazisi olan bir A'B' müstekimi boyunca amut olan bir müstevi ile kat'olunursa elde olunan (AB) maktaına AB kaide dairesinin **aksi muvazi maktaı** tesmiye olunur (şekil: 45).

56. Dava — Kaidesi daire olan bir mahrutun her aksi muvazi maktaı bir dairedir.

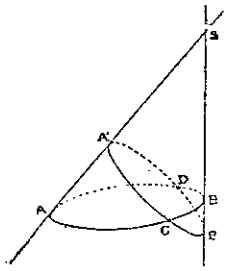
Filhaika, kaidesi daire olan bir SAB mahrutunun bir aksi muvazi maktaı A'B' olsun (şekil: 45). A'B', AB müstekimleri SA, SB müstekimlerine nazaran aksi muvazi olduklarından A', B', A, B noktaları bir daire üzerinde kâindir (§ 55). Binaenaleyh,

$$\overline{SA} \cdot \overline{SA'} = \overline{SB} \cdot \overline{SB'}$$

yazılabilir. Kutru AB olan dairenin S noktasına ve $\overline{SA} \cdot \overline{SA'}$ kuvvetine göre makûsünü nazarı mülâhazaya alalım. Bu makûs şekil aşikâr surette mahrut üzerinde kâin bir daire olduğu gibi (53), akiste zaviyeler değişmediğinden, (AB) dairesi gibi SAB müstevisine amuttur. Binaenaleyh A'B' kıt'ası mezkûr dairenin bir kutrudur ve bu dairenin müstevisi ASB esas müstevisine amuttur. Şuhalde mezkûr makûs dairenin müstevisi hakikaten nazarı mülâhazaya alınan aksi muvazi maktaın müstevisinden ibaret olmakla dava sabit olur.

İhtar— Yukarıki ispattan istintaç olunur ki, **kaidesi daire olan bir mahrutun kaide dairesinin S resine nazaran makûsü olan her daire, mahrutun bir aksi muvazi maktaından ibarettir.**

57. Dava— Kaidesi daire olan bir mail mahrut üzerinde kâin yegâne daireler, kaideye muvazi yeya aksi muvazi olan maktalardan ibarettir.



Şekil: 46

Kaidesi daire olan bir mail SAB mahrutunun kaideye muvazi olmıyan lâalettayin dairevî bir maktaını nazarı itibare alalım. Bu maktaa muvazi olan maktaların kâffesi de yine birer dairedir. Mahrutu bu makta müstevisine muvazi ve (AB) dairesini C,D noktalarında kat'eden bir müstevi ile kat'edelim. Bu suretle C,D noktalarından geçen bir (A'B') dairevî maktaı elde olunur (şekil: 46).

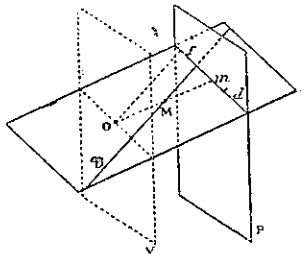
Halbuki müşterek iki noktası bulunan iki daire ayni bir küre üzerinde kâindir (Mücessem hendese, 191 Lâzime II). Bu suretle (AB) ve (A'B') daireleri ayni zamanda bir küre ve resi S olan bir mahrut üzerinde kâindirler. Şuhalde merkezi S ve kuvveti $\overline{SA} \cdot \overline{SA'}$ olan bir akis mezkûr daireleri yekdiğerine tahvil eder. Binaenaleyh (A'B') maktaı (AB) kaidesinin aksi muvazisi olmakla (56, ihtar) dava sabit olur.

ÜÇÜNCÜ FASIL

Menazır

58. Tarifler— İrtisam müstevisi denilen bir P müstevisi ile bu müstevi haricinde kâin ve **irtisam merkezi** veya **basar noktası** tesmiye edilen lâalettayin bir O noktası verildiğine göre fezada alınan herhangi bir M noktasının O noktasına nazaran, P müstevisi üzerindeki **menazırı** veya **merkezî mürtesemi** veya **mahrutî mürtesemi** diye, OM müstekiminin P müstevisini deldiği *m* noktasına (eğer bu nokta mevcut ise) tesmiye olunur (şekil: 47).

M noktası O noktasından geçen ve P müstevisine muvazi olan V müstevisi dahilinde bulunduğu zaman, OM müstekimi P müstevisine muvazi olacağından, *m* noktası artık mevcut değildir. Bu takdirde M noktasının *m* menazırı **namütenahiye uzaklaşmıştır** denilir. V müstevisine **basar müstevisi** adı verilir.



Şekil: 47

Eğer M noktası fezada bir F şeklini resmederse bu noktanın *m* menazırı da P müstevisi dahilinde F şeklinin **manazırı** tesmiye olunan bir *f* şeklini resmeder.

Bir müstekimin menazırı

59. Umumî hal— Dava— Bir müstekimin menazırı yine bir müstekimdir. Eğer M noktası bir D müstekimini resmederse (şekil: 47) bu noktanın *m* menazırı bizzarure P müstevisile OD müstevisinin *d* faslı müştereki üzerinde kâindir. Binaenaleyh M noktası D müstekimini resmettiğinde mezkûr menazır da *d* faslı müsterekini resmeder. Şuhalde D müstekiminin menazırı *d* den ibaret olur. OD müstevisine D müstekiminin **rasım müstevisi** denir.

D müstekiminin lâalettayin bir M noktasına *d* müstekiminin bir *m* noktası tekabül ettiği gibi bunun mukabili de doğrudur.

İstisna halleri— 1°. D müstekiminin basar müstevisini kat'et-

tiği I noktasına d üzerinde hiç bir nokta tekabül etmez. Bu takdirde I noktasının menazırı **namütenahiye uzaklaşmıştır** denir.

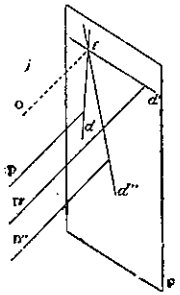
2°. O noktasından D müstekimine resmedilen muvazinin P müstevisini kat'ettiği f noktasına D müstekimi üzerinde hiçbir nokta tekabül eylemez. Bu f noktasına D müstekiminin **firar noktası** tesmiye olunur. Bu halde f noktası D müstekiminin namütenahideki noktasının menazırıdır denir.

Hususî haller — 1°. D müstekiminin (V müstevisi dahilinde olmaksızın) O noktasından geçtiğini farzedelim. Bu takdirde D müstekiminin menazırı bir noktaya müncer olur.

2°. D müstekimini V müstevisi dahilinde farzedelim. Bu takdirde D müstekiminin menazırı yoktur. Bu halde D müstekiminin menazırı **namütenahiye uzaklaşmıştır** denilir.

60. Mütelâki müstekimler

Umumî hal — Eğer mütelâki bir takım müstekimler O irtisam merkezine ve V basar müstevisine göre hiç bir hususî vaziyette bulunmıyorlarsa aşikâr surette **bu müstekimlerin menazırları da mütelâki bir takım müstekimlerden ibarettir.**



Şekil: 48

Hususî hâl — **Birtakım müstekimlerin A telâki noktası basar müstevisi dahilinde kâin olsun.** Bu takdirde mezkûr müstekimlerin rasim müstevilerinin kâffesi P müstevisine muvazi olan OA müstekimini havidir. Binaenaleyh bu müsteviler P müstevisini bir takım muvazi müstekimlere göre kat'ederler. Şuhalde verilen müstekimlerin menazırları muvazi bir takım müstekimlerden ibarettir.

Temrin — Telâki noktası irtisam merkezinde bulunan bir takım müstekimlerin menazırları neden ibarettir?

İhtar — Bu davaların mukabilleri doğru değildir. Fezada kâin iki müstekimin menazırları mütelâki veya muvazi ise mezkûr müstekimler bizzarure mütelâki değildir.

61. Muvazi müstekimler

Umumî hal — Eğer muvazi bir takım D, D′, D″,... müstekimleri (şekil: 48) O irtisam merkezine ve basar müstevisine göre hiç bir hususî vaziyette bulunmıyorlarsa **bu müstekimlerin menazırları mütelâki bir takım müstekimlerdir;** zira mezkûr D, D′, D″,... muvazileri ayni f firar noktasına malik olup binnetice mezkûr muvazilerin bütün menazırları bu firar noktasından geçer. Firar noktasının gördüğü mühim rol burada tezahür eder. Mezkûr nokta yalnız bir müstekimin firar noktası değil belki birtakım müstekimlerin istikametinin firar noktasıdır.

İhtar — Menazırları mütelâki olan iki müstekim ancak menazırlarının telâki noktası mezkûr müstekimlerden herbirinin firar noktası olduğu takdirde bizzat yekdiğerine muvazidir.

Hususî hal — Eğer birtakım muvazi müstekimler irtisam müstevisine muvazi iseler mezkûr müstekimlerden herbiri kendi menazırına muvazi ve binaenaleyh **mezkûr müstekimlerin menazırları da bir takım muvazi müstekimlerdir.**

62. Muvazi müstekimlerin namütenahideki noktası. —

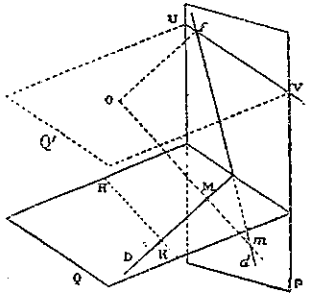
Muvazi bir takım müstekimlerin menazırlarının, umumî surette, mezkûr müstekimlerin istikametine ait firar noktasında telâki eden müstekimlerden ibaret olması keyfiyeti nazarı itibara alınarak aşağıdaki kaziyeler söylenebilir:

1°. yekdiğerine muvazi müstekimler ayni namütenahi noktasına maliktir;

2°. Mezkûr muvazilerin müşterek istikametinin firar noktası, namütenahideki müşterek noktalarının menazırından ibarettir.

63. Bir müstevi şeklin menazırı

Umumî hâl — Bir Q müstevisi O noktasına ve P müstevisine nazaran hiç bir hususî vaziyet işgal etmiyorsa (şekil: 49) mezkûr müstevi üzerinde kâin her M noktasının, umumî surette bir m menazırı mevcut olduğu gibi bilmukabele P müstevisinin her m noktası da Q müstevisine ait bir M noktasının menazırıdır. M noktası Q müstevisile basar müstevisinin HK faslı müştereki üzerinde kâin ise artık bu noktanın menazırı yoktur. Bu keyfiyet, evvelce söylendiği veçhile, mezkûr menazır **namütenahiye uzaklaşmıştır** diyerek ifade olunur.



Şekil: 49

Eğer m noktası irtisam müstevisi ile O noktasından Q müstevisine muvazi olarak resmedilen Q′ müstevisinin UV faslı müştereki üzerinde kâin ise mezkûr m noktası Q müstevisine ait hiç

bir noktanın menazırı değildir. UV müstekimine Q müstevisinin **firar hattı** tesmiye olunur. Bu hat aşağıdaki iki esasî hassaya maliktir:

1°. Bir müstevinin firar hattı, bu müstevide kâin müstekimlerin firar noktalarının hendesî mahallidir.

2°. Muvazi bir takım müsteviler ayni firar hattına malik oldukları gibi bunun mukabili de doğrudur.

Hususî haller — 1°. Q müstevisinin (P müstevisine muvazi olmaksızın) O dan geçtiğini farzedelim. Bu takdirde mezkûr müsteviye ait tekmil noktaların menazırları bir müstekim istikametinde kâindir.

2°. Q müstevisi (O noktasından geçmeksizin) P müstevisine muvazi olsun. Bu halde P müstevisi üzerinde kâin bir şekil ile bu şeklin menazırı O noktasına nazaran yekdiğerinin mümasilidir.

64. Bir müstevi dahilinde namütenahideki noktalar — Bir müstekim ile bir müstevinin, iki müstevinin muvazatı. — Bir müstevinin menazırında, P müstevisi üzerinde kâin bir *d* müstekimine ait tekmil *m* noktaları (Şekil: 49), umumî surette, Q müstevisi üzerinde kâin bir D müstekimine ait M noktalarının menazırlarından ibarettir.

Halbuki UV firar hattının tekmil noktaları Q müstevisine ait müstekimlerin firar noktaları ayni mezkûr müstekimlerin namütenahideki noktalarının menazırlarıdır. İşte bu keyfiyet nazarı itibara alınarak aşağıdaki kaziyeler söylenebilir:

1°. Bir müstevinin namütenahideki noktaları bir müstekim teşkil ederler.

2°. Bir müstevinin firar hattı, bu müstevinin namütenahideki müstekiminin menazırıdır.

Buna müşabih mülâhazalarla denilebilir ki:

1° Bir müstekim bir müsteviye muvazi ise bu müstekimin namütenahideki noktası, mezkûr müstevinin namütenahideki müstekimi üzerinde kâindir.

2° İki müstevi yekdiğerine muvazi ise mezkûr müsteviler ayni namütenahideki müstekime maliktir.

Gaye halleri nazarı mülâhazaya alınmak suretile de doğruluğu görülebilen bu ifade tarzı evvelce tesadüf edilen istisna hallerinin umumî hale dahil olmalarını temin eder. Bu keyfiyeti göstermek için basar müstevisine ait iki misal söyleyelim: Basar müstevisine

ait bir müstekimin, basar müstevisile muntabık olan bir müstevinin manazırı yoktur, denilecek yerde:

1° Basar müstevisine ait ve O noktasından geçmiyen bir müstekimin menazırı, P irtisam müstevisinin namütenahideki müstekiminden ibarettir;

2° Basar müstevisine ait ve O noktasından geçen bir müstekimin menazırı, P müstevisinin namütenahideki noktasıdır;

3° Basar müstevisile muntabık olan bir müstevinin menazırı P müstevisinin namütenahideki müstekimidir denebilir.

65. Menazırda şekillerin **irtisamî** olan bütün hassaları değişmez. Bilhassa aşağıdaki hassaları söyleyelim:

1° (Mütenahi veya gayri mütenahi mesafede) Bir müstekim istikametinde bulunan üç noktanın menazırları da daima (mütenahi veya gayri mütenahi mesafede) bir müstekim istikametinde kâindir.

2°. Mütelâki (veya muvazi) müstekimlerin menazırları da mütelâki (veya muvazi) müstekimlerdir;

3°. Bir münhaninin bir mümasının menazırı, mezkûr münhaninin menazırı olan münhaniye mümas olan bir müstekimden ibarettir

Menazırda şekillerin **adedî hassalarını** tahvil için evvelce görülen (müstevi hendese, 188) aşağıdaki hassadan istifade olunur: **Bir müellef fırkanın menazırı da bir müellef fırkadır.**

DOKUZUNCU KİTAP

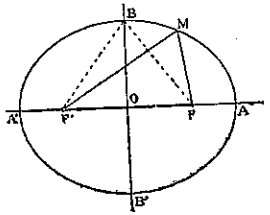
Mahrutiyeler

BİRİNCİ FASIL

Katınakıs

§ I katınakısın hendesî noktai nazardan mütaleası

66. Tarifler — Bir müstevi dahilinde kâin ve bu müstevinin F, F′ gibi sabit iki noktasına olan mesafeleri mecmuu sabit ve verilen bir $2a$ tulüne müsavi olan M noktalarının hendesî mahalline **katınakıs** denir (şekil: 50): $MF + MF' = 2a$. F, F′ noktalarına katınakısın **mihrakları** MF, MF′ kıt'alarına M noktasının **nısıf kutur şuaları**, $2c$ ile gösterilen FF′ mesafesine **mihrakî buüt**, nihayet e ile gösterilen $\frac{c}{a}$ nisbetine de **harici anilmerkeziyet** tesmiye olunur.



Şekil: 50

MFF′ müsellesinin mevcudiyeti:

$$FF' < MF + MF'$$

gayrimüsavatını ve binnetice $c < a$ veya $e < 1$ olmasını icap ettirir. Eğer $c = a$ (veya $e = 1$) ise M noktası FF′ kıt'asını resmeder. Görülüyor ki bu FF′ kıt'ası katınakısın bir gaye şeklidir. Eğer $c = o$ (veya $e = o$) ise F, F′ noktaları yekdiğerile intıbak edip katınakıs ta bir daireye münkalip olur. Şu halde **daire, katınakısın bir gaye şeklinden başka bir şey değildir.**

67. İhtar — Bir katınakısa mümasil olan her şekil bir katınakıstır.

Filhakika, mümaselet nisbeti K olan bir mümaselette M, F, F′

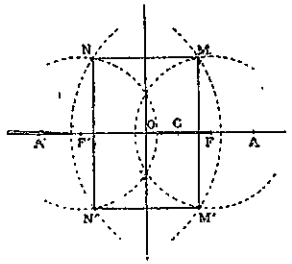
noktalarının mümasilleri nazir nazire m, f, f', ile gösterilecek olursa:

$$fm + f'm = k\ (FM + F'M)$$

olur ki bu da FM + F′M mecmuu sabit olduğu takdirde $fm + f'm$ mecmuunun da sabit olduğunu gösterir.

Şu halde bir **katınakısa müşabih olan her şekil bir katınakıstır.**

68. Katınakısın nokta nokta tersimi — FF′ nün muntasıf noktasından itibaren bu noktanın iki tarafında $OA = OA' = a$ tullerini alalım. OA kıt'asının laâlettayin bir noktası C olsun (şekil: 51). AC, A′C kıt'alarının mecmuu $2a$ya müsavidir.



Şekil: 51

Merkezleri F, F′ ve nısıf kuturları AC, A′C olan dairelri çizelim.

Bu iki dairenin müşterek bir M noktası,

$$MF + MF' = AC + A'C = 2a$$

olduğundan, katınakısın bir noktasından ibarettir. Mezkûr dairelerin tekatu edebilmesi için

$$A'C - AC < FF' < AC + A'C$$

olması lâzım ve kâfidir. İkinci şart kendiliğinden tahakkuk eder. Birinci şarttan ise:

$$(OA' + OC) - (OA - OC) < FF'$$

veya:

$$2OC < FF'$$

veya nihayet:

$$OC < OF$$

elde olunur. Bundan istintaç olunur ki yukarıda nazarı mülâhazaya alınan dairelerin tekatu edebilmesi yani katınakısın bir M noktasının elde edilebilmesi için C noktasının OF kıt'ası üzerinde alınması lâzım ve kâfidir.

O ile F noktası arasında alınan her C noktası için nısıfkuturları mübadele edilerek, katınakısın dört noktası elde olunur.

Aşikâr surette katınakısın tekmil noktaları bu tersimat vasıtasile elde olunabilir.

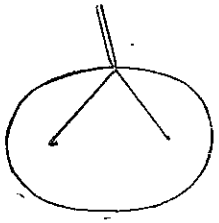
Bu münakaşadan şu da istintaç olunur ki, katınakısın en bü-

yük nısıfkutur şuaı $F'A = a + c$ ve en küçük nısıfkutur şuaı da $FA = a - c$ dir.

69. katınakısın mütemâdi bir hareketle tersimi — Tulü $2a$ olan bir ipin uçları F, F' noktalarına tesbit olunur ve bu ip bir sivri uçla ve meselâ bir kurşunkalemin sivri ucile mütemadiyen gergin tutularak uç ip üzerinde mütemâdi bir hareketle kaydırılacak olursa mezkûr uç aşikâr surette bir katınakısı veya daha doğru olarak, katınakısın FF' nün muayyen bir tarafında kâin olan kısmını resmeder (şekil: 51 m.).

Katınakısın bu tersim tarzı arazi üzerinde pek elverişli olup bahçıvanlar tarafından her vakit kullanılır.

70. Katınakısın tenazur mihverleri ve tenazur merkezi — Madde 68 deki tersimat tekrar edilecek olursa görülür ki MM' noktaları FF' ne nazaran yekdiğerinin mütenazırıdır. Bunun gibi münhani üzerinde kâin her noktanın yine münhani üzerinde bir mütenazırı bulunduğundan **FF' müstekimi katınakısın bir tenazur mihverinden ibarettir.**



Şekil: 51 m.

Diğer taraftan F, F' noktaları bir müstekime yani FF' kıt'asına O muntasıf noktasından resmolunan amuda nazaran yekdiğerinin mütenazırıdır. Binaenaleyh katınakıs üzerinde kâin her M noktasına, bu müstekime nazaran tenazurda yine münhani üzerinde kâin her N noktası tekabül eder. Zira $FN = F'M, F'N = FM$ dir (şekil: 51).

Binaenaleyh **FF' ne O muntasıf noktasından resmolunan amut dahi katınakısın bir tenazur mihveridir. Şu halde o noktası da katınakısın bir tenazur merkezidir (müstevi hendese,31).**

F, F' ne O muntasıf noktasından resmolunan amut üzerinde katınakısın

$$\overline{OB}^2 = \overline{OB'}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{OF}^2$$

müsavatına tevafuk eden B, B' gibi iki noktası vardır (şekil: 50). OB tulü b ile gösterilir. Şu halde $b^2 = a^2 - c^2$ dır

AA' mihverine katınakısın **büyük mihveri** veya **mihrakî mihveri**, BB' mihverine katınakısın **küçük mihveri** ve nihayet A, A', B, B' noktalarına da katınakısın **resleri** tesmiye olunur (şekil: 50).

71. Nahiyeler.

Dava — Mihrakların birinden resmolunan her nısıf müstekim katınakısı bir ve ancak bir noktada kat'eder.

Meselâ katınakısın F' mihrakından çıkan bir $F'Z$ nısıf müstekiminin lâalettayin bir noktası P olsun (şekil: 52). P noktası F' mihrakından uzaklaştığında $PF + PF'$ mecmuu tezayüt eder. Filhakika, P' noktası P nin daha ilerisinde bir nokta olduğuna göre:

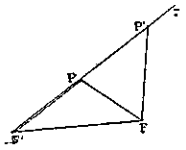
$$PF < PF' + PP'$$

olup bu gayri müsavatın her iki tarafına PF' ilâve olunarak:

$$PF + PF' < P'F + P'F'$$

elde olunur.

Bu keyfiyet anlaşıldıktan sonra, P noktası mezkûr nısıf müstekim üzerinde F' den itibaren gayrimahdut surette uzaklaşacak olursa $PF + PF'$ mecmuu da $2c$ den itibaren gayrimahdut surette tezayüt eder. Binaenaleyh mezkûr mecmuu $2c$ den büyük olan $2a$ kıymetinden bir ve ancak bir defa geçer. İşte bu $2a$ kıymetine tekabül eden P nin mevzii katınakısın bir M noktasından ibarettir. Eğer P noktası F' ile M arasında kâin ise $PF + PF'$ mecmuu $2a$ dan küçük P noktası M in daha ilerisinde ise mezkûr mecmu $2a$ dan büyüktür.

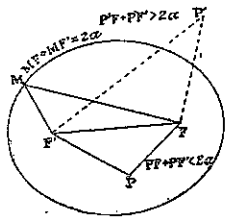


Şekil: 52

Netice — Katınakıs müsteviyi iki nahiyeye ayıran kapalı bir münhanidir. mihrakları havi olan nahiyeye **dahilî nahiye** ve diğerine de **haricî nahiye** denilir.

Yukarıki ispattan aşağıdaki dava dahi istintaç olunur:

Dava — Bir nokta katınakısın dahilinde kâin ise mihraklara olan mesafeleri mecmuu $2a$ dan küçük ve haricinde kâin ise mezkûr mecmu $2a$ dan büyüktür.



Şekil: 53

Mukabil dava — Bir noktanın mihraklara olan mesafeleri mecmuu $2a$ dan küçük ise mezkûr nokta katınakısın dahilinde ve mihraklara olan mesafeleri mecmuu $2a$ dan büyük ise mezkûr nokta katınakısın haricinde kâindir.

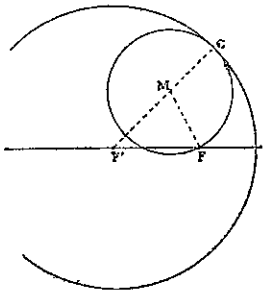
Filhakika, mihraklara olan mesafeleri mecmuu $2a$ dan küçük olan bir nokta P olsun (şekil: 53).

$$PF + PF' < 2a.$$

Bu nokta katınakısın ne üzerinde ve ne de haricinde kâindir. Zira, mezkûr nokta katınakısın üzerinde veya haricinde kâin olsa katınakısın tarifi mucibince, $PF + PF' = 2a$ veya esas dava mucibince $PF + PF' > 2a$ olması lâzımgelir ki bu da farzımıza muhaliftir. Davanın ikinci kısmı da bunun gibi ispat olunur.

Müveccih daireler.

72. Dava — Verilen bir daireye mümas olan ve bu daire dahilinde kâin malûm bir noktadan geçen dairelerin merkezlerinin hendesî mahalli bir katınakıstır.



Şekil : 54

Verilen dairenin merkezi F', nısıf kutru $2a$, bu daire dahilinde kâin malûm nokta F ve nihayet hendesî mahallin bir noktası da M olsun (şekil: 54). Nazarı itibara alınan daireler verilen daireye bizzarure dahilen mümas olacaklarından mezkûr dairelerden birinin verilen daireye mümas olabilmesi için merkezler arasındaki mesafenin nısıf kuturların tefazuluna müsavi yani $MF' = 2a - MF$ veya $MF + MF' = 2a$ olması lâzım ve kâfidir.

Bilmukabele F,F' noktalarile $2a$ tulü lâalettayin intihap edildiğine göre **her katınakıs bu tarzda elde olunabilir.**

Bu izahattan katınakısın aşagıdaki yeni tarifi elde olunur:

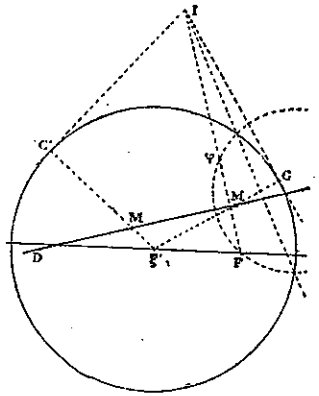
Katınakıs, sabit bir daireye mümas olan ve bu dairenin dahilinde kâin sabit bir noktadan geçen dairelerin merkezlerinin hendesî mahallinden ibarettir.

Verilen dairenin merkezile verilen nokta bu suretle elde olunan katınakısın mihrakları olduğu gibi verilen dairenin nısıfkutru da mezkûr katınakısın $2a$ büyük mihverine müsavidir. Merkezi bir katınakısın mihraklarının birinden ve nısıfkutru da $2a$ dan ibaret olan dairelere katınakısın **müveccih daireleri** tesmiye olunur.

73. Bir müstekim ile bir katınakısın faslı müştereki.

Mes'ele — Bir müstekimin bir katınakısla tekatu noktalarını bulmak matluptur (katınakıs çizilmemiş, mihrakları ve büyük mihverile verilmiş farzolunmaktadır).

Verilen mihraklar F,F' büyük mihver $2a$ ve bir müstekim de D olsun (şekil: 55). Bu müstekimin bir M noktasının katınakısa ait bir nokta olabilmesi için mezkûr noktanın F ten geçen ve (F') müveccih dairesine mümas olan bir dairenin merkezi olması lâzım ve kâfidir. Halbuki F ten geçen ve merkezi D üzerinde bulunan bir daire F noktasının D müstekimine nazaran mütenazırı olan φ noktasından da geçer. Bilmukabele, F ve φ noktalarından geçen bir dairenin merkezi D müstekimi üzerinde kâindir.



Şekil : 55

O halde mes'ele F, φ gibi malûm iki noktadan geçen ve malûm bir (F') dairesine mümas olan bir dairenin merkezinin tayini mes'elesine müncer olur ki bu evvelce halledilmiştir (Müstevi hendese, 271).

Mezkûr mahalde verilen izahata tevfikan:

(F') dairesini kat'etmek üzere F ve φ noktalarından bir daire geçirmek; Fφ müstekimini I noktasında kat'edinciye kadar iki dairenin müşterek veterini resmetmek; nihayet I noktasından (F') dairesine mümaslar resmetmek icap eder (şekil: 55).

Bu mümasların C,C' temas noktaları (Eğer bu noktalar mevcut ise) F' noktasına vasledilecek olursa bu suretle elde olunan müstekimler D müstekimini aranılan iki dairenin merkezlerinde yani D müstekiminin katınakısı kat'ettiği M,M' noktalarında kat'ederler. Evvelce görüldüğü veçhile (müstevi hendese, 271):

φ noktası (F') müveccih dairesinin dahilinde kâin ise mes'elenin M,M' gibi **iki halli vardır.** Yani D müstekimi katınakısı iki noktada kat'eder. φ noktası (F') müveccih dairesinin üzerinde kâin ise mes'elenin **bir halli vardır.** Yani D müstekiminin katınakısla müşterek ancak bir noktası vardır ki bu noktaya da biribirile muntabık olmuş iki müşterek nokta nazarile bakmak ikıtza eder. Zira, bu halde I noktasından (F') dairesine resmedilen mümaslar (şekil: 55) yekdiğerile intıbak eder. Bu takdirde D müstekimi, biraz aşağıda ispat edileceği veçhile, katınakısa **Mümastır.** Nihayet φ noktası (F') müveccih daire sinin haricinde kâin ise mes'elenin **halli yoktur.** Yani D müstekimi katınakısı kat'etmez.

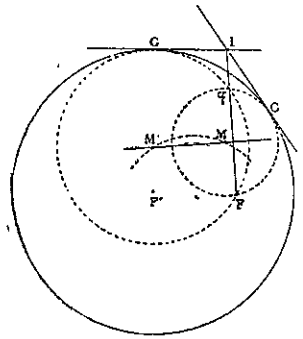
İhtar — Eğer D müstekimi F noktasından geçerse yukarıki

tersimatın yapılması artık mümkün olmaz. Bu takdirde F mihrakı yerine F′ mihrakı alınarak bu sonuncu noktadan itibaren yukarıki tersimat tatbik olunur.

74. Katınakısın müması — Bir münhaninin bir noktasındaki mümasının umumî tarifine tevfikan katınakısın bir M noktasındaki **müması** diye katınakıs üzerinde alınan M e yakın bir M′ noktası mezkûr münhani üzerinde kalmak üzere gayrimahdut surette M noktasına yaklaştığında MM′ katının aldığı gaye vaziyetine denir.

Aşağıdaki dava bu gaye vaziyetinin mevcudiyetini göstereckıtir:

75. Dava — Katınakısın bir noktasında bir müması mevcut olup bu mümasta mezkûr noktaya müntehi nısıf kutur şualar tarafından teşkil olunan zaviyenin haricî nasıfından ibarettir.



Şekil : 56

Katınakısın bir noktası M ve buna yakın diğer bir noktası da M′ olsun (şekil: 56). Bu noktalar F den geçen ve (F′) müveccih dairesine C,C′ noktalarında mümas olan dairelerin merkezlerinden ibarettir (72). (M), (M′), (F′) dairelerinin cezrî merkezi C,C′ noktalarındaki mümasların I tekatu noktasıdır. (M) ve (M′) dairelerinin cezrî mihveri ise bu dairelerin müşterek F noktasile I noktasından geçer. Binaenaleyh mezkûr cezrî mihver FI müstekiminden ibarettir. Bundan istintaç olunur ki MM′ merkezler hattı FI ye amuttur.

Bu anlaşıldıktan sonra, M′ noktasının, katınakıs üzerinde kalmak üzere, gayrimahdut surette M noktasına yaklaştığını farzedelim. Bu takdirde C′ noktası C noktasına ve I noktası da C noktasına gayrimahdut surette yaklaştığı gibi bunun neticesi olarak FI müstekimi de gayrimahdut surette FC müstekimine yaklaşır. Bu esnada MM′ müstekimi mütemadiyen FI ye amut kaldığından MM′ müstekiminin bir gaye vaziyeti mevcuttur ki o da M noktasından FC ye resmedilen amuttan ibarettir.

Binaenaleyh katınakısın M noktasında bir MT müması vardır ki o da FC ye muntasıf noktasında amut olan müstekimdir (şekil: 57). F ve C noktaları MT mümasına nazaran mütenazır

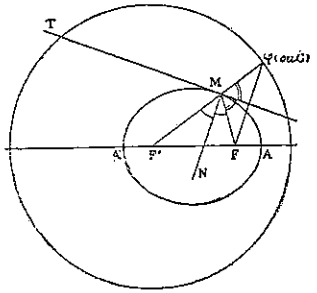
noktalar olduklarından mezkûr mümas $\widehat{FMC}$ zaviyesinin nasıfı yani $\widehat{FMF'}$ zaviyesinin haricî nasıfı olup dava sabit olur.

Netice — Katınakısın M noktasındaki MN nâzımı $\widehat{FMF'}$ zaviyesinin dahilî nasıfıdır (şekil: 57).

İhtar — Yukarıki ispat ile birlikte bir müstekim ile bir katınakısın faslı müşterekinin mütaleası nazarı itibara alınacak olursa derhal aşağıdaki netice elde olunur:

Bir müstekimin bir katınakısa mümas olabilmesi için mihraklardan birinin bu müstekime nazaran mütenazırının diğer mihraka ait müvveccih daire üzerinde kâin olması lâzım ve kâfidir.

Bu netice aşağıdaki muadil tarzda dahi ifade olunabilir:



Şekil : 57

Bir dairenin müteharrik bir noktasını dahilinde kâin sabit bir noktaya vasleden kıt'aya muntasıf noktasından resmolunan amut müstekimin zarfı bir katınakıstır.

76. Katınakısın bir mümasının amelî tersimi — (F′) müveccih dairesinin bir φ noktası F mihrakına vaslile Fφ kıt'asına H muntasıf noktasından bir amut resmolunursa katınakısın bir HT müması elde edilmiş olur (şekil: 58). M temas noktasını elde etmek için φ noktasını F′ e vasletmek kifayet eder. Bu müstekimin HT amudunu kat'ettiği nokta M noktasını verir.

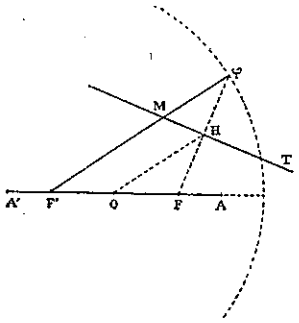
Katınakısın mümasının hassaları.

77. Dava I. Bir katınakısın bir mihrakının bu katınakısın mümaslarına nazaran mütenazırlarının hendesî mahalli, merkezi diğer mihraktan ibaret olan müveccih dairedir.

Bu dava esas itibarile yukarıda elde ettiğimiz neticeden farklı değildir (75, İhtar). Eğer F mihrakının D müstekimine nazaran φ mütenazırı (F′) müveccih dairesi üzerinde kâin değilse mezkûr müstekimin katınakısla müşterek 2 veya O noktası vardır. Eğer φ noktası (F′) müveccih dairesi üzerinde kain ise D müstekiminin katınakısla müşterek bir noktası mevcut olup mezkûr müstekim katınakısa mümastır (şekil 57).

78. Dava II. Bir katınakısın mihraklarının mümasları üzerindeki mürtesemlerinin hendesî mahalli, kutru büyük mihverden ibaret olan dairedir.

Filhakika, F mihrakının, bir an için lâalettayin farzettiğimiz bir MT müstekimi üzerindeki mürtesemi H ve F noktasının mezkûr müstekime nazaran mütenazırı da φ olsun (şekil: 58).



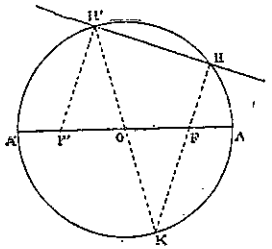
Şekil: 58

MT müstekiminin katınakısın bir müması olabilmesi için φ noktasını (F') müveccih dairesi üzerinde kâin yani $F'\varphi = 2a$ olması veya $FF'\varphi$ müsellesinde iki dıl'ın muntasıf noktaları arasına vasledilen müstekim üçüncü dıl'ın yarısına müsavi olduğundan, $OH = a$ olması lâzım ve kâfidir. Binaenaleyh H noktasının hendesî mahalli, merkezi O ve nısıf kutru a yani kutru AA' büyük mihverinden ibaret olan daire olmakla dava sabit olur

Bu daireye katınakısın **aslî dairesi** tesmiye olunur.

Aşikâr surette nazarı itibara alınan mihrak ne olursa olsun bu hendesî mahal aynidir.

Lâzime — Bir kaim zaviyenin resi bir daire resmeder ve bu esnada kaim dılılarından biri de mezkûr dairenin dahilinde kâin sabit bir noktadan geçerse diğer kaim dılı sabit bir katınakısa mümas kalır.



Şekil: 59

79. Dava III. Bir katınakısın mihraklarının lâalettayin bir mümasa olan mesafeleri hasılızarbı sabit ve küçük mihverin murabbaına müsavidir.

Bir katınakısın F,F' mihraklarının lâalettayin bir mümas üzerindeki mürtesemleri H,H' olsun (şekil: 59). EH müstekiminin aslî daireyi kat'ettiği ikinci noktayı K ile gösterelim. $\widehat{H}$ zaviyesi kaime olduğundan H'K aslî dairenin bir kutrudur. Binaenaleyh FK, F'H' kıt'aları O noktasına nazaran mütenazır oldukları için yekdiğerine müsavidir. Şuhalde,

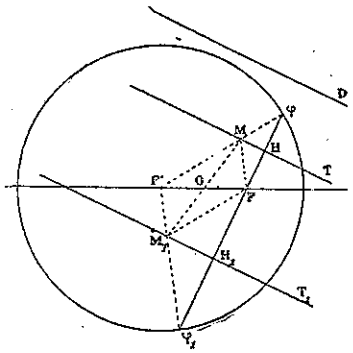
$$FH.F'H' = FH.FK = FA.FA' = (a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = b^2$$

olup dava sabit olur.

Mümaslar üzerine mes'eleler.

80. Mes'ele I. Bir katınakısa verilen bir istikamete muvazi bir mümas resmetmek matlûptur.

Mihraklarile ve büyük mihverile malûm olan bir katınakısa verilen D istikametine muvazi bir mümas resmi matlûp olsun. Bir F mihrakının bir mümasa nazaran mütenazırının (F') müveccih dairesi üzerinde bulunması icap ettiğinden F noktasından verilen D istikametine bir amut resmolunur (şekil: 60). Bu amut müveccih daireyi φ ve φ_1 gibi iki noktada kat'eder. Fφ ve $F\varphi_1$ kıt'alarına muntasıf noktalarından resmedilen amutlar matlûp mümaslardan ibarettir. Mes'elenin daima iki ve ancak iki halli vardır. Yani bir katınakısa verilen bir istikamete muvazi daima iki ve yalnız iki mümas resmolunabilir.



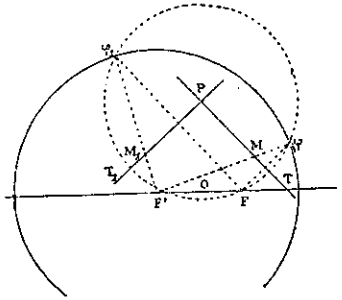
Şekil: 60

Ihtar — Mezkûr mümasların M, M_1 temas noktaları tersim ve şekle dikkat edilecek olursa φMF, $\varphi F'\varphi_1$ müselleslerinin mütesaviyüssakeyn oldukları görülür. Binaenaleyh $MF, F'\varphi_1$ müstekimleri yekdiğerine muvazidir. Ayni veçhile görülür ki $M_1F, F'\varphi$ müstekimleri de yekdiğerine muvazidir. Şuhalde MFM_1F' münharifi bir mütevaziyülâdlıadan ibaret olup binnetice MM_1 müstekimi katınakısın O merkezinden geçer, yani M ve M_1 noktaları kutren mukabil noktalardır.

81. Mes'ele II. Bir katınakısa müstevisi dahilinde verilen bir noktadan bir mümas resmetmek matlûptur.

Verilen bir nokta P olsun (bu noktanın katınakıs üzerinde bulunmadığını farzediyoruz. Zira aksi halde bu noktadaki mümasın nasıl resmedileceği evvelce gösterilmiştir.) Mes'eleye halledilmiş nazarile bakalım, ve P den resmedilen bir mümas PT ile gösterelim (şekil: 61). F mihrakının bu müstekime nazaran φ mütenazırı (F') müveccih dairesi üzerinde kâindir. Binaenaleyh, tenazur dolayısile, PF ve Pφ yekdiğerine müsavi olup binnetice φ

noktasının (F′) müveccih dairesile merkezi P ve nısıf kutru PF olan dairenin tekatu noktalarının birinde kâin olması lâzımgelir. Bilmukabele φ noktası bu suretle tersim edildiğine göre Fφ ye muntasıf noktasından resmolunan amut P noktasından geçen mümaslardan birini verir.



Şekil: 61

Münakaşa — Mezkûr iki dairenin tekatu edebilmesi için dılıları bu dairelerin PF′ merkezler hattından ve PF, 2a nısıf kutrundan ibaret olan bir müsellesin tersim olunabilmesi, bunun için de mezkûr tullerden **lâalettayin** birini diğerlerinin mecmuundan küçük ve tefazulundan büyük olması lâzım ve kâfidir:

$$|PF - PF'| < 2a < PF + PF'$$

PFF′ müsellesinde

$$|PF - PF'| < 2c$$

olduğundan birinci şart daima tahakkuk eder.

İkinci şart ise P noktasının katınakısın **haricinde kâin** olduğunu ifade eder. Binaenaleyh bir P noktası katınakısın haricinde veya üzerinde veya dahilinde bulunduğuna göre bu noktadan katınakısa 2,1 veya O mümas resmolunabilir.

82. Ponsöle Poncelet davaları — Bir katınakısa haricinde kâin bir P noktasından PM,PM₁ gibi iki mümas resmolunursa:

1° Bu iki mümas mihrakların herhangi birinden müsavi zaviyeler altında görülür;

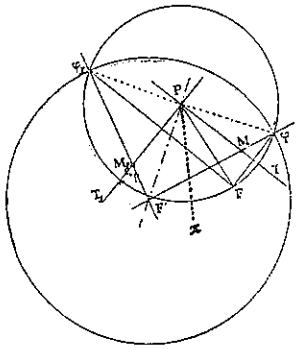
2° Mezkûr mümasların aralarında teşkil eyledikleri zaviyenin nasıfları, verilen P noktasını mihraklara vasleden müstekimlerin aralarında teşkil eyledikleri zaviyenin nasıflarının aynidir.

F,F′ mihrakları ve (F′) müveccih dairesile muayyen olan bir katınakısa haricinde kâin bir P noktasından resmolunan mümaslar PM,PM₁ olsun (şekil: 62).

1° F mihrakının mezkûr mümaslara nazaran mütenazırları olan φ,φ₁ noktaları (F′) dairesile merkezi P olan ve F ten geçen dairenin tekatu noktalarıdır. M,M₁ temas noktaları nazir nazire

F′φ, F′φ₁ müstekimleri üzerinde kâindir. İki dairenin merkezleri arasına vasledilen müstekim her iki dairenin de bir tenazuru mihveri olduğundan F′P müstekimi F′M ve F′M₁ müstekimlerinin zaviyesinin nasıflarından biri olup matlup sabit olur.

2° φ,φ₁ noktaları PF′ müstekimine nazaran mütenazır olduklarından $\widehat{\varphi PF'}$, $\widehat{F'P\varphi_1}$ zaviyeleri dahi yekdiğerine müsavidir.



Şekil: 62

Şimdi $\widehat{FPF'}$ zaviyesinin nasıfını Px ile gösterelim. Ve fikri tespit için PM, PM₁ mümaslarından PM in bu nasıfa nazaran PF müstekimile ayni tarafta bulunduğunu farzedelim. Buhalde $\widehat{MPx}$ zaviyesi $\widehat{MPF}$ zaviyesile ($\widehat{\varphi PF}$ zaviyesinin yarısı) $\widehat{FPx}$ zaviyesinin ($\widehat{FPF'}$ zaviyesinin yarısı) mecmuuna müsavidir. Binaenaleyh mezkûr zaviye $\widehat{\varphi PF} + \widehat{FPF'}$ mecmuunun yani $\widehat{\varphi PF'}$ zaviyesinin yarısından ibarettir.

Ayni veçhile $\widehat{xPM_1}$ zaviyesi, $\widehat{FP\varphi_1}$ zaviyesinin yarısı olan $\widehat{FPM_1}$ zaviyesile $\widehat{FPF'}$ zaviyesinin yarısı olan $\widehat{FPx}$ zaviyesinin tefazulundan ibarettir. Şuhalde mezkûr zaviye, $\widehat{FP\varphi_1}$ ve $\widehat{FPF'}$ zaviyelerinin tefazulu olan $\widehat{F'P\varphi_1}$ zaviyesinini yarısına müsavidir. $\widehat{\varphi PF'}$, $\widehat{F'P\varphi_1}$ zaviyeleri yekdiğerine müsavi olduğundan $\widehat{MPx}$, $\widehat{xPM_1}$ zaviyeleri dahi biribirine müsavidir. Bundan başka Px müstekimi $\widehat{MPM_1}$ zaviyesinin dahilinde kâindir: binaenaleyh Px müstekimi $\widehat{MPM_1}$ zaviyesinin dahi nasıfındann ibaret olmakla dava sabit olur.

Lâzime — Mümaslardan birinin PF¹ müstekimile teşkil eylediği zaviye diğerinin PF′ müstekimile teşkil eylediği zaviyeye müsavidir.

83. Dava — Katınakısın haricine mersum kaim zaviyelerin reslerinin hendesî mahalli, katınakısla müttehidülmerkez ve nısıf kutru $\sqrt{a^2+b^2}$ olan bir dairedir.

Filhakika, $\widehat{MPM_1}$ zaviyesinin kaime olabilmesi için (şekil: 62) bu zaviyenin iki misli olan $\widehat{\varphi P \varphi_1}$ zaviyesinin bir nısıf müstevi zaviyeye yani iki kaimeye müsavi olması lâzım ve kâfidir. Bu takdirde φ ve φ_1 noktaları, merkezi P olan ve F ten geçen dairede kutren mukabil noktalardan ibaret olup PF′ müstekimi $\varphi\varphi_1$ e muntasıf noktasında amuttur. Bu şart ise $\widehat{\varphi PF'} = 1$ kaime şartına veya

$$\overline{PF'}^2 + \overline{P\varphi}^2 = \overline{F'\varphi}^2$$

veya

$$\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = 4a^2$$

veya katınakısın merkezi O ile gösterilmek üzere

$$2\,\overline{OP}^2 + \frac{\overline{FF'}^2}{2} = 4a^2$$

şartına muadil olup (müstevi hendese, 246) buradan da

$$\overline{OP}^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2$$

veya

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2}$$

istihsal olunur.

Binaenaleyh P noktasının hendesî mahalli, merkezi O ve nısıf kutru $\sqrt{a^2+b^2}$ olan daireden ibaret olmakla dava sabit olur.

Bu daireye katınakısın **rüyeti kaime dairesi** tesmiye olunur. Bu daire, bilhassa, katınakısın dört resindeki mümasların teşkil eyledikleri mustatilin haricine mersumdur.

§ 2.— Katınakısın tahlilî noktai nazardan mütaleası

84. Katınakısın muadelesi — Katınakısın mihraklarından geçen mihverini faslalar mihveri, FF′ e O muntasıf noktasından resmolunan amudu tertipler mihveri ve binnetice katınakısın O merkezini de mebde olarak alalım (şekil: 63.) Malûm olduğu veçhile vaziyeleri nazir nazire x', y' ve x'', y'' olan iki nokta arasındaki mesafe d olduğuna göre

$$d = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2}$$

dır.

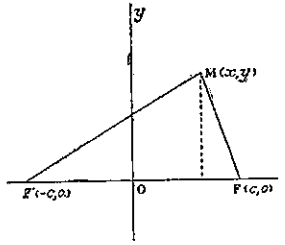
Vaziyeleri x, y olan bir M noktasının katınakıs üzerinde bulunabilmesi için

$$MF + MF' = 2a$$

veya

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (1)$$

olması lâzım ve kâfidir. (1) muadelesinin iki tarafının murabbaı alınarak bu muadeleye muadil olan (zira muadelenin her iki tarafı da müspettir).



Şekil: 63

$$\sqrt{[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2]} = 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2$$

muadelesi elde olunur. Bu sonuncu muadelenin her iki tarafının da murabbaını alalım. Cebirde görüldüğü veçhile mezkûr muadeleye muadil olan

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx) = [2a^2 - (c^2 + x^2 + y^2)]^2 \\ 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 > 0 \end{cases}$$

heyeti elde olunur.

$x + y + c$ mecmuunu muhafaza etmek üzere yukarıki muadeledeki ifadeler tevsi olunarak kolaylıkla

$$\begin{cases} (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) & (2) \\ 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 > 0 & (3) \end{cases}$$

bulunur.

3° Gayrimüsavat şartı, x yerine (2) muadelesinden istihraç edilen kıymeti konarak, tahvil olundukta mezkûr şart:

$$2a^2 - c^2 - y^2 - \left(a^2 - \frac{a^2y^2}{a^2 - c^2}\right) > 0$$

$$a^2 - c^2 + \frac{c^2y^2}{a^2 - c^2} > 0$$

veya

$$(a^2 - c^2)\left(1 + \frac{c^2y^2}{(a^2 - c^2)^2}\right) > 0$$

veya ikinci mazrup müspet olduğundan

$$a^2 - c^2 > 0$$

veya en nihayet

$$a > c$$

şartına müncer olur.

Hulâsa, $a > c$ farzedilecek olursa (2) muadelesi $M(x, y)$ noktasının katınakısa ait bir nokta olması için lâzım ve kâfi olan şarttan ibarettir. $a^2 - c^2 = b^2$ konulacak olursa mezkûr muadele

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

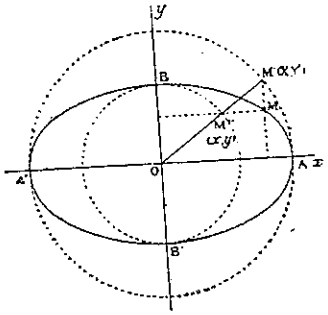
veya

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şeklinde yazılabilir. İşte bu muadeleye **katınakısın muadelesi** denilir.

Temrin — MF, MF′ nısıf kutur şualarının kıymetleri $a - \frac{cx}{a}$ ve $a + \frac{cx}{a}$ olduğunu ispat ediniz ($\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2$ ı hesap ve bundan MF′ — MF i bulunuz).

85. Katınakısın muadelesinin tefsiri — Katınakısın muadelesi gayet basit iki tarzda tefsir olunabilir. Şöyle ki:



şekil: 64

Merkezi O ve nısıf kuturu a olan daireyi nazarı mülâhazaya alalım (şekil: 64).

Bu dairenin lâalettayin bir M′ noktasının vaziyeleri X, Y olsun. Malûm olduğu veçhile bu dairenin muadelesi

$$X^2 + Y^2 = a^2$$

dır. Şimdi bu dairenin her noktasının tertibini, faslasını değiştirmeksizin $\frac{b}{a}$ ile zarbedelim. Bu suretle elde olunan M noktalarının tertipleri y ile gösterilirse $y = \frac{b}{a} Y$ olur.

Binaenaleyh M noktalarının hendesî mahallini teşkil eden münhaninin muadelesi,

$$X^2 + \frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2$$

veya

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dir.

Şuhalde mezkûr münhani mihverleri a, b den yani aslî dairesi verilen daireden ibaret olan bir katınakıstır. Binaenaleyh denilebilir ki:

Katınakıs, bir dairenin noktalarının tertiplerini, faslalarını değiştirmeksizin, ayni nispet dahilinde tenkis ederek elde olunan noktaların hendesî mahallinden ibarettir.

Ayni veçhile merkezi O ve nısıf kutru b olan daireyi nazarı itibara alalım (şekil: 64). Bu dairenin muadelesi $x^2 + y^2 = b^2$ dır. Bu daire üzerinde kâin noktaların tertiplerini değiştirmeksizin faslalarını $\frac{a}{b}$ ile zarbedelim: $X = \frac{a}{b} x$. Bu suretle elde olunan münninin muadelesi

$$\frac{b^2 X^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

veya

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

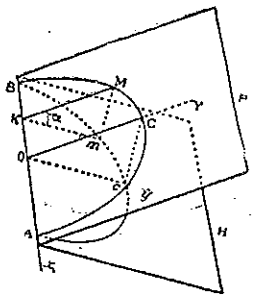
den ibaret olup bu suretle evvelki katınakıs elde edilmiş olur. Binaenaleyh denilebilir ki: **Katınakıs, dairenin noktalarının faslalarını, tertiplerini değiştirmeksizin, ayni nispet dahilinde tezyit ederek elde olunan noktaların hendesî mahallinden ibarettir.**

Bir dairenin kaim mürtesemi.

86. Dava — Bir dairenin bir müstevi üzerindeki kaim mürtesemi bir katınakıstır.

Verilen irtisam müstevisi yerine verilen dairenin O merkezinden bu müsteviye muvazi olarak resmolunan H müstevisi alınacak olursa dairenin mürteseminin şekli değişmez. Mezkûr dairenin H

müstevisi dahilindeki kutru AB, lâalettayin bir noktası M, bu noktadan AB ye ve H müstevisine resmedilen amutlar da MK ve Mm olsun (şekil: 65). $\widehat{MKm}$ zaviyesi daireyi ihtiva eden P müstevisile H irtisam müstevisinin teşkil ettiği iki vecihli zaviyenin α mikyas zaviyesinden ibarettir. Bu anlaşıldıktan sonra OX mihveri olarak O dan A ya müteveccih olan OA müstekimini, P müstevisinde OY mihveri olarak O noktasında Ox e amut olan mihveri ve H müstevisinde Oy mihveri olarak ta OY mihverinin bu müstevi üzerindeki mürtesemini (ki Ox e dahi O noktasında amuttur) alalım. M ve m noktalarının vaziyetlerini de nazir nazire x, y ve x, Y ile gösterelim. OA $= a$ konularak



Şekil: 65

$$x^2 + Y^2 = a^2 \text{ ve } y = Y \cos\alpha$$

veya Y in ikinci muadeleden elde olunan kıymeti birinci muadelede yerine konularak

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 a} = a^2$$

veya

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a\cos\alpha)^2} = 1$$

elde olunur ki bu da nısıf mihverleri a ve $a.\cos\alpha$ olan bir katınakısın muadelesinden ibaret olmakla dava sabit olur.

İhtar — Verilen daire irtisam müstevisine nazaran lâalettayin vaziyette bulunduğuna göre:

1° elde olunan katınakısın büyük mihveri, verilen dairenin irtisam müstevisine muvazi olan kutrunun mürteseminden ibarettir.

2° elde olunan katınakısın küçük mihveri ise, verilen dairenin evvelki kutra amut olan kutrunun mürteseminden ibarettir.

87. Bilmukabele her katınakısa bir dairenin mürtesemi nazarile bakılabilir.

Filhakika, yukarki muhakemeden istidlâl olunacağı veçhile mezkûr katınakıs kendi aslî dairesini büyük mihveri etrafında cosinusü $\frac{b}{a}$ ya müsavi bir α zaviyesi kadar devrettirilerek elde olunan dairenin mürtesemidir.

Tatbikat.

A. Katınakısa ait tersimat.

88. Bir katınakısla bu katınakısın aslî dairesini nazarı itibara alalım. mezkûr katınakısa kendi aslî dairesinin AA′ etrafında α zaviyesi kadar $\left(\cos\alpha = \frac{b}{a}\right)$ devranile elde edilen dairenin mürtesemi nazarile bakılabileceği gibi aslî daireye de bu sonuncu dairenin AA′ etrafındaki tatbik vaziyeti nazarile bakılabilir.

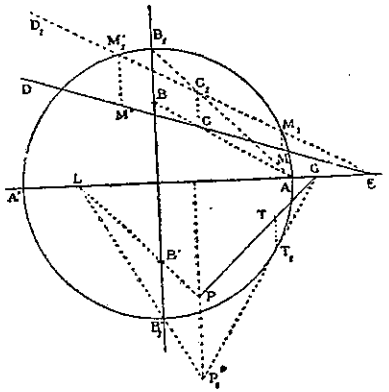
Bu suretle bir katınakıs ve bir müstekime ait mes'eleleri bir daire ve bir müstekime ait ayni mes'elelere irca etmek ve resmî hendesede mütalea edilen tatbik usulünün (1) hassalarından istifade ederek mezkûr mes'slelerin basit bir grafik hallini elde etmek kabil olur. Tatbik usulünün hassaları şunlardır:

1° — Bir nokta ile bu noktanın tatbik vaziyeti AA′ şarniyerine amut ayni bir müstekim üzerinde kâindir:

2° Bir müstekim ile bu müstekimin tatbik vaziyeti AA′ şarniyerini ayni bir noktada kat'eder.

Şimdi evvelce hallettiğimiz iki mes'eleye bu usulü tatbik edelim.

89. 1° Bir müstekim ile bir katınakısın faslı müştereki — Verilen D müstekimi ile AA′, BB′ mihverlerile malûm olan bir katınakısın tekatu noktalarını bulmak matlup olsun (şekil: 66). Mezkûr katınakısın aslî dairesini çizelim. Ve bu dairenin küçük mihveri kat'ettiği noktaları B_1, B'_1 ile gösterelim. Verilen D müstekiminin D_1 tatbik vaziyetini arayalım. Bir taraftan mezkûr müstekimin AA′ mihverini kat'ettiği E noktası kendi tatbik vaziyetile muntabık olduğu gibi diğer taraftan D müstekiminin AB yi kat'ettiği C noktası da, tatbikten sonra, AB_1 üzerinde kâin C_1 noktasına gelir. Şuhalde EC_1 müstekimi D müstekiminin aranılan D_1 tatbik vaziyetinden ibarettir. D_1 müstekiminin aslî daireyi kat' ettiği



Şekil: 66

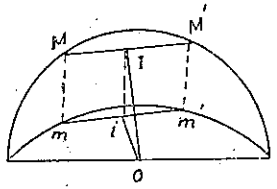
(1) Hendesei resmiye dersleri — Hüsnü Hamit (sahife 102)

noktalar M_1, M'_1 olsun. Bu noktalar D müstekiminin katınakısı kat'ettiği noktaların tatbik vaziyetlerinden başka birşey değildir. Binaenaleyh bu noktalardan AA' şarniyerine birer amut resmolunursa bu amutların D müstekimini kat'ettiği M,M' noktaları aranılan noktalardan yani D müstekiminin katınakısı kat'ettiği noktalardan ibaret olur.

90. 2° — **Bir noktadan katınakısa resmolunan mümaslar**- Lâalettayin bir P noktasından verilen katınakısa bir mümas resmi matlup olsun. Mezkûr noktanın P_1 tatbik vaziyetini arayalım (şekil: 66). P B' müstekimini resmedelim ve AA' ü kat'ettigi noktayı L ile gösterelim. LB' müstekiminin tatbik vaziyeti L B'_1 den ibarettir. Şuhalde P noktasının tatbik vaziyeti P den şarniyere resmedilen amudun LB'_1 müstekimini kat'ettiği P_1 noktasında kâindir. P_1 noktasındaen aslî daireye bir P_1T_1 mümasını resmedelim. Bu mümasın AA' ü kat'ettiği nokta G olsun. Bu mümasın tatbikten evvelki vaziyeti PG den ibaret olur ki bu da matlup mümastan ibarettir. T_1 noktasından şarniyere bir amut resim ve bu amudun PG müstekimini kat'ettiği T noktası işaret edilerek elde olunan mümasın temas noktası bulunur.

B. Kuturlar.

91. Dava.— hatınakısın malûm bir istikamete muvazi veterlerin muntasıf noktalarının hendesî mahalli, merkezden geçen bir müstekim (bu müstekimin münhani dahilinde kalan parçasıdır) dir.



Şekil: 67

Filhakika, katınakısın malûm bir istikamete muvazi bir veteri mm' olsun (şekil: 67).

Bu katınakısa bir dairenin mürtesemi nazarile bakılabilir.

Mezkûr dairenin mürtesemi *mm'* olan veterini MM' ile gösterelim. Bu MM' veterleri de sabit bir istikamete muvazidirler (muvazi birtakım müstevilerin bir müstevile faslı müşterekleri olduklarından).

Binaenaleyh, dairenin MM' veterlerinin muntasıf noktalarının hendesî mahalli, mezkûr veterlerin müşterek istikametine amut Ol kutrundan ibarettir. *mm'* veterlerinin muntasıf noktalarının hendesî mahalli ise Ol kutrunun O*i* mürteseminden ibaret olmakla

dava sabit olur. Bu hendesî mahalle, katınakısın verilen istikamete nazaran **müzdeviç kutru** denilir.

92. Bir katınakısın verilen bir istikamete nazaran müzdeviç olan kutru bu istikamete muvazi mümasların temas noktalarından geçtiği gibi bu istikamete muvazi lâalettayin bir veterin nihayet noktalarından resmolunan mümasların tekatu noktasından dahi geçer.

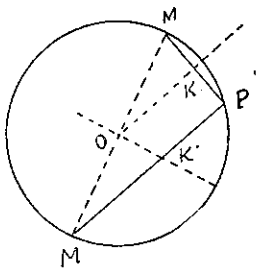
Filhakika, biliyoruz ki dairede Ol kutru MM' veterine (şekil 67) muvazi olarak resmolunan mümasların temas noktalarından geçtiği gibi daireye M,M' noktalarından resmolunan mümasların tekatu noktalarından dahi geçer.

Dairenin bu hassaları kaim bir irtisam ile değişmiyeceğinden ayni hassalar katınakısta dahi mevcut olup dava sabit olur.

Müzdeviç kuturlar.

93. Dava — Eğer bir katınakısın iki kutrundan biri diğerine naznran müzdeviç olan veterlerine muvazi ise bilmukabele bu ikinci kutur da birincinin müzdeviç veterlerine muvazidir.

Zira, bir katınakısın bir D kutrunun diğer bir D' kutruna nazaran müzdeviç olan veterlere muvazi olabilmesi için lâzm ve kâfi olan şart, bu iki D,D' kutrunun mürtesemi nazarı mülâhazaya alınan katınakıstan ibaret olan dairenin yekdiğerine amut iki kutruna tekabül edebilmelerinden ibarettir (91). Bu şart ise aşikâr surette mütekabildir. Yani nazarı mülâhazaya alınan iki kutur aralarında mübadele edildiğinde değişmez.



Şekil: 68

Böyle katınakısın iki kutrundan herbiri diğerine muvazi veterleri iki müsavi kısma ayırırsa bu kuturlara **müzdeviç kuturlar** denilir.

94. Dava— Katınakısın bir noktasını bu münhaninin kutren mukabil iki noktasına vasleden veterler, müzdeviç iki kutra muvazidir.

Filhakika, katınakısın bir P noktasını kutren mukabil M,M' noktalarına vasleden veterler PM, PM' olsun (şekil: 68).

Bu iki veter nazir nazire katınakısın O merkezini PM', PM kıt'alarının K',K muntasıf noktalarına vasleden OK',OK müstekim-

lerine muvazidir. Halbuki OK müstekimi PM istikametine ait müzdeviç kuturdan ibaret olmakla dava sabit olur.

Böyle müntehalarından biri müşterek ve diğer müntehaları kutren mukabil olan PM, PM′ gibi iki vetere **mütemmim veterler** denilir.

Şuhalde yukarıki dava aşağıdaki tarzda dahi ifade olunabilir: **Mütemmim iki veter, müzdeviç iki kutra muvazidir.**

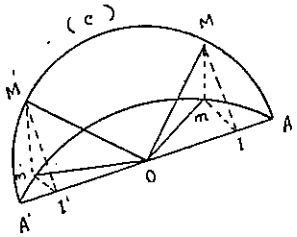
95. Apolonyos davaları — Bir katınakısta:

1°. Lâalettayin iki müzdeviç nısıf kutur üzerine resmedilen mütevaziyülâdlaın sahası sabit ve iki nısıf mihver üzerine resmedilen mustatilin sahasına müsavidir.

2°. İki müzdeviç nısıf kutrun murabbaları mecmuu sabit ve iki nısıf mihverin murabbaları mecmuuna müsavidir.

1°. Bir katınakısın lâalettayin iki müzdeviç nısıf kutru Om, Om' olsun (şekil: 69).

Bir (C) dairesinin mürtesemi nazarile bakılabilen bu katınakısta mezkûr müzdeviç nısıf kuturlar dairenin yekdiğerine amut iki OM, OM′ nısıf kutrunun mürteseminden ibarettir. Şuhalde Om, Om' müzdeviç nısıf kuturları üzerine resmolunan mütevaziyülâdla, dairede OM, OM′ nısıf kuturları üzerine resmolunan murabbaın mürteseminden başka birşey değildir. Binaenaleyh mezkûr mütevaziyülâdlaın sahası, OM,OM′ üzerine resmedilen murabbaın sahasının yani a^2 nın daire müstevisile katınakıs müstevisi arasında teşekkül eden α zaviyesinin Cosinusü yani $\frac{b}{a}$ ile hasılızarbı olan $a^2 . \frac{b}{a} = ab$ ye müsavi olmakla matlup sabit olur.



Şekil: 69

2°. M, m noktalarının AA′ üzerindeki müşterek mürtesemleri I ve M', m' noktalarının AA′ üzerindeki müşterek mürtesemleri de I′ olsun (şekil: 69).

MmO, $M'm'O$ kaim zaviyeli müselleslerinden kolayca

$$\overline{Om}^2 + \overline{Om'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 - (\overline{Mm}^2 + \overline{M'm'}^2) \qquad (1)$$

elde olunur.

Diğer taraftan $Mm = MI . \sin\alpha$, $M'm' = M'I' . \sin\alpha$ olup buradan da

$$\frac{Mm}{MI} = \frac{M'm'}{M'I'} = \sin\alpha$$

veya

$$\frac{\overline{Mm}^2}{\overline{MI}^2} = \frac{\overline{M'm'}^2}{\overline{M'I'}^2} = \mathrm{Sin}^2\alpha$$

veya

$$\frac{\overline{Mm}^2 + \overline{M'm'}^2}{\overline{MI}^2 + \overline{M'I'}^2} = \mathrm{Sin}^2\alpha = 1 - \mathrm{Cos}^2\alpha = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \qquad (2)$$

elde olunur.

Halbuki OMI, OM′I′ kaim zaviyeli müselleslerin kaim veterleri ayni ve zaviyeleri müsavi olduğundan (zira mezkûr müselleslerin dılıları yekdiğerine amuttur) mezkûr muselleşler yekdiğerine müsavi ve binaenaleyh MI = OI′ olup buradan da

$$\overline{MI}^2 + \overline{M'I'}^2 = \overline{OI'}^2 + \overline{M'I'}^2 = \overline{OM'}^2 = a^2$$

bulunur. Şuhalde (2) mucibince

$$\overline{Mm}^2 + \overline{M'm'}^2 = a^2 - b^2$$

dir.

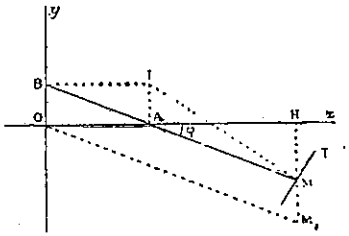
Binaenaleyh bu kıymet (1) müsavatında yerine konuldukta

$$\overline{Om}^2 + \overline{Om'}^2 = a^2 + a^2 - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$$

elde olunup dava sabit olur.

C. Katınakısın bir kâğıt şeridi vasıtasile tersimi.

96. Dava — Tulü sabit olan bir kıt'anın A, B müntehaları yekdiğerine amut iki Ox, Oy müstekimini resmederse AB müstekiminin her M noktası bir katınakıs resmeder ki bu katınakısın mihverleri Ox, Oy üzerinde bulunduğu gibi bu mihverlerin nısıf tulleri de MB, MA dan ibarettir (şekil: 70).



Şekil: 70

M noktasından Ox e resmedilen MH amudile O dan AB ye

resmedilen muvazinin tekatu noktası M_1 olsun. $OM_1 = BM$ olduğundan M_1 noktası merkezi O olan bir daire resmeder. Diğer taraftan OHM_1, AHM müşabih müselleslerinden $\frac{HM_1}{HM} = \frac{OM_1}{MA} = \frac{MB}{MA}$ elde olunur.

Halbuki sonuncu nıspet sabit olduğundan M noktası bir katınakıs resmeder (85). Bilhassa, AB nin muntasıf noktası merkezi O olan bir daire resmeyler.

Bilmukabele, her katınakıs bu usul ile, $MB = a$, $MA = b$ tulleri M noktasının ayni tarafında (şekil: 70) veya muhalif taraflarında alındığına göre, **iki muhtelif tarzda elde olunabilir.**

Bu dava, bir katınakısı nokta, nokta tersim için gayet sade bir usul verir: Bu husus için üzerinde ayni bir noktadan itibaren (ayni veya muhalif cihetlerde) nısıf mihverlere müsavi iki tul alınan bir kâğıt **şeridinden** başka hiçbir alete ihtiyaç yoktur. Katınakısı mütemadi bir hareketle çizebilen bir **katınakıs pergeli** de ayni esas üzerine müstenittir.

D. Katınakısın sahası.

97. Dava — Nısıf mihverleri a, b olan bir katınakısın sahası πab den ibarettir.

Filhakika, bu katınakıs, nısıf kutru a ve binaenaleyh sahası πa^2 olan bir dairenin mürtesemidir. Bundan maada daire müstevisile katınakıs müstevisi arasında teşekkül eden zaviye α olduğuna göre $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ dır (86).

Şuhalde mürtesem saha yani katınakısın sahası $\pi a^2 \frac{b}{a} = \pi a b$ olmakla (mücessem hendese, 72) dava sabit olur.

İKİNCİ FASIL

Katızait

§ I. Katızaidin hendesî noktai nazardan mütaleası

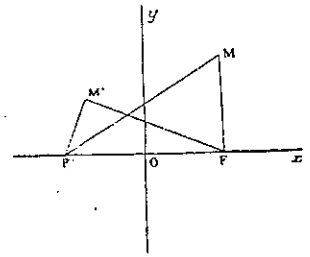
98. Tarifler — Bir müstevi dahilinde kâin ve bu müstevinin F,F′ gibi sabit iki noktasına olan mesafeleri tefazulü sabit ve verilen bir $2a$ tulüne müsavi olan M noktalarının hendesî mahalline **katızait** denir (şekil: 71):

$$MF' - MF = 2a \quad \text{veya} \quad M'F - M'F' = 2a$$

Bu tefazulün hangi cihette alınması lâzımgeldiği hakkında bir fark gözetilmemiştir. Bu izahattan anlaşılacağı veçhile katızait FF′ ne muntasıf noktasından resmedilen amut ile tamamen yekdiğerinden ayrılmış iki koldan müteşekkildir:

$MF' - MF = 2a$ müsavatına tevafuk eden M noktalarından müteşekkil (F) kolu;

$MF - MF' = 2a$ müsavatına tevafuk eden M noktalarından müteşekkil (F′) kolu.



Şekil : 71

Zira, müstevi hendesede madde (58) de görüldüğü veçhile birinci müsavata tevafuk eden M noktaları için $MF' > MF$ olup bu noktalar FF′ kıt'asına muntasıf noktasından resmedilen amudun müstevi dahilinde ayırdığı iki nahiyeden F noktasının bulunduğu nahiyede kâindir. İkinci müsavata tevafuk eden noktalar için ise $MF > MF'$ olup bu noktalar da yukarıda söylediğimiz iki nahiyeden F′ noktasının bulunduğu nahiyede kâindir.

F,F′ noktalarına katızaidin **mihrakları,** MF,MF′ kıt'alarına M noktasının **nısıf kutur şuaları,** $2c$ ile gösterilen FF′ mesafesine **mihrakî buüt,** nihayet e ile gösterilen $\frac{c}{a}$ nispetine de **harici anilmerkeziyet** denilir.

MFF′ müsellesinin mevcudiyeti

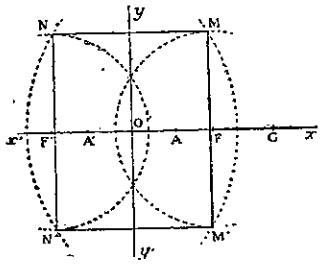
$$FF' > |MF' - MF|$$

gayrimüsavatını ve binnetice $c > a$ veya $e > 1$ olmasını icap ettirir. Eğer $c = a$ (veya $c = 1$) ise M noktası FF′ müstekiminin FF′ kıt'ası haricindeki kısımlarını resmeder. Yani katızait FF′ kıt'asının iki imtidadına munkalip olur.

Eğer $a = o$ ise FF′ e muntasıf noktasından resmolunan amut elde olunur. Yani katızait bu amuda müncer olur.

İhtar — Bir katızaide müşabih olan her münhani bir katızaittir. Zira, bu takdirde $|MF' - MF|$ tefazulü müşabehet nispetile zarp edilmiş olur.

99. Katızaidin nokta, nokta tersimi — FF′ ün O muntasıf noktasından itibaren bu noktanın iki tarafında OA=OA′=a tullerini alalım. A′, A nın imtidadından ibaret olan Ax nısıf müstekiminin lâalettayin bir noktası C olsun (şekil: 72). AC, A′C kıt'alarının tefazulu 2 a ya müsavidir. Merkezleri F, F′ ve nısıf kuturları AC, A′C olan daireleri çizelim.



Şekil: 72

Bu iki dairenin müşterek bir M noktası, $MF' - MF = A'C - AC = 2a$ olduğundan, katızaidin bir noktasından ibarettir. Mezkûr dairelerin tekatu edebilmesi için

$$A'C - AC < FF' < AC + A'C$$

olması lâzım ve kâfidir. Bu şartların birincisi kendiliğinden tahakkuk eder.

İkinci şarttan ise

$$FF' < (OC - OA) + (OC + OA')$$

veya

$$FF' < 2\,OC$$

veya nihayet

$$OC > OF$$

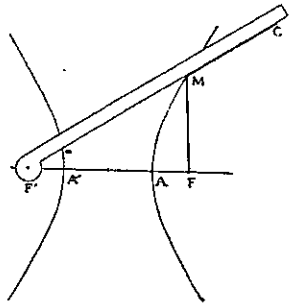
elde olunur.

Binaenaleyh Fx nısıf müstekimi üzerinde alınan her C noktası için nısıf kuturları mübadele edilerek, katızaidin dört noktası elde olunur.

Aşikâr surette katızaidin tekmil noktaları bu tersimat vasıtasile elde olunabilir.

Bu münakaşadan şu da istintaç olunur ki katızaidin bir noktası gayrimahdut surette uzaklaşabilir. Zira bu noktanın nısıf kutur şualarının istenildiği kadar büyük alınmasına hiçbir mâni yoktur. Katızaitte en küçük nısıf kutur şua FA = $c - a$ dır.

100. Katızaidin mütemadi bir hareketle tersimi — Mihrakî mesafeden daha uzun bir cetvel ile tulü cetvelin tulile 2a tulünün arasındaki farka müsavi olan bir ip alınır. Cetvelin bir ucu mihraklardan biri ve meselâ F′ mihrakı etrafında devredecek veçhile bu noktaya tespit olunur. Bundan maada ipin bir ucu cetvelin diğer C ucuna ve diğer ucu da F noktasına tespit olunur (şekil: 73).



Şekil: 73

Eğer cetvel F′ noktası etrafında devrettirilir ve ip te sivri bir uç vasıtasile, CM parçası cetvelin kenarına intibak eylemek üzere bir M noktasında gergin tutulursa mezkûr M noktası bir katızait kavsi resmeyler. Mihrakların gördüğü roller mübadele edilmek suretile katızaidin diğer koluna ait bir kavis elde olunur.

101. Katızaidin tenazur mihverleri ve tenazur merkezi — Katınakısta olduğu gibi görülür ki katızaidin FF′ müstekimi ile bu müstekime muntasıf noktasından resmedilen yy' amudundan ibaret iki tenazur mihverile bu mihverlerin O tekatu noktasından ibaret bir tenazur merkezi vardır. Katızaidin A, A′ gibi iki noktada kat'eden FF′ mihverine **katımihver** veya **mihrakî mihver** ve katızaitle müşterek hiçbir noktası bulunmıyan ikinci yy' mihverine de **gayrikatı mihver** denir.

102. Nahiyeler — Mihrakî mihvere muvazi olan her müstekim katızaidi iki noktada kat'eder.

FF′ mihverine muvazi ve gayrikatı mihveri H noktasında kat'eden bir müstekim Z′Z ve HZ nısıf müstekiminin lâalettayin bir noktası da P olsun (şekil: 74)

1° P noktası H noktasından uzaklaştığında $PF' - PF$ tefazulü tezayüt eder. Filhakika, HZ nısıf müstekiminin P den biraz daha uzakta bir noktası P' olsun. PF ve P'F' müstekimlerinin tekatu noktası E ile gösterilirse

$$PF' < PE + EF'$$

$$P'F < P'E + EF$$

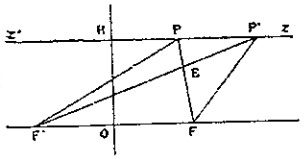
veya bu gayrimüsavatlar taraf tarafa cemolunarak

$$PF' + P'F < PF + P'F'$$

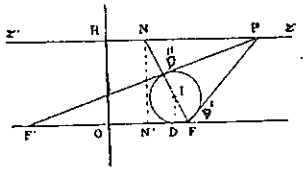
veya

$$PF' - PF < P'F' - P'F$$

elde olunur.



Şekil: 74



Şekil: 75

2° P noktası HZ nısıf müstekimi üzerinde gayrimahdut surette uzaklaştığında $PF' - PF$ tefazulunun gayesi $2c$ den ibaret olur. Filhakika, PFF' müsellesi dahiline mersum dairenin merkezi I, bu dairenin FF', FP, PF' dılılarile temas noktaları nazir nazire D, D', D'', FI ve Z'Z müstekimlerinin tekatu noktası N, nihayet N noktasının FF' üzerindeki mürtesemi de N' olsun (şekil: 75).

$$PF' - PF = PD'' + F'D'' - PD' - FD'$$

veya

$$PD'' = PD,' \quad F'D'' = F'D, \quad FD' = FD$$

olduğu nazarı itibara alınarak

$$PF' - PF = F'D - FD = FF' - 2\,FD = 2\,(OF - FD)$$
$$= 2\,OD$$

ve binnetice

$$2c - (PF' - PF) = 2\,OF - 2\,OD = 2\,DF$$

elde olunur.

I noktası F ile N arasında kâin olduğundan D noktası da F ile N' arasında kâindir. Binaenaleyh

$$2c - (PF' - PF) < 2\,FN'$$

yazılabilir. P noktası HZ nısıf müstekimi üzerinde gayrimahdut surette uzaklaştığında FI nasıfı OF e F noktasında amut olup binnetice FN' gayede sıfıra müsavi olur. Hulâsa P noktası HZ nısıf müstekimi üzerinde H tan itibaren gayrimahdut surette uzaklaştığı zaman $PF' - PF$ tefazulu mütemadi bir surette O dan $2c$ ye kadar büyür. Binaenaleyh mezkûr tefazul bir ve ancak bir defa O ile $2c$ arasında bulunan $2a$ kıymetinden geçer. Yani mihrakî mihvere muvazi HZ nısıf müstekimi üzerinde katızaidin bir ve ancak bir M noktası vardır; Bu nokta katızaidin (F) kolu üzerinde kâindir.

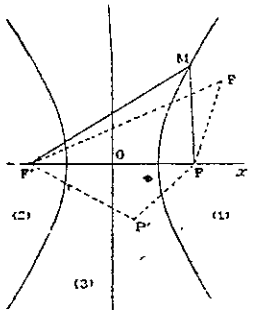
Katızaidin Hz' nısıf müstekimi üzerinde dahi evvelki noktanın H a nazaran mütenazırından ibaret, bir M' noktası vardır, öyle ki bu nokta için $M'F - M'F^1 = 2a$ dır; Bu nokta katızaidin (F') kolu üzerinde kâindir.

Netice — Katızait müsteviyi üç nahiyeye ayırır. Gayri katı mihveri havi olmıyan iki nahiyeye (biri M' noktalarının solunda diğeri M noktalarının sağında) **dahilî nahiyeler** ve gayrikatı mihveri havi olan üçüncü nahiyeye de **haricî nahiye** tesmiye olunur. Mihraklar dahili nahiyeler dahilinde kâindir.

Yukarıki ispattan aşağıdaki dava dahi istintaç olunur:

103. Dava — Bir nokta katızaidin dahilinde kâin ise mihraklara olan mesafelerinin tefazulu $2a$ dan büyük ve haricinde kâin ise mezkûr tefazul $2a$ dan küçüktür.

Mukabil dava — Bir noktanın mihraklara olan mesafeleri tefazulü $2a$ dan büyükse mezkûr nokta katızaidin dahilinde ve mihraklara olan mesafeleri tefazulü $2a$ dan küçükse mezkûr nokta katızaidin haricinde kâindir.



Şekil: 76

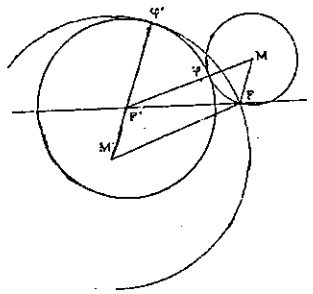
Filhakika, mihraklara olan mesafeleri tefazulü $2a$ dan büyük olan bir nokta P olsun (şekil: 76). $|PF' - PF| > 2a$. bu nokta katızaidin ne üzerinde ve ne de haricinde kâindir. Zira mezkûr nokta

katızait üzerinde bulunsa, tarîf mucibince $|PF'-PF|2a$ veyâ katızaidin haricinde kâin olsa, esas dava mucibince, $|PF'-PF| < 2a$ olur ki bu da farzımıza muhaliftir. Binaenaleyh mezkûr P noktası bizzarure katızaidin dahilinde kâindir. Davanın ikinci kısmı da bunun gibi ispat olunur.

Müveccih daireler.

104. Dava— Verilen bir daireye mümas olan ve bu daire haricinde kâin malûm bir noktadan geçen dairelerin merkezlerinin hendesî mahalli bir katızaittir.

Verilen dairelerin merkezi F′, nısıf kutru $2a$ ve bu daire haricind kâin malûm nokta da F olsun (şekil: 77).



Şekil: 77

F ten geçen ve verilen daireye mümas olan iki nevi daire vardır: filhakika, temas dahilî veya haricî olabilir. Evvelâ (F′) dairesine haricen mümas olan ve F ten geçen bir dairenin M merkezini nazarı mülâhazaya alalım. Haricen temasın lâzım ve kâfi olan şartı merkezler hattının nısıf kuturların mecmuuna müsavi olmasından ibaret olduğundan $MF' = MF + 2a$ veya $MF' - MF = 2a$ elde olunur. Bu müsavat gösteriyor ki M noktasının hendesî mahalli bir katızait koludur.

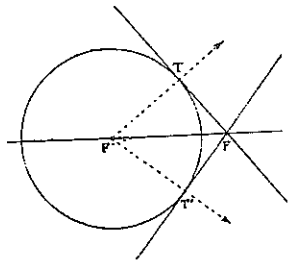
Şimdi F ten geçen ve (F′) dairesine dahilen mümas olan bir dairenin M′ merkezini nazarı mülâhazaya alalım (şekil: 77). Dahilen temasın lâzım ve kâfi olan şartı merkezler hattının nısıf kuturların tefazuluna müsavi olmasından ibaret olduğundan $M'F' = M'F - 2a$ veya $M'F - M'F' = 2a$ elde olunur. Bu müsavat gösteriyor ki M′ noktasının hendesî mahalli, yukarıda zikrettiğimiz katızaidin diğer kolundan ibarettir. Binaenaleyh matlup hendesî mahal, mihrakları F,F′ ve katı mihveri $2a$ olan bir katızaitten ibaret olup dava sabit olur.

İhtar— φ temas noktasının (F′) dairesi üzerinde mütemadi bir tarzda yerini değiştirdiği tasavvur olunursa haricen mümas dairelerden dahilen mümas dairelere F noktasından verilen daireye resmedilen FT,FT″ mümasları vasıtasile (şekil: 78) geçilir. İşte bu sebepten mezkûr müstekimlere merkezi katızait üzerinde namütenahiye uzaklaşmış daireler nazarile bakmak icap eder.

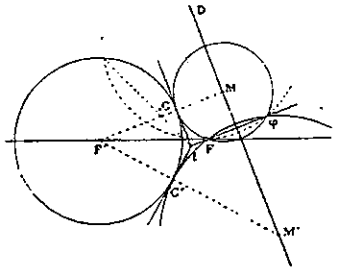
105. Bilmukabele, F,F′ noktalarile $2a$ tulü lâalettayin intihap edildiğine göre **her katızait bu tarzda elde olunabilir.**

Bu izahattan katızaidin aşağıdaki yeni tarifi elde olunur: **Katızait, sabit bir daireye mümas olan ve bu dairenin haricinde kâin sabit bir noktadan geçen dairelerin merkezlerinin hendesî mahallinden ibarettir.**

Verilen dairenin merkezile verilen nokta bu suretle elde olunan katızaidin mihrakları olduğu gibi verilen dairenin nısıf kutru da katızaidin $2a$ katı mihverine müsavidir. Merkezi katızaidin mihraklarının birinden ve nısıf kutru da $2a$ dan ibaret olan dairelere katızaidin **Müveccih daireleri** tesmiye olunur.



Şekil: 78



Şekil: 79

106. Bir müstekim ile bir katızaidin faslı müştereki.

Mes'ele— Bir müstekimin bir katızaidi kat'etiği noktaları bulmak matluptur. (Katızait çizilmemiş, mihrakları ve katı mihverile verilmiş farzolunmaktadır).

Verilen mihraklar F,F′, katı mihver $2a$ ve bir müstekim de D olsun (şekil: 79). Bu müstekimin bir M noktasının katızaide ait bir nokta olabilmesi için mezkûr noktanın F ten geçen ve (F′) müveccih dairesine mümas olan bir dairenin merkezi olması lâzım ve kâfidir. Halbuki F ten geçen ve merkezi D üzerimde bulunan bir daire F noktasının D müstekimine nazaran mütenazırı olan φ noktasından da geçer. Bilmukabele F ve φ noktalarından geçen bir dairenin merkezi D müstekimi üzerinde kâindir. Ohalde mes'ele F ve φ gibi malûm iki noktadan geçen ve malûm bir (F′) dairesine mümas olan bir dairenin tersimine müucer olur ki bu mes'ele de evvelce halledilmişti (müstevi hendese, 271).

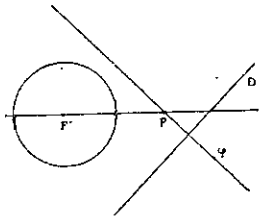
Mezkûr mahalde verilen izahata tevfikan:

(F′) dairesini kat'etmek üzere F ve φ noktalarından bir daire

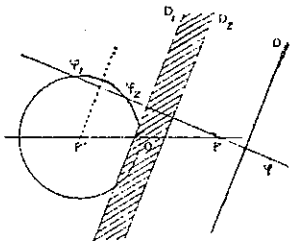
geçirmek; $F\varphi$ müstekimini I noktasında kat'edinciye kadar iki dairenin müşterek veterini resmetmek;

Nihayet I noktasından (F') dairesine IC, IC' mümaslarını resmetmek icap eder (şekil: 79).

Bu mümasların C, C' temas noktaları F' noktasına vasledilecek olursa bu suretle elde olunan müstekimler D müstekimini aranılan iki dairenin merkezlerinde yani D müstekiminin katızaidi kat'ettiği M, M' noktalarında kat'ederler.



Şekil: 80



Şekil: 81

Münakaşa— $F\varphi$ müstekiminin (F') dairesine nazaran vaziyetine göre üç hal mümkündür.

I. **$F\varphi$ müstekimi (F') dairesini kat'etmesin (şekil: 80)**— Bu takdirde φ noktası daima (F') dairesinin haricinde kâin olup (F') dairesine mümas daima iki daire vardır. Binaenaleyh D müstekimi katızaidi iki noktada kat'eder.

II. **$F\varphi$ müstekimi (F') dairesini kat'etsin (şekil: 81)**— Tekatu noktalarını φ_1, φ_2 ve $F\varphi_1$, $F\varphi_2$ kıt'alarına muntasıf noktalarından resmolunan amut müstekimleri D_1, D_2 ile gösterelim. Bu hal de üç hale tefrik olunur:

1°. φ noktası φ_1 ile φ_2 arasında kâindir— Bu takdirde D müstekimi D_1 ile D_2 arasında (şekilde gösterilmemiştir) kâin olup (F') dairesine mümas daire mevcut değildir. Binaenaleyh D müstekimi katızaidi kat'etmez.

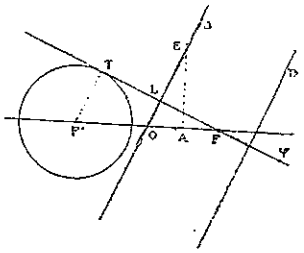
2°. φ noktası $\varphi_1\varphi_2$ kıt'asının haricinde kâindir (şekil: 81)— D müstekimi D_1 ile D_2 arasında kâin değildir. (F') dairesine mümas iki daire mevcut olup binnetice D müstekimi katızaidi iki noktada kat'eder.

Mademki katızaidin D_1 ile D_2 arasında kâin hiç bir noktası olmayıp bu müstekimlerin iki tarafında mezkûr münhaninin noktaları vardır. Şuhalde katızaidin her kolu D_1 ile D_2 arasındaki

nahiyenin muayyen bir tarafında vakidir. Binaenaleyh D müstekimi bu nahiyeye nazaran F veya F' noktalarının bulunduğu tarafta kâin olduğuna göre iki tekatu noktası da (F) veya (F') kolu üzerinde kâindir.

3°. φ noktası φ_1 veya φ_2 de kâindir— Bu takdirde D müstekimi D_1, D_2 vaziyetlerinden birini işgal eder, (F') dairesine mümas ancak bir daire mevcut olup binnetice D müstekimi katızaidi ancak bir noktada kat'eder. İlerde görüleceği veçhile bu taktirde D_1 veya D_2 müstekimi katızaide mümastır.

III. $F\varphi$ müstekimi (F') dairesine mümas olsun (şekil: 82) — Eğer φ noktası T temas noktasında kâin değilse (F') dairesine mümas ancak bir daire mevcut olup diğer mümas daire F'T müstekimine münkalip olur. Bu takdirde D müstekimi münhaniyi ancak bir noktada kat'eder. Mezkûr müstekim münhaniyi bir daire nazarile bakılan FT müstekiminin namütenahide kâin merkezinden ibaret ikinci bir noktada dahi kat'ediyor denilebilir. Eğer φ noktası T temas noktasında kâin ise D müstekimi FT ye muntasıf noktasında amut olan Δ vaziyetini işgal eder ve O noktasından geçer. Buhalde (F') dairesine mümas olan hiçbir daire mevcut değildir.



Şekil: 82

Bu takdirde mümas iki daire FT mümasına müncer ve munkalip olur; Δ müstekimi katızaidi kat'etmez. Mezkûr müstekim münhaniyi daire nazarile bakılan FT müstekiminin namütenahide kâin merkezinden ibaret tek bir noktada (Muzaaf nokta) kat'ediyor dahi denilebilir. Daha ileride bir münhaninin **mücanip hattını** tarif edeceğiz ve göreceğiz ki FT müstekimi katızaidin mücanip hattından ibarettir.

107. Katızaidin müması — Bir münhaninin bir noktasındaki mümasın umumi tarifine tevfikan katızaidin bir M noktasındaki **mümas**ı diye, katızait üzerinde alınan M e yakın bir M' noktası, mezkûr münhani üzerinde kalmak üzere, gayrimahdut surette M noktasına yaklaştığında MM' katımın aldığı gaye vaziyetine denir. Aşağıdaki dava bu gaye vaziyetinin mevcut olduğunu gösterir:

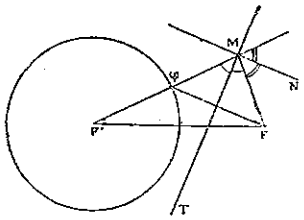
108. Dava — Katızaidin bir noktasında bir müması

mevcut olup bu mümas ta mezkûr noktaya müntehi nısıf kutur şualar tarafından teşkil olunan zaviyenin dahilî nasıfından ibarettir (şekil: 83).

Bu dava madde 75 te olduğu gibi lspat olunur.

Netice — Katızaidin M noktasındaki MN nazımı $\widehat{FMF'}$ zaviyesinin haricî nasıfıdır.

İhtar — Bu davanın ispatı ile birlikte katızaidin bir müstekim ile faslı müşterekinin mütaleası nazarı itibara alınacak olursa derhal aşğıdaki netice elde olunur:



Şekil: 83

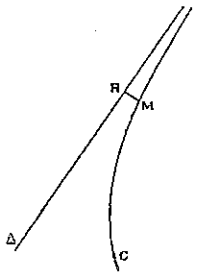
Bir müstekimin bir katızaide mümas olabilmesi için mihraklardan birinin bu müstekime nazaran mütenazırının diğer mihraka ait müveccih daire üzerinde kâin olması lâzım ve kâfidir.

Bu netice aşağıdaki muadil tarzda dahi ifade olunabilir.

Bir dairenin müteharrik bir noktasını haricinde kâin sabit bir noktaya vasleden kıt'aya muntasıf noktasından resmolunan amudun zarfı bir katızaittir.

109. Katızaidin bir mümasının ameli tersimi — katızaidin bir mümasının ameli olarak madde 76 da olduğu gibi tersim olunur.

110. Katızaidin mücanip hattı — Bir kolu gayrimahdut surette imtidat eden bir C münhanisi verildiğine nazaran bu münhaninin bir M noktasının bir Δ müstekimine olan MH mesafesi, M noktası münhani üzerinde gayrimahdut surette uzaklaştığında, gayrimahdut surette sıfıra yaklaşır. Yani mezkûr mesafenin gayesi sıfırdan ibaret olursa Δ müstekimi C münhanisine **mücaniptir** veya Δ müstekimi mezkûr münhaninin **mücanip hattıdır** denir. (şekil: 84).



Şekil: 84

111. Dava I — Katızaidin iki mücanip hattı mevcut olup bunlarda mihrakların birinden diğer mihraka ait müveccih daireye resmedilen mümaslara merkezden resmolunan müstekimlerden ibarettir.

Katızaidin bir noktası M, (F') müveccih dairesine F ten resmolunan FT mümasına muntasıf noktasında amut olan müstekim Δ (şekil: 85), FT nin Δ ve merkezi M olan ve F ten geçen daire ile tekatu noktaları h ve K, nihayet M noktasının FT ve Δ üzerindeki mürtesemleri de m ve H olsun.

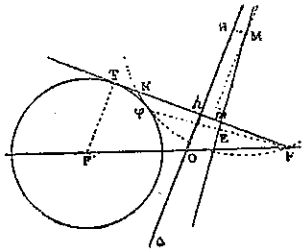
mh, KT nin yarısına müsavidir;

Filhakika,

$$\begin{aligned} KT &= Th - Kh \\ &= hF - (Km - mh) \\ &= mh + mF - mF + mh \\ &= 2mh \end{aligned}$$

tır.

Halbuki K noktası gayrimahdut surette T ye yaklaşırsa M noktası münhani üzerinde gayrimahdut surette uzaklaşır, o suretle ki merkezi M olan ve F ten geçen dairenin gayesi FT müstekiminden ibaret olur. Bu şerait dahilinde mh ve müsavisi olan MH sıfıra müncer olup dava sabit olur.



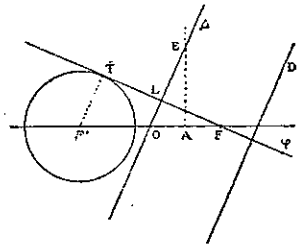
Şekil: 85

112. Dava II — Katızaidin her mücanip hattı, temas noktası münhani üzerinde gayrimahdut surette uzaklaşan bir mümasın gayesinden ibarettir.

Merkezi M olan ve F ten geçen dairenin (F') dairesile temas noktası φ olsun (şekil: 85). M noktasındaki mümas Fφ veterine muntasıf noktasında amut olan ME müstekiminden ibarettir. φ noktası gayrimahdut surette T noktasına yaklaştığında M noktası münhani üzerinde gayrimahdut surette uzaklaşır. Binaenaleyh Fφ ye muntasıf naktasında amut olan ME mümasının gayesi FT ye muntasıf noktasında amut olan Δ mücanip hattından ibaret olmakla dava sabit olur.

113. Mücanip hatların tersimi — FF' e A noktasından resmolunan amudun Δ mücanip hattını kat'ettiği nokta E olsun (şekil: 86). Kaim zaviyeli OLF, OAE müsellesleri yekdiğerine müsavidir ($OL = \frac{1}{2} F'T = a = OA$). Şuhalde OE = OF tir. Mücanip hatlar kutru FF' olan dairenin A' ve A noktalarında AA' e amut

olan veterlerinin müntehalarından geçen kuturlarından ibarettir (şekil: 87). Katınakısta olduğu gibi $b^2 = c^2 - a^2$ vazedilecek olursa b bu suretle teşekkül eden daire dahilinde mersum mustatilin ikinci dıl'ıdır, $2b$ ye katızaidin **gayrikatı mihverinin tulü** ve B,B′ noktalarına da (şekil: 87) mezkûr mihverin **resleri** denilir:

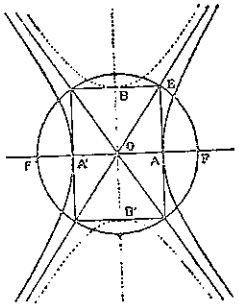


Şekil: 86

Bu izahttan anlaşılacağı veçhile katızaidin mücanip hatları mihverleri üzerine mersum mustatilin kuturlarından ibarettir.

Mücanip hatları yekdiğerine amut olan katızaide **mütesaviyüssakeyn katızait** denir.

Bu takdirde mihverler üzerine mersum mustatil bir murabbadır: $a = b$ birinin katı mihveri, tul ve istikametçe, diğerinin gayrikatı mihverinden ve bilmukabele ikincinin gayrikatı mihveri de birincinin katı mihverinden ibaret olan iki katızaide **müzdeviç katızaitler** tesmiye olunur (şekil: 87). Bu katızaitler ayni mücanip hatlara ve ayni mihrakî bude maliktirler.



Şekil: 87

Katızaidin mümasının hassaları.

114. Dava I — Bir katızaidin bir mihrakının bu katızaidin mümasılarına nazaran mütenazırlarının hendesî mahalli, merkezi diğer mihraktan ibaret olan müveccih dairedir.

İspat katınakıstakinin aynidir. Dava bilhassa mücanip hatlar için de doğrudur.

115. Dava II — Bir katızaidin mihraklarının mümasları üzerindeki mürtesemlerinin hendesî mahalli, kutru katı mihverden ibaret olan bir dairedir.

Ispat kat'ı nakıstakinin aynidir. Dava bilhassa mücanip hatlar için de doğrudur. Bu daireye katızaidin **aslî dairesi** denir.

Lâzime — Bir kaim zaviyenin resi bir daire resmeder ve bu esnada kaim dılılarından biri de mezkûr dairenin haricinde kâin sabit bir noktadan geçerse diğer kaim dılı sabit bir katızaide mümas kalır.

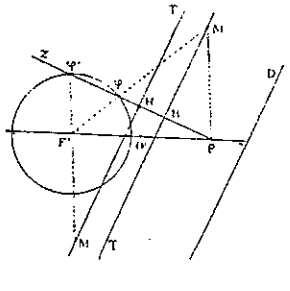
116. Dava III — Bir katızaidin mihraklarının lâalettayin bir mümasa olan mesafeleri hasılı zarbı sabit ve gayrikatı mihverin yarısının murabbaına yani $c^2 - a^2$ na müsavidir.

İspat katınakıstakinin ayni olup dava, bilhassa mücanip hatlar için de doğrudur.

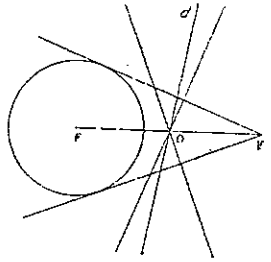
Mümaslar üzerine mes'eleler.

117. Mes'ele I — Bir katızaide verilen bir istikamete muvazi bir mümas resmetmek matluptur.

Ve rilen istikamet D olsun (şekil: 88). Mes'eleye halledilmiş



Şekil: 88



Şekil: 89

nazarile bakalım ve katı zaide D ye muvazi olmak üzere resmedilen bir müması MT ile gösterelim. F noktasının MT ye nazaran φ mütenazırı (F′) müveccih dairesi üzerinde kâin olduğundan aşağıdaki hal tarzı elde edilmiş olur: F noktasından verilen D istikametine amut Fz müstekimi resmolunur. Bu müstekimin (F′) müveccih dairesini kat'ettiğini farzederek tekatu noktalarından birini φ ile gösterelim. Fφ ye muntasıf noktasından resmolunan amut katızaidin D ye muvazi bir mümasını verir.

Münakaşa — Fz müstekimi (F′) müveccih dairesini 2, I veya O noktada kat'ettiğine veya O merkezinden verilen istikamete muvazi olarak resmedilen Od müstekimi (şekil: 89), mücanip hatlara nazaran, münhaniyi havi olmıyan iki zaviye dahilinde, bir mücanip hat üzerinde veya münhaniyi havi olan iki zaviye dahilinde bulunduğuna göre meselenin 2, I veya O halli vardır.

Eğer verilen istikamet bir mücanip hat istikametinden ibaret ise mümas olarak mezkûr mücanip hat bulunur (Muzaaf hal). Bu takdirde temas noktası namütenahiye uzaklaşmıştır.

İhtar — Katınakısta olduğu gibi ispat olunur ki M,M′ temas noktaları kutren mukabil noktalardır.

118. Mes'ele II — Bir katızaide müstevisi dahilinde verilen bir noktadan bir mümas resmetmek matluptur.

Mes'elenin halli katınakıstakinin aynidir (şekil çiziniz).

Münakaşa — Mes'elenin halli kabil olabilmek için katınakısta olduğu gibi

$$|PF - PF'| < 2a < PF + PF'$$

şartları elde olunur.

İkinci şart daima kendiliğinden tahakkuk eder. Zira PFF' müsellesinde

$$PF + PF' > 2c$$

dir. Birinci şart ise P noktasının **katızaidin haricinde** olduğunu ifade eder. Binaenaleyh bir P noktası katızaidin haricinde veya üzerinde veya dahilinde bulunduğuna göre bu noktadan katızaide 2,1 veya O mümas resolunabilir.

Hallerden birinin bir mücanip hat olduğu da vakidir.

119. (Poncelet) davaları — Bir katızaide haricinde kâin bir P noktasından PM,PM' gibi iki mümas resmolunursa:

1° — Bu iki mümas mihrakların her hangi birinden müsavi veya mütemmim zaviyeler altında görünür.

2° — Bu mümasların teşkil ettiği zaviye ile P noktasını mihraklara vasleden iki müstekimin teşkil ettiği zaviye ayni nasıflara maliktir.

Bu dava katınakısta olduğu gibi ispat olunur. Dava bilhassa mümaslardan biri bir mücanip hat olduğu takdirde dahi doğrudur.

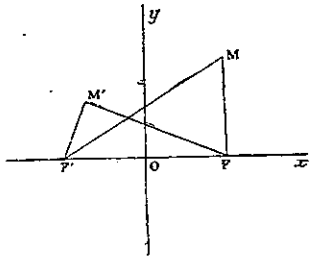
120. Dava — katızaidin haricine mersum kaim zaviyelerin reslerinin hendesî mahalli, katızaitle müttehidilmerkez ve nısıf kutru $\sqrt{a^2-b^2}$ olan bir dairedir.

Mezkûr daireye katızaidin **Ruyeti kaime dairesi** denir.

İspat katınakısta olduğu gibidir. Ruyeti kaime dairesinin mevcut olabilmesi için $a > b$ olması yani mücanip hatların münhaniyi havi olan zaviyesinin hadde olması lâzımdır ki bu da madde 117 deki münakaşanın neticelerine nazaran kendiliğinden aşikâr idi. Iki müzdeviç katızaitten birinin ruyetikaime dairesi mevcut ise diğerinin mevcut değildir. Eğer katızait mütesaviyüssakeyn ise ruyeti kaime dairesi münhaninin O merkezine müncer ve münkalip olur.

§ 2. Katızaidin tahlilî noktai nazasından mütaleası. Katızaidin muadelesi.

121. — Vaz'iye mihverleri olarak kat'ı zaidin mihverlerini alalım, (şekil 90). Bu mihverlere nazaran vaziyeleri x,y ile gösterilen bir M noktasının katızait üzerinde bulunabilmesi için



Şekil: 90

$$|MF - MF'| = 2a$$

veya

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a \quad (1)$$

olması lâzım ve kâfidir. Bu muadelenin her iki tarafının murabbaı alınarak

$$\sqrt{[(x-c)^2+y^2]\,[(x+c)^2+y^2]} = x^2+y^2+c^2-2a^2$$

elde olunur. Bu sonuncu muadelenin de her iki tarafının murabbaı alınarak bu muadeleye muadil

$$\begin{cases} (x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx) = [x^2+y^2+c^2-2a^2]^2 \\ x^2+y^2+c^2-2a^2 > o \end{cases}$$

heyeti veya yukarıki muadele tevsi ve $x^2+y^2+c^2$ mecmuu muhafaza edilerek

$$(c^2-a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \qquad (2)$$

$$x^2+y^2+c^2-2a^2 > o \qquad (3)$$

hey'eti elde olunur.

(3) Gayrimüsavatı, x^2 yerine (2) muadelesinden istihraç edilen kıymeti konularak tahvil olundukta mezkûr gayrimüsavat

$$(c^2-a^2)\left(1+\frac{c^2y^2}{(c^2-a^2)^2}\right) > o$$

veya ikinci mazrup müspet olduğundan $c^2-a^2 > o$ veya nihayet $c > a$ olur ki bu da hendesî olarak MFF' müsellesinin mevcudiyeti dolayısile kendiliğinden aşikâr idi. Hulâsa $c > a$ farzedilecek olursa (2) muadelesi vaz'iyetleri x, y olan M noktasının katızaide ait bir nokta olabilmesi için lâzım ve kâfi olan şarttan ibarettir. Mezkûr muadeleye **katızaidin muadelesi** tesmiye olunur.

$c^2 - a^2 = b^2$ konulacak olursa mezkûr muadele

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şeklinde dahi yazılabilir.

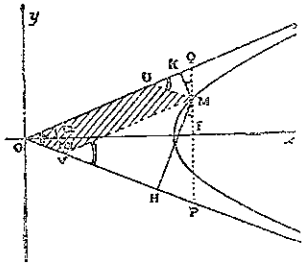
Temrin — MF, MF′ nısıf kutur şualarının kıymetlerinin F kolu

$$\text{için } \frac{cx}{a} - a, \frac{cx}{a} + a \text{ ve (F′) kolu için } -\frac{cx}{a} + a, -\frac{cx}{a} - a$$

oldğunu isbat ediniz.

Mücanip hatların hassaları.

122. Dava I. Katızaidin bir noktasının mücanip hatlara olan mesafeleri hasılı zarbı sabittir.



Şekil: 91

Katızaidin bir M noktasının mücanip hatlarına olan mesafeleri MH, MK (şekil: 91); M noktasından gayri kati mihvere resmedilen muvazinin mücanip hatları kat'ettiği noktalar P, Q; M, P, Q noktalarının müşterek faslası x; M ve Q noktalarının tertipleri de y ve Y olsun. Fikri tesbit için x, y, Y vaziyelerini müsbet farzediyoruz. Kaim zaviyeli MPH, MKQ müselleslerinin M noktasındaki zaviyeleri mücanip hatların ox mihverile teşkil ettikleri α zaviyesine müsavidir (Dılıları yekdiğerine amut zaviyeler). Binaenaleyh

$$MH.MK = MP \cos\alpha \,.\, MQ \cos\alpha = MP, MQ.\cos^2\alpha$$

$$= (Y+y)(Y-y).\cos^2\alpha = (Y^2 - y^2).\cos^2\alpha$$

yazılabilir.

Halbuki

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0, \cos\alpha = \frac{a}{c}$$

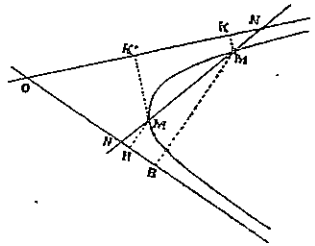
dir.

Binaenaleyh

$$MH.MK = \left[\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\right]\frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2b^2}{c^2}$$

olup dava sabit olur.

123. Dava II — Bir katızaidin her veterinin muntasıf noktası, mezkûr veter tarafından mücanip hatlar üzerinde ayrılan kıt'anın muntasıf noktasının aynidir.



Şekil: 92

Katızaidin nazarı mülâhazaya alınan veteri MM′ (şekil: 92); mezkûr veterin mücanip hatleri kat'ettiği noktalar N, N′; M, M′ noktalarının mücanip hatlar üzerindeki mürtesemleri de H, H′ ve K, K′ olsun. Yukarıda ispat olunduğu veçhile

$$MH.MK = M'H'.M'K'$$

veya

$$\frac{MH}{M'H'} = \frac{M'K'}{MK}$$

veya

$$\frac{N'M}{N'M'} = \frac{NM'}{NM}$$

dir. Bu tenasüpte her mahreç suretten tarholunarak

$$\frac{MM'}{N'M'} = \frac{MM'}{NM}$$

elde olunup buradan da NM = N′M′ bulunup dava sabit olur.

M, M′ noktaları muhtelif kollar üzerinde bulunduğu takdirde dahi ayni veçhile muhakeme olunur.

Lâzime. Katızaidin bir mümasının temas noktası, mücanip hatlar tarafından bu mümas üzerinde ayrılan kıt'anın muntasıf noktasından ibarettir.

124. Dava III — Bir resi bir katızait üzerinde hareket eden ve iki dıl'ı mücanip hatlar üzerinde bulunan bir mütevaziyüladlaın sahası sabittir.

Mezkûr mütevaziyüladla OUMV olsun (şekil: 91). Bu mütevaziyüladlaın sahası $S = MU.MV \sin 2\alpha$ dır. Halbuki kaim zaviyeli MKU, MHV müselleslerinin U ve V reslerindeki zaviyeleri 2α dan ibarettir. Binaenaleyh

$$MU = \frac{MK}{\sin 2\alpha}, \qquad MV = \frac{MH}{\sin 2\alpha}$$

dır. Şuhalde

$$S = \frac{MK}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{MH}{\sin 2\alpha} \cdot \sin 2\alpha$$

elde olunur. Diğer taraftan madde 122 deki dava 1 mucibince $MH.MK = \frac{a^2 b^2}{c^2}$ olduğundan

$$S = \frac{a^2 b^2}{c^2 \sin 2\alpha} = \frac{a^2 b^2}{c^2 . 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{a^2 b^2}{c^2} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{a}$$

veya nihayet

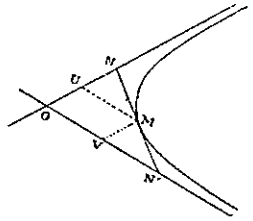
$$S = \frac{ab}{2}$$

elde olunup dava sabit olur.

Bu dava aşağıdaki muadil tarzda dahi ifade olunabilir:

Müteharrik bir mümasın mücanip hatlarla teşkil eylediği müsellesin sahası sabittir (şekil: 93);

Veya: katızaidin lâalettayin bir mümas tarafından mücanip hatlar üzerinde ayrılan kıtaların hasılı zarbı sabittir.



Şekil: 93

ONN' sahası = 2. OUMV sahası = $a.b$ olduğuna dikkat ediniz).

125. Dava — Bir katızaidin malûm bir istikamete muvazi veterlerinin hendesî mahalli, merkezden geçen bir müstekimdir.

Filhakika, madde 123 deki dava mucibince katızaidin bir veterinin muntasıf noktasını elde etmek için mücanip hatlar tarafından bu veter üzerinde ayrılan kıtanın muntasıf noktasını almak kifayet eder. Mücanip hatların teşkil ettiği sabit zaviyenin dılıları tarafından ayni bir istikamete muvazi müstekimler üzerinde ayrılan kıtaların muntasıf noktalarının hendesî mahalli ise aşikâr surette bu zaviyenin resinden yani katızaidin merkezinden geçen bir müstekim olmakla dava sabit olur.

Bu suretle elde olunan müstekime verilen istikamete ait **müzdeviç** kutur denir.

Bir kutur, bu kutrun müzdevici olan istikamete muvazi mümasların (bu mümaslar meycut ise) temas noktalarından geçer.

Zira, bir mümasın münhaniyi kat'ettiği noktaların her ikisi de temas noktasile birleştiğinde ayrılan veterin muntasıf noktası dahi temas noktasile birleşir. Bilmukabele, bir kutur katızaidi ancak müzdeviç istikamete muvazi mümasların temas noktalarında kat'edebilir.

Biri diğerinin müzdeviç istikametine muvazi olan iki kutra **müzdeviç kutürlar** denir.

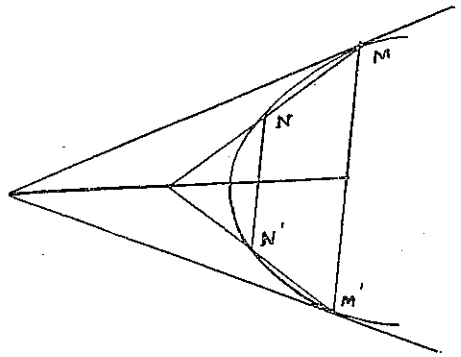
126. Dava — Müzdeviç iki kutur mücanip hatlarla bir müellef huzme teşkil eder.

Zira, böyle bir huzmenin şualarından birine resmedilen muvaziler diğer üç şua tarafından iki müsavi kısma ayrılır.

Lâzime. Bir mütesaviyüssakeyn katızaitte müzdeyiç kuturlar mücanip hatlara nazaran mütenazırdır.

127. Dava — Bir kutur, müzdeviç bir veterin müntehalarından resmolunan mümasların tekatu noktasından geçer.

Zira, böyle bir veter MM' (şekil: 94) ve buna muvazi bir veter de NN' olsun MM' ve NN' veterlerinin muntasıf noktaları arasını vasleden müstekim nazarı mülâhazaya alınan kuturdan ibarettir. Halbuki kolayca görüleceği veçhile mezkûr müstekim MN, M'N' nün tekatu noktalarından geçer. Şimdi N noktasının, münhani üzerinde kalmak üzere, gayrimahdut surette M noktasına yaklaştığını farzedelim. Bu takdirde N' noktası da gayrimahdut surette M' noktasına yaklaşır. ve MN, M'N' veterlerinin gayeleri M,M' noktalarındaki mümaslardan ibaret olur. MN, M'N' veterleri mütemadi surette nazarı mülâhazaya alınan kutur üzerinde tekatu ettiklerinden gaye de dahi keyfiyet ayni olup dava sabit olur.



Şekil: 94

128. Dava — Mütemmim iki veter (yani müntehalarından biri müşterek ve ikinci müntehaları kutran mukabil olan iki veter) **müzdeviç iki kutra muvazidir.**

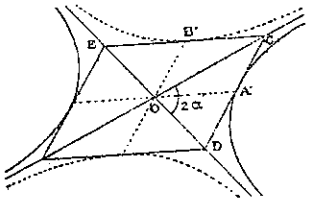
İspat katınakıstakinin aynidir.

129. İki müzdeviç kuturdan daima bir tanesi vardır ki münhaniyi kat'eder, diğeri ise münhaniyi kat'etmez.

Zira, iki müzdeviç kutur, mücanip hatlarla bir müellef fırka teşkil ettiklerinden bu müstekimlere nazaran muhtelif gayeler dahilinde kâindir.

Eğer bir katızaidin bir kutru bu münhaniyi kat'etmezse daima bunun müzdevici olan katızaidi kat'eder. Bu takdirde müzdeviç kat'ı zait tarafından bu kutur üzerinde ayrılan tule mezkûr kutrun **tulü** tesmiye olunur.

130. (Apolonyos) davaları — Bir katızaitte:



Şekil: 95

1°. İki müzdeviç kutur üzerine mersum mütevaziyüladlaın sahası sabittir.

2°. İki müzdeviç kutrun nısıflarının murabbalarının tefazulu sabittir.

Davanın birinci kısmı madde 124 deki davanın hemen bir neticesinden ibarettir.

İkinci kısmına gelince, katı zaidin iki müzdeviç kutrunun nısıfları OA', OB' olsun (şekil: 95).

$$\overline{CE}^2 - \overline{CD}^2 = 2.2\,OD.OC\cos 2\alpha$$

olup (müstevi hendese,246,2°) buradan da

$$\left(\frac{CE}{2}\right)^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = OD.OC\cos 2\alpha$$

veya

$$\overline{OA'}^2 - \overline{OB'}^2 = OD.OC.\cos 2\alpha$$

elde olunur. Halbuki madde 124 mucibince OC. OD hasılı zarbı sabit olduğundan dava sabit olur.

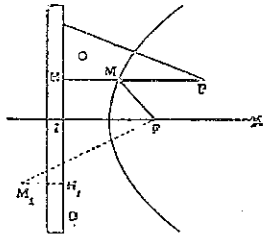
ÜÇÜNCÜ FASIL

Katımükâfi

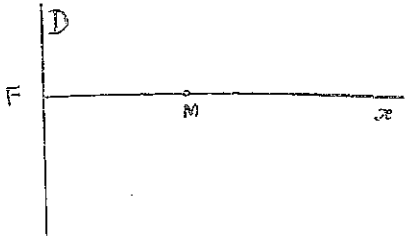
131. Tarif — Bir müstevi üzerinde kâin ve bu müsteviye ait bir müstekim ile bir noktadan (bu noktanın müstekim üzerinde bulunmadığı farzolunmaktadır) Ayni uzaklıkta bulunan noktaların hendesî mahalline **katımükâfi** denir (şekil: 96):

$$MF = MH$$

verilen F noktasına katımükâfinin **mihrakı**, verilen D müstekimine de **müveccih hattı** veya sade **müveccihi** tesmiye olunur. Eğer F noktası D müstekimi üzerinde alınmış olsaydı hendesî mahal aşikâr surette D ye amut Fx müstekiminden ibaret olurdu (şekil: 97)



Şekil: 96

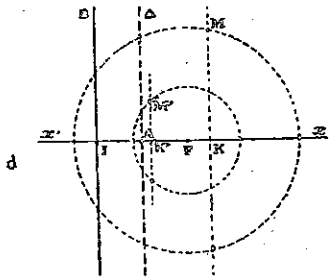


Şekil: 97

Şuhalde bu müstekime katımükâfinin bir gaye hali nazarile bakmak icap ader. Bir katımükâfinin tâbi bulunduğu yegâne tulü mihrakın müveccih hatta olan $FI = p$ mesafesidir ki buna da mezkûr münhaninin **muaddili** denir. Kolayca görüleceği veçhile **katımükâfiye müşabih olan her münhani bir katımükâfidir.**

132. Katımükâfinin nokta, nokta tersimi — Evvelâ şuna dikkat edelim ki katımükâfinin mihraka nazaran müveccih hattın diğer tarafında bulunan hiç bir M_1 noktası yoktur (şekil: 96). Zira, bu takdirde M_1F mesafesi aşikâr surette M_1H_1 mesafesinden büyüktür.

Bu anlaşıldıktan sonra katımükâfinin bir noktasını elde etmek için F noktası merkez olmak üzere lâalettayin bir r nısıf kutru ile bir daire çizmek; sonra F noktasının bulunduğu cihette D müveccihine r mesafesinde bir muvazi resmetmek kifayet eder (şekil: 98).



Şekil: 98

Eğer M, busuretle elde olunan müstekim ile dairenin müşterek bir noktası ise bu nokta katımükâfinin bir noktasından ibaret olduğu gibi katımükâfinin her noktasına da bu tarzda elde edilmiş nazarile bakılabilir.

Böyle müşterek bir noktanın mevcut olabilmesi yani mezkûr müstekim ile dairenin tekatu edebilmesi için müstekimin F merkezine olan mesafesinin r nısıf kutrundan küçük olması lâzım ve kâfidir. Eğer müstekimin K amut mevkii F ile I arasında kâin değil ise yani $r>p$ ise bu şart aşikâr surette tahakkuk eder. Eğer K′ amut mevkii F ile I arasında kâin ise mezkûr müstekim ile dairenin tekatu edebilmesi için $FK' < r$ veya $p < r$ veya nihayet $r > \frac{p}{r}$ olması lâzım ve kâfidir.

Bu izahattan anlaşılacağı veçhile FI nın A muntasıf noktasından D müveccihine resmedilen muvazi Δ olduğuna göre katımükâfinin bütün noktaları Δ müstekimine nazaran F mihrakının bulunduğu cihette kâindir.

A noktasına (muzaaf hal) katımükâfinin **resi** denir. Bu nokta münhaninin müveccihe en yakın noktasıdır.

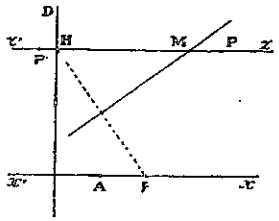
Bu tersimattan anlaşılacağı veçhile katımükâfinin bir tenazur mihveri vardır; bu mihver de mihraktan müveccihe resmedilen $x'x$ amudundan ibarettir. r nısıf kutru istenildiği kadar büyük alınabileceğinden katımükâfiyi resmeden nokta da gayrimahdut surette uzaklaşabilir. Binaenaleyh **katımükâfi gayrimahdut surette uzanan bir münhanidir.**

133. Katımükâfinin mütemadi bir hareketle tersimi — Müveccih hat boyunca tesbit edilmiş bir cetvel tahtası ile bir dıl'ı bu cetvele tatbik edilen bir günye tasavvur edelim (şekil: 96).

Tulü günyenin HP dıl'ına müsavi olan bir ipin bir ucu P ye ve diğer ucu da F noktasına tesbit edilmiş olsun. Eğer günye cetvel

üzerinde kaydırılır ve bu esnada ip te M noktasında bir kurşun kalemin sivri ucile, PM kısmı günyenin diğer dıl'ı üzerine muntabık olacak veçhile, gergin tutulursa kurşun kalemin M ucu bir katımükâfi kavsi resmeder.

134. Nahiyeler. dava. — Katımükâfinin mihverine muvazi olan her müstekim mezkûr münhaniyi bir noktada kateder.



Şekil: 99

Katımükâfinin mihverine muvazi ve müveccih hattı H noktasında kat'eden bir müstekim $z'z$ olsun (şekil: 99). $z'z$ müstekimine ait bir M nok'tasının katımükâfinin bir noktası olabilmesi için MH = MF olması lâzım ve kâfidir. Binaenaleyh mezkûr M noktası, FH a muntasıf noktasından resmolunan amudun $z'z$ müstekimini katettiği noktadan ibarettir.

İhtar — Bu amudun bir tarafında bulunan noktaların kâffesi F e H tan daha yakın olduğu gibi diğer tarafında bulunan noktaların kâffeside H *a* F ten daha yakındır. MZ nısıf müstekimi üzerinde bulunan P noktası için PF < PH; MZ′ nısıf müstekimi üzerinde bulunan P′ noktaları için de P′F > P′H tır.

Netice — Katımükâfi müsteviyi iki nahiyeye ayırır: Mihrakı havi olan nahiyeye **dahilî nahiye** ve diğerine de **haricî nahiye** tesmiye olunur.

Yukarıdaki ihtardan aşağıdaki dava istintaç olunur:

135. Dava — Bir nokta katımükâfinin dahilinde kâin ise mihraka olan mesafesi müveccih hatta olan mesafesinden küçük, haricinde kâin ise mihraka olan mesafesi müveccih hatta olan mesafesinden büyüktür.

Mukabil dava — Bir noktanın mihraka olan mesafesi müveccihe olan mesafesinden küçük ise mezkûr nokta katımükâfinin dahilinde kâin; mihraka olan mesafesi müveccihe olan mesafesinden büyükse katımükâfinin haricinde kâindir.

İspat katınakıs ve katızaittekinin aynidir.

136. Katımükâfinin diğer tarifi — Katımükâfinin tarifinden kolayca aşağıdaki hassa istintaç olunur:

Sabit bir noktadan geçen ve sabit bir müstekime mümas olan dairelerin merkezinin hendesî mahalli, bir katımükâfidir;

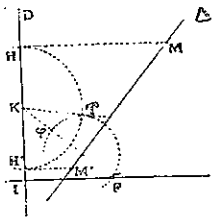
Bilmukabele her katımükâfiye bu suretle elde olunmuş nazarile bakılabilir.

Sabit nokta mezkûr katımükâfinin mihrakı ve sabit müstekim de müveccihidir.

Bir müstekim ile bir katımükâfinin faslı müştereki.

137. Mes'ele. — Bir müstekim ile bir katımükâfinin tekatu noktalarını bulmak matluptur.

Bir Δ müstekiminin F mihrakı ve D müveccihile verilen bir katımükâfiyi kat'ettiği noktaları bulmak matlup olsun (şekil: 100). Mezkûr müstekimin bir M noktasının katımükâfiye ait bir nokta olabilmesi için bu noktanın F ten geçen ve D müveccihine mümas olan bir dairenin merkezi olması lâzım ve kâfidir.



Şekil: 100

Halbuki F ten geçen ve merkezi Δ üzerinde bulunan bir daire F noktasının Δ ya nazaran mütenazırı olan φ noktasından geçtiği gibi bilmukabele F ve φ noktalarından geçen bir dairenin merkezi de Δ müstekimi üzerinde kâindir. Şuhalde mes'ele F, φ gibi iki noktadan geçen ve bir D müstekimine mümas olan dairenin tersimi mes'elesine müncer olur ki bu da evvelce halledilmişti (Müstevi hendese, 270). Mezkûr mahalde verilen izahata tevfikan bu sonuncu meseleyi halletmek için F φ yi D müveccihini K noktasında katedinciye kadar uzatmak ve müveccih hat üzerinde, K noktasının iki tarafında, Kφ ile KF arasında vasatı mütenasip olan tule müsavi birer tul almak icap eder. Bunun için de φ, F noktalarından lâalettayin bir daire geçirerek K noktasından bu daireye KT mümasını resmedelim. Malûm olduğu veçhile bu mümasın KT tulü Kφ ile KF arasında mütenasiptir. Binaenaleyh müveccih hat üzerinde K noktasının iki tarafında mezkûr KT tulüne müsavi KH ve KH' tulleri alınacak olursa matlup dairenin H, H' temas noktaları elde edilmiş olur. Aradığımız dairenin merkezini yani Δ müstekiminin katımükâfiyi katettiği M noktasını bulmak için ise H temas noktasından D müveccihine bir amut resim ve bu amudün Δ müstekimini kat'ettiği noktayı işaret etmek kifayet eder.

Münakaşa — Müstevi hendesede verilen izahattan anlaşılacağı veçhile (müstevi hendese 270) F ve φ noktaları D müstekiminin ayni tarafında kâin ise ve Δ müstekimi de katımükâfinin mihverine muvazi değilse mes'elenin M, M' gibi **iki halli vardır** (şekil: 100).

Eğer φ noktası D müstekimi üzerinde kâin ise mes'elenin bir **halli vardır**; ileride görüleceği veçhile bu takdirde Δ müstekimi katımükâfiye **mümastır.** Eğer F ve φ noktaları D müveccihinin muhtelif taraflarında kâin ise mes'elenin **hiç halli yoktur.**

İhtar I. Δ müstekimi F mihrakından geçtiği takdirde F, φ noktaları yekdiğerile birleşeceğinden mes'elenin yukarıki hallini tadil etmek icap eder. Buhalde meçhul dairenin φ noktasından geçmesi şartı yerine F noktasında, Δ müstekimine resmedilen amuda mümas olması şartı alınır. Bu amut müveccih hattı K noktasında kat'edinciye kadar uzatılarak müveccih hat üzerinde, K nın muhtelif taraflarında, KF e müsavi birer tul alınır. Aşikâr surette bu hal, evvelki hallin bir gaye halinden başka birşey değildir.

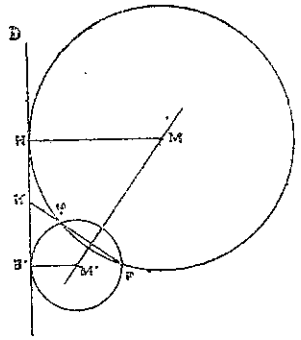
Bu takdirde Δ müstekiminin katımükâfinin mihverile muntabık olması hali müstesna olmak üzere mes'elenin daima iki halli vardır.

İhtar II. Eğer verilen Δ müstekimi katımükâfinin mihverine muvazi ise (meselâ şekil 99 daki Hz müstekimi) K noktası artık mevcut olmadığından yukarıki umumî hal tarzını tatbik etmek kabil olmaz. Bu takdirde doğrudan doğruya görüleceği veçhile temas noktası bizzarure H noktasında kâindir. Binaenaleyh Δ müstekimi katımükâfiyi ancak bir noktada kat'eder ki bu nokta da FH a muntasıf noktasından resmolunan amudün Δ müstekimini kat'ettiği M noktasından ibarettir. Gayeye geçilmek suretile görülür ki diğer tekatu noktası namütenahiye uzaklaşmıştır.

Katımükâfinin müması.

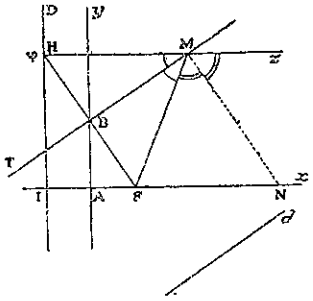
138. Dava — Katımükâfinin bir noktasında bir müması mevcut olup bu mümas ta mezkûr noktanın nısıf kutur şuaile bu noktadan müveccih hatta resmedilen amudun teşkil eylediği zaviyenin nasıfından ibarettir.

Katımükâfinin iki noktası M, M' olsun (şekil: 101). Bu noktalar F ten geçen ve D müveccihine H, H' noktalarında mümas olan dairelerin merkezleridir. Bu dairelerin cezrî mihveri HH' nün K muntasıf noktasından geçtiği gibi MM' merkezler hattı da FK ya amuttur. Bu anlaşıldıktan sonra, M' noktasının gayrimahdut surette M noktasına yaklaştığını farzedelim.



Şekil: 101

Bu takdirde H′ noktası Ha, binnetice K noktası da H a ve FK müstekimi de FH müstekimine gayrimahdut surette yaklaşır. Binaenaleyh MM′ müstekiminin bir gaye vaziyeti mevcut olup o da M noktasından FH a resmedilen amuttan veya FH a muntasıf noktasından resmedilen amuttan ibarettir (şekil: 102). Binaenaleyh katımükâfinin M noktasında bir müması mevcut olup bu mümas ta $\widehat{FMH}$ zaviyesinin nasıfı olmakla dava sabit olur.



Şekil: 102

Netice — Katımükâfinin M noktasındaki MN nazımı $\widehat{FMz}$ zaviyesinin (şekil: 102) yani M noktasının nısıf kutur şuaile M noktasından müveccihe resmedilen amudün imtidadı arasında teşekkül eden zaviyenin nasıfından ibarettir. Bu hassadan fizikte **Optik** bahsinde istifade olunur.

Mümasın hassaları.

139. Dava. Bir katımükâfinin mihrakının kendi mümaslarına nazaran mütenazırlarının hendesî mahalli müveccih hattan ibarettir.

Filhakika, madde 207 de görüldüğü veçhile F mihrakının bir Δ müstekimine nazaran φ mütenazırı D müveccihi üzerinde kâin değilse Δ müstekimi münhaniyi 2 veya O noktada kat'eder. φ noktası D müveccihi üzerinde kâin ise Δ müstekimi katımükâfiyi ancak bir noktada kat'edip Δ müstekimi münhaniye mümastır.

140. Dava II. Bir katımükâfinin mihrakının kendi mümasları üzerindeki mürtesemlerinin hendesî mahalli, resindeki mümastan ibarettir.

Filhakika, F mihrakının lâalettayin bir MT müması üzerindeki mürtesemi B ve mezkûr mümasa nazaran mütenazırı da φ olsun (şekil: 102). MT müstekiminin katımükâfiye mümas olabilmesi için φ noktasının D müveccihi üzerinde kâin olması yani Fφ nin B muntasıf noktasının FI ye A muntasıf noktasından resmolunan yy' amudü yani katımükâfinin resindeki müması üzerinde bulunması lâzım ve kâfi olduğundan dava sabit olur.

Lâzime — Bir kaim zaviyenin resi bir müstekim resmeyler ve bu esnada kaim dılılardan biri de sabit bir noktadan geçerse diğer kaim dıl'ın zarfı bir katımükâfiden ibaret olur.

Mümaslar üzerine mes'eleler.

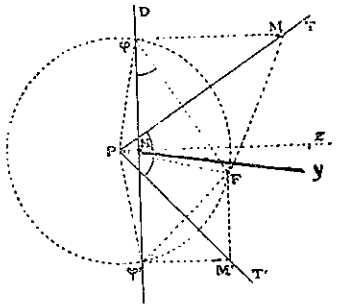
141. Mes'ele I — Bir katımükafiye verilen bir istikamete muvazi bir mümas resmetmek matluptur.

F mihrakı ve D müveccihile malûm olan bir katımükâfiye verilen bir d istikametine muvazi bir mümas resmi matlup olsun (şekil: 102). F mihrakının meçhul mümasa nazaran φ mütenazırı bir taraftan D müveccihi ve diğer taraftan da F ten verilen d istikametine resmedilen amut üzerinde kâindir. Binaenaleyh φ noktası malûm plup Fφ ye muntasıf noktasından resmolunan amut katımükâfinin matlup olan mümasını verir. Verilen d istikametinin katımükâfinin mihverine muvazi olması hali müstesna olmak üzere mes'elenin daima bir ve yalnız bir halli vardır.

d istikametinin mihvere muvazi olması hususî halinde F ten d ye resmedilen amut D müveccihine muvazi olur ve mümas ta namütenahiye uzaklaşmış bulunur.

142. Mes'ele II — Bir katımukâfiye mustevisi dahilinde kâin malûm bir noktadan bir mumas resmetmek matluptur.

Yine mihrakı ve müveccihi ile verilen bir katımükâfinin müstevisi dahilinde kâin bir nokta P olsun (şekil: 103) (Bu noktanın katımükâfinin üzerinde bulunmadığını farzediyoruz. Aksi halde ' u noktadaki mümasın nasıl tersim olunacağı evvelce gösterilmiştir). Mes'eleye halledilmiş nazarile bakalım ve münhaniye P noktasından resmediien bir müması da PT ile gösterelim. F mihrakının bu mümasa nazaran φ mütenazırı müyeccih hat üzerinde kâindir.



Şekil: 103

Binaenaleyh tenazur dolayisile PF = Pφ dir. Şuhalde φ noktası bir taraftan D müveccihi üzerinde ve diğer taraftan da merkezi P olan ve F ten geçen daire üzerinde kâindir. Binaenaleyh mezkûr φ noktası bu iki hattın tekatu noktasından ibarettir. Bilmukabele φ noktası bu surele tersim edilecek olursa Fφ ye muntasıf noktasından resmolunan amut katımükafinin P den geçen bir mümasını verir.

Munakaşa — Bir müstekimin bir daireyi kat'edebilmesi için dairenin merkezinin müstekime olan mesafesinin nısıf kuturdan küçük olması lâzım ve kâfidir: $PH < PF$. Binaenaleyh verilen P noktası katımükfinin haricinde, katımükâfi üzerinde veya katımükâfinin dahilinde bulunduğuna göre mes'elenin 2,1 veya 0 halli vardır, yani mezkûr noktadan katımükâfiye 2,1 veya 0 mümas resmolunabilir..

İhtar — Katımükâfi kâmilen iki mümasın teşkil ettiği zaviye dahilinde kâindir.

143. Poncelet davası — Bir katımukâfinin haricinde kâin bir P noktasından mezkûr münhaniye PM,PM′ gibi iki mümas resmolunursa:

1°. Bu mümaslar mihraktan müsavi zaviyeler altında görüldüğü gibi mezkûr mümasların müveccih hat üzerindeki mümasları da yekdiğerine müsavidir.

2°. Mezkûr mümasların teşkil ettikleri $\widehat{MPM'}$ zaviyesinin nasıfı, P noktasını mihraka yasleden PF müstekimi ile P noktasından, katımükâfinin dahiline doeru mihvere muvazi olarak resmedilen nısıf müstekim arasında teşekkül eden zaviyenin nasıfının aynıdir.

F mihrakı ve D müveccihi ile verilen bir katımükâfiye P noktasından rosmolunan mümaslar PM,PM′ olsun (şekil: 103).

1°. F mihrakının mezkûr mümaslara nazaran φ, φ' mütenazırları, merkezi P olan ve F ten geçen dairenin D müveccihini katettiği noktalardan; P noktasından resmolunan mümaslar ise $F\varphi$, $F\varphi'$ kıtalarına muntasıf noktalarında resmolunan amutlardan ve nihayet temas noktaları da φ ve φ' noktalarından katımükâfinin mihverine resmedilen muvazilerin PM ve PM′ mümaslarını katettikleri noktalardan ibarettir.

P noktasından katımükâfinin mihverine muvazi olarak resmedilen Pz nısıf müstekimi $\varphi\varphi'$ veterinin H noktasından geçer (mütesaviyüssakayn $P\varphi\varphi'$ müsellesinin irtifaı). Şuhalde $\widehat{P\varphi M}, \widehat{P\varphi' M'}$ zaviyeleri Pz e nazaran yekdiğerinin mütenazırı ve binaenaleyh yekdiğerine müsavidir. Diğer taraftan $\widehat{PFM}, \widehat{PFM'}$ zaviyeleri nazir nazire mümaslara nazaran $\widehat{P\varphi M}, \widehat{P\varphi' M'}$ zaviyelerinin mütenazırları olduklarından yekdiğerine müsavidirler. PM, PM′ mümaslarının müveccih hat üzerindeki $H\varphi, P\varphi'$ mürtesemleri ise aşikâr surette yekdiğerine müsavidir.

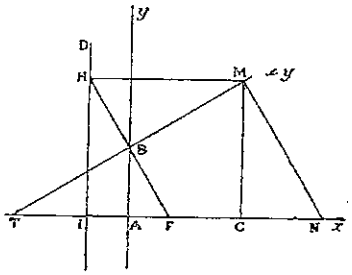
2°. $\widehat{FPz}$ zaviyesinin nasıfı Py olsun. Madde 82 de olduğu veçhile ispat olunur ki $\widehat{yPM}$ zaviyesi $\widehat{zP\varphi}$ zaviyesinin ve $\widehat{yPM'}$ zaviyesi de $\widehat{zP\varphi'}$ zaviyesinin yarısından ibarettir. Halbuki $\widehat{zP\varphi}$, $\widehat{zP\varphi'}$ zaviyeleri yekdiğerine müsavidir. Şuhalde Py müstekiminin P noktasından resmolunan mümaslarla teşkil ettiği zaviyeler yekdiğerine müsavidir. Bundan maada PF, Pz nısıf müstekimleri mümasların teşkil ettiği MPM′ zaviyesi dahilinde kâin olduklarından (geçen madde, ihtar) $\widehat{FPz}$ zaviyesinin nasıfı olan Py müstekimi dahi $\widehat{MPM'}$ zaviyesi dahilinde kâindir. Binaenaleyh Py müstekimi mümasların teşkil ettiği zaviyenin nasıfınndan ibaret olmakla dava sabit olur.

144. Dava — Katımükâfinin haricine mersum kaim zaviyelerin reslerinin hendesî mahalli müveccih hattan ibarettir.

Filhakika, $\widehat{MPM'}$ zaviyesinin (şekil: 103) kaime olabilmesi için bu zaviyenin iki misline müsavi olan $\widehat{\varphi P\varphi'}$ zaviyesinin bir nısıf müstevi zaviye yani iki kaimeye müsavi ve binnetice P noktasının D müveccihi üzerinde bulunması lâzım ve kâfi olmakla dava sabit olur.

Tahtı mümas — Tahtı nazım.

145. Tarif — Bir katımükâfinin bir noktası M olsun (şekil: 104). M noktasından katımükâfiye resmedilen mümas ve nazımın münhaninin mihverini katettiği noktaları nazir nazire T,H ile gösterelim. Mümas ile nazımın M noktası ile mihver arasında kalan MT,MN kıtalarına bazen **mümas** ve **nazım** atları verilir. Bu kıtaların mihver üzerindeki CT, CN mürtesemlerine de nazir nazire **tahtı mümas** ve **tahtı nazım** denir.



Şekil: 104

146. Dava — 1°. Tahtı nazım sabit ve muaddile müsavidir.

2°. Tahtı mümasın muntasıf noktası, katımükâfinin resinde kâindir.

1°. Filhakika, F mihrakının MT müması üzerindeki mürtesemi B, bu mümasa nazaran mütenazırı H, D müveccihi üzerindeki mürtesemi I ve katımükafinin resi de A olsun (şekil 104).

Malûm olduğu veçhile H noktası D müveccihi üzerinde kâin olduğu gibi MH müstekimi de katımükâfinin mihverine müvazidir. Şuhalde HIF, MCN kaim zaviyeli müselleslerinin HI, MC dılıları ve H, M noktalarındaki hadde zaviyeleri (dılıları nazir nazire muvazi) yekdiğerine müsavi olduğundan mezkûr müsellesler yekdiğerine müsavi ve binaenaleyh IF = CN dir.

2°. BTF, BMH kaim zaviyeli müselleslerin BF, BH dılıları ve F, H noktalarındaki zaviyeleri (dahilî mütebadil) müsavi olduklarından mezkûr müsellesler yekdiğerine müsavi ve binaenaleyh B noktası TM in muntasıf noktasıdır. Şuhalde A noktası TC nin muntasıf noktasından ibaret olup dava sabit olur.

147. Katımükâfinin muadelesi — Kemiyeti vaziye mebdei olarak katımükâfinin A resini, fasalalar mihveri olarak katımükâfinin tenazur mihverini ve bu mihver üzerinde müspet cihet olmak üzere A dan F e doğru olan ciheti, nihayet tertipler mihveri olarak ta A dan tenazur mihverine resmedilen amudü yani katımükâfinin A resindeki mümasını alalım (şekil: 104).

F mihrakının faslası $\frac{p}{2}$ olduğu gibi müveccih üzerinde bulunan noktaların faslaları da $\frac{p}{2}$ dir.

Müstevinin vaziyeleri x, y olan lâalettayin bir noktası M olduğuna göre bu noktanın müveccih ve mihraka olan mesafeleri nazir nazire

$$MH = \left| x + \frac{p}{2} \right|,$$

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

dır. M noktasının katımükâfi üzerinde kâin olabilmesi için MH = MF veya

$$\left| x + \frac{p}{2} \right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

olması lâzım ve kâfidir. Bu muadele ise aşikâr surette

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

veya

$$y^2 = 2px$$

muadelesine muadildir. İşte bu sonuncu muadele katımükâfinin muadelesinden ibarettir.

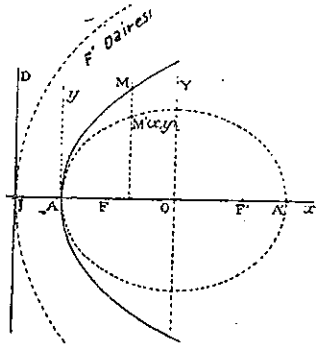
Temrin — Muadelesi

$$y = ax^2 + bx + c$$

olan münhaninin mihveri Oy e muvazi ve resinin vaziyeleri $-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}$ ve muadilinin kıymeti de $\frac{1}{2a}$ dan ibaret olan bir katımükâfi olduğunu isbat ediniz (vaziye mihverleri kendilerine muvazi kalmak üzere mebde noktasını vazieleri $-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}$ olan noktaya naklediniz ve yeni mihverlere nazaran münhaninin muadelesini arayınız. Bu muadele $y^2 = 2px$ şeklindedir).

148. Dava — Katımükâfi, bir mihrakı ile bu mihraka mücavir resi sabit kalmak üzere diğer mihrakı mihver üzerinde gayrimahdut surette uzaklaşan bir katınakısın (veya bir katızaidin) gayesidir.

Meselâ mihrakları F, F′ ve resleri A, A′ olan bir katınakıs nazarı itibara alalım (şekil: 105). Sabit mihrak ve res F, A olsun. Bu katınakıs F ten geçen ve (F′) müveccih dairesine mümas olan dairelerin merkezlerinin hendesî mahallidir. F′ noktası mihver üzerinde gayrimahdut surette uzaklaşacak olursa I noktası sabit kalan (AI = AF) ve merkezi IF üzerinde gayrimahdut surette uzaklaşan (F′) müveccih dairesi [AF e I noktasında amut olan D müveccihine gayrimahdut surette yaklaşır. Binaenaleyh gayede katınakıs, F ten geçen ve D müstekimine mümas olan dairelerin merkezlerinin hendesî mahalli yani mihrakı F ve müveccihi D den ibaret olan bir katımükâfi olur. Bu dava katınakısın muadelesinden istifade edilmek suretile daha sarih bir tarzda ispat olunabilir.



Şekil: 105

Filhakika, katınakısa ait bir M noktasının mebdei O olan mihverlere nazaran vaziyeleri (X, y) ve mebdei A olan mihverlere nazaran vaziyeleri de (x, y) olsun: Malûm olduğu veçhile katınakısın birinci mihverlere nazaran muadelesi:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dir. Halbuki $X=x-a$ olduğundan X ın bu kıymeti yukarıki muadelede yerine konularak katınakısın ikinci mihverlere nazaran

$$y^2=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2 \qquad (1)$$

muadelesi elde olunur.

$p=IF=2(a-c)$ vazedelim. Buradan $c=a-\frac{p}{2}$ elde olunur. Şuhalde

$$\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{a^2-\left(a-\frac{P}{2}\right)^2}{a}=p-\frac{p^2}{4a}$$

olur.

p sabit kalmak üzere a gayri mahdut surette büyürse yukarıki müsavatta $\frac{p^2}{4a}$ gayrimahdut surette küçüleceğinden $\frac{b^2}{a}$ nın gayesi p den ibaret olur. $\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{a}$ya gelince, birinci mazrubun gayesi p ve ikincinin gayesi ise sıfırdır. Binaenaleyh gayede (1) muadesi $y^2=2px$ e müncer olur. Şuhalde katınakısın gayesi, muadelesi $y^2=2px$ olan münhaniden yani bir katımükâfiden ibaret olmakla dava sabit olur. Katızait için de dava ayni veçhile ispat olunur,

$\frac{b^2}{a}$ tulüne bir katınakıs veya bir katızaidin **muaddili** tesmiye olunur.

Muadelelerinden istifade edilmek suretile kolayca tahkik olunabilirki katınakıs, katızait ve katımükâfi münhanilerinin her üçünde de **muaddil, mihrakî tertibe** (yani mihraktan geçen mihvere bu noktadan resmedilen amut veterin yarısına) **müsavidir.**

Katımükâfiinin kuturları.

149. Dava.— Bir katımükâfiinin ayni bir istikamete müvazi veterlerinin muntasıf noktalarının hendesî mahalli mihvere muvazi bir müstekimdir (veya, daha doğru olarak, bu muvazi müstekimin münhani dahilinde kalan parçasıdır).

Filhakika, madde 107 deki şekli tekrar nazarı mülâhazaya alalım.

Δ Müstekimi sabit bir istikamete muvazi kalmak üzere yerini değişiirdiğinde mihrakın bu müstekime nazaran mütenaziri olan φ noktası, F ten geçen ve mezkûr istikamete amut olan bir müstekim resmedip Fφ nin D müveccihini katettiği K noktası sabit kalır. K noktası MM′ veterinin mürtesemi olan HH′ nün muntasıf noktasıdır. Şuhalde MM′ veterinin muntasıf noktasından mihvere resmedilen muvazi üzerinde kâindir. Halbuki yukarıda izah edildiği veçhile K noktası sabit olduğundan K noktasından mihvere resmedilen muvazi dahi sabittir. Bilmukabele, K noktasından mihvere resmedilen muvazi üzerinde ve katımükâfi dahilinde alınan her nokta da, bu noktadan Δ ye resmedilen muvazi tarafından ayrılan veterin muntasıf noktası olmakla dava sabit olur.

Ayni bir istikamete muvazi müstekimler üzerinde katımükâfi tarafından ayrılan veterlerin muntasıf noktalarının hendesî mahalli olan müstekime mezkûr istikametin **müzdeviç kutru** denir.

Lâzime. Bir istikametin müzdevici olan kutur katımükâfiyi, bu istikamete muvazi olarak resmedilen mümasın temas noktasında kateder.

M′ noktası M noktasına gayrı mahdut surette yaklaştığı farzolundukta bu keyfiyet derhal meydana çıkar.

İhtar. Müzdeviç kutru bulunmıyan bir ve yalnız bir istikamet vardır. Bu istikamet te katımükâfiinin mihverinin istikametinden ibarettir. Zira, mihvere muvazi olan bir müstekim mezkûr münhaniyi mahdut mesafe dahilinde ancak bir noktada kateder.

150. Dava— Katımukâfiye lâalettayin bir veterin muntehalarından resmolunan mumasların telâki noktası, bu veter istikametinin muzdeviçi olan kutur uzerinde kâindir.

Filhakika, madde 143 te görüldüğü veçhile müstevinin bir P noktasından katımükâfiye PM, PM′ mümasları resmedilecek olursa bu mümasların D müveccihi üzerindeki H φ ,H φ′ mürtesemleri yekdiğerlerine müsavidir (şekil 103). Şuhalde H noktası φ φ′ ün muntasıf noktasıdır. Binaenaleyh P noktasından mihvere resmedilen Pz muvazisinin MM′ veterinin muntasıf noktasından geçtiği yani P noktasının MM′ veterinin müzdevici olan kutur üzerinde bulunduğu aşikârdır.

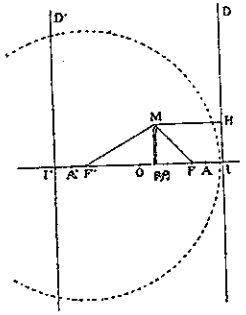
151. Tarif— Üç münhaninin (katınakıs, katızait, katımükâfi) şimdiye kadar mütalea edilen hassalarından anlaşıldığı veçhile mezkûr münhaniler birçok müşabehet arzederler. Bu sebepten mezkûr münhanilere **mahrutiye** müşterek adı verilir. Bu adın verilmesinin sebebi aşağıdaki fasılda daha eyi anlaşılacaktır.

DÖRDÜNCÜ FASIL

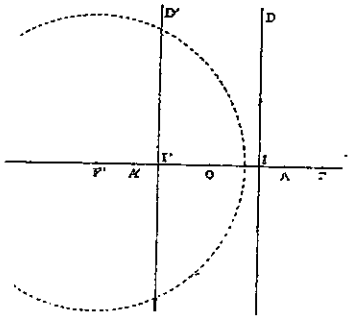
Üç mahrutiyenin muşterek hassaları

§ 1. Mahrutiyelerin müveccih hatları

152. Tarîf — F,F′ mihrakları ve bu mihraklardan geçen AA′ mihverile malûm olan bir katınakıs (veya bir katızait) nazarı itibara alalım. mihraklardan birine ve meselâ F mihrakına ait



Şekil : 106 — Katınakıs



Şekil : 107 — Katızait

müveccih hat veya sadece **müveccih** diye bir daire gibi nazarı itibara alınan F mihrakile diğer mihraka ait (F′) müveccih dairesinin D cezrî mihverine denir (Şekil 106 ve 107).

D müveccihinin AA′ müstekimi üzerindeki amut mevkii I ile gösterildiğine göre I noktası F noktasına ve (F′) dairesine nazaran ayni kuvvete malik olduğundan (müstevi hendese, madde 259) mucibince

$$\overline{IF}^2 = \overline{IF'}^2 - 4a^2$$

veya

$$4a^2 = (\overline{IF'} - \overline{IF})(\overline{IF'} + \overline{IF}) = \overline{FF'}.2\,\overline{IO}$$

veya nihayet

$$\overline{OI}.\overline{OF} = a^2$$

elde olunur. Bu sonuncu müsavat gösteriyorki (müstevi hendese; 175, Netice. I) F **mihrakına ait müveccihin** AA′ **müstekimi üzerindeki** I **amut mevkii**; F **noktasının** AA′ **kıt'asına nazaran müellef müzdevicinden ibarettir.** [1]

Bir katınakıs ve bir katızaidin mihraklardan her birine ait olmak üzere iki müveccihi vardır.

153. Dava — Bir katınakıs (veya katızait), bir F mihrakiyle bu mihraka ait müveccihe olan mesafeleri arasındaki nispet $\frac{c}{a}$ ya musavi olan noktaların hendesî mahallidir.

I. **Katınakıs — 1°. Eğer M noktası katınakıs uzerinde kâin ise $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$ dır.** (H noktası M in müveccih üzerindeki mürtesemidir).

Filhakika, farzımız mucibince

$$MF + MF' = 2a$$

veya

$$MF' = 2a - MF$$

olup bu müsavatın her iki tarafının murabbaı alınarak

$$\overline{MF'}^2 = 4a^2 - 4a.MF + \overline{MF}^2$$

veya nihayet

$$4a.MF = 4a^2 + \overline{MF}^2 - \overline{MF'}^2$$

elde olunr. Halbuki M noktasının AA′ mihveri üzerindeki mürtesemi m ile gösterilecek olursa

$$\overline{MF}^2 - \overline{MF'}^2 = 2\,\overline{FF'}.\overline{Om}$$

olduğu gibi (müstevi hendese, 246. İhtar), bundan evvelki madde mucinbince de

$$4a^2 = \overline{FF'}\ 2.\overline{IO}$$

dur.

Şuhalde

[1] Her müveccih, bir mihrakın aslî daireye nazaran kutbiyesinden ibarettir, dahi denilir.

$$4a^2 + \overline{MF}^2 - \overline{MF'}^2 = \overline{FF'}\,.\,2\overline{IO} + 2\overline{FF'}\,.\,\overline{Om}$$
$$= 2\overline{FF'}\,(\overline{IO} + \overline{Om}) = 2\overline{FF'}\,.\,\overline{Im}$$

olup binnetice

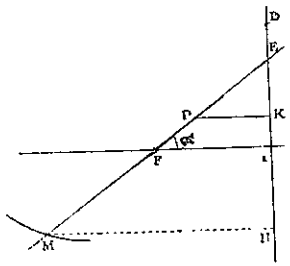
$$4a\,.\,MF = 2\,FF'\,.\,MH$$

ve nihayet

$$\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$$

elde olunur.

2°. Eğer bir P noktası $\frac{PF}{PK} = \frac{c}{a}$ (K noktası P nin muveccih uzerindeki murtesemidir) munasebetini tahkik ederse mezkûr nokta, katınakıs uzerinde kâindir (şekil: 108).



Şekil: 108

PF müstekiminin katınakısın mihraklardan geçen mihverile teşkil ettiği zaviye α ve mezkûr müstekimin müveccihi kat'ettiği nokta da E olsun. Yukarıki münasebet

$$\frac{PF}{PE\cos\alpha} = \frac{c}{a}$$

veya

$$\frac{PF}{PE} = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

tarzında yazılabilir.

PE müstekimi katınakısı M,M' gibi iki noktada kat'eder; bu noktalar için 1° mucibince

$$\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}, \quad \frac{M'F}{M'H'} = \frac{c}{a}$$

dır ki bu müsavatlar da yukarıda olduğu gibi

$$\frac{MF}{ME} = \frac{M'F}{M'E} = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

tarzında yazılabilir. Mazruplarından herbiri birden küçük olan $\frac{c}{a}\cdot\cos\alpha$ hâsılı zarbı 1 e müsavi olamaz. Binaenaleyh PE müstekimi

üzerinde FE kıt'asını $\frac{c}{a}\cos\alpha$ nispeti dahilande taksim eden M,M' gibi iki ve ancak iki nokta vardır. Şuhalde P noktası bu noktalardan birile intibak edip dava sabit olur.

İhtar— Eğer PF müstekimi D müveccihine muvazi ise mezkûr müstekim katınakısı

$$\frac{MF}{MH} = \frac{M'F}{M'H'} = \frac{c}{a}$$

müsavatlarını tahkik eden M,M' gibi iki noktada kat'eder. Diğer taraftan farzımız mucibince de $\frac{PF}{PK} = \frac{c}{a}$ dır.

Halbuki $PK = MH = M'H'$ dür. Binaenaleyh $PF = MF = M'F$ olup P noktası yine M veya M' noktasında kâindir.

II. Katızait— **1°. Eğer M noktası katızait üzerinde kâin ise $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$ dır.**

M noktasının F veya F' kollarından hangisi üzerinde bulunduğu tasrih edilerek yukarıki ispat tekrar olunur.

2°. Eğer bir P noktası $\frac{PF}{PK} = \frac{c}{a}$ münasebetini tahkik ederse mezkûr nokta katızait üzerinde de kâindir.

Evvelâ PF müstekiminin bir mücanip hatta muvazi olmadığını farzedelim. Bu takdirde müzkûr müstekim katızaidi iki noktada kat'edip katınakıstaki iş'ar tarzı ayni kalmak üzere

$$\frac{PF}{PE} = \frac{MF}{ME} = \frac{M'F}{M'E} = \frac{c}{a}\cdot\cos\alpha$$

elde olunur.

$\frac{c}{a}\cos\alpha$ hâsılı zarbı 1 e müsavi olmadığından ayni muhakeme gösterirki P noktası M,M' noktalarından biri üzerinde kâindir.

Eğer PF müstekimi bir mücanip hatta muvazi ise münhaniyi yalnız bir M noktasında kat'edip katınakısta olduğu gibi

$$\frac{PF}{PE} = \frac{c}{a}\cos\alpha = 1$$

elde olunur. Halbuki ayni veçhile 1 inci kısımdaki neticeden

$$\frac{MF}{ME} = 1$$

bulunur. Binaanaleyh P ve M noktalarının her ikisi de EF in muntasıf noktasından yani ayni bir noktadan ibaret olup dava sabit olur.

İhtar — PF müstekimi müveccihe muvazi ise katınakısta olduğu gibi muhakeme olunur.

Lâzime — Bir katınakıs veya bir katızaidin F mihrakından resmolunan bir müstekim mezkûr münhaniyi M ve M′ noktalarında kat'ederse F mihrakının M, M′ noktalarına nazaran E müellef müzdevicinin hendesî mahalli, F mihrakına ait müveccihten (mihrakın kutbiyesi) ibarettir.

154. Mukabil dava — Sabit bir F noktasına ve sabit bir D mustekimine olan mesafeleri arasındaki nispet malûm bir e kıymetini haiz olan noktaların hendesî mahallî, $e>1$ ise bir kamakıs, $e>1$ ise bir katızait, $e=1$ ise bir katımükâfiidir.

Davanın üçüncü kısmı katımükâfiinin bizzat tarifinden başka birşey değildir. Fikri tespit için $e>1$ farzedelim. D müstekimine amut FI müstekimi üzerinde hendesî mahallin A, A′ gibi iki ve yalnız iki noktası vardır (şekil: 111).

$$\frac{AF}{AI}=e, \qquad \frac{A'F}{A'I}=e$$

AA′ nün muntasıf noktası O olsun. $OA=a$, $OF=c$ vazedelim.

$e<1$ olduğundan F noktası A ile A′ arasında kaindir. Şimdi ispat edeceğiz ki resleri A, A′ ve mihraklarından biri F olan katınakıs aranılan hendesî mahalden ibarettir. Bunu ispat için, esas dava mucibince, D müstekiminin F mihrakına ait müveccihten ibaret ve verilen e nispetinin de $\frac{c}{a}$ ya müsavi olduğunu ispat eylemek kifayet eder. Halbuki

$$e=\frac{AF}{AI}=\frac{A'F}{A'I}=\frac{A'F-AF}{A'I-AI}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

olduğu gibi AA′FI müellef fırkasında da

$$OF\cdot OI=\overline{OA}^2$$

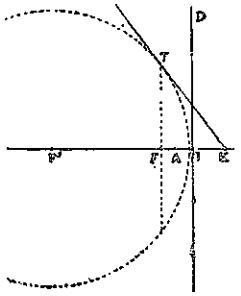
olup buradan da

$$OI=\frac{\overline{OA}^2}{OF}=\frac{a^2}{c}$$

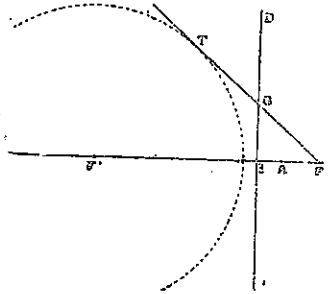
elde olunmakla dava sabit olur.

Katızait için de ayni ispat tekrar olunur.

155. F mihrakına ait müveccih hattın tersimi — F,F′ mihrakları ve büyük mihverile malûm olan bir katınakıs veya bir katızait nazarı itibara alalım. Gerek (F′) müveccih dairesi ve gerekse aslî daire vasıtasile F mihrakına ait müveccih hat kolayca tersim olunabilir.

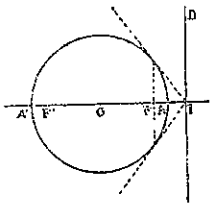


Şekil: 109
Katınakıs

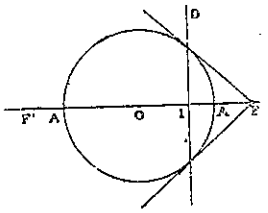


Şekil: 110
Katızait

Birinci halde münhani katınakıs olduğuna göre F′F mihverine F noktasından bir amut resmederek bu amudün (F′) müveccih dairesini katettiği noktalardan birini T ile gösterelim (şekil: 109).



Şekil: 111
Katınakıs



Şekil: 112
Katızait

T noktasından (F′) müveccih dairesine resmedilen mümasın FF′ mihverini kat'ettiği nokta K ile gösterilecek olursa FK ye I muntasıf noktasından resmedilen amut aranılan D müveccihini verir. Münhani katızait olduğuna göre F mihrakından (F′) müveccih dairesine resmedilen FT mümasının G muntasıf noktasından FF′ e resmedilen amut, aranılan D müveccihini verir (şekil: 110).

İkinci halde yani D müveccihinin tersimi için aslî daire kullanıldığına göre münhani katınakıs olduğu takdirde F noktasından

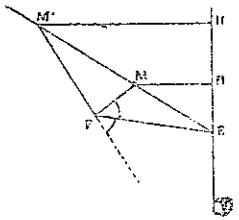
FF′ e resmedilen amudun aslî daireyi katettiği noktalardan mezkûr daireye birer mümas resmetmek kifayet eder (şekil: 111). Bu mümaslar FF′ mihverini D müveccihinin mezkûr mihver üzerindeki I amut mevkiinde kateder. Binaenaleyh I noktasından FF′ e bir amut resmolunarak D müveccihi elde olunur.

Münhani katızait olduğu takdirde ise F noktasından aslî daireye mümaslar resmetmek kifayet eder (şekil: 112).

Bu mümasların temas noktaları arasına vasledilen müstekim, aranılan D müveccihini verir.

156. Dava.— Bir mahrutiyenin bir MM′ veterinin bir F mihrakından göründüğü zaviyenin nasıfı, F noktasını MM′ müstekimile F mihrakına ait D müveccihinin E telâki noktasına vasleden FE müstekiminden ibarettir.

Eğer M, M′ noktaları bir katızaidin muhtelif kolları üzerinde kâin ise mezkûr nasıf dahilî ve diğer hallerin kâffesinde ise haricidir.



Şekil: 113

M, M′ noktalarının D müveccihi üzerindeki mürtesemleri H, H′ olsun (şekil: 113). Farzımız mucibince

$$\frac{MF}{MH}=\frac{M'F}{M'H'}=e$$

veya

$$\frac{MF}{M'F}=\frac{MH}{M'H'}$$

dır. MH, M′H′ yekdiğerine muvazi olduklarından

$$\frac{MH}{M'H'}=\frac{EM}{EM'}$$

olup binnetice

$$\frac{MF}{M'F}=\frac{EM}{EM'}$$

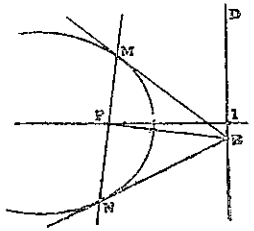
elde olunur. Bu sonuncu müsavat gösteriyor ki FE müstekimi, $\widehat{MFM'}$ zaviyesinin nasıfından ibarettir. Mezkûr müstekim ancak M, M′ noktaları müveccihin muhtelif taraflarında yani mezkûr

noktalardan her biri nazirnazire bir katızaidin bir kolu üzerinde bulunduğu takdirde dahilî nasıf olabilip dava sabit olur.

Lâzime I.— Bir mahrutiyenin bir mümasının temas noktasile müveccih arasında kalan parçası, mezkûr müveccihe ait mihraktan bir kaim zaviye altında görülür.

Filhakika, bir mahrutiyenin bir noktası M ve buna yakın bir noktası da M′ olsun. Bir katızait üzerinde bu noktalar ayni kol üzerinde kâindirler. Binaenaleyh, bütün haller için, FE müstekimi (şekil: 113) $\widehat{MFM'}$ zaviyesinin haricî nasıfıdır. Şimdi M′ noktasının münhani üzerinde kalmak üzere, gayrimahdut surette M noktasına yaklaştığını farzedelim. Bu esnada FE müstekimi mütemadiyen $\widehat{MFM'}$ zaviyesinin dahilî nasıfına amut kalır.

Halbuki mezkûr dahilî nasıf gayede FM e munkalip olduğu gibi ME de mahrutiyenin M noktasındaki mümasına munkalip olur. Binaenaleyh bu takdirde dahi FE müstekimi, FM e amut olmakla dava sabit olur (şekil: 114).



Şekil: 114

Bu hassadan doğrudan doğruya aşağıdaki hassa istintaç olunur:

Lâzime II. Bir müveccihin bir E noktasından bir mahrutiyeye iki mümas resmolunursa temas noktalarının arasını vasleden veter mezkûr müveccihe ait mihraktan geçer (şekil: 114).

§.2— Deveranî mahrut ve üstüvanenin müstevi maktaları

157. Dava— Deveranî bir mahrutun resinden geçmiyen bir müstevi ile maktaı bir katınakıs, bir katızait veya bir katımükâfidir.

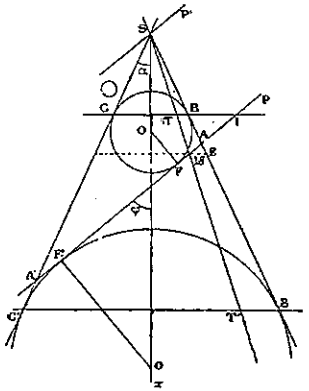
Şekil müstevisi olmak üzere verilen şeklin tenazur müstevisini yani P katı müstevisine amut olan nısfınnehar müstevisini alalım. Mahrutun S resinden P katı müstevisine muvazi olarak resmedilen müsteviyi de P′ ile gösterelim. Üç hal mümkündür:

1°. **P′ müstevisi mahrutu katetmez** (şekil: 115 ve 116).

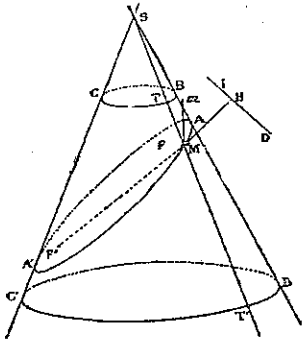
Bu takdirde P müstevisinin nısfınnehar müvellitlerini katettiği A,A′ noktaları mahrutun ayni bir besatı üzerinde ayni SAA′ müsellesi mahrutun dahilinde kâindir.

SAA′ müsellesi dahiline mersum (O) dairesile mezkûr müsellese S zaviyesi dahilinde haricen mümas olan (O′) dairesini nazarı itibare alalım (şekil: 115).

Mezkûr dairelerin O,O′ merkezleri mahrutun Sx mihveri üzerinde kâindir. Bu daireler Sx mihveri etrafında devrettirilecek olursa mahrut dahiline nazir nazire BC, B′C′ mütevazi daireleri boyunca mersum olan iki küre tevlit ederler. Bu kürelerin OF,O′F′ nısıf kuturları P katı müstevisine amut olduklarından mezkûr kü-



Şekil: 115



Şekil: 116

reler P müstevisine mümastırlar. P müstevisi ile mahrutun faslı müştereki, şekil müstevisi üzerine AA′ kıt'asına göre irtisam eder. Binaenaleyh mezkûr faslı müşterek kâmilen mahrut ile bu mahrut dahiline mersum iki kürenin BC, B′C′ temas müstevileri arasında mahsurdur. Mezkûr faslımüşterekin lâalettayin bir noktası M; SM müvellidinin mahrut dahiline mersum kürelerle temas noktaları da T, T′ olsun. M noktası T ile T′ arasında kâin olduğundan

$$MT + MT' = TT' = BB'$$

elde olunur. Halbuki bir noktadan bir küreye resmolunan mümaslar olmak dolayisile

$$MF = MT,\ MF' = MT'$$

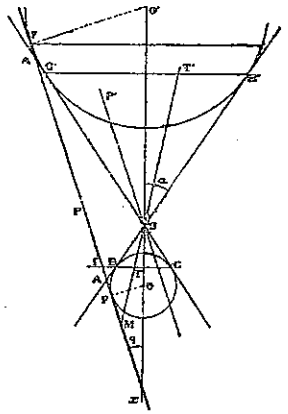
dür. Binaenaleyh

$$MF + MF' = MT + MT' = TT' = BB' \quad \text{(sabit)}$$

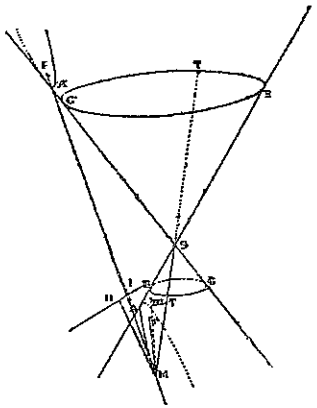
yazılabilir.

Şuhalde faslımüşterekin bütün noktaları, mihrakları F, F′ ve büyük mihveri AA′ olan bir katınakıs üzerinde kâindir (şekil: 116) Bu katınakıs şekil müstevisi üzerine AA′ kıt'asına göre irtisam eder (şekil: 115).

Bilmukabele, mezkûr katınakısın her N noktası faslı müştereke ait bir noktadır. Filhakika, N noktasından şekil müstevisine resmedilen amut bu müsteviyi A ile A′ noktaları arasında deler: Binaenaleyh mezkûr amut mahrutu iki noktada kateder ki bu noktalarda, esas dava mucibince ancak amudun katınakısı katettiği noktalardan ibarettir.



Şekil: 117



Şekil: 118

İhtar.— Hatınakısın M noktasındaki müması, P müstevisile mahruta SM müvellidi boyunca mümas olan müstevinin faslımüsterekinden ibarettir.

2°. **P′ müstevisi mahrutu kat'eder** (şekil: 117 ve 118).— Bu takdirde P müstevisinin nısfınnehar müvellitlerini katettiği A, A′ noktaları mahrutun muhtelif besatları üzerinde yani SAA′ müsellesi mahrutun haricinde kâindir. A ve A′ zaviyeleri dahilinde SAA′ müsellesine haricen mersum olan (O) ve (O′) dairelerini nazarı itibara alalım. Mezkûr dairelerin O, O′ merkezleri S zaviyesinin haricî nasıfı yâni mahrutun Sx mihveri üzerinde kâindir. Bu daireler Sx mihveri etrafında devrettirilecek olursa mahrut dahiline nazir nazire BC, B′C′ mütevazi daireleri boyunca mersum olan iki küre tevlit ederler. Bu kürelerin OF, O′F′ nısıf kuturları P müstevisine amut olduklarından mezkûr küreler P müstevisine F, F′

noktalarında mümastırlar. P müstevisile mahrutun faslımüşterekinin şekil müstevisi üzerindeki mürtesemi, A A′ müstekiminin AA′ kıt'asının haaicinde olan kısmından ibarettir. Binaenaleyh mezkûr faslı müşterek kâmilen mahrut ile bu mahrut dahiline mersum iki kürenin BC, B′C′ temas müstevileri arasındaki nahiyenin haricinde kâindir. Mezkûr faslımüşterekin lâalettayin bir noktası M, SM müvellidinin mahrut dahiline mersum kürelerle temas noktaları da T,T′ olsun. M noktası T ile T′ arasında kâin olmadığından

$$MT' - MT = TT' = BB'$$

yazılabilir. Halbuki bir noktadan bir küreye resmedilen mümaslar yekdiğerine müsavi olduklarından

$$MF = MT, \quad MF' = MT'$$

olup binnetice

$$MF' - MF = MT' - MT = TT' = BB' \text{ (sabit)}$$

elde olunur. Faslı müşterekin mahrutun diğer besatı üzerinde kâin bir M′ noktası alınacak olursa yukarıda olduğu gibi

$$M'F - M'F' = BB'$$

olduğu görülür.

Binaenaleyh faslı müşterekin bütün noktaları mihrakları F,F′ ve katı mihveri AA′ olan bir katızait üzerinde kâindir.

Bunun mukabili de yukarıda olduğu gibi ispat olunur.

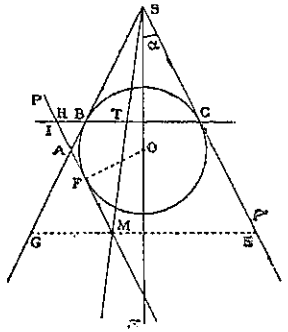
İhtar— Bu katızaidin M noktasındaki mümas, P müstevisile mahruta SM müvellidi boyunca mümas olan müstevinin faslı müşterekinden ibarettir. Farzedelim ki SM müvellidi gayrı mahdut surette P ye muvazi olan P′ müstevisi dahilindeki müvellitlerden birine yaklaşsın. Bu takdirde M noktası gayrı mahdut surette uzaklaşır. Binaenaleyh (112):

Elde olunan katızaidin mücanipleri, katı müstevinin mahruta bu müsteviye muvazi olan müvellitleri boyunca mümas olan müstevilerin faslı müştereklerinden ibarettir. Mezkûr müvellitler münhaninin mücanibî istikametlerini verirler.

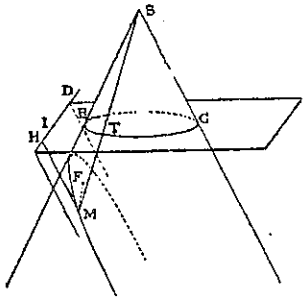
3°. P′ müstevisi mahruta mümastir (şekil: 119 ve 120)— P′ müstevisinin şekil müstevisi üzerindeki isri bir nısfınnehar müvellidi üzerinde kâindir. Şekil üzerinde iki muvazi P,P′ müstekimine mümas ve merkezi S_x üzerinde kâin yalnız bir daire vardır. Bu daire mahrutun S_x mihveri etrafında devrettirilecek olursa mahrut

dahiline BC muvazisi buyonca mersum ve P müstevisine F noktasında mümas olan bir küre tevlit eder.

Faslı müşterekin lâalettayin bir noktası M; SM müvellidinin BC muvazi dairesile tekatu noktasının P müstevisile CD muvazi daire müstevisinin faslı müşterekine olan mesafesi de (bu mesafe şekil: 119 üzerinde hakiki büyüklükte irtisam etmiştir) MH olsun. Bir taraftan ayni bir noktadan küreye resmedilen mümaslar olmak dolayısile MF = MT ve diğer taraftan da MT = CE (deveran ile yekdiğeri üzerine intibak ettiklerinden) dir. Bundan maada muvaziler arasında mahsur muvazi müstekim parçaları olduklarından CE = MH tır.



Şekil: 119



Şekil: 120

Şuhalde MF = MH olur.

Binaenaleyh faslımüşterekin bütün noktaları mihrakı F ve müveccihi D olan bir katımükâfi üzerinde kâindir.

Bunun mukabili de bundan evvelki hallerde olduğu gibi ispat olunur.

İhtar I.— Katizaitte olduğu gibi ispat olunurki bu katımükâfinin P′ müstevisinin mahrut ile temas müvellidinden ibaret olan bir mücanibî istikameti varsa da mücanibi yoktur.

İhtar II.— İki evvelki halde P müstevisi kendi kendisine muvazi olarak hareket ettirilerek görülür ki katızait ve katımükâfinin nazir nazire gaye şekilleri mütelâki iki müstekim ile muzaaf bir müstekimden ibarettir.

158. Birinci ve ikinci halde P müstevisiyle nazir nazire F ve F′ den geçen ve mahrut dahiline mersum bulunan kü-

relerin CB, C'B' temas müstevilerinin D, D' faslı müşterekleri F, F' mihraklarının müveccihlerinden ibarettir.

Filhakika, mahrutun res zaviyesinin nısfını α ve P müstevisinin mahrutun mihverile teşkil ettiği hadde zaviyeyi de φ ile gösterelim. M noktasından CD temas müstevisine resmedilen amut Mm (şekil: 116 ve 118) ve M noktasından D müstekimine resmedilen amut ta MH olsun. MmT kaim zaviyeli müsellesinde $\widehat{mMT}$ hadde zaviyesi α ya müsavidir. Binaenaleyh $Mm = MT \cos\alpha$ veya $MT = MF$ olduğundan

$$Mm = MF.\cos\alpha \qquad (1)$$

elde olunur. Diğer taraftan MmH kaim zaviyeli müsellesinde $\widehat{mMH}$ hadde zaviyesi φ ye müsavidir. Binaenaleyh

$$Mm = MH.\cos\varphi \qquad (2)$$

dır. (1) ve (2) müsavatlarından derhal

$$MF\cos\alpha = MH\cos\varphi$$

veya

$$\frac{MF}{MH} = \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha} = \text{Sabit}$$

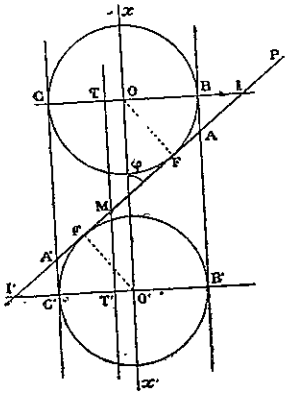
elde olunur. Görüliyor ki M noktasının F noktasına ve D müstekimine olan mesafeleri arasındaki nispet sabittir. Birinci halde $\alpha < \varphi$ olduğundan $\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha} < 1$ ve ikinci halde $\alpha > \varphi$ olduğundan $\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha} > 1$ dır. Şuhalde D müstekimi her iki halde katınakıs veya katızaidin F mihrakına ait müveccihinden ibarettir. D' müstekimi için dava ayni veçhile ispat olunur.

159. Dava II.— Bir deveranî üstüvanenin müvellitlerine muvazi olmıyan bir müstevi ile maktaı bir katınakıstır.

Şekil müstevisi olarak verilen şeklin tenazur müstevisini yani katı müsteviye amut olan nısfınnehar müstevisini alalım (şekil: 121 ve 122). BB', CC' nısfınnehar müvellitlerile katı müstevinin şekil müstevisi üzerindeki AA' isrine mümas olan iki (O) ve (O') dairesi vardır. Bu dairelerin O, O' merkezleri aşikâr surette üstüvanenin $x'x$ mihveri üzerinde kâindir. Mezkûr daireler $x'x$ mihveri etrafında devrettirilecek olursa (BC) ve (B'C') mütevazi

dairelerinin boyunca üstüvane dahiline mersum olan iki küre tevlit ederler. Bu küreler. OF, O'F' nısıf kuturları katı P müstevisine amut olduklarından, P müstevisine mümastırlar.

P müstevisile üstüvanenin faslı müştereki şekil müstevisi üzerine AA' kıt'asına göre irtisam eder. Binaenaleyh mezkûr faslı müşterek kâmilen üstüvane ile bu üstüvane dahiline mersum iki kürenin BC, B'C' temas müstevileri arasında kâindir. Mezkûr faslı müşterekin lâalettayin bir noktası M, M noktasından geçen müvellidin üstüvane dahiline mersum iki küre ile temas nokiaları da T, T' olsun. M noktası T ile T' arasında kâin olduğundan



Şekil: 121

$$MT + MT' = TT' = BB' \quad \text{(sabit)}$$

yazılabilir. Diğer taraftan ayni bir noktadan bir küreye resmedilen mümaslar olduklarından

$$MT = MF, \qquad MT' = MF'$$

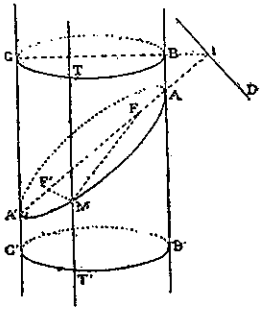
dür. Binaenaleyh

$$MF + MF' = MT + MT' = TT' = BB' \quad \text{(sabit)}$$

elde olunur.

Şuhalde faslı müştereke ait her nokta mihrakları F, F' ve büyük mihveri AA' olan bir katınakıs üzerinde kâindir.

Bunun mukabilinin de doğru olduğu yani mezkûr katınakısa ait her noktanın da P müstevisi ile üstüvanenin faslı müştereki üzerinde kâin olduğu madde 157 de olduğu gibi ispat olunup dava sabit olur.



Şekil: 122

İhtar I. Mahrutun resini mihveri istikametinde namütenahiye uzaklaşmış farzederek bu davaya madde 152 deki davanın (1°) gaye hali nazarile bakılabilir.

İhtar II. Madde 158 deki dava bu hal için de doğrudur. Yalnız bu takdirde $\alpha = o$ olduğundan $\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}$ nispeti yani harici anilmerkeziyeti $\cos\varphi$ den ibarettir.

160. Mukabil dava I. 1°. Verilen herhangi bir katınakıs, verilen herhangi bir deveranî mahrut üzerine daima vazolunabilir.

2°. Verilen herhangi katızaidin mücaniplerinin münhaniyi ihtiva eden zaviyesi verilen hergangi bir deveranî mahrutun res zaviydsinden küçük veya bu zaviyeye müsavi ise mezkûr katı zait mezkûr mahrut üzerine vazolunabilir.

3°. Verilen herhangi bir katımükâfi verilen herhangi bir deveranî mahrut üzerine daima vazolunabilir.

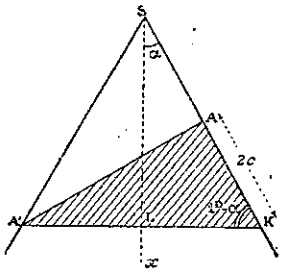
Verilen deveranî mahrutu res zaviyesinin nısfından ibaret olan α zaviyesile tarif ve tayin edilmiş farzediyoruz.

1°. Katınakıs hali — Mes'eleye halledilmiş nazarile bakalım. ve şekil müstevisi olarak katınakıs müstevisine amut olan nısfınnehar müstevisini alalım (şekil: 115). Bu katınakısın şekil müstevisi üzerindeki isri P büyük mihveri AA', mihrakları da F,F' olsun. Meselâ SA' > SA farzedelim.

$$2c = FA' - FA = A'C - AB = A'C + SC - (AB + SB) = SA' - SA$$

yazılabilir.

Sx mihverine amut olarak A'K çizilecek olursa (şekil: 123) bir AA'K müsellesi teşkil olunur ki bu müsellesin iki $AA' = 2a$, $AK = SA' - SA = 2c$ dıl'ıle bu dılılardan birinin karşısında bulunan ve α zaviyesinin tamamından ibaret olan $\widehat{AKA'}$ zaviyesi malûmdur. Binaenaleyh bu müselles tersim olunabilir ve AA' dıl'ı AK dılından büyük olduğundan mes'elenin ancak bir halli vardır (Müstevi hendese, 140).



Şekil: 123

Bu müselles tersim edildikten sonra A'K ya L muntasıf noktasından bir amut resmedilir. Bu amudün AK müstekimini katettiği nokta S olsun. Mihveri SL müstekiminden ve nısfınnehar müvellitleri de SA, SA' den ibaret olan deveranî mahrutun res zaviyesinin nısfı α olup bu mahrut AA' müstekimi boyunca şekil müstevisine amut olan P

müstevisi tarafından verilen katınakısa müsavi bir katınakısa göre katolunur. Zira P müstevisi ile mezkûr mahrutun maktaı olan katınakısın büyük mihveri $2a$ ve mihrakî budü de $2c$ den ibarettir.

Binaenaleyh mes'eleye cevap olan namütenahi müstevi vardır:

Bu müsteviler de P müstevisinden Sx etrafında deveran vasıtasile elde olunan bütün müstevilerle bu müstevilerin S noktasına nazaran mütenazırları olan bütün müstevilerden ibarettir.

2°. Katızait hali — Mes'eleye halledilmiş nazarile bakalım (şekil: 117). Katınakısta olduğu gibi muhakeme edilerek

$$2c = FA + FA' = AB + CA' = AB + SC + SA' = SA + SA'$$

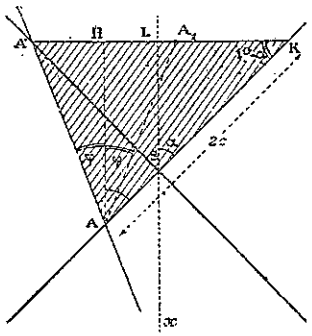
elde olunur. Eğer Sx mihverine amut olarak A'K çizilecek olursa (şekil: 124) bir AA'K müsellesi teşkil olunur ki bu müsellesin iki $AA' = 2a$, $AK = SA + SA' = 2c$ dıl'ıle bu dılılardan birinin karşısında bulunan ve α zaviyesinin tamamından ibaret olan $\widehat{AKA'}$ zaviyesi malûmdur. Binaenaleyh bu müselles tersim olunabilir. Bu tersimatın yapılabilmesi için;

$$AH \leqq AA' \text{ veya } AK\cos\alpha \leqq AA' \text{ veya } 2c\cos\alpha \leqq 2a$$

olması icap eder. Diğer taraftan mücaniplerin münhaniyi ihtiva eden zaviyesinin β nısfının (Cosinus) ü $\frac{a}{c}$ ye müsavi olduğundan yukarıki imkân şartı

$$\cos\alpha \leqq \cos\beta \text{ veya } \beta \leqq \alpha$$

dan ibaret olur.



Şekil: 124

Bu müselles tersim edildikten sonra A'K ya L muntasıf noktasından bir amut resmedilir. Bu amudun AK müstekimini katettiği nokta S olsun. Mihveri SL müstekiminden ve nısfınnehar müvellitleri de SA, AS' den ibaret olan deveranî mahrutun res zaviyesinin nısfı α olup bu mahrut şekil müstevisine AA' müstekimi boyunca amut olan P müstevisi tarafından verilen katızaide müsavi bir katızaide göre katolunur. Zira bu katızaidin büyük mihveri $2a$ ve mihrakî budü de $2c$ den ibarettir.

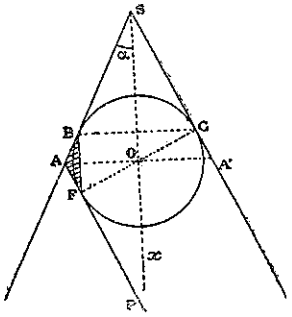
Binaenaleyh mes'eleye cevap olan namütenahi müstevi vardır:

Bu müsteviler de P müstevisinden Sx etrafında deveran vasıta-

sile elde olunan bütün müstevilerle bu müstevilerin S noktasına nazaran tekmil mütenazırlarından ibarettir.

İhtar — Yukarıki tersimat AA'K,AA$_1$K gibi iki müselles verir. Fakat AA' ve AA$_1$ müstekimleri mahrutun mihverinin AH istikametile ayni φ zaviyesini teşkil ettiklerinden AA$_1$K müsellesi katı müstevinin yeni bir istikametini vermez.

3°. Katımükâfi hali — Mes'eleye halledilmiş nazarile bakalım ve şekil müstevisi olarak verilen münhanin müstevisine amut olan nısfınnehar müstevisini alalım (şekil: 119). Verilen katımükâfinin nısıf muaddili olan AB = AF malûmdur. Bundan maada, $\widehat{FAB}$ zaviyesi 2α nın mütemmimidir. Binaenaleyh FAB mütesaviyüssakayn müsellesi (şekil: 125) ve sonra AF ve AB ye F ve B noktalarında mümas olan daire resmolunabilir. Bu dairenin O merkezinden FB ye bir muvazi resmedelim ve muvazinin AB müstekimini kat'ettiği noktayı S ile gösterelim. Mihveri SO müstekiminden ve nısfınnehar müvellidi SA dan ibaret olan deveranî mahrutun res zaviyesinin nısfı α olup müzkûr mahrut şekil müstevisine AF müstekimi boyunca amut olan P müstevisi tarafından verilen katımükâfiye müsavi bir katımükâfiye göre kat'olunur. Zira, bu katımükâfinin muaddili $2AF = p$ den ibarettir.



Şekil : 125

Ameli olarak müteakiben mütesaviyüssakayn ABF müse'lesi, kaim zaviyeli BCF müsellesi ve BC kıt'asının tenazur mihveri tersim olunur.

Binaenaleyh mes'eleye cevap olan namütenahi müstevi vardır: Bu müsteviler de P müstevisinden Sx etrafında deveran vasıtasile elde olunan bütün müstevilerle bu müstevilerin S noktasına nazaran tekmil mütenazırlarından ibarettir.

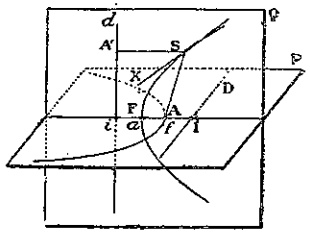
İhtar — Bu izahata nazaran katınakıs, katızait ve katımükâfi münhanilerine **mahrutî maktalar** veya sadece **mahrutiyeler** müşterek adı verilebilir.

161. Lâzime — 1°. Amut müsteviler dahilinde kâin bir katınakısla bir katızaitten herbirinin resleri diğerinin mihraklarından ibaret ise bu mahrutiyelerden herhangi biri diğerinden geçen deveranî mahrutların reslerinin hendesî mahallidir;

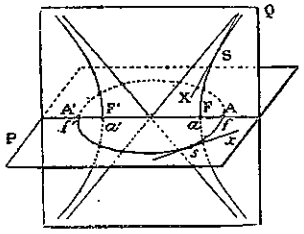
2°. Amut müsteviler dahilinde kâin iki katımükâfiden herbirinin mihrakı diğerinin resinden ibaret ise bu mahrutiyelerden herhangi biri diğerinden geçen deveranî mahrutların reslerinin hendesî mahallidir;

3°. Resi S olan mahrutun mihveri, S ten geçen mahrutiyenin bu noktadaki mümasından ibarettir.

Filhakika bir S noktasının mihrakları F,F' ve büyük mihveri AA' olan bir katınakıstan geçen bir deveranî mahrutun resi olabilmesi için (şekil: 126) mezkûr noktanın katınakısın bulunduğu P müstevisine AA' boyunca amut olan Q müstevisi dahilinde bulunması ve bundan maada



Şekil : 126



Şekil : 127

$$|SA' - SA| = FF'$$

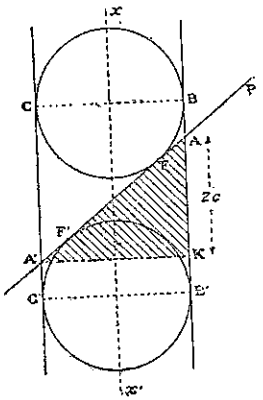
olması (geçen dava, 1°) lâzım ve kâfidir.

Şuhalde S noktasının hendesî mahalli, Q müstevisi dahilinde kâin ve mihrakları A,A', katı mihveri FF' olan bir katızaittir. Mahrutun mihveri $\widehat{ASA'}$ zaviyesinin dahilî nasıfı yani mezkûr katızaidin S noktasındaki mümasından ibarettir.

Verilen bir katı zaitten geçen deveranî mahrutlar için de ispat aynidir.

Şimdi bir P müstevisi dahilinde bulunan ve mihrakı F, resi de A olan bir katımükâfi nazarı itibara alalım (şekil: 127). Mezkûr katımükâfiden geçen deveranî mahrutların reslerinini hendesî mahallini elde etmek için evvelce gösterilen tersimatı (şekil: 125). A' noktasından katımükâfi müstevisinin P isrine d amudunu resmederek, ikmal edelim. O noktası AA' nün muntasıf nuktası olduğundan F noktası Ai nin muntasıf noktasıdır. (i noktası d amudunun P isri üzerindeki amut mevkiidir.) Bundan mada, SA' = SA dır.

Şuhalde S nektası d müstekiminden ve A noktasından ayni uzaklıktadır. Bilmukabele, kolayca görülebilir ki S noktası bu şartı tahkik eden bir nokta ise (O) dairesi tersim ve bundan da katımükâfiden geçen ve resi S, mihveri So olan bir deveranî mahrut elde olunabilir. Binaenaleyh S noktasının hendesî mahalli, P müstevisine AF müstekimi boyunca amut olan Q müstevisi dahilinde kâin ve mihrakı A, müveccihi d ve resi de F olan bir katımükâfidir.



Şekil: 128

Mahrutun SX mihveri SA ile d müveccihine amut olan SA' müstekiminin teşkil ettiği zaviyenin dahilî nasıfından yani mezkûr katımükâfinin S noktasındaki mümasından ibarettir.

162. Mukabil Dava. II — Küçük mihveri 2b olan bir katınakıs, nısıf kutru b olan bir deveranî üstüvane üzerine daima vazolunabilir.

Mes'eleye halledilmiş nazarile bakalım. Şekil müstevisi olarak katınakıs müstevisine amut olan nısfınnehar müstevisini alalım (şekil 128) Bu katınakısın müstevisinin şekil müstevisi üzerindeki isri P, büyük mihveri AA', olsun. Esas dava mucibince, üstüvane dahiline mersum ve P müstevisine F,F' noktalarında mümas olan iki küre vardır. A' noktasından üstüvanenin mihverine resmedilen amut A'K ile gösterilirse

$$2c = AF' - AF = AB' - AB = AK$$

olde olunur (zira kolaylıkla görüleceği veçhile AA = KB' dür). Binaenalyeh, kaim veteri ve bir kaim dıl'ı malûm olan kaim zaviyeli AA'K müsellesi tersim olunabilir. Bu müselles tersim olunduktan sonra A'K ya muntasıf noktasında amut olan x'x müstekimi resmolunursa mihveri xx' den ve nısfınnehar müvellidi de AK dan ibaret olan deveranî üstüvane şekil müstevisine AA' müstekimi boyunca amut olan P müstevisi tarafından verilen katınakısa müsavi bir katınakısa göre kat'olunur. Bu üstüvane ise verilen deveranî üstüvaneden başka birşey değildir. Zira mezkûr üstüvanenin kutru

$$A'K = \sqrt{\overline{AA'}^2 - \overline{AK}^2} = \sqrt{4a^2 - 4c^2} = 2b$$

dir.

LÂHİKA ÜZERİNE MES'ELELER

Katılar

1. Bir ABC müsellesinin üç dıl'ı üzerinde kâin üç nokta A',B',C' ve bu noktaların üzerinde bulandukları dılıların muntasıf noktalarına nazaran mütenazırları d A,"B,"C" olduğuna göre:

1°. A', B', C' noktaları bir müstekim istikametinde kâin ise A", B", C" noktaları da bir müstekim istikametinde kâindir;

2°. AA', BB', CC' müstekimleri mütelâki ise AA", BB", CC" müstekimleri de mütelâkidir.

2. Bir ABC müsellesinin üç dıl'ı üzerinde kâin üç nokta A',B',C' ve bu noktaların üzerinde bulundukları dılıların müntehalarına nazarn müellef müzdeviçleri de A", B", C" olduğuna göre A', B', C' noktaları bir müstekim istikametinde kâin ise AA", BB", CC" müstekimleri mütelâki olduğu gibi bunun mukabili de doğrudur. AA', BB', CC' müstekimlerinin müsellesin dahili nasıfları olması hususî halini tetkik.

3. Bir müseddesin dılıları üçer üçer yekdiğerine muvazi ise karşılıklı resleri vasleden üç kutru mütelâkidir.

(Bir kutru ile bu kutrun müntehalarından geçen iki dılıdan müteşekkil müsellese «menelaus» davasını tatbik ediniz).

4. Bir ABC müsellesinde her resten karşısındaki dıl'a resmedilen muvazilerin tekatu noktaları D,E,F olsun. Nazir nazire BC, CA, AB müstekimleri üzerinde A',B',C' noktalarını alalım. Eğer AA', BB', CC' müstekimleri mütelâki ise DA', EB', FC' müstekimleri de mütelâkidir.

5. Bir müsellesin A,B,C reslerinden resmolunan ve bir O noktasında telâki eden müstekimlerin mezkûr reslerin karşısındaki dılıları katettikleri noktalar D,E,F olduğuna göre

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} + \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

olduğunu ispat ediniz.

6. Merkezi C olan iki daire ile C noktasile bir müstekim istikametinde kâin A ve B gibi iki nokta ve müteharrik CMN nısıf kuturu nazarı itibara alındığına göre AM, BN müstekimlerinin P telâki noktasının hendesî mahalli neden ibarettir?

7. İki daire yerine muvazi iki müstekim alındığına ve A,B,C de bir müstekim istikametinde kâin lâalettayin sabit üç nokta olduğuna göre ayni mes'ele.

8. Bir ABC müsellesinde bu müsellesin haricine mersum daireye A,B,C reslerinden resmolunan mümasların BC, CA, AB dılılarını kat'ettikleri noktalar nazir nazire D,E,F olduğuna göre bu noktaların bir müstekim istikametinde bulunduklarını ispat etmek matluptur.

9. Bir daire, bir ABC müsellesinin BC, CA, AB dılılarını nazir-nazire D,D′ ; E,E′ ; F,F′ noktalarında kat'ediyor. Eğer AD, BE, CF müstekimleri mütelâki ise AD′, BE′, CF′ müstekimleri dahi mütelâkidir.

10. Bir daire, bir ABC müsellesinin A resinden geçtiği gibi BC dıl'ına da M noktasında mümastır. Mezkûr daire AB dıl'ını D ve AC dıl'ını E noktasında kat'ediyor; bundan maada B den çıkan bir müstekim de ME yi P ve AC yi Q noktasında kat'ediyor. Bu hale nazaran DP, MQ müstekimlerinin mezkûr daire üzerinde tekatu ettiklerini ispat ediniz (Paskal mes'elesinden istifade olunabilir).

Kaim daireler ; daire huzmeleri

11. Eğer C ve D noktaları A ve B noktalarına nazaran müellef müzdeviç ise birer daire nazarile bakılan A,B noktalariyle kutru CD olan daire ayni bir huzmeye ait olup bu huzmenin cezrî mihverini bulmak matlubtur.

12. A ve B gibi sabit iki noktaya olan mesafeleri arasındaki nispet verilen bir K kıymetini haiz noktaların hendesî mahalli olan daire nazarı mülâhazaya alınıyor. K dcğiştiğinde elde olunan bütün dairelerin ayni cezrî mihvere malik olduklarını ispat etmek matluptur.

13. Verilen bir (O) dairesini kaimen ve verilen bir (O′) dairesini de kutren mukabil noktalarda kat'eden dairelerin merkezlerinin hendesî mahalli?

14. Verilen bir huzmenin verilen bir müstekime mümas olan bir dairesini tersim etmek matluptur.

15. verilen bir A noktasından geçen ve verilen bir (O) dairesiyle cezrî mihveri malûm bir D müstekiminden ibaret olan bir daire tersim etmek matluptur.

16. İki dairenin cezrî mihverinin bir noktasından mezkûr dairelere birer mümas resmolunursa temas noktaları arasını vasleden müstekim, mümaselet merkezlerinin birinden geçer.

17. A,B gibi iki noktadan geçen bir daire huzmesi nazarı itibara alınıyor. AB nin sabit bir C noktasından mezkûr dairelerden birini M,M′ noktalarında kat'eden bir müstekim resmolunıyor. İspat etmek matluptur ki $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{M'A}{M'B}$ hasılı zarbı katı ile nazarı mülâhazaya alınan daireye tabî bulunmıyan sabit bir kıymete maliktir.

18. Sabit iki daireye nazaran kuvvetlerinin nispeti sabit olan noktaların hendesî mahalli, verilen dairelerle ayni cezrî mihvere malik olan bir dairedir.

Verilen nispet nısıf kuturların murabbalarının nispetine müsavi olduğu takdirde mezkûr hendesî mahal ne olur? (Bakalorya).

19. (O), (O′) gibi iki dairenin mümaselet merkezleri S,T olsun. Kutru ST olan dairenin (O), (O′)huzmesine ait olduğunu ispat etmek matluptur.

20. Bir müsellesin sıklet merkezi ve kaimî merkezi G ve H olduğuna göre kutru GH olan daire ile dokuz nokta dairesinin ve müsellesin haricine mersum dairenin ayni cezrî mihvere malik olduğunu ispat etmek matluptur.

21. Ayni bir huzmeye ait üç daire verildiğine nazaran bu dairelerden birinin mütehavvil bir noktasından diğerlerine resmedilen mümasların tulleri sabit bir nispet dahilindedir.

(Temrin 18 e bakınız).

22. Kutru AB olan bir daire ile AB kıtasının bir C noktasını nazarı itibara alalım. C noktasının AB kıt'asına nazaran müzdevici D, resi C olan müteharrik bir kaim zaviyenin dılılarının daireyi katettiği noktalar E, F; nihayet E, F noktalarında mezkûr daireye resmolunan mümasların tekatu noktası da M olduğuna göre:

1°. $\frac{MD}{ME}$ nispetinin sabit olduğunu isbat;

2°. Ve bundan M noktasının hendesî mahallinin, verilen daire ile bir daire gibi tesavvur edilen D noktasının tayin ettiği huzmeye ait bir daire olduğunu istintaç etmek matlûptur (Temrin 18 e bakınız).

23. Yekdiğerini kaimen kat'eden iki daire nazarı itibara alalım. Bu dairelerin tekatu noktaları A, B ve bir müşterek mümasları

CD; nihayet bu müşterek mümasın merkezler hattı üzerindeki mürtesemi de C'D' olduğuna göre AB = C'D' olduğunu ispat etmek matluptur.

24. İki (c), (O) dairesile bir D müstekimi verildiğine göre (C) dairesini kaimen kateden bir (O') dairesinin tersimi matlûptur. O suretle ki (O'), (O) dairelerinin cezrî mihveri D olsun.

25. Yekdiğerinin haricinde kâin iki daire ile bu dairelerin bir dahilî müşterek mümas ve bir haricî müşterek mümasını nazarı itibara alalım. İspat etmek matluptur ki iki temas veteri, verilen iki daire ile muayyen olan huzmenin gaye noktalarının birinde tekatu eder.

26. Bir ABC müsellesinin A, B, C zaviyelerinin nasıfları mukabil dılıları D, D'; E, E'; F, F' noktalarında katediyor. Kuturları DD', EE', FF' olan daireler resmolunuyor. İspat etmek matluptur ki:

1°. Mezkûr daireler ABC müsellesinin haricine mersum daireyi kaimen katederler.;

2°. Mezkûr daireler müşterek iki M ve M' noktasına maliktirler;

3°. MM' müstekiminin ABC müsellesinin haricine mersum daireyi katettiği noktalar İ, J ile gösterilirse AI ve AJ, $\widehat{MAM'}$ zaviyesinin nasıflarıdır;

4°. ABC müsellsinin haricine mersum dairenin nazarı itibara alınan her daire ile cezrî mihverleri, ABC müsellesinin vasıtlarının ayni resteki nasıflarına nazaran mütenazırlarından ibarettir.

27. Bir ABC müsellesinde BC = a dıl'ı, mezkûr müsellesin haricine mersum daireye A noktasından resmolunan mümasın A resile BC dıl'ı arasında kalan kısmının AT = ma tulü malûm ve bundan maada AT tulü AB ile AC arasında vasatı mütenasip olduğuna göre mezkûr müsellesin tersimi matlûptur.

Bir noktanın bir küreye nazaran kuvveti

İkişer ikişer ayni cezrî müsieviye malik olan küreler için bir küre huzmesi teşkil ediyor denir.

28. İki küreye nazaran malûm p, p' kuvvetlerine malik olan noktaların hendesî mahalli nedir?

29. Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir küreyi kaimen kateden dairelerin merkezlerinin hendesî mahalli?

30. Verilen üç noktaya olan mesafeleri, verilen üç adetle mütenasip olan noktaların hendesî mahalli, mezkûr üç noktadan geçen kürelerin kâffesini kaimen kat'eden bir dairedir.

31. İki noktadan geçen ve bir müsteviye (veya bir küreye) mümas olan kürelerin temas noktalarının hendesî mahalli.

32. İki noktadan geçen ve bir müstevi ile bu müstevi dahilinde kâin bir müstekime mümas olan bir küre tersim etmek matluptur.

33. Herbiri ayni bir küre üzerinde kâin malûm iki dairenin birinden geçen ve yekdiğerine mümas olan kürelerin temas noktalarının hendesî mahalli.

34. Verilen üç noktadan geçmek ve verilen bir müstekime mümas olmak üzere bir küre tersimi matluptur.

35. Verilen bir küre huzmesine ait ve:

1°. Bir müsteviye mümas olan;

2°. Bir müstekime mümas olan

bir küre tersim etmek matluptur.

36. Verilen üç küreyi kaimen kat'eden küreler bir huzme teşkil ederler; Mezûr kürelerin kâffesi verilen üç küre ile ayni cezrî mihvere malik olan küreleri kaimen kat'ederler.

37. Verilen dört küreyi kaimen kat'eden bir küre tersim etmek matluptur.

38. Verilen üç küreyi kaimen kat'etmek ve malûm dördüncü bir küreye de mümas olmak üzere bir küre tersimi matluptur.

39. 1°.Verilen iki noktadan geçen ve verilen iki müsteviye mümas olan;

2°. Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir müsteviye mümas olan bir küre tersimi matluptur.

40. Verilen iki kürenin haricine mersum müsavi mahrutların M reslerinin hendesî mahallini bulunuz.

41. Bir (S) küresile bir A noktasını nazarı itibara alalım. A noktasından geçen bir mütehavvil (C) küresi (S) küresini bir P müstevisi dahilinde kâin bir daireye göre kat'ettiğine nazaran P müstevisi ile (C) küresine A noktasında mümas olan müstevinin faslımüşterekinin hendesî mahallini tayin etmek matluptur.

42. Verilen iki (O), (O') küresini kaimen kat'eden (S) küreleri nazarı itibara aldığına göre:

1°. (S) küreleri arasında namütenahi küre vardır ki bir P müstevisine mümastır; Bu kürelerin temas noktalarının hendesî mahallini tayin ediniz;

2°. (S) küreleri arasında namütenahi küre vardır ki bir I noktasından geçer. Bu kürelerin I den geçen ayni bir müstekime mümas olduklarını ispat ediniz.

43. Kuturları bir muntazam dört vecihli cismin mücessem dıllarından ibaret olan altı küre nazarı itibara alınıyor. İspat etmek matluptur ki bu kürelere nazaran kuvvetleri mecmuu sıfıra müsavi olan noktaların hendesî mahalli, mezkûr altı mücessem dıl'a mümas olan küreden ibarettir.

SEKİZİNCİ KİTAP ÜZERİNE TEMRİNLER

Tahviller

Kutup ve kutbiyeler

44. Verilen iki daireye nazaran ayni kutbiyeye malik olan bir nokta bulunabilir mi?

45. Verilen bir A noktasından geçen bir daire tersimi matluptur, öyle ki verilen bir B noktası mezkûr daireye nazaran malûm b kutbiyesine malik olsun.

46. Verilen üç daireye nazaran kutpiyeleri mütelâki olan noktaların hendesî mahalleriyle telâki noktalarının hendesî mahallini tayin ediniz.

47. İki dairenin bir mümaselet merkezinin bu dairelere nazaran kutbiyeleri mezkûr dairenin cezrî mihverinden ayni uzaklıktadır.

48. D, Δ gibi iki müstekim ile bir O noktası verildiğine göre merkezi Q olan öyle bir daire tersimi matluptur ki verilen D ve Δ müstekimleri mezkûr daireye nazaran müzdeviç iki müstekim olsun. Münakaşa.

49. Bir daire ile A ve B gibi sabit iki nokta ve daireyi M, N noktalarında kat'eden mütehavvil bir AMN katını nazarı itibara alalım. BM ve BN katıları daireyi yeniden M′ ve N′ noktalarında kat'ettiğine göre M′N′ müstekiminin sabit bir noktadan geçtiğini ispat etmek matluptur.

50. Sabit bir daire haricine mersum bir tam münharifin kuturlarından biri sabit olduğuna göre diğer iki kutrunun telâki noktasının dahi sabit olduğunu ispat etmek matluptur.

51. Bir daire haricine mersum bir tam münharif ABCD ve resleri temas noktalarından ibaret olan muhaddep münharif te MNPQ olduğuna göre ispat etmek matluptur ki:

1° mezkûr münhariflerin kuturları mütelâki olup bir müellef huzme teşkil ederler;

2° İkinci münharifin karşılıklı iki dıl'ı birinci münharifin bir kutru üzerinde tekatu eder.

52. A, B gibi sabit iki noktadan geçen bir daire ile AB nin

P kutbunu AB kıt'asının sabit bir C noktasına vasleden PC müstekiminin tekatu noktalarının hendesî mahalli nedir? Bu suretle elde olunan hendesî mahal, C noktası değiştiğinde nasıl tehavvül eder?

53. İki noktanın bir dairenin merkezine olan mesafeleri arasındaki nispet, mezkûr noktalardan her birinin diğerinin kutbiyesine olan mesafeleri arasındaki nispete müsavidir.

54. Sabit bir daire ile bu dairenin sabit bir A noktasını ve kendine muvazi olarak yerini değiştiren bir BC veterini nazarı itibara alalım:

1° İspat etmek matluptur ki ABC müsellesinin kaimî merkezinin kutbiyesi sabit bir P noktasından geçer;

2° A noktası daireyi resmettiğine veya BC nin istikameti değiştiğine göre P noktasının hendesî mahalli?

55. Kutru AB olan bir daire ile AB üzerinde kâin bir P noktasını nazarı itibara alalım. Mezkûr daireyi C, D noktalarında kat'eden bir katı PCD; AB ye C ve D noktalarından resmolunan amutlar CC′, DD′; AB nin, P nin kutpiyesiyle tekatu noktası da K olsun. Bu hale göre CC′ ve DD′ müstekimlerinin kutru PK olan daireye nazaran müzdeviç olduklarını ispat etmek matluptur.

56. Bir ABC müsellesiyle bu müselles dahiline mersum daireyi nazarı itibara alalım. Ve bir D noktasının BC müstekimini resmettiğini farzedelim. Bu hale göre D noktasının mezkûr daireye nazaran kutbiyesiyle AD nin AB, AC müstekimlerine nazaran müzdevicinin tekatu noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur.

57. Bir müsellesin haricine mersum daireye nazaran mütekabil kutbiyeler vasıtasile vasıtların mütelâki olması hassasını tehvil ediniz.

58. Bir P noktasının bir huzmeye ait dairelere nazaran kutbiyeleri bir Q noktasında mütelâkidir ve PQ nun muntasıf noktası huzmeye ait dairelerin cezrî mihverinden ibarettir.

59. İki (O), (O′) dairesile merkezler hattına amut olan bir D müstekimi veriliyor. Müteharrik bir M noktası D müstekimini resmettiğine göre M noktasının mezkûr iki daireye nazaran kutbiyelerinin P tekatu noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur.

60. Bir daire dahiline mersum bir ABCD münharifinin karşılıklı dılıları E, F noktalarında tekatu ettiğine göre:

1°. Kutru EF olan dairenin, münharifin haricine mersum daireyi kaimen katettiğini;

2°. FAD, FBC müstekimlerile E noktası sabit kaldığı takdirde ABCD münharifinin haricine mersum dairelerin ayni cezrî mihvere

malik vebu cezrî mihverin EF in muntasıf noktasından geçtiğini ispat;

3°. Bundan maada $\widehat{AED}$ zaviyesi verildiğinde ABCD münharifinin haricine mersum daireyi tersim etmek matluptur.

61. İspat etmek matluptur ki bir ABC müsellesinin A resini A dan çıkan vasıtın müsellesin dahiline mersum daireye nazaran kutbuna vasleden müstekim BC ye muvazidir.

Bu hassayı müsellesin dahiline mersum daireye nazaran mütekabil kutbiyeler vasıtasile tahvil ediniz.

62. Bir dairenin AB kutru üzerinde O merkezinden ayni uzaklıkta olmak üzere iki müteharrik P,Q noktası alınıyor. Mezkûr dairenin lâalettayin sabit bir noktası S olsun. SP, SQ müstekimlerinin daireyi yeniden katettiği noktalar C,D olduğuna göre CD müstekiminin sabit bir noktadan geçtiğini ispat etmek matluptur.

63. Yekdiğerinin haricinde kâin iki daire nazarı itibara alalım. Bu dairelerin bir müşterek dahilî mümasile bir müşterek harici mümasının tekatu noktası M olduğuna göre bu noktanın merkezler hattı üzerinde mezkûr iki dairenin tayin ettiği daire huzmesinin gaye noktalarının birinde irtisam eylediğini ispat etmek matluptur (temrin 25 e bakınız).

64. Verilen bir daireden geçen öyle bir küre tersimi matluptur ki A,B gibi malûm iki nokta mezkûr küreye nazaran iki müzdeviç nokta olsun.

65. Bir küre sabit iki küreyi kaimen katetmek üzere tehavvül ederse sabit bir noktanın mezkûr küreye nazaran kutbî müstevisi sabit bir noktadan geçer (temrin 42 ye bakınız).

66. Eğer iki deveranî mahrut ayni bir kürenin haricine mersum ise mezkûr mahrutlar iki müstevi münhaniye göre tekatu ederler. (Mezkûr mahrutları S,S′ reslerinden geçen bir müstevi ile kat'ederek faslı müşterekin bir noktası M olduğuna göre bu noktanın küre üzerinde elde olunan daireye nazaran kutbiyesinin SS′ yü sabit bir noktada katettiğini ispat ediniz).

67. Verilen bir A noktasından geçen öyle bir küre tersimi matluptur ki malûm bir B noktasının mezkûr küreye nazaran kutbî müstevisi malûm bir *b* müstevisinden ibaret olsun. *b* müstevisi verilen bir Δ müstekimi etrafında devrettiğine göre mezkûr kürenin merkezinin hendesî mahalli neden ibarettir?

Akis

68. Akis kuvveti müspet ise:

1°. Makûs iki noktadan geçen her daire akis dairesini kaimen kat'ettiği gibi bunun mukabili de doğrudur;

2°. Makûs ikı noktadan geçen her küre akis küresini kaimen kat'ettiği gibi bunun mukabili de doğrudur;

3°. Bu daire ve kürelerin makûsleri bizzat kendilerinden ibarettir.

69. İki müttehidülmerkez dairenin müsavi iki daireye tehavvül etmesi için akis merkezi nerede alınmalıdır?

70. Verilen A,B,C gibi üç noktayı bir mütesaviyüssakayn veya bir mütesaviyül'adla veya bir kaim zaviyeli müsellesi reslerinden ibaret olan A′,B′,C′ gibi üç noktaya tehvil eden bütün S akis merkezlerinin tayini matluptur.

71. Bir müstekim istikametinde A,B,C gibi sabit üç nokta veriliyor ve A,B noktalarile AB ye muntasıf noktasında amut olan (P) müstekiminin mütehavvil bir E noktasından bir daire geçiriliyor. CE müstekimi mezkûr daireyi yeniden M noktasında kat'ettiğine göre, E noktası (P) müstekimini resmettiğinde, M noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur. (Bakalorya)

72. Yekdiğerini kat'eden iki daire (O), (O) ve bu dairelerin müşterek noktalarından biri de I olsun. I noktasından mütehavvil bir daire geçirelim ve bu dairenin verilen daireleri kat'ettiği noktaları da A,A′ ile gösterelim. IA, IA′ müstekimleri (O′) ve (O) dairelerini yeniden B′ ve B noktalarında kat'ettiğine göre IAA′ ve IBB′ dairelerinin ikinci tekatu noktalarının hendesî mahallini bulmak matluptur.

73. Verilen bir P noktasından verilen bir daireyi A,B ve C,D noktalarında kat'eden iki mütehavvil PAB,PCD katı resmolunduğuna göre PAC,PBD dairelerinin ikinci M tekatu noktasının hendesî mahallile PAD,PBC dairelerinin ikinci M′ tekatu noktasının hendesî mahallini bulunuz.

74. Bir A noktasile bir (C) dairesi verildiğine nazaran öyle bir takım B noktalarının hendesî mahallini bulmak matluptur ki A,B noktalarından geçen ve (C) dairesine mümas olan iki daire yekdiğerini kaimen kat'etsin.

75. Kutru AB olan bir nısıf dairenin ikî noktası C ve D olsun. AB ye amut olan bir müstekim AC ve AD yi C′ ve D′ noktalarında kat'ettiğine ve AC = AD′ olduğuna göre CC′ = DD′ olduğunu ispat ediniz.

76. Bir daire huzmesinin makûs şekli neden ibarettir?

77. İki dairenin mümaselet merkezleri S,S′ olduğuna göre

mezkûr daireleri yekdiğerine tahvil eden ve merkezi S olan akiste S′ noktası ile cezrî mihverin merkezler hattı üzerindeki amut mevkiinin iki makûs noktadan ibaret olduğunu ispat etmek matluptur (Temrin 19 za bakınız).

78. Verilen iki noktadn geçen ve verilen bir müstekim veya daireyi malûm bir zaviyeye göre kat'eden bir daire tersim etmek matluptur.

Verilen bir noktadan geçen ve verilen iki müstekimi (veya bir müstekim ve bir daireyi veya iki daireyi) malûm zaviyelere göre kat'eden bir daire tersim etmek matluptur.

79. Verilen iki daireyi kaimen ve verilen üçüncü bir daireyi veya verilen bir müstekimi) de malûm bir zaviyeye göre kat'eden bir daire tersim etmek matluptur.

80. Bir tam münharifin dılıları tarafından teşkil olunan dört müsellesin haricine mersum dairelerin merkezlerile mezkûr dairelerin müşterek noktalarının (bu dairelerin müşterek bir noktası olduğunu ayrıca ispat) ayni bir daira üzerinde kâin beş noktadan ibaret olduğunu ispat etmek matluptur.

81. Bir OAB(OA = OB) mütesaviyüssakayn müsellesile O noktası ile bir müstekim istikametinde bulunan iki M,P noktası nazarı itibara alalım, öyle ki $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}$ olsun.

P noktası bir müstekim veya bir daire resmettiğine göre M noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur.

82. Akis vasıtası ile bir dairenin A,B,C,D gibi dört noktosını bir müstekim istikametinde kâin A′,B′,C′,D′ gibi dört noktaya tahvil ediniz, o suretle ki A′B′ = C′D′ olsun.

83. Mütehavvil bir daire sabit iki (O), (O′) dairesini sabit zaviyelerle kat'ettiğine göre mezkûr dairenin (O),(O′) huzmesine ait her hangi sabit bir daireyi de sabit bir zaviyeye göre kat'ettiğini ispat etmek matluptur.

84. Akis kuvveti müspet ise lâalettayin bir daire ile bu dairenin makûsü ve akis dairesi ayni bir huzmeye ait üç daireden ibarettir.

85. Herhangi iki daire nazarı itibara alalım. Ve bu dairelerin merkezler hattı üzerindeki kuturları da nazir nazire AB,A′B′ olsun. Bu dairelerin mümaselet merkezlerinden bıri S ve bu noktanın AB,A′B′ kıt'alarına nazaran müzdeviçleri de M,M′ olduğuna göre mezkûr dairelerin cezrî mihverinin MM′ ye muntasıf noktasında amut olduğunu ispat etmek matluptur.

86, Merkezi O olan sabit bir (O) dairesinin müteharrik bir kutru AB ve sabit bir nokta da P olsun, ispat etmek matlupturki:

1°. PAB dairesi sabit ikinci bir noktadan geçtiği gibi mezkûr dairenin merkezi de bir müstekim resmeder;

2°. PA,PB müstekimlerinin (O) dairesini kat'ettikleri noktalar A',B' ile gösterildiğine göre PA'B' dairesi PAB dairesinin malik olduğu ayni hassalara malik olduğu gibi A'B' müstekimi de sabit bir noktadan geçer. (Bakalorya)

87. A noktasında yekdiğerine haricen mümas olan iki daire (O), (O') ve A noktasındaki müşterek mümasın herhangi bir noktası da M olduğuna göre:

1°. M den geçen ve (O), (O') dairelerine mümuas olan iki (C), (C') dairesinin mevcut olduğunu ispat;

2°. M noktası A noktsındaki müması resmettiği takdirde (C), (C') direlerinin ikinci tekatu noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur.

88. (O), (O') daireleri lâalettayin iki daire ve N de mezkûr dairelerin cezrî mihverlerinin bir noktası olduğuna göre ayni mes'ele.

89. A noktasında yekdiğerine haricen mümas olan iki daire (O), (O'); bu dairelerin bir müşterek haricî mümaslarının temas noktaları B, C; Birinci dairenin sabit bir noktası D ve ikinci dairenin mütehavvil bir noktası da M olduğuna göre MBC, MAD dairelerinin ikinci P tekatu noktalarının hendesî mahallinin (O) dairesini B ve D noktalarında kaimen kat'eden daireden ibaret olduğunu ispat etmek matluptur.

90. Sabit bir daire ile sabit bir A noktası etrafında müteharrik olan ve daireyi M, N noktalarında kat'eden bir katınazarı itibara alalım. Kutru AM, AN olan dairelerin verilen daireyi yeniden kat'ettikleri noktalar M',N' olduğuna göre ispat etmek matluptur ki:

1°. MN,M'N' müstekimleri verilen daire ile A noktasının cezrî mihveri üzerinde takatu eder;

2°. A',M',N' daireleri bir huzme teşkil ederler.

91. Sabit bir AB müstekiminin sabit bir P noktasından mütehavvil bir müstekim resmolunıyor ve A,B noktalarından geçen ve mezkûr mütehavvil müstekime M,N noktalarında mümas olan iki daire nazarı itibara alınıyor. İspat matluptur ki:

1°. MAN, MBN daireleri P noktasına nazaren yekdiğerinin mütenazırıdır;

2° Mezkûr daireler yekdiğerini ABM, ABN dairelerinin yekdiğerini kat'ettikleri zaviyeye göre kat'ederler. Hangi şart dahilinde mezkûr daireler yekdiğerini kaimen kat'edebilirler.

92. 1°. Bir ABC müsellesine haricen mümas olan üç dairenin O cezrî merkezini arayınız ve bundan bir müsellesin dılılarının muntasıf noktalarından karşılarındaki zaviyenin dahili nasıfına resmedilen muvazilerin mütelâki olduklarını istintaç ediniz.

2° (Steiner) Ştayner tarafından bulunan aşağıdaki davayı ispat için merkezi O olan bir akisten istifade ediniz: "Bir müsellese haricen mümas olan üç daireden ikisine haricen ve üçüncüsüne de dahilen mümas olan üç daire ayni bir noktadan geçer„.

3° Dokuz nokta dairesiyle bu dairenin makûsü müsellese haricen mümas olan üç daireye mümastır.

93. Bir ABC müsellesinin dahiline mersum dairenin BC dıl'ıle temas noktası D, mezkûr dairenin merkezi I ve D nin kutren mukabili olan nokta da E olsun. İspat etmek matluptur ki E noktasını AI nın muntasıf noktasına vasleden müstekim müsellesin dahiline mersum daireyi dokuz nokta dairesine mümas olduğu noktada kat'eder (Mannheim).

94. **Hart âkisi.**— Bir mütesaviyüssakeyn şibih münharifin mail dılılariyle kuturlarından müteşekkil mafsallı münharifi nazarı mülâhazaya alalım. Kuturların müşterek tulünü a, mail dılıların müşterek tulünü de b, nihayet iki kaidenin tullerini de x, y ile gösterelim. Bu hale nazaran:

1° $a^2 - b^2 = xy$ olduğunu ispat;

2 Ve bundan mail dılılardan birini O muntasıf noktası tespit edildiği takdirde kuturların muntasıf noktalarının O ya nazaran yekdiğerinin makûsü olan iki şekil resmettiğini istintaç ediniz.

95. Bir (O) küresile bir (P) müstevisi verildiğine göre resleri P müstevisi dahilinde kâin ve (O) küresinin haricine mersum olan mahrutların temas dairelerinin merkezlerinin hendesî mahallini bulmak matluptur.

96. Verilen bir daireden geçmek ve verilen bir küreye de mümas olmak (veya verilen bir küreyi de kaimen kat'etmek) üzere bir küre tersimi matluptur.

97. Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir küreyi de kaimen kat'eden dairelerin merkezlerinin hendesi mahalli?

98. Bir küre üzerinde kâin iki daire verildiğine nazaran bu daireleri ayni müstevi dahilinde kâin iki müttehidülmerkez daireye tahvil eden bir akis bulmak matluptur.

99. (A), (B), (C) gibi üç küre verildiğine nazaran (A) küresine

mümas olan ve (B), (C) kürelerini de kaimen kat'eden kürelerin temas noktalarının hendesî mahallini bulmak matluptur.

100. Sabit bir A noktasından sabit iki küreye M, M' noktalarında mümas olmak üzere mütehavvil bir küre resmolunuyor. M, M' noktalarının hendesî mahallerini tayin ve AMM' dairesinin mütemadiyen muayyen bir huzmeye ait küreleri kaimen kat'ettiğini ispat ediniz.

Menazır

101. Bir münharif verildiğine nazaran irtisam merkez ve müstevisini o suretle intihap etmek matluptur ki mezkûr münharifin mürtesemi bir mütevaziyüladla, bir müstatil, bir main, bir murabba olsun.

102. Bir müstekim istikametinde kâin A, B, C gibi üç nokta verildiğine nazaran bu noktaların sabit bir müstevi üzerindeki A', B', C' menazırları tersim olunuyor. K malûm bir cebrî adet olduğuna göre $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = K$ olacak veçhile O basar noktasının hendesî mahallini bulmak matlûptur. $K = -1$ olması hususî hali.

103. Bir P irtisam müstevisi ile bir $\widehat{BAC}$ zaviyesi verildiğine nazaran öyle bir takım irtisam merkezlerinin hendesî mahallini bulmak matluptur ki, $\widehat{BAC}$ zaviyesinin menazırı verilen bir zaviyeye müsavi olsun. Menazırın bir kaim zaviye olması hususî hali.

104. Ayni bir müstevi dahilinde kâin A, B, C gibi üç mütelâki müstekim nazarı itibare alalım. Öyle bir takım irtisam merkezlerinin hendesî mahallini bulmak matluptur ki, C nin mürtesemi, A, B müstekimlerinin mürtesemlerinin teşkil ettiği zaviyenin nasıflarından biri olsun.

105. Bir münharif, karşılıklı iki dılını kat'eden bir müstekim vasıtasiyle diğer iki münharife ayrılırsa verilen münharifle diğer elde olunan iki münharifin kuturlarının tekatu noktaları ayni bir müstekim istikametinde kâin üç noktadan ibarettir.

106. Bir müstekim üzerinde kâin üç A, B, C noktasile diğer bir müstekim üzerinde kâin üç A', B', C' noktasını nazarı mülâhazaya alalım. İspat etmek matlüptur ki AB'CA'BC' müseddesinin karşılıklı dılılarının tekatu noktaları ayni bir müstekim istikametindedir.

Dokuzuncu kitap üzerine temrinler

Katınakıs

107. Yekdiğerinin dahilinde kâin iki daireye mümas olan dairelerin merkezlerinin hendesî mahalli.

108. Bir müstekim istikametinde kâin ve yazıldıkları sırada teakup eden A, B, C gibi üç nokta nazarı itibara alalım. Mütehavvil bir daire A noktasında ABC müstekimine mümas olsun. Bu hale nazaran B ve C noktalarından mezkûr daireye resmedilen mümasların M tekatu noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur.

109. Bir mihrakı sabit iki müstekime de mümas bulunan bir katınakısın merkezinin; ikinci mihrakının hendesî mahalli?

110. Bir mihrakı, bir müması ve küçük mihveri üzerinde kâin reslerinden biri malûm olan bir katınakısın ikinci mihrakını tersim etmek matluptur. (Bakalorya)

111. Bir müveccih dairesi ve bir müması malûm olan bir katınakısın ikinci mihrakının hendesî mahalli?

112. Aslî dairesi ve bir noktası malûm olan bir katınakısın mihraklarının hendesî mahalli?

Aşağıdaki malûmlar vasıtasiyle bir katınakıs tersim etmek matlûptur (1):

113. Bir mihrak, bir nokta ve mihverlerin tulü.
114. İki mihrak ve bir mümas.
115. Bir mihrak ve üç mümas.
116. Bir mihrak iki mümas ve temas noktalarından biri.
117. Büyük mihverin tulü, merkez ve iki mümas.
118. Büyük mihver üzerinde kâin bir res, bir mihrak ve bir mümas.
119. Bir mihrak, iki mümas ve bir nokta.
120. Bir mihrak, bir mümas ve iki nokta.
121. Bir mihrak ve üç nokta.
122. Bir kat'ı nakısın lâalettayin bir noktası M ve MF' nısıf kutur şuaının küçük mihveri kat'ettiği nokta da C olduğuna göre:

1°. MCF müsellesinin muhitinin sabit olduğunu ispat;

2°. Mezkûr müsellese M zaviyesi dahilinde haricen mümas olan dairenin merkezinin hendesî mahallini tayin etmek matluptur.

(1) Yani mezkûr katınakısın mihraklarını ve büyük mihverini tayin etmek matlûptur.

123. Mihrakları F, F′ olan bir katınakısın lâalettayin bir noktası M olduğuna göre MFF′ müsellesinin dahiline mersum dairenin nısıf kutrunun mezkûr müsellesin M resinden resmolunan irtifaile mütenasip olduğunu ispat etmek matluptur.

124. Bir şibih münharifin kaidelerinden biri tulen ve vaz'an ve diğer kaidesi tulen ve muvazi olmıyan dılılarının mecmuu da sabit olduğuna göre bu şibih münharifin müteharrik reslerinin hendsî mahallini, kuturlarının tekatu noktasının hendesî mahallini ve muvazi olmıyan dılılarının tekatu noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur.

125. Bir ABC müsellesinin BC dıl'ı sabit olduğu gibi AB . AC $\cos^2 \frac{A}{2}$ hasılı zarbı da sabit kaldığına nazaran A resinin hendesî mahalli?

126. Bir katınakısın bir noktası M, bu noktadaki mümas ve nazımın küçük mihveri kat'ettiği noktalar da T,N olduğuna göre MTN dairesinin mihraklardan geçtiğini ispat etmek matluptur.

127. Bir katınakısın bir M noktasının nısıf kutur şualarının tefazulunun murabbaı, M noktasından geçen kutur ile küçük mihverin murabbalarının tefazuluna müsavidir.

128. Mihrakları F,F′ ve merkezi O olan bir katınakısın lâalettayin bir noktası M olduğuna göre $\overline{OM}^2 + MF.MF'$ mecmuunun sabit olduğunu ispat ediniz.

129. Mihrakları F,F′ olan bir katınakısın bir M noktasındaki müması büyük AA′ mihverini bir N noktasında katettiğine nazaran $\frac{\sin FMN}{\sin MNA}$ harici kısmetinin sabit ve $\frac{c}{a}$ya müsavi olduğunu ispat ediniz.

130. Bir katınakısın lâalettayin bir M noktasındaki nazımının mihverleri katettiği noktalar N,N′ olduğuna göre $\frac{MN}{M'N'} = \frac{a}{b}$ olduğunu ispat etmek matluptur.

131. Yukarıdaki işar tarzı ayni olmak üzere bir katınakısın lâalettayin bir noktasındaki mümasının mihverleri katettiği noktalar T,T′ ile gösterildiğine nazaran $MT.MT' = MN.M'N$ olduğunu ispat etmek matluptur.

132. Yukarıki işar tarzı ayni olmak üzere katınakısın TT′ e muvazi olan nısıf kutru OP ile gösterildiğine göre $MT.MT' = \overline{OP}^2$ olduğunu ispat ediniz.

133. **Tarif** — Bir münhaninin bir noktası M ve bu noktaya yakın diğer bir noktası da M′ olsun. Münhani üzerinde kalmak üzere M′ noktası gayrımahdut surette M noksasına yaklaştığında mezkûr M,M′ noktalarındaki nazımların tekatu noktalarının K gaye vaziyetine mezkûr münhaninin M noktasındaki **inhina merkezi** ve MK tulüne M noktasındaki **inhina nısıf kutru** denir. Bu malûmata nazaran temrin 131 den bir katınakısın reslerindeki inhina nısıf kuturlarının kıymetini istintaç etmek matluptur.

134. Bir katınakısın bir F mihrakının mezkûr münhaninin bir M noktasındaki mümas üzerindeki mürtesemi I olduğuna göre

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{\overline{FI}^2}{b^2}$$

olduğunu ispat etmek matluptur.

135. 1° Bir kat'ınakıs üzerinde öyle bir M noktası tayin etmek matluptur ki MFF′ müsellesinin dahiline mersum dairenin nısıf kutru verilen bir kıymete malik olsun. Münakaşa.

2°. Bir katınakıs üzerinde öyle bir M noktası bulmak matluptur ki büyük mihverin M noktasındaki mümasla nazım arasındaki kıt'ası verilen bir kıymeti haiz olsun. Münakaşa.

(Bakalorya)

136. Bir katınakısın bir M noktasındaki mümasının küçük mihveri kat'ettiği nokta I, bu noktanın MF, MF′ nısıf kutur şualari üzerindeki mürtesemleri de H, H′ olduğuna göre:

1°. FH ve F′H′ kıt'alarının küçük mihverin a nısfına müsavi olduğunu;

2°. HH′ müstekiminin O merkezinden geçtiğini ispat etmek matluptur.

137. Bir katınakısın mütehavvil bir noktası M ve mihraklarından biri de F olduğuna göre kutru FM olan dairenin zarfının mezkûr katınakısın aslî dairesinden ibaret olduğunu ispat etmek matluptur.

138. 1°. Bir katınakısın bir OM nısıf kutur şuaını a,b,c ile mezkûr şuaın mihraklardan geçen mihver ile teşkil eylediği hadde zaviyenin tabii olarak h. sap;

2° Ve bundan katınakısın OM, OP gibi yekdiğerine amut iki nısıf kutur şuaı alınırsa, M noktası katınakıs resmettiğinde, $\frac{1}{\overline{OM}^2} + \frac{1}{\overline{OP}^2}$ mecmuunun sabit kaldığını istintaç etmek matluptur.

139. Bir F′ mihrakları müşterek, $2a$ büyük mihverleri ayni tule malik iki katınakısın F, F′, F_1, F_1' mihrakları ve $2a$ tulü ve-

rildiğine göre mezkûr münhanilerin müşterek noktalarını tersim etmek matluptur. Münakaşa (Bakolorya)

140. Bir katınakısın mihraklara olan mesafeleri mecmuu (veya tefazulu) malûm olan bir mümasını tersim etmek matluptur.

141. Bir katınakısın mütehavvil bir müması mezkûr münhaniye büyük mihverin A, A′ müntehalarından resmolunan mümasları M, M′ noktasında kat'ettiğine göre:

1° Kuturu MM′ olan dairenin mihraklardan geçtiğini;

2° AM. A′M′ hasılızarbının sabit kaldığını ispat etmek matluptur.

142. Bir katınakısın mütehavvil müması mezkûr münhaniye küçük mihverin müntehalarından resmolunan mümasları P, P′ noktalarında kat'ettiğine göre:

1° FF′P, FF′P′ dairelerinin P′P ye mümas olduklarını;

2° Kutru PP′ olan dairelerin F ve F′ den geçen daireleri kaimen kat'ettiklerini ispat etmek matluptur.

143. Bir kaim zaviyenin dılıları nazir nazire müttehidülmihrak iki katınakısa mümas olduğuna göre mezkûr kaim zaviyenin resinin hendesî mahallini bulunuz.

144. Mihrakları F, F′ olan bir katınakısın M, M′ gibi iki noktası verildiğine göre: dört MF, MF′, M′F, M′F′ müstekimi, merkezi M, M′ noktalarındaki mümasların tekatu noktasından ibaret olan bir daireye mümastır.

145. Bir P noktasından bir katınakısa resmolunan mümaslar üzerinde nazir nazire PF, PF′ e müsavi PQ, PQ′ tulleri alınırsa QQ′ kıt'ası 2 a ya müsavidir.

146. Merkezi O olan bir daire dahiline mersum ve kuturları yekdiğerine amut olan bir münharif nazarı itibara alındığına göre daima mezkûr münharif dahiline mihrakları O noktasiyle kuturların I tekatu noktasından ibaret olan bir katınakıs resmolunabilir. Münharifin dılılarından birinin muntasif noktasından mezkûr katınakısa resmedilen ikinci mümas mukabil dıl'a muvazidir.

147. Bir katınakısın mütehavvil bir noktası M ve bu noktadan büyük mihver üzerine resmedilen amut ta MH olduğuna göre $\frac{MH^2}{HA.HA'}$ nın sabit olduğunu ispat etmek matluptur.

148. Bir katınakısın bir nazımının amut mevkii ile büyük mihver arasında mahsur parçası bu nazıma amut olan kutrunun nısfiyle mütenasiptir.

149. ABCD gibi mafsallı bir mütevaziyül'adla nazarı itibara alalım. Bu mütevaziyül'adlaın A resile A zaviyesinin nasıfı sabit

kaldığına göre A nın karşısında bulunan C resinin bir katınakıs resmettiğini ispatetmek matluptur (Mannheim).

150. Muadelesi $4x^2+9y^2=36$ olan bir katınakıs verildiğine göre $2y=mx+S$ muadelesinde m i osuretle tayin etmek matluptur ki mezkûr muadelesin gösterdiği müstekim verilen katınakısa mümas olsun. Bundan sonra katınakısın merkezinin mezkûr mümasa olan mesafesini bulunuz. (Bakalorya)

151. Bir katınakısın A, B gibi sabit iki noktasından AA′, BB′ gibi mütehavvil ve yekdiğerine muvazi iki veter resmolunuyor:

1°. A′B′ müstekiminin zarfı neden ibarettir?

2°. Mezkûr katınakısın diğer sabit iki noktası C,D olduğuna göre A′B′CD münharifinin kutrî noktalarının (yani karşılıklı dılıların tekatu noktalarının) hendesî mahalli nedir?

152. Bir katınakısın aslî dairesi üzerinde kâin bir P noktasından mezkûr katınakısa iki PM, PM′ müması resmolunuyor. İspat etmek matluptur ki temas noktalarile mihraklar bir şibihmünharifin reslerinden ibarettir. Bu kaziyenin mukabili.

153. Merkezleri I, I′; nısıf kuturları R, R′ olan yekdiğerinin haricinde kâin iki daire nazarı itibara alalım:

1°. İspat etmek matluptur ki her müşterek dahilî mümasın her müşterek haricî mümasla F, F′, H, H′ tekatu noktaları ve iki I, I′ merkezi ayni bir daire üzerinde kâindir;

2°. FF′ müşterek haricî mümasının I, I′ dairelerile temas noktaları O, O′ olduğuna göre

$$OF.OF' = O'F.O'F' = R.R'$$

olduğunu ispat ediniz;

3°. O, O′, F, F′ noktaları sabit ve R, R′ mütehavvil ve fakat yukarki münasebeti tahkik ettiğine nazaran müşterek dahilî mümasların M tekatu noktasının hendesî mahalli neden ibarettir? elde olunan hendesî mahallin M noktasındaki mümasını gösteriniz.

4°. H′ ne amut olan FH, F′H′ müstekimlerinin H′ nü kat'ettikleri H, H′ ve J, J′ noktalarının hendesî mahalleri nelerdir.? (Bakalorya)

154. Mihrakları F, F′ olan bir katınakısın F ten geçen bir veteri AB ve A, B noktalarındakl mümasların tekatu noktaları M olduğuna göre ispat etmek matluptur ki:

1°. MF müstekimi AB ye amuttur;

2°. Küçük mihverle A ve B noktalarındaki mümasların teşkil ettiği müsellesin haricine mersum daire F′ den geçer;

3°. A ve B noktalarındaki mümaslar yerine nazımlar alındığı takdirde dahi keyfiyet böyledir.

4°. F′ noktasının mezkûr iki müsellesin dılıları üzerindeki mürtesemleri bir müstekim istikâmetinde kâin beş noktadan ibarettir.

Katızait

155. Yekdiğerinin haricinde kâin iki daireye mümas olan dairelerin merkezlerinin hendesî mahalli?

156. Mütekatı iki daireye mümas olan dairelerin merkezlerinin hendesî mahalli?

157. Yazıldıkları sırada teakup eden ve bir müstekim istikametinde kâin olan A,B,C gibi sabit üç nokta nazarı itibara alalım. Mütehavvil bir daire ABC müstekimine B noktasında mümas olduğuna göre A ve C noktalarından mezkûr daireye resmedilen mümasların tekatu noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur.

158. İki sabit müstekime mümas ve mihraklarından biri de sabit olan bir katızaidin merkezinin ve ikinci mihrakının hendesî mahalleri?

159. Sabit iki noktadan geçen ve mihraklarından biri de sabit olan bir katınakıs veya bir katızaidin merkezinin ve ikinci mihrakının hendesî mahalli?

160. Bir müveccih dairesi ve bir müması malûm olan bir katızaidin ikinci mihrakının hendesî mahalli.

161. Aslî dairesi ve bir noktası malûm olan bir katızaidin mihraklarının hendesî mahalli? Aşağıdaki malûmlar vasıtasiyle bir katızaidi tersim etmek matluptur:

162. Bir mihrakı bir noktası ve mihverlerinin tulleri.
163. İki mihrak ve bir mümas.
164. Bir mihrak ve üç mümas.
165. Bir mihrak iki mümas ve temas noktalarından biri.
166. Katı mihverin tulü, merkez ve mümas.
167. Bir res, bir mihrak ve bir mümas.
168. Bir mihrak, iki mümas ve bir nokta.
169. Bir mihrak, bir mümas ve iki nokta.
170. Bir mihrak ve üç nokta.
171. Bir mihrak, bir mümas ve bir mücanip.
172. Bir mihrak bir mücanip ve katı mihverin tulü.

173. Müttehidülmerkez bir katı nakısla bir katızait yekdiğerini kaimen kateder.

174. Bir katızaidin bir M noktasının nısıf kutru şuaları mecmuunun murabbaı M noktasına ait kutrun murabbaiyle gayrikatı mihverin murabbaı mecmuuna müsavidir.

175. BC dılı ve $AB.AC \sin^2 \frac{A}{2}$ hasılı zarbı sabit olan bir müsellesin A resinin hendesî mahalli?

176. Bir katızaidin bir F mihrakının bir mümasa ve bir mücanibe nazaran mütenazırları φ_1, φ_2 olduğuna göre mezkûr mümas ile mücanip ve φ_1 φ_2 ye muntasıf noktasından resmedilen amudün mütelâki olduklarını ispat etmek matluptur.

177. Bir katızaidin iki mihraka olan mesafeleri mecmuu (veya tefazulu) malûm olan bir mümasını tersim etmek matluptur.

178. Bir katızaidin bir noktası M ve bu noktadaki mümas ve nazımın gayrıkatı mihveri kat'ettikleri noktalar da T, N olduğuna güre MTN dairesinin mihraklardan geçtiğini ispat etmek matluptur.

179. Mihrakları F, F′ olan bir katızaidin bir M noktasındaki nazımının AA′ katı mihverini kat'ettiği nokta N olduğuna göre $\frac{\text{Sın FMN}}{\text{Sın MNA}}$ harici kısmetinin sabit ve $\frac{c}{a}$ ye müsavi olduğunu ispat ediniz.

180. Bir katızaidin bir M noktasındaki nazımının mihverleri katettiği noktalar N, N′ olduğuna göre $\frac{MN}{MN'} = \frac{b^2}{a^2}$ olduğunu ispat ediniz.

181. Yukarıdaki iş'ar tarzı baki kalmak üzere M noktasındaki mümasın mihverleri katettiği noktalar T, T′ olduğuna göre

$$MT.MT' = MN.MN'$$

olduğunu ispat ediniz.

182. Temrin 180 den bir katızaidin reslerindeki inhina nısıf kuturlarının kıymetini istintaç ediniz.

183. Bir katızaidin F mihrakının bir M noktasındaki müması üzerindeki mürtesemi I olduğuna göre $\frac{MF}{MF'} = \frac{\overline{FI}^2}{b^2}$ olduğunu ispat ediniz.

184. Bir katızaidin bir M noktasındaki mümasının gayrıkatı mihveri kat'ettiği nokta I ve bu noktanın MF, MF′ üzerindeki mürtesemleri de H, H′ olduğuna göre:

1°. FH ve F'H' kıt'alarının katı mihverin a nısfına müsavi olduğunu;

2°. HH' müstekiminin O merkezinden geçtiğini ispat etmek matluptur.

185. Bir katızaidin mütehavvil bir noktası M, bir mihrakı F olduğuna göre kutru FM olan dairenin zarfının mezkûr münhaninin aslî dairesinden ibaret olduğunu ispat etmek matluptur.

186. Bir katızaidin mütehavvil bir mümasının büyük mihverin A,A' müntehalarından mezkûr münhaniye resmedilen mumasları kat'ettiği noktalar M,M' olduğuna göre:

1°. Kutru MN' olan dairenin mihraklardan geçtiğini;

2°. AM,A'M' hasılızarbının sabit kaldığını ispat etmek matluptur.

187. Dılıları nazir nazire müttehidülmihrâk iki katızaide mümas olan bir kaim zaviyenin resinin hendesî mahalli. Müttehidülmerkez bir katınakısla bir katızait için de ayni mes'ele.

188. Bir katızaidin bir müması münaciplerini P ve Q noktalarında kat'ettiğine göre FPF'Q münharifinin daire dahilinde kabili tersîm olduğunu ispat etmek matluptur.

189. Sabit bir A noktasından çıkan mütehavvil bir müstekim Ox, Oy gibi sabit iki müstekimi B,C noktalarında kat'ettiğine göre BC nin M muntasıf noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur. (Evvelâ A nın M e nazaran P mütenazırının hendesî mahalli aranabilir).

190. Bir mütesaviyüssakayn katızaidin dahiline mersum bir müsellesin dılılarının mücaniplerden birini kat'ettiği noktalardan mezkûr dılılara resmedilen amutlar ayni bir noktada telâki ederler. (Müselles ABC, bu müsellesin dılılarının Ox mücanibini kat'ettiği noktalar a,b,c; Oy mücanibini kat'ettiği noktalar a',b',c'; b ve c noktalarından mukabil dılılara resmedilen amutların tekatu noktası M olsun. A$b'c'$, Mbc, MBC müselleslerinin müşabih olduğunu ispat ediniz; Simson müstekimi).

191. Kutru AB olan bir dairenin AB ye amut olan mütehavvil bir PQ veteri resmolunuyor. AP,BQ müstekimlerinin M tekatu noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur.

Mütesaviyüssakayn katızaidi mütalea etmek için temrin 178 de söylenilen hassa ile kaim zaviyeli müsellesin mümeyyiz hassasından (bir vasıtın mukabil dıl'ın nısfına müsavi olması hassası) istifade olunabilir. Buna ait olmak üzere aşağıdaki iki misali yazıyoruz:

192. Bir mütesaviyüssakayn katızaidin mücanipleri Ox, Oy lâalettayin bir katı Δ, bu katın muntasıf noktası da I olsun. İspat etmek matluptur ki katı ile OI müstekiminin mücaniplerle teşkil ettikleri zaviyeler yekdiğerine müsavidir:

$$\left(\widehat{OI,Oy}\right)=\left(\widehat{Oy,\Delta}\right)$$

Δ katı mezkûr münhaniye mümas olduğu takdirde bu hassa ne olur?

193. İki katın aralarında teşkil ettikleri zaviye ile bu katıların muntasıf noktalarını merkeze vasleden müstekimlerin aralarında teşkil ettiği zaviye yekdiğerine müsavi ve muhalif ciheti haizdir:

$$\left(\widehat{OI,OI'}\right)=\left(\widehat{\Delta',\Delta}\right)$$

194. Bir mütesaviyüssakayn katızaidin üç noktası A,B,C olsun. Yukarıki temrini AB,AC katılarına tatbik ve bundan aşağıdaki hassayı istintaç ediniz:

Bir mütesaviyüssakayn katı zaidin dahiline mersum müsellese ait dokuz nokta dairesi mezkûr münhaninin merkezinden geçer.

195. Temrin 193 ü ABC müsellesinin BC dıl'ı ile AL irtifaına tatbik ve AL in katızaidi kat'ettiği ikinci noktanın mezkûr müsellesin H kaimî merkezi olduğunu ispat ediniz. Bundan da aşağıdaki dava elde olunur:

Bir mütesaviyüssakayn katızaidin dahiline mersum müsellesin kaimî merkezi mezkûr münhani üzerinde kâindir.

196. Bir katınakıs veya bir katızaidin mihraklarından geçen mihverinin müntehaları A,A'; mezkûr münhaninin lâalettayin bir M noktasının AA' üzerindeki mürtesemi H ve M noktasındaki mümasın AA' mihverini kat'ettiği nokta da T olsun.

İspat etmek matluptur ki A,A',H,T noktaları bir müellef fırka teşkil eder.

197. Mihverleri ve iki noktası malûm olan bir katınakıs veya bir katızaidi tersim etmek matluptur.

198. Bir (F) dairesile bu dairenin bir nısıf kutruna muntasıf noktasında amut olan bir D müstekimi ve lâalettayin bir M noktası veriliyor. Müveccih dairesi (F) dairesinden ibaret, D ye mümas ve M den geçen bir mahrutiye tersim etmek matluptur. Mes'elenin münakaşası.

Katımükâfi

199. Verilen bir müstekim ve bir daireye mümas olan dairelerin merkezlerinin hendesî mahalli nedir?

200. Malûm bir müveccihe malik ve malûm bir müstekime de mümas olan katımükâfilerin mihraklarının ve reslerinin hendesî mahallini bulunuz.

Aşağıdaki malûmler vasıtasile bir katımükâfiyi tersim etmek matluptur:

201. Müveccih ve iki nokta.
202. Mihrak ve iki nokta.
203. Müveccih ve iki mümas.
204. Mihrak ve iki mümas.
205. Mihrak, bir mümas ve temas noktası.
206. Resteki mümas ile diğer iki mümas.
207. Resteki mümasla diğer bir mümas ve temas noktası.
208. Müveccih, bir mümas ve temas noktası.
209. Mihrak, bir mümas ve bir nokta.
210. Müveccih, Bir mümas ve bir nokta.
211. İki mümas ve temas noktaları.

212. Bir katımükâfinin haricine mersum bir müsellesin kaimî merkezi muveccih üzerinde kaindir.

213. Malûm iki noktadan geçen ve mihveri malûm bir istikamete malik olan katımükâfilerin mihraklarının hendesî mahalli.

214. Sabit bir nokta ve sabit bir müstekime olan mesafeleri mecmuu veya tefazulu sabit olan noktaların hendesî mahalli.

215. Bir ABC müsellesinde, B,C reslerile B zaviyesi ve AC dıl'ı ile AH irtifaının mecmuu veya tefazulu malûm olduğuna göre mezkûr müsellesi tersim etmek matluptur. Münakaşa.

216. Sabit iki noktaya olan mesafelerinin murabbaları tefazulu sabit olan müstekimlerin zarfı?

217. Verilen iki daire tarafından üzerlerinde ayni tulde veterler ayrılan müstekimlerin zarfı?

218. Bir katımükâfinin iki noktası B,C; BC ye M muntasıf noktasından resmolunan amutla M noktasından mihvere resmedilen amudun mezkûr mihveri kat'ettiği noktalarda N,H olsun: İspat etmek matluptur ki B,C noktaları katımükâfi üzerinde nasıl alınırsa alınsın HN kıtasının tulü sabit kalır.

219. A,B gibi iki nokta nazir nazire sabit iki Ox, Oy müstekimini ve AB nin C muntasıf noktası da bir Δ müstekimini resmettiğine nazran AB müstekiminin zarfını bulmak matluptur.

220. Mütehavvil bir M noktası bir D müstekimini resmettiğine ve iki sabit Ox, Oy müstekimi üzerine de A,B noktalarında irtisam eylediğine göre AB müstekiminin zarfını bulmak matluptur. Simson müstekimi.

221. Bir katımükâfinin mütehavvil bir M noktasındaki mümaşı MT ve bu noktadan mihvere resmedilen muvazi de Mx olduğuna göre MT nin Mx e nazaran MT′ mütenazırının zarfını bulmak matluptur.

222. İki katımükâfi müşterek D müveccihleri ve F,F′ mihraklarile verildiğine göre:

1°. Mezkûr katımükâfinin müşterek mümaslarını;

2°. Mezkûr katımükâfinin müşterek noktalarını tersim etmek matluptur.

223. Mihrakları ayni olan iki katımükâfi müşterek mihrakları ve reslerinde D,Δ mümasları ile verildiğine göre:

1°. Mezkûr münhanilerin müşterek mümaslarını;

2°. Mezkûr münhanilerin müşterek noktalarını tersim etmek matluptur.

224. Bir dairenin kaim iki nısıf kutru OA,OB; mezkûr dairenin mütehavvil bir noktası M; M noktasının OB müstekimi üzerindeki mürtesemi C, nihayet AC,OM müstekimlerinin tekatu noktası I olduğuna göre I noktasının hendesî mahallinin mihrakı O ve müveccihi A noktasındaki mümastan ibaret olan bir katımükâfi olduğunu ispat etmek matluptur (Bundad katımükâfinin yeni bir nokta nokta tersim tarzını istintaç).

225. Bir ABC müsellesile BC dıl'ının mütehavvil bir noktası M olsun. BA üzerinde, BA cihetinde olmak üzere, BN = BM ve CA üzerinde, CA cihetinde olmak üzere, CP = CM alalım. Buhale nazaran $\widehat{NMP}$ zaviyesinin sabit kaldığını, NMP dairesinin I merkezinin sabit olduğunu ve NP müstekiminin zarfının mihrakı I olan bir katımükfiden ibaret olduğunu ispat etmek matluptur.

(Bakalorya)

226. Bir katımükâfinin mihrakının bu münhaninin B,C gibi iki noktasına olan mesafeleri arasındaki nispet, mihrakın mezhûr noktalardaki mümaslara olan mesafelerinin murabbaları arasındaki nispete müsavidir.

227. Bir mümasile temas noktası ve mihverinin istikameti malûm olan bir katımükâfinin mihrakının hendesî mahalli.

228. Bir katımükâfinin F mihrakından geçen mütehavvil bir veteri MM′ olduğuna göre $\frac{FM \cdot FM'}{MM'}$ nün sabit olduğunu ispat ediniz.

229. Bir katımükâfinin F mihrakından geçen mütehavvil bir veteri MM′ ve M, M′ noktalarının sabit müstekim üzerindeki mür-

tesemleri de P, P′ olduğuna göre $\frac{MP}{MF}+\frac{M'P'}{M'F}$ mecmuunun sabit olduğunu ispat ediniz.

230. Bir daire sabit bir daireyi kaimen kat'etmek ve sabit bir müstekime de mümas olmak üzere tehavvül eylediğine nazaran mezkûr dairenin zarfını ve merkezinin hendesî mahallini bulmak matluptur.

231. Bir katımükâfinin haricine mersum olan bir müsellesin haricine mersum olan daire mihraktan geçer.

232. Dört müstekime mümas olan bir katımükâfi tersim etmek matluptur.

Üç müstekim ile bu müstekimlerden birinin temas noktasının verilmesi gaye hali.

(Bundan evvelki temrini tatbik).

233. Bir P noktasından mihrakı F olan bir katımükâfiye resmedilen mümaslar PM, PM′ olduğuna göre

$$\left(\frac{PM}{PM'}\right)^2=\frac{FM}{FM'} \text{ ve } \overline{FP}^2=FM.FM'$$

olduğunu ispat ediniz.

234. Bir katımükâfinin üç müması tarafından teşkil olunan müsellesin sahası, temas noktalarının teşkil ettikleri müsellesin sahasının nısfına müsavidir.

235. Bir münharif, bir katımükâfi haricine mersum ise mihrakın mezkûr münharifin karşılıklı iki resine olan mesafeleri hasılı zarbı, diğer üç çift karşılıklı resler için de aynıdır (Temrin 231 e bakınız).

236. A resinde kaim zaviyeli ve mütesaviyüssakayn olan bir ABC müsellesini nazari itibara alalım. BC, AB, AC dılılarının muntasıf noktaları nazir nazire I, J, J′; BC kaim veterinin müteharrik bir noktası P, nihayet bu noktanın AB, AC üzerindeki mürtesemleri H, K olsun:

1° IHK müsellesinin kaim zaviyeli ve mütesaviyüssakayn olduğunu;

2° HK nın M muntasıf noktasının hendesî mahallinin JJ′ den ibaret olduğunu ispat etmek;

3° Ve HK müstekiminin zarfını bulmak matluptur.

(Bakalorya)

237. Bir noktaya ve bir müstekime olan mesafelerinin murabbaları tefazulu sabit olan noktaların hendesî mahallini bulmak matluptur.

238. Sabit A noktası verildiğine ve verilen sabit bir müstekim üzerinde de tulü sabit olan bir BC kıt'ası kaydığına nazaran ABC müsellesinin merkezinin hendesî mahallini bulmak matluptur.

239. Resi ve bir müması malûm olan katımükâfinin mihraklarının hendesî mahalli?

240. Bir katımükâfinin yekdiğerine amut iki nazımının amut mevkileri M, M′ olduğuna göre MM′ nün I muntasıf noktasının ve mezkûr nazımların N tekatu noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur.

241. F mihrakı, p muaddili ve bir M noktası malûm olan bir katımükâfinin müveccihini tersim ve mes'eleyi münakaşa etmek matluptur.

F, M noktaları sabit kaldığına göre p yi o suretle hesap etmek matluptur ki mukabil katımükâfilerden birinin müveccihi verilen bir müstekime muvazi olsun.

(Bakalorya)

242. Bir katımükâfinin bir D mümasile bu mümasın A temas noktası ve mezkûr mümasın katımükâfinin mihverini kat'ettiği B noktası verildiğine nazaren:

1°. Mihrak ve resin hendesî mahallile müveccihlerin zarfını bulunuz.

2°. Bu kat'ı mükâfilerin arasında malûm bir muaaddile malik veya verilen ikinci bir müstekime mümas olan katımükâfiyi tersim ediniz.

(Bakalorya)

243. 1°. F mihrakiyle bir D müması ve M noktası malûm olan katımükâfilerin müveccihlerini tersim ve M noktasının F ve D ye nazaran vaziyetine göre mes'eleyi münakaşa ediniz.

2° öyle bir takım M noktalarının hendesî mahallini tayin ediniz ki mezkûr noktalardan geçen katımükâfilerin müveccihleri yekdiğerine amut olsun. Bu noktalardan biri M olduğuna göre iki katımükâfinin bu noktadaki mümaslarının zaviyesi neden ibarettir. (Bakalorya)

244. Bir (O) dairesi bir D müstekimine mümas kaldığına ve merkezi de bir Δ müstekimini resmettiğine göre (O) dairesile sabit bir (C) dairesinin cezrî mihverinin zarfını bulmak matluptur.

245. Bir katımükâfi ile bu katımükâfiye resinde mümas olan R nısıf kuturlu bir daire veriliyor. Bu iki münhaninin resten gayrı olan M, M′ müşterek noktalarını tayin etmek matluptur. Bu noktaların mevcudiyeti şartı. (Bakalorya)

(gaye halinden katımükâfinin resindeki inhina nısıf kutru istintaç olunur).

246. Sabit bir AB kıt'ası üzerinde müteharrik bir M noktasını nazarı itibara alalım. Ve AB nin ayni tarafında olmak ve resleri de yazıldıkları sırada teakup etmek üzere AMCD, BMEF murabbalarını tersim edelim. İspat etmek matluptur ki:

1°. AF,BD,MEC müstekimleri ayni bir H noktasında telâki ederler;

2°. A noktasının hendesî mahall A,B noktalarından geçen ve mihrakı da AB nin O muntasıf noktasından ibaret olan bir katımükâfiidir;

3°. İki murabbaın merkezlerini vasleden müstekim mezkûr katımükâfiye H noktasında mümastır.

247. Mihrakı (F) olan bir katımükâfinin lâalettayin iki noktası M,N olsun. FM, FN müstekimlerile M,N noktalarından mihvere resmedilen muvaziler bir şibih münharif teşkil ederler:

1°. İspat etmek matluptur ki bu şibih münharif bir daire haricine kabili tersimdir;

2°. Bundan maada MN müstekiminin müveccihin mihveri kat'ettiği noktadan da geçtiği farzolunduğuna göre ispat etmek matluptur ki mezkûr münharif bir daire dahiline kabili tersimdir;

3°. Katımükâfinin M, N noktalarındaki mümaslarının tekatu noktasile mezkûr şibih münharif dahiline mersum dairenin dılılarla temas noktalarının hendesî mahallerini tayin;

4°. Ve mezkûr şibih münharif dahiline mersum dairelerin ayni bir huzmeye ait olduklarını isbat etmek matluptur.

248. Resi A ve muaddili P olan bir katımükâfinin mihveri $p_1, p_2, p_3, \ldots p_{n-1}, P_n$ noktalarile mezkûr münhani üzerinde aşağıdaki tarzda elde olunan $M_1, M_2, M_3 \ldots M_{n-1}$ noktaları nazarı mülâhazaya alınıyor:

AP_1 verilen bir a tulünü haizdir, P_1M_1 mihvere nazımdır, M_1P_2 katımükâfiye nazımdır, P_2M_2 mihvere nazımdır, M_2P_3 katımükâfiye nazımdır,..... böylece devam olunarak nihayet $M_{n-1}P_n$ katımükâfiye nazımdır. Bu hale nazaran:

1°. $P_1M_1P_2M_2 \ldots\ldots P_n$ münkesir hattının dılılarının murabbaları mecmuunu a ve p nin tabii olarak hesap ediniz;

2°. Mezkûr münkesir hattın mihverle teşkil ettiği müselleslerin mihver etrafında deveranından tevellüt eden hacimlerin mecmuunu hesap ediniz. (Bakalorya)

249. Bir ABC müsellesinde BC dıl'ile mezkûr müselles dahiline mersum daire sabit kaldığını ve A resinin de BC ye muvazi bir müstekim resmeylediğini farz ve BC nin müsellesin dahiline

mersum daire ile temas noktasını da I ile gösterelim. Bu hale göre:

1°. IB.IC hasılı zarbının sabit kaldığını ispat etmek.

2°. ABC dairesinin merkezinin hendesî mahallini bulmak matluptur.

250. Bir (O) dairesinin A ve B gibi sabit iki noktası bir kutrun C ve D müntehalarına vaslolunuyor. Bu suretle elde olunan dört müstekime mümas bir katımükâfi vardır (Temrin 232):

1°. Bu katımükâfinin müveccihi neden ibarettir? F mihrakı hangi noktadır?

2°. CD kutru tehavvül eylediği takdirde F mihrakının hendesî mahalli nedir?

3°. CD yi tehavvül ettirerek elde olunan katımükâfilerden bir M noktasından geçenlerin mihraklarını tayin (iki dairenin faslı müştereki) ve M noktasının vaziyetine göre meseleyi münakaşa ediniz;

4°. Öyle bir takım M noktalarının hendesî mahallini tayin ediniz ki bu noktalardan yekdiğerini kaimen kateden iki mükâfi geçsin.

251. Merkezi bir (A) dairesini resmeden mütehavvil bir (M) dairesi bir (B) dairesini de kaimen katettiğine göre bu mütehavvil dairenin sabit bir (C) dairesile cezrî mihverinin zarfının bir mahrutiyeden ibaret olduğunu isbat etmek matluptur. Hangi halde bu mahrutiye bir katımükâfidir?

Müveccihler

252. Bir mahrutiyenin bir müveccihi ile bir müması ve harici anilmerkeziyeti veriliyor:

1°. Bundan maada mümasın temas noktası da verildiğine göre verilen müveccihe ait mihrakın tersimi?

2°. Temas noktası mümas üzerinde yerini değiştirdiğine göre mezkûr mihrakın hendesî mahalli?

253. Malûm bir D müveccihine malik ve verilen iki A, B noktasından geçen namütenahi mahrutiye vardır. Mezkûr müveccihe ait mihrakın hendesî mahalli, F noktasının mezkûr hendesî mahal üzerindeki mevziine göre mahrutiyenin nev'ini irae.

254. Malûm bir müveccih ve malûm bir temas unsuruna (bir mümas ve temas noktası) malik olan mahrutiyeler için de ayni mes'ele.

Aşağıdaki malûmlar vasıtasile bir mahrutiyeyi tersim etmek matluptur:

255. Bir müveccih ve üç nokta.

256. Bir müveccih, iki nokta ve bu noktaların birindeki mümas.

257. Bir mihrak, harici anilmerkeziyet, bir nokta ve bu noktadaki mümas.

258. İki müveccih ve iki nokta.

259. İki müveccih, bir nokta ve bu noktadaki mümas.

260. Bir müveccih, iki nokta ve harici anilmerkeziyet.

261. Bir müueccih, merkez ve bir nokta.

262. Bir katızait (O) aslî dairesi ve bir F mihrakile muayyen olduğuna göre mezkûr katızaidin mücâniplerile F mihrakına ait müveccihini tersim etmek matluptur.

Burada ne nazarı dikkati celbediyor? müuhaninin lâalettayin bir noktası M olduğuna göre merkezi M olan ve F ten geçen daire resmolunuyor. Bu daire D yi N,N′ noktalarında kat'ettiğine göre MN, MN′ müstekimlerinin mücaniplere muvazi olduklarını ispat ediniz.

263. İki noktası ve mücanibî istikametleri malûm olan katızaitlerin mihraklarının hendesî mahalli (Bundan evvelki temrini tatbik)?

264. Malûm bir mücanip ve müveccihe malik olan katızaitlerin mihraklarının hendesî mahalli (Mümaselet).

Aşağıdaki malûmlar vasıtasile bir katızaidi tersim etmek matluptur.

265. Bir mihrak ile bu mihraka ait müveccih vebir mücanibî istikamet.

266. Bir mücanip, bir mihrak ve bir nokta (Temrin 262).

267. Bir mücanip, bir müveccih ve bir nokta (Mümaselet).

268. Bir mücanip, bir müveccih ve bir mümas (Mümaselet).

269. Bir mveccih, bir mücanibî istikamet ve iki nokta (Temrin 262).

270. İki müveccih, bir mücanibî istikamet ve bir nokta (262).

271. İki müveccih, bir mücanibî istikamet ve bir mümas.

272. Öyle bir takım noktaların hendesî mahallini bulmak matluptur ki bu noktalardan verilen bir katımükâfiye aralarında malûm bir zaviye teşkil eden mümaslar resmolunabilsin.

273. Bir mahrutiyenin bir mihrakı F, bu mihraka ait müveccihi D olsun. D müveccihinin bir A noklasından mezkûr mahrutiyeye resmedilen bir mümas kutru AF olan daireyi P noktasında kat'ettiğine göre bu dairenin A noktasındaki mümasının mahrutiyenin O merkezinden geçtiğini ispat etmek matluptur.

274. Müveccihi ile merkezi ve bir müması malûm olan bir mahrutiyeyi tersim etmek matluptur (Bundan evvelki temrin tatbik olunabilir).

275. Bir mahrutiyenin bir M noktasındaki mümasının bir T noktasından FM ve muveccih üzerine TI, TH amutları resmolunuyor. $\frac{FI}{TH} = e$ (Harici anilmerkeziyet) olduğunu ispat ediniz.

276. Bir mahrutiyenin bir M noktasındaki nazımı mihraklardan geçen mihveri bir N noktasında kat'ettiğine göre $\frac{FN}{MN} = e$ (harici anilmerkeziyet) olduğunu ıspat ediniz.

277. Mihrakları F,F′ olan bir katınakısa haricinde kâin bir P noktasından PM,PM′ mümasları resmolunuyor. MM′ temas veteri F mihrakına ait D müveccihini I noktasında kat'ediyor. P noktasının MM′ üzerindeki mürtesemi H olduğuna ve MM′, PH müstekimleri de küçük mihveri T,N noktalarında kat'ettiğine göre ıspat etmek matluptur ki:

1°. $\widehat{PFI}$ zaviyesi kaimedir;

2°. PH, $\widehat{FHF'}$ zaviyesinin nasıfıdır;

3° THN dairesi F,F′ den geçer.

278. Bir (O) dairesinin bir (C) dairesine nazaran mütekabil kutbiyesi, mihrakı C olan bir mahrutiye olduğu gibi bu mihraka ait müueccih te O noktasının (C) dairesine nazaran kutbiyesinden ibarettir. (Temrin 53 ü tatbik ediniz veya C noktasının (O) dairesine ait noktaların kutbiyeleri üzerindeki mürtesemlerinin hendesî mahallini arayınız).

Deveranî mahrut ve üstüvanenin müstevi maktaları.

279. Hangi halde bir müstevi bir deveranî mahrutu bir mütesaviyüssakayn katızaide göre kat'edebilir.

280. Mihverleri muvazi olan iki müsavi deveranî mahrutun faslımüştereki bir mahrutiyedir.

281. Bir P müstevisi bir küreye mümastır. Öyle bir takım S noktalarının hendesî mahallini bulmak matluptur ki resi S olan ve küre haricine mersum bulunan mahrut P müstevisini merkezi P müstevisi dahilinde kâin malûm bir O noktasından ibaret olan bir mahrutiyeye göre kat'etsin. Hendesî mahallin bir katınakısa, bir katızaide tekabül eden nahiyelerini gösteriniz.

282. Mihverlerinin tulleri $2a, 2b$ ve büyük mihveri AB olan bir katınakıs resi S ve res zaviyesi 2α olan deveranî bir mahrut üzerinde bulunduğuna göre:

1° $SA.SB = \frac{b^2}{\sin^2 \alpha}$ olduğunu ispat;

2° SAB müsellesinin A, B zaviyelerini, SA, SB dılılarını ve mezkûr müsellesin sahasını a, b, α nın tabii olarak hesap etmek matluptur.

283. Bir deveranî mahrutla bir müstekim verildiğine göre faslı müşterekin müveccihi verilen müstekimden ibaret olacak veçhile mezkûr mahrutu verilen müstekimden geçen bir müstevi ile kat'etmek mümkün müdür?

284. P, Q gibi iki müstevile bir C noktası ve C den geçen P müstevisine M noktasında mümas olan ve O merkezi Q müstevisi dahilinde bulunan bir (O) küresi nazarı itibara alalım.

1° M noktasının hendesî mahallile O noktasının (E) hendesî mahallini bulunuz.

2° Resi C ve kaidesi (E) olan mahrutun deveranî olduğunu ispat ediniz.

285. Bir mahrutiye üzerinde sabit bir A noktasile müteharrik bir B noktası ve sabit bir Δ müstekimi nazarı itibara alalım.

AB müstekiminin Δ yi katettiği nokta C olsun. C noktasının A ve B ye nazaran D müzdevicinin hendesi mahallini bulmak matluptur (Δ yi namütenahiye uzaklaştırarak şekli irtisam ettiriniz).

286. Kutup ve kutbiyelerin hassalarını mahrutiyelere teşmil.

287. Paskal ve biriyanşon davalarını mahrutiyelere teşmil.

288. $\widehat{xOy}$ zaviyesi 60° dir. Bu zaviye resi O olan bir deveranî mahrutun bir besatının nısfınnehar maktaıdır. Oy in bir A noktası Ox in bir M noktasına vaslolunuyor. AM müstekiminden xOy müstevisine amut olan ve mahrutu bir katınakısa göre kateden bir müstevi resmolunuyor:

1°. $OA = a$ malûm ve $OM = x$ olduğuna göre evvelâ mezkûr katınakısın büyük mihverini ve sonra OAM müsellesinin üç dılına mümas dairelerden ikisini nazarı mülâhazaya alarak mezkûr katınakısın mihrakları arasındaki mesafeyi hesap ve bundan da küçük mihveri istintaç ediniz;

2°. M noktası verilen zaviyenin Ox dılını resmettiğinde katınakısın merkezinin hendesî mahallile müntehalarının hendesî mahallini bulunuz;

3°. M noktasını Ox üzerinde o suretle tayin ediniz ki mihraklar arasındaki mesafe malûm bir l tulüne müsavi olsun. Münakaşa

(Bakalorya)

289. Sabit bir noktadan geçen ve verilen bir daire üzerinde malûm tulde bir veter ayıran dairelerin merkezlerinin hendesî mahallini bulmak matluptur. Verilen daire yerine malûm bir müstekim alınması hususî hali.

290. Merkezleri O ve M olan ve yekdiğerini kaimen kat'eden iki daire nazarı itibara alalım. Ve bu dairelerin bir müşterk mümaslarının temas noktaları A ve P olsun. (O) dairesile AP müstekimini sabit ve (M) dairesini mütehavvil farzedelim. Nihayet OP müstekiminin (M) dairesini kat'ettiği nokta da Q olsun. Bu malûmata göre:

1°. O noktasının hendesî mahallini bulunuz;

2°. (M) dairesinin bulunan hendesî mahalle mümas kaldığını ispat ediniz;

3.° M noktasının hendesî mahallini bulunuz.

291. Bir müstevi dahilinde bir D müstekimile bu müstekimden d mesafesinde kâin bir A noktası veriliyor. Sabit bir Θ hadde vaziyesi A noktası etrafında devrediyor. Bu zaviyenin dılllarının veya dılıların resten itibaren imtidatlarının D müstekimini kat'ettiği noktalar P ve Q, nihayet APQ dairesinin merkezi de O olsun. Bu malûmata göre ispat etmek matluptur ki:

1°. O noktasının hendesî mahalli mihrakı A ve müveccihi D olan bir mahrutiyedir;

2°. APQ dairesi sabit bir daireye mümas kalır. Bu dairenin merkez ve nısıf kuturunu irae ediniz;

3°. Malûm bir R nısıf kutruna malik olan bir APQ dairesini bulunuz. R in kıymetlerine göre bu dairelerin adedini münakaşa ve

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad R = 2d$$

olduğuna göre mezkûr daireleri tersim ediniz.

(Bakalorya)

292. Bir ABC müsellesinin BC, CA, AB dılılarının dahiline mersum daire ile temas noktaları A′,B′,C′ olsun. B,C noktalarını sabit ve A noktasını müteharrik farzedelim.

1° A′B′ müstekimi AB ye muvazi kaldığına;

2° A′ noktası sabit kaldığına;

3° AB′ kıt'ası sabit bir l tulüne malik olduğuna göre A noktasının hendesî mahallini bulmak matluptur.

4° I=AB′ ile A zaviyesinin nısfı malûm olduğuna göre ABC müsellesinin tersimi.

293. Bir ABC müsellesinin dahil ve haricine mersum dairele-

rin merkezleri I ve O, müsellesin dahiline mersum dairenin AB, AC dılılarile temas noktaları da E,F olsun. BC, EF, OI müstekimlerinin ayni bir G noktasında telâki ettiklerini farzedelim. Bu malûmata göre ispat etmek matluptur ki:

1° Müsellesin haricine mersum dairenin A noktasındaki müması G den geçer.

2° Mezkûr müsellesin dılıları arasında

$$a\,(b+c)=b^2+c^2$$

münasebeti mevcuttur.

3° AB, AC dılılarının birbiri üzerindeki mürtesemleri mecmuu BC ye müsavidir.

İspat etmek matluptur ki A zaviyesi en fazla 60° ye müsavidir.

294. Yekdiğerine haricen mümas olan iki dairenin merkezleri β,γ, dahilî müşterek mümasları Z'Z ve Z'Z i D,D' noktalarında (D' noktası A ile D arasındadır) kat'eden müşterek haricî mümaslar da Sx,Sx' olsun. Z'Z in müteharrik bir A noktasından mezkûr iki daireye ikinci mümasları resmedelim.

Mezkûr mümasların Sx i kat'ettiği noktaları B,C ve Sx' ü kat'ettiği noktaları da B',C' ile gösterelim. Bu malûmata göre:

1° İspat etmek matluptur ki D noktası ABC müsellesi dahiline mersum (k) dairesinin temas noktasından ve D' noktası da A'B'C' müsellesine A zaviyesi dahilinde haricen mümas olan (K) dairesinin temas noktasından ibarettir.

2° B β, Cγ müsellesinin M tekatu noktasile B'β, C'γ müstekimlerinin M' tekatu noktasının hendesî mahallerini bulunuz.

3° MM' müstekiminin zarfının bir katızait olduğunu ispat ediniz;

4° A$\beta\gamma$ dairesinin MβM'γ dairesini kaimen kat'ettiğini ve (K), (K') huzmesine ait olduğunu ispat ediniz.

5° $\beta\gamma$ nın muntasıf noktası O ve A$\beta\gamma$ dairesinin merkezi de ω olduğuna göre

$$\frac{MO}{OD}=\frac{D'O}{OM'}=\frac{AD'}{AD}, \qquad \frac{1}{\omega o}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AD'}$$

münasebetlerini ispat ediniz.

SON

YANLIŞ DOĞRU CETVELI

Kitabın bir çok mahallerinde res kelimesi re's veya reis şeklinde yazılmıştır; bu kelimenin tashihini okuyuculara bırakıyoruz.

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
2	Son: 2	dılıfları	dılıları
5	7	müseilesinin	müsellesinin
»	8	müselles n	müsellesin
7			Ş.7 de ABC dıl'ı üzerindeki C resi C' olacaktır
10			Ş.9 daki ufak o dairesi o' olacaktır
11	14	d aireleri	daireleri
»	16	barettir	ibarettir
13	24	mütekimi	müstekimi
»	Son: 4	bir 1	bir I
14	Son: 9	kaimdir	kâindir
18	9	Dada	Dava
19	5	ulabllmesi	olabilmesi
20	9	gazrimakdut	gayrimahdut
»	12	Gaye de	gayede
»	16	ayni	yani
23	14	dhva	dava
24	18	hensesi	hendesî
»	28	nortaların	noktaların
25	Son: 6	Metekabil	Mütekabil
27	12	naktasının	noktasının
28	13	eyva	veya
»			Ş.32 de AB' müstekimi A'B' olacak
30	20	nohtasında	noktasında

Sayfa	Satır	Yanlış	doğru
32	17	$P=OM.\overline{ON}$	$P=\overline{OM}.\overline{ON}$
35	8	müteşekkildir	müteşekkeldir
39	Son: 3	olrsa	olursa
42	» 8	$VO.\overline{VV'}=$	$\overline{VO}.\overline{VV'}=$
53	8	$PF<pF'Pp'$	$PF<P'F\ P'P$
55			Ş. 55 te F'C' hattı üzerindeki M noktası M' olacak
58	Son: 5	EH	FH
60	» 14	Poncelet	(Poncelet)
61	» 6	F^1	F
66	» »	katinakıs	katınakıs
67	» 2	D_4	D_1
68	21	Hatınakısın	Katınakısın
69	21	lâzm	lâzım
73	11	müteşekkildir	müteşekkeldir
77	15	$M'F-M'F^1=2a$	$M'F-M'F'=2a$
78	1	$\|PF'-PF\|2a$	$\|PF'-PF\|=2a$
„	11	haricind	haricinde
„	Son: 3	FT,FT"	FT, FT'
85	10	Katı zaide	katızaide
87	3	kat'ı zaidin	katızaidin
„	Son: 3	vaz'iyetleri	vaziyeleri
89			Ş. 92 de sağdan itibaren ilk M, N, H noktaları M', N', H' olacaktır
90	3	$=\frac{a^2b^2}{c^2}$	$=\frac{a^2b^2}{2c^2}$
92	8	kat'ızait	katızait
92	20	katı zaidin	katızaidin
93	Son: 4	kalımükâfidir	katımükâfidir
95	11	nok'tasının	noktasının
99	11	resmediien	resmedilen
100	15	mümasları da	mürtesemleri de
„	18	doeru	doğru
101			Ş. 104 teki Mxy noktası M (xy) olacak
102	13	fasalalar	faslalar
105	2	değişiirdiğinde	değişdirdiğinde

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
106	2	muşterek	müşterek
106			Ş.106 da M noktasının AA' üzerindeki mürtesemi m olacaktır
108	5	murtesemidir	mürtesemidir
109	15	üzerinde de	üzerinde
»	17	müzkûr	mezkûr
110	13	$e>1$	$e<1$
»	14	kamakıs	katınakıs
»	16	$e>1$	$e<1$
111			Ş.112 de F' cihetindeki A noktası A' olacak
112			Ş.113 de M' noktasının D üzerindeki mürtesemi H' olacak
114			Ş.114 ve 115 de C'T' hattı üzerindeki B noktası B' olacak
115	11	Hatınakıs	katınakıs
»			Ş.117 de O' dairesi üzerindeki A,F noktaları A'; F' olacak
»			Ş.118 de üst taraftaki F,T,B noktaları F', T', B' olacak
116	3	Haicinde	haricinde
119	16	M, M	M; M
»			Ş.121 de A' den itibaren F noktası F' olacak
120	8	hergangi	herhangi
124	1	nektası	noktası
»	Son: 2	$=\sqrt{4a^2-4c^2=2b}$	$=\sqrt{4a^2-4c^2}=2b$
125	3	d	da
128	Son: 9	müseiviye	müsteviye
129	15	mezûr	mezkûr
144	Son: 7	ve mümas	ve iki mümas