

Modüler Grubun Dış Otomorfizmi ve Dinamik Sistemler

(Merhum Ali Erhan Özlük'ün Hatırasına)

A. Muhammed Uludağ
(Hakan Ayrıl ile ortak çalışma)

Galatasaray Üniversitesi

28 Nisan 2017

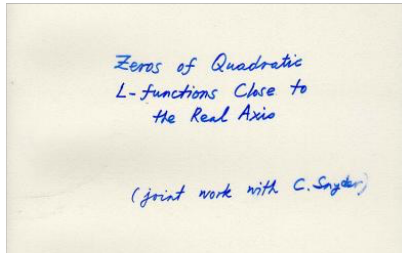
Feza Gürsey Merkezi
İkinci Kuruluş Yıldönümü

TÜBİTAK GRANT NO: 115F412



Ali Erhan Özlük (1952-2012)

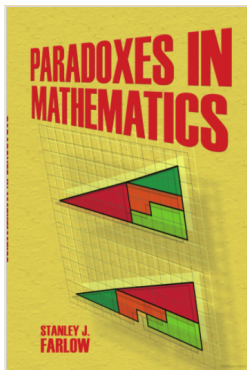
- ▶ 1952 Doğum (Denizli)
- ▶ 1974 Boğaziçi Üniversitesi Matematik Lisansı
- ▶ 1975 Michigan Üniversitesi (Ann Arbor) Yüksek Lisans
- ▶ 1976-1978 BÜ ve G. İkedo'nun TÜBİTAK araştırma grubu üyesi
- ▶ 1982: Doktora, Michigan Üniversitesi, Danışman: H. Montgomery
Tez başlığı: Pair Correlation of Zeros of Dirichlet L-Functions
- ▶ 1982-1986: Boğaziçi Üniversitesi & Gebze MAM?
- ▶ 1987-2012 Maine Üniversitesi
- ▶ 1998: Uluslararası Matematik Kongresi Oturum Başkanı (Berlin)
- ▶ 1 Mart 2012 Vefat (Maine), 18 Mart 2012 Defin (Denizli)



El yazısı (MSRI'da verdiği konuşmadan)

- ▶ Maine'in Putnam Matematik Yarışması ekibinin koçu
- ▶ Talebesi yok, ama bir çoğunun yetişmesine katkıda bulunmuş
- ▶ Çalışma alanı dışında bir çok konuda derin bilgi sahibi; fizikçilerle çalışmaları var.
- ▶ 18 akademik makale

- ▶ Özlük, A. E.; Snyder, C. L-functions attached to products arising in the theory of fields. *Algebra Number Theory Appl.* (2010)
- ▶ Özlük, A. E.; Snyder, C. On the distribution of the zeros of quadratic L-functions of imaginary quadratic number fields close to the real axis. *Acta Arith.* (2006)
- ▶ Özlük, A. E.; Snyder, C. On the one-level density conjecture for quadratic Dirichlet L-functions. *Canad. J. Math.* (2006)
- ▶ Bradley, D. M.; Özlük, A. E.; et al., C. The distribution of the irreducibles in an algebraic number field. *J. Aust. M.S.* (2005)
- ▶ Fiala, J.; Kleban, P.; Özlük, A. The phase transition in statistical models defined on Farey fractions. *J. Statist. Phys.* (2003)
- ▶ Bradley, D. M.; Özlük, A. E.; Snyder, C. On a class number formula for real quadratic number fields. *Bull. Austral. M.S.* (2002)
- ▶ Özlük, A.; Peter, M.; Snyder, C. On asymptotic properties of a number theoretic function arising out of a spin chain model in statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.* (2001)
- ▶ Özlük, A. E. et al. On the pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function. *Proc. London M.S.* (2000)
- ▶ Özlük, A. E.; Snyder, C. On the distribution of zeros of quadratic L-functions close to the real axis. *Acta Arith.* (1999)
- ▶ Kleban, P.; Özlük, A. E. A Farey fraction spin chain. *Comm. Math. Phys.* (1999)
- ▶ Özlük, Ali E. On the q-analogue of the pair correlation conjecture. *J. Number Theory* (1996)
- ▶ Özlük, Ali E.; Snyder, C. Small zeros of quadratic L-functions. *Bull. Austral. Math. Soc.* (1993)
- ▶ Sertöz, S.; Özlük, A. On the number of representations of an integer by a linear form. *İstanbul Üniv. Derg.* (1993).
- ▶ Özlük, A. E.; Snyder, C. An identity involving Nörlund polynomials. *Bull. Austral. Math. Soc.* (1991)
- ▶ Özlük, A. E. On the pair correlation of zeros of Dirichlet L-functions. *Number theory de Gruyter, Berlin*, 1990.
- ▶ Özlük, A. E. On the irregularity of distribution of primes in an arithmetic progression over "short" intervals. *İTÜ Bül.* (1987)
- ▶ Sertöz, S.; Özlük, A. E. On a Diophantine problem of Frobenius. *İstanbul Tek. Üniv. Bül.* (1986)
- ▶ Özlük, A. E. PAIR CORRELATION OF ZEROS OF DIRICHLET L-FUNCTIONS. Thesis –University of Michigan. 1982.



Twenty years ago my colleague, good friend, and very good number theorist Ali Ozluk came into my office and suggested we write a book together titled something like, *Believe It or Not: Paradoxes in Mathematics*, which detailed many of the unexpected and surprising results in mathematics. I thought the idea was splendid so I started writing some short pieces describing what I thought were some unusual and startling results in mathematics. But Ali was deeply involved in his research in number theory, working on the distribution of the roots of the Riemann zeta function, in which he made several important contributions, so he put his suggestion on hold. To make a long story short, while Ali was deep in number theory, I wrote an entire book on his suggestion and told Ali that we should publish it together, but being the gracious person he was, he insisted that I publish it on my own.

Unfortunately, Ali died unexpectedly on March 1, 2012 and although he never saw his suggestion come to fruition, it is my great privilege to dedicate this book to my good friend and very good number theorist, Ali Ozluk. We miss you, Ali.

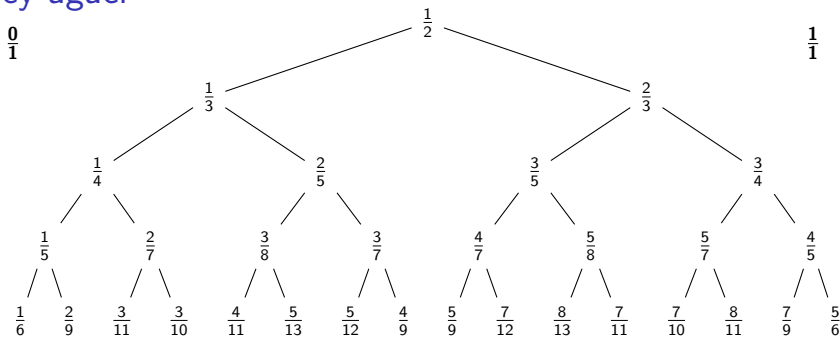
Copyrighted material

Adına ithaf edilen kitap (2014)

BİRİNCİ KISIM

SPİN ZİNCİRLERİ

Farey ağacı



Farey Ağacı

Ağaç, her $0 < x < 1$ rasyonelini tam bir kez içerir. Satırları soldan sağa ve yukarıdan aşağıya okumak, rasyonellerin özel bir sayımını verir.

Ağaç, Farey toplamı (hatalı kesir toplama) ile inşa edilir.

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$$

Farey ağacının sürekli kesirlerle irtibatı

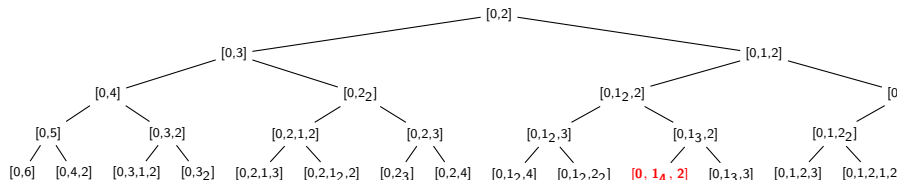
Önerme

Farey ağacında d *derinlikteki* köşelerdeki rasyonellerin sürekli kesir açılımı şöyledir:

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \equiv [0, a_1, \dots, a_n] \quad (d(x) = \sum_{i=0}^n a_i = d)$$

($0 < i < n$ için $a_i \geq 1$ ve son terim $a_n > 1$ olmak üzere)

Sürekli kesir ağacı



Sürekli kesir ağacı

Örnek

$$[0, 1_4, 2] = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{8}{13}$$

İkili kodlama

$$\sigma : \mathbf{Q} \cap (0, 1) \rightarrow 0\{0, 1\}^*$$

şöyle tanımlanır: $p/q = [0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ ise ($a_n > 1$)

- ▶ n çiftse $\implies \sigma(p/q) = 0^{a_1}1^{a_2} \dots 1^{a_n-1}$
- ▶ n tekse $\implies \sigma(p/q) = 0^{a_1}1^{a_2} \dots 0^{a_n-1}$

($0\{0, 1\}^*$ ifadesi, $\{0, 1\}$ alfabesinde 0 ile başlayan tüm kelimelerin kümesini göstermek üzere)

Şimdi

0 : ↑ ve **1** : ↓

diyelim.

Spin zincirleri: Knauf modeli

Ağaçta d derinliğinde 2^{d+1} kesir bulunur.

Derinliği d olan p/q kesirine, $\sigma(p/q)$ **spin dizilişi** iliştiirelim. Bu dizilişin (=kesirin) enerjisi $E(p/q) = \log q$ olsun.

Zemin hâli: $\sigma(\frac{1}{1}) = 11 \cdots 1$ (enejisi= $\log 1 = 0$),

En uyarık hâl: $\sigma(\frac{F_k}{F_{k+1}}) = 1010 \cdots$ (enerjisi= $\log F_{k+1}$).

(F_k Fibonacci sayısı: $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$).

$\sigma(p/q)$ dizilişinin ihtimali

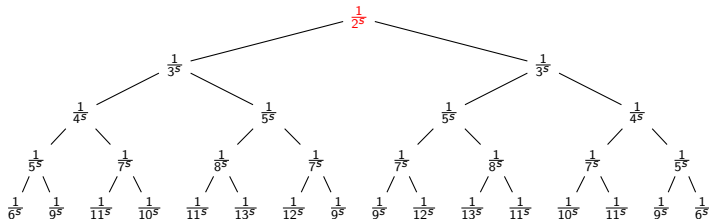
$$\text{PROB}(p/q) = \frac{e^{-E(p/q)/T}}{Z_k(s)} = \frac{q^{-1/T}}{Z_k(s)} = \frac{q^{-s}}{Z_k(s)}$$

Taksim fonksiyonu (=normalizasyon çarpanı)

$$Z_k(s) = \sum_{\text{derinlik}(\frac{p}{q}) \leq k+1} q^{-s}$$

Spin zincirleri: Knauf modeli

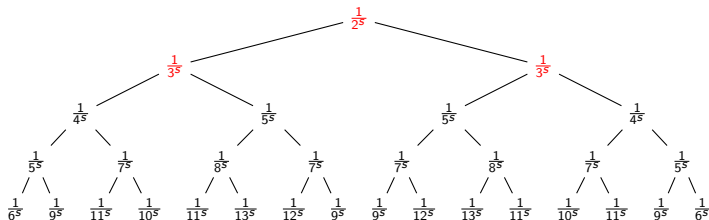
“Canonical ensemble” ($k=0$)



$$Z_0(s) = \frac{1}{2^s}$$

Spin zincirleri: Knauf modeli

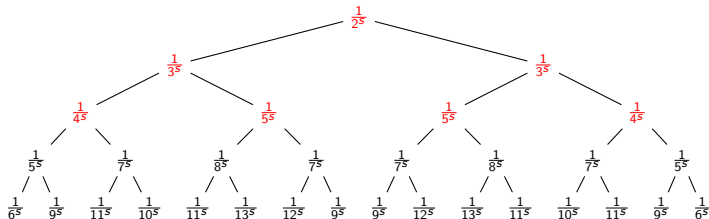
“Canonical ensemble” ($k=1$)



$$Z_1(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}$$

Spin zincirleri: Knauf modeli

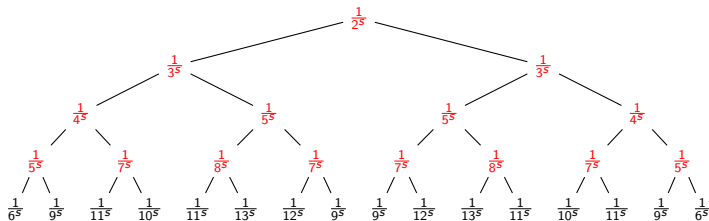
“Canonical ensemble” ($k=2$)



$$Z_2(s) = \frac{1}{5^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s}$$

Spin zincirleri: Knauf modeli

“Canonical ensemble” ($k=3$)



$$Z_3(s) = Z_2(s) + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{5^s}$$

...

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k(s) = ?$$

Spin zincirleri: Knauf modeli

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \quad \Re s > 2 \quad (\text{Knauf, 1993})$$

Knauf'un bu modeli kurma saikası (ve muhtemelen Ali Özlük'ün konuya dahil olma sebebi)

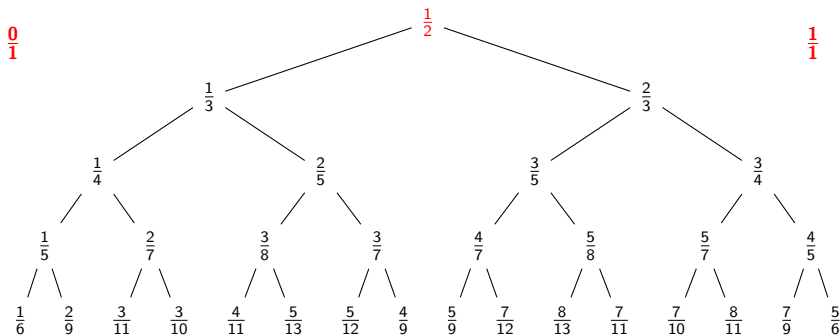
Özel durum $s = 2$ için şu biliniyor:

$$Z_k(2) \sim \frac{k}{2 \log k}, \quad k \rightarrow \infty \quad (\text{Isola, 2005})$$

Serbest enerji $s < 2$ için gerçel analitiktir:

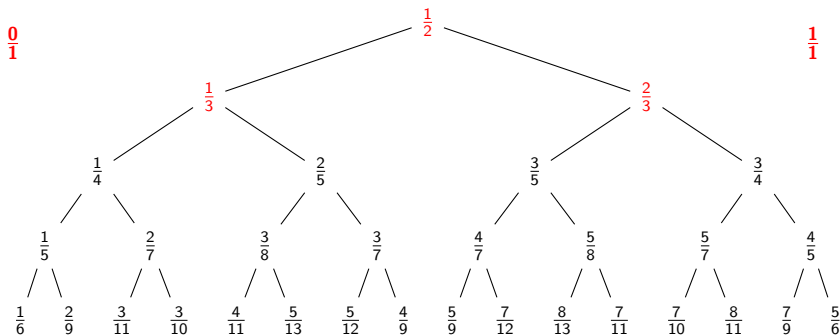
$$f(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log Z_k(s)}{k} \sim \frac{2-s}{-\log(2-s)} \quad s \rightarrow 2^- \quad (\text{Prellberg, 1992})$$

Fiala-Kleban-Özlük modeli (veya iz modeli)



$$\mathcal{F}_1 := \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$$

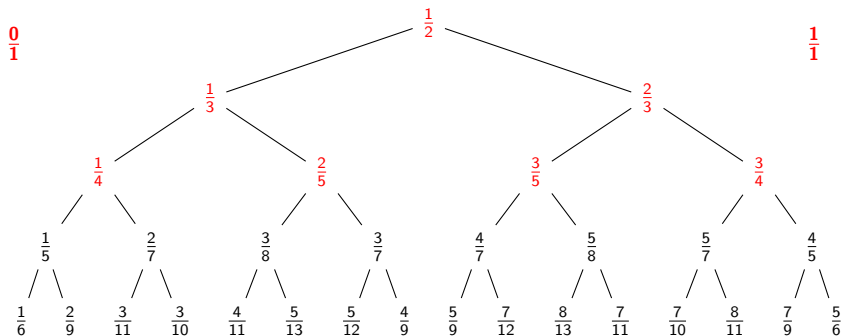
Kleban-Özlük modeli (veya iz modeli)



$$\mathcal{F}_2 := \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

Kleban-Özlük modeli (veya iz modeli)

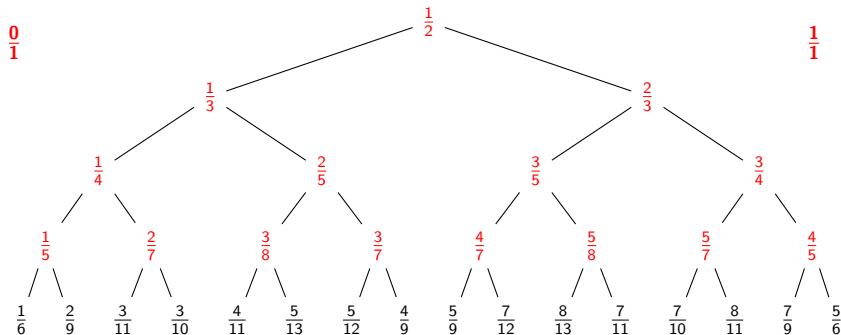
Farey dizisi



$$\mathcal{F}_3 := \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

Kleban-Özlük modeli (veya iz modeli)

Farey dizisi



$$\mathcal{F}_4 := \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

Kleban-Özlük modeli (veya iz modeli)

Farey dizisi

Bazı bilgiler ...

- ▶ \mathcal{F}_k dizisinde 2^{k+1} adet kesir vardır.
- ▶ \mathcal{F}_k 'daki konumu çift sayı olan kesirler \mathcal{F}_{k-1} 'den Farey toplamıyla elde edilir:

$$\mathcal{F}_k := \left(\frac{n_k^j}{d_k^j} \right)_{j=1}^{2^{k+1}} \implies \frac{n_{k+1}^{2j}}{d_{k+1}^{2j}} = \frac{n_k^j}{d_k^j} \oplus \frac{n_k^{j+1}}{d_k^{j+1}}$$

- ▶ \mathcal{F}_k 'daki konumu tek sayı olan kesirler doğrudan \mathcal{F}_{k-1} 'den gelir:

$$\frac{n_{k+1}^{2j+1}}{d_{k+1}^{2j+1}} = \frac{n_k^j}{d_k^j}$$

Kleban-Özlük modeli (veya iz modeli)

Farey dizisi

$$\mathcal{F}_4 := \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 1$$

Gözlem \mathcal{F}_k 'dan ardışık iki kesir aldığımızda durum daima böyledir, yani

$$\begin{pmatrix} n_{k+1}^{j+1} & n_k^j \\ d_{k+1}^{j+1} & d_k^j \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$$

Şimdi $n_{k+1}^{j+1}/d_{k+1}^{j+1}$ kesirinin sürekli kesir açılımı $[0, a_1, a_2, \dots, a_\ell]$ ($a_\ell > 1$) olsun. O halde

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} n_{k+1}^{j+1} & n_k^j \\ d_{k+1}^{j+1} & d_k^j \end{pmatrix} = A^{a_1} B^{a_2} A^{a_3} \dots$$

Kleban-Özlük modeli (veya iz modeli)

Modelin taksim fonksiyonu

$$Z_k^{Tr}(s) = \sum_{j=1}^{2+k} \frac{1}{\left(n_{k+1}^{j+1} + d_k^j\right)^s},$$

burada paydadaki ifade, yukarıdaki matrisin izidir:

$$n_{k+1}^{j+1} + d_k^j = Tr \begin{pmatrix} n_{k+1}^{j+1} & n_k^j \\ d_{k+1}^{j+1} & d_k^j \end{pmatrix}$$

- ▶ Fiala-Kleban-Özlük bu iki modelin serbest enerjisinin aynı olduğunu göstermiştir.
- ▶ 1-boyutlu olmasına rağmen yerel olmayan etkileşimler sayesinde faz değişimi vardır.
- ▶ Bu modellere yol açan Hamiltonyenler (bildiğim kadarıyla) yazılmamıştır.
- ▶ Fizik ve sayılar kuramında yeni neticelere yol açmıştır (Boca vs).

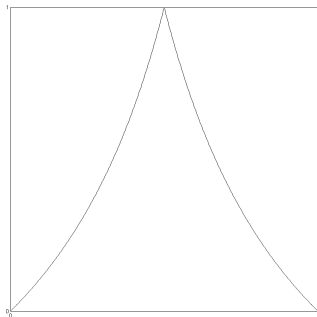
İKİNCİ KISIM: DİNAMİK



Farey tasviri

Birim aralıktan kendine giden Farey tasviri T_{Farey} şöyle tanımlanır:


$$T_{Farey}(x) = \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} & \text{ise } \frac{x}{1-x} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 & \text{ise } \frac{1-x}{x} \end{cases}$$



Farey tasviri

Sürekli kesirlere etkisi


Farey Tasviri

[ 4, 1, 1, 6, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasviri

Sürekli kesirlere etkisi


T_{Farey}

[ 3, 1, 1, 6, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasviri

Sürekli kesirlere etkisi


T_{Farey}

[ 2, 1, 1, 6, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasviri

Sürekli kesirlere etkisi


T_{Farey}

[ 1, 1, 1, 6, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasviri

Sürekli kesirlere etkisi


T_{Farey}

[ 1, 1, 6, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasviri

Sürekli kesirlere etkisi


T_{Farey}

[1, 6, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasviri

Sürekli kesirlere etkisi


T_{Farey}

[6, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasviri

Sürekli kesirlere etkisi

T_{Farey}

[ 5, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasviri

Transfer operatörü

Buradan kolayca görüldüğü üzere,

$$T_{Farey}^{-k}\{0\} = \mathcal{F}_k, \text{ } k\text{ncı Farey dizisi}$$

Farey tasvirinin Perron-Frobenius transfer operatörü şöyle yazılır:

$$(\mathcal{L}_s^{Farey}\psi)(y) = \frac{1}{(1+x)^{2s}} \left\{ \psi\left(\frac{x}{1+x}\right) + \psi\left(\frac{1}{1+x}\right) \right\}$$

Bu operatör için, $\rho(x) := 1/x$ fonksiyonunun $s = 1$ durumunda bir sabit ölçü olduğu kolayca doğrulanabilir. Lakin bu ölçü mutlak sürekli olsa da sonlu değildir ve sonsuz ergodik kuramının alanına girer. Burada

$$\psi_1(x) := \frac{x}{1+x} \text{ ve } \psi_2(x) := \frac{1}{1+x}$$

fonksiyonları, T_{Farey}^{-1} 'in iki dalıdır. Bunların ilkinde Farey tasvirinin “kaotik” dalı, ikincisinde de “kesintili” (intermittent) dalı adı verilir.

Farey tasviri

Transfer operatörü

Transfer operatörü ile Knauf modeli arasında şöyle bir irtibat mevcuttur: Operatörü Lebesgue ölçüsüne tekrar tekrar uygulayıp elde edilen ölçünün sıfır noktasındaki değerini hesaplarsak


$$((\mathcal{L}_s^{\text{Farey}})^k \mathbf{1})(0) = Z_k(2s) = \sum_{\text{derinlik}(\frac{p}{q}) \leq k+1} q^{-2s}$$

taksim fonksiyonunu elde ederiz.

Diğer spin modellerine dinamik yaklaşım bulunamamıştır.

Farey tasvirinin ivmelenmesi

Gauss tasviri

[ 1, 1, 1, 6, 13, 2, 2, 7, ...]


Farey tasvirinin ivmelenmesi

Gauss tasviri

$$[\text{Pac-Man}, 1, 1, 6, 13, 2, 2, 7, \dots]$$

Farey tasvirinin ivmelenmesi

Gauss tasviri

[ 1, 6, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasvirinin ivmelenmesi

Gauss tasviri

$$[\text{Pac-Man}, 6, 13, 2, 2, 7, \dots]$$

Farey tasvirinin ivmelenmesi

Gauss tasviri

$$[\text{Pac-Man}, 13, 2, 2, 7, \dots]$$

Farey tasvirinin ivmelenmesi

Gauss tasviri

$$[\text{☹}, 2, 2, 7 \dots]$$

Farey tasvirinin ivmelenmesi

Gauss tasviri

$$[\text{Pac-Man}, 2, 7 \dots]$$


Farey tasvirinin ivmelenmesi

Gauss tasviri

$$[\text{Pac-Man}, 7 \dots]$$


Farey tasvirinin ivmelenmesi

Fibonacci tasviri

[1, 1, 1, 6, 13, 2, 2, 7, ...]


Farey tasvirinin ivmelenmesi

Fibonacci tasviri

[5, 13, 2, 2, 7, ...]


Farey tasvirinin ivmelenmesi

Fibonacci tasviri

[4, 13, 2, 2, 7, ...]


Farey tasvirinin ivmelenmesi

Fibonacci tasviri

[ 3, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasvirinin ivmelenmesi

Fibonacci tasviri

[2, 13, 2, 2, 7, ...]

Farey tasvirinin ivmelenmesi

Fibonacci tasviri

$$[\text{C}, 1, 13, 2, 2, 7, \dots]$$


Farey tasvirinin ivmelenmesi

Fibonacci tasviri

$$[\text{◀}, 12, 2, 2, 7, \dots]$$

Farey tasvirinin ivmelenmesi

Fibonacci tasviri

[11, 2, 2, 7, ...]

Farey tasvirinin ivmelenmesi

Fibonacci tasviri

$$[\text{◀}, 10, 2, 2, 7, \dots]$$

Farey tasvirinin ivmelenmesi

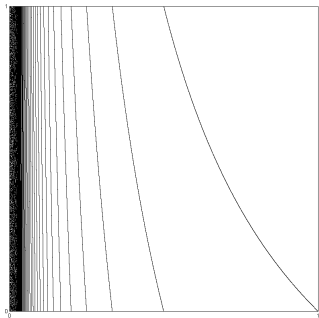
Fibonacci tasviri

$$[\text{C}, 9, 2, 2, 7, \dots]$$

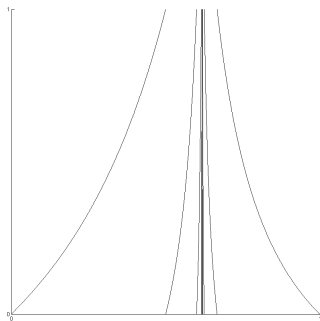
Farey tasvirinin ivmelenmesi

Fibonacci tasviri

$$[\text{C}, 8, 2, 2, 7, \dots]$$



Gauss tasviri



Fibonacci tasviri

Transfer operatörleri

Fibonacci ve Gauss tasvirlerinin dinamiği arasında sıkı bir irtibat vardır
(Stefano Isola vd)

Fibonacci tasvirinin transfer operatörü

$$(\mathcal{L}_s^{Fib} \psi)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(F_{k+1}y + F_k)^{2s}} \psi \left(\frac{F_k y + F_{k-1}}{F_{k+1}y + F_k} \right) \quad (1)$$

Gauss tasvirinin transfer operatörü

$$(\mathcal{L}_s^{Gauss} \psi)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^{2s}} \psi \left(\frac{1}{k+x} \right) \quad (2)$$

Transfer operatörleri

Fibonacci ve Gauss tasvirlerinin dinamiği arasında sıkı bir irtibat vardır
(Stefano Isola vd)

Fibonacci tasvirinin transfer operatörü

$$(\mathcal{L}_s^{Fib}\psi)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(F_{k+1}y + F_k)^{2s}} \psi\left(\frac{F_k y + F_{k-1}}{F_{k+1}y + F_k}\right) \quad (1)$$

Gauss tasvirinin transfer operatörü

$$(\mathcal{L}_s^{Gauss}\psi)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^{2s}} \psi\left(\frac{1}{k+x}\right) \quad (2)$$

Sabit ölçüler ve zeta fonksiyonları

Her iki ivmelenmenin de sabit ölçüsü bilinmektedir:

$$T_{Fibonacci} \leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} \text{ (sonsuz ölçü)}, \quad T_{Gauss} \leftrightarrow \frac{1}{x+1} \text{ (sonlu ölçü)},$$

Zeta fonksiyonları (yani taksim fonksiyonlarının analogları),
Lebesgue ölçüsünün transfer operatörü altındaki görüntüsünün sıfır noktasındaki değeridir:

$$T_{Fibonacci} \leftrightarrow (\mathcal{L}_s^{Fib} \psi)(\mathbf{1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^s} \quad (\text{"Fibonacci zeta"})$$

$$T_{Gauss} \leftrightarrow (\mathcal{L}_s^{Gauss} \psi)(\mathbf{1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\text{"Riemann zeta"})$$

Üç terimli fonksiyonel denklem

Fibonacci tasvirinin transfer operatörünün özfonksiyonları şu üç-terimli fonksiyonel denklemi sağlarlar

$$\psi(y) = \frac{1}{y^{2s}} \psi\left(\frac{y+1}{y}\right) + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{(y+1)^{2s}} \psi\left(\frac{y}{y+1}\right) \quad (3)$$

ki bu denklem Lewis ve Zagier tarafından incelenen denkleme denktir.

Gauss tasvirinin transfer operatörünün özfonksiyonlarının sağladığı üç-terimli fonksiyonel denklem de buna denktir.

Bu noktada dinamik sistemlerle sayılar teorisi (Maass formları, Selberg zeta fonksiyonları, vs) temas etmektedir.

Başka ivmelenmeler

Gauss ve Fibonacci tasvirlerinin ortak bir genellemesi vardır.

Şayet $\alpha = [0, n_1, n_2, \dots]$ and $x = [0, m_1, m_2, \dots]$ dersek, bu tasvirler şöyle tanımlanır:

$$\mathbb{T}_\alpha(x) = \begin{cases} [0, m_{k+1}, m_{k+2}, m_{k+3}, \dots] & n_k > m_k (*) \\ [0, m_k - n_k, m_{k+1}, m_{k+2}, \dots] & n_k < m_k (**) \end{cases} \quad (4)$$

Özel hallerde bu aile Gauss ve Fibonacci tasvirlerine indirgenir:

$$\mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_{Gauss}, \quad \mathbb{T}_{\Phi^*} = \mathbb{T}_{Fibonacci}$$

Bu tasvirlerin her biri, Farey tasvirinin birer ivmelenmesidir.

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{⦿}1, 1, 1, 6, 13, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{Pac-Man}, 1, 1, 6, 13, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{◐}1, 6, 13, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{◐}, 6, 13, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{Pac-Man}, 4, 13, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{P}, 2, 13, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{C}11, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{Pac-Man}, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{◐}, 7, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{◐}, 5, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{◐}3, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{P}1, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{P}, 2, 2, 7, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

Örnek

$\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ için $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri:

$$[\text{⦿}5, \dots]$$

Başka ivmelenmeler

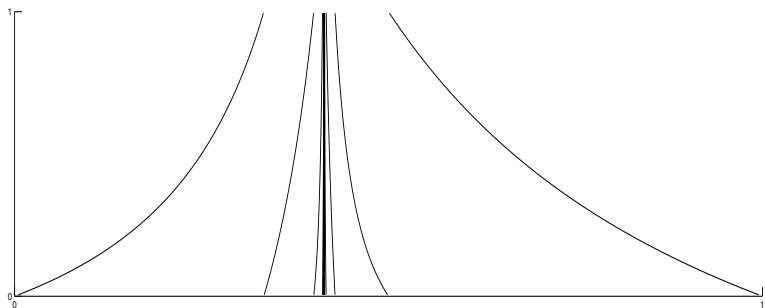
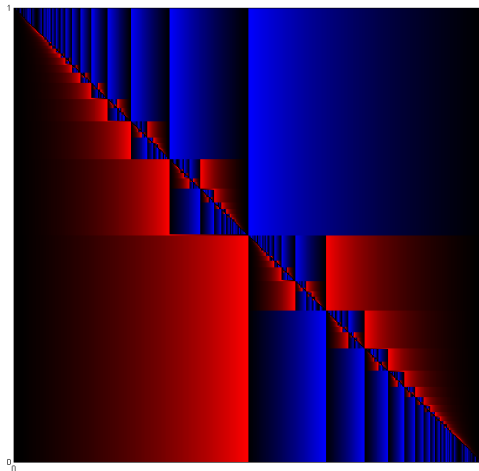


Figure: Plot of $\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$

$T_\alpha(x)$ ailesi

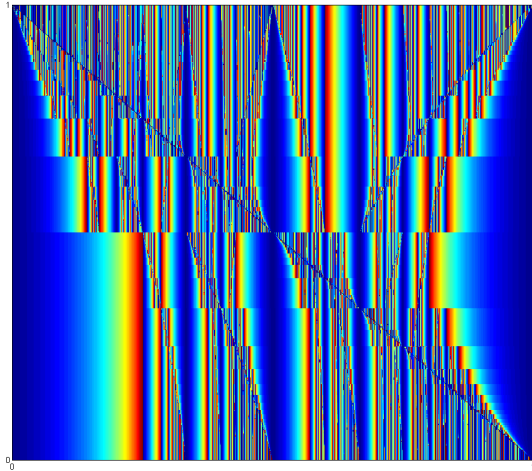


$T_\alpha(x)$ tasvirinin, α ve x 'in fonksiyonu olarak çizimi.

Koyuluk $T_\alpha(x)$ değeriyle orantılıdır.

Şekildeki simetri $T_{1-\alpha}(1-x) = T_\alpha(x)$ eşitliğini yansıtmaktadır.

Dynamics



$T_\alpha(x)$ 'nın üçüncü tekrarı.

Transfer operatörleri

$\mathbb{T}_\alpha(x)$ tasvirinin transfer operatörü şöyledir: $(\mathcal{L}_{s,\alpha}\psi)(y) =$

$$-\frac{1}{y^{2s}}\psi\left(\frac{1}{y}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} \left| \frac{d}{dy}[0, n_1, \dots, n_{k-1}, i+y] \right|^s \psi[0, n_1, \dots, n_{k-1}, i+y]$$

Bu operatörün öz fonksiyonları şu fonksiyonel denklemi sağlar:

$$\psi(y) - \psi(1+y) + \frac{1}{y^{2s}} \left\{ \psi\left(\frac{1}{y}\right) - \psi\left(1 + \frac{1}{y}\right) \right\} = \\ \frac{1}{\lambda(1+y)^{2s}} \left\{ \psi\left(\frac{y}{1+y}\right) + \psi\left(\frac{1}{1+y}\right) \right\}$$

Eşitliğin sağ tarafı Lewis üç terimli fonksiyonel denklemi, sol tarafı da Farey tasviri için Isola'nın incelediği transfer operatörüdür.

Transfer operatör örneği

Örnek

$\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ tasviri için ($\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, 2, \dots]$)

$$\mathcal{L}_{s,\alpha}\psi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(P_{i+1}y + P_i)^s} \psi\left(\frac{P_i y + P_{i-1}}{P_{i+1}y + P_i}\right) + \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(P_{j+1}y + P_{j+1} + P_j)^s} \psi\left(\frac{P_j y + P_j + P_{j-1}}{P_{j+1}y + P_{j+1} + P_j}\right),$$

Burada $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \dots$ dizisi, $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ and $P_k = 2P_{k-1} + P_{k-2}$ ile tanımlanan Pell dizisini göstermektedir.

Sabit ölçü örneği

Örnek

$\mathbb{T}_{\sqrt{2}-1}$ için bir mutlak sürekli sabit ölçü:

$$\psi(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2iy)(1+2y+2iy)} - \frac{1}{(y+2i+3)(y+2i+2)}.$$

Soru: Genel \mathbb{T}_{α} tasvirlerinin sabit ölçüleri nedir?

ÜÇÜNCÜ KISIM

Jimm'in tanımı ve fonksiyonel denklemler

Jimm'in tanımı ve fonksiyonel denklemler

Notation

Her $x \in \mathbf{R}$ sürekli kesir şeklinde yazılabilir:

$$[n_0, n_1, n_2, \dots] = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

($n_0 \in \mathbf{Z}$, $n_i \in \mathbf{Z}_{>0}$ for $i > 0$), şayet x irrasyonelse bu sürekli kesir yegânedir.

Notation

1_k ile k uzunluğundaki $1, 1, \dots, 1$ dizisini gösteriyoruz.

Jimm'in tanımı ve fonksiyonel denklemler

Notation

Her $x \in \mathbf{R}$ sürekli kesir şeklinde yazılabilir:

$$[n_0, n_1, n_2, \dots] = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

($n_0 \in \mathbf{Z}$, $n_i \in \mathbf{Z}_{>0}$ for $i > 0$), şayet x irrasyonelse bu sürekli kesir yegânedir.

Notation

1_k ile k uzunluğundaki $1, 1, \dots, 1$ dizisini gösteriyoruz.

\mathbf{R} 'den \mathbf{R} 'ye 'tekil' bir fonksiyon ζ (Jimm) tanımlayalım:

Tanım

$$\zeta([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

('Tekil fonksiyon'dan ne kastettiğimiz ileride açığa kavuşacak.)

İleride açığa kavuşacağı üzere, bu çevrim

- ▶ Farey tasvirini kendine eşler: $\zeta T_{Farey} \zeta = T_{Farey}$ ancak iki dalını birbirleriyle değiştirir.
- ▶ Gauss tasvirini Fibonacci tasvirine eşler: $\zeta T_{Gauss} \zeta = T_{Fibonacci}$
- ▶ T_α ailesini kendine eşler.

Tanım (Tekrar)

$$\zeta([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

Examples

$$\zeta([3, 3, 3, \dots]) = [1_{3-1}, 2, 1_{3-2}, 2, 1_{3-2}, 2, \dots] = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

$$\zeta([5, 5, 5, \dots]) = [1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, \dots]$$

Göstereceğiz ki bu çok özel bir fonksiyondur, zira:

- ▶ $\text{PGL}_2(\mathbf{Z})$ modüler grubunun dış otomorfizminden kaynaklanır,
- ▶ h.h. türevlenir olup türevi h.h. sıfırdır,
- ▶ bazı çok özel fonksiyonel denklemleri sağlar,
- ▶ kuadratik irrasyoneller kümesini korur,
- ▶ kuadratik eşlenik alma (Galois etkisi) ile yer değiştirir (komüt eder),
- ▶ Lebesgue ölçüsünün gizli bir simetrisini verir,
- ▶
- ▶ bir 'gerçek' modüler formdur.

Tanım (tekrar)

$$\zeta([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

Bu tanım sadece $n_k \geq 2$ için çalışır. $n_k = 2$ durumunda da çalıştırmak için, şu kural kullanılır:

KURAL I

$$\dots, n, 1_0, m, \dots = \dots, n, m, \dots$$

Örnekler

$$\zeta([2, 2, 2, \dots]) = [1, 2, 1_0, 2, 1_0, 2, \dots] = [1, 2, 2, 2, \dots]$$

$$\zeta([2, 3, 2, 3, \dots]) = [1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, \dots]$$

Tanım (tekrar)

$$\zeta([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

Bu tanım sadece $n_k \geq 2$ için çalışır. $n_k = 2$ durumunda da çalıştırmak için, şu kural kullanılır:

KURAL I

$$\dots, n, 1_0, m, \dots = \dots, n, m, \dots$$

Örnekler

$$\zeta([2, 2, 2, \dots]) = [1, 2, 1_0, 2, 1_0, 2, \dots] = [1, 2, 2, 2, \dots]$$

$$\zeta([2, 3, 2, 3, \dots]) = [1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, \dots]$$

Tanım (tekrar)

$$\zeta([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

$n_k = 1$ durumunda çalıştırmak için ise, şu kural kullanılır:

KURAL II

$$\dots, n, 1_{-1}, m, \dots = \dots, n + m - 1, \dots$$

Örnekler

$$\begin{aligned}\zeta([1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]) &= \\ [1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_3, 1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_3, 1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_3, \dots] &= \\ &= [3, 3, 3, \dots]\end{aligned}$$

daha önce görmüş müydük?

Tanım (tekrar)

$$\zeta([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

$n_k = 1$ durumunda çalıştırmak için ise, şu kural kullanılır:

KURAL II

$$\dots, n, 1_{-1}, m, \dots = \dots, n + m - 1, \dots$$

Örnekler

$$\begin{aligned}\zeta([1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]) &= \\ [1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_3, 1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_3, 1_0, \underbrace{2, 1_{-1}, 2}_3, \dots] &= \\ &= [3, 3, 3, \dots]\end{aligned}$$

daha önce görmüş müydük?

Definition (Recall)

$$\zeta([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

Example

$$\begin{aligned} \zeta([\dots, 7, \textcolor{blue}{1}, \textcolor{red}{1}, \textcolor{green}{1}, \textcolor{magenta}{1}, 13, \dots]) &= \\ [\dots 1_5, 2, \underbrace{\textcolor{blue}{1}_{-1}, 2}_{}, \textcolor{red}{1}_{-1}, 2, \textcolor{green}{1}_{-1}, 2, \textcolor{magenta}{1}_{-1}, 2, 1_{11}, \dots] &= \\ [\dots 1_5, 3, \underbrace{\textcolor{red}{1}_{-1}, 2}_{}, \textcolor{green}{1}_{-1}, 2, \textcolor{magenta}{1}_{-1}, 2, 1_{11}, \dots] &= \\ [\dots 1_5, 4, \underbrace{\textcolor{green}{1}_{-1}, 2}_{}, \textcolor{magenta}{1}_{-1}, 2, 1_{11}, \dots] &= \\ [\dots 1_5, 5, \underbrace{\textcolor{magenta}{1}_{-1}, 2}_{}, 1_{11}, \dots] &= \\ [\dots 1_5, 6, 1_{11}, \dots] \end{aligned}$$

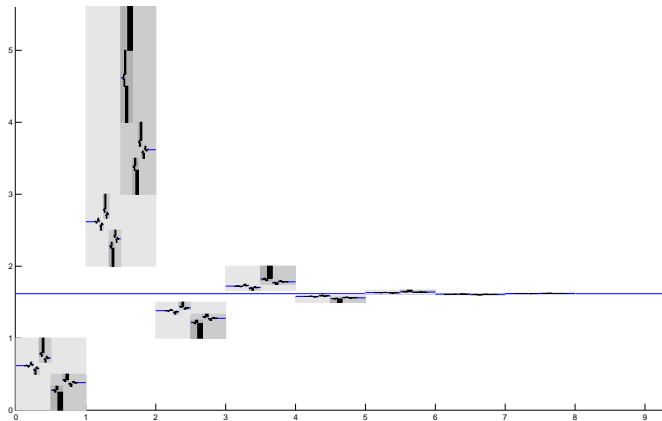
Tanım (tekrar)

$$\zeta([n_0, n_1, n_2, \dots]) = [1_{n_0-1}, 2, 1_{n_1-2}, 2, 1_{n_2-2}, \dots]$$

Bu iki kuralla birlikte $\zeta: \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ üzerinde iyi tanımlı olur ve bir “çevrimdir” (envolüsyon).

$$\zeta(\zeta(x)) = x$$

ζ 'in grafiğini şöyle çizilir (graf koyu kutucukların içinde yer alır)



Jimm'in bazı süreklilik özellikleri

Gösterilebilir ki

- ▶ ζ fonksiyonu $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ üzerinde süreklidir.
- ▶ \mathbf{Q} üzerinde sıçrama süreksizlikleri vardır.
- ▶ ζ hemen her yerde türevlenirdir.
- ▶ türevi hemen her yerde sıfıra eşittir.
- ▶ \mathbf{Q} üzerine doğal bir genişlemesi vardır.

Jimm'in bazı süreklilik özellikleri

Gösterilebilir ki

- ▶ ζ fonksiyonu $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ üzerinde süreklidir.
- ▶ \mathbf{Q} üzerinde sıçrama süreksizlikleri vardır.
- ▶ ζ hemen her yerde türevlenirdir.
- ▶ türevi hemen her yerde sıfıra eşittir.
- ▶ \mathbf{Q} üzerine doğal bir genişlemesi vardır.

Jimm'in bazı süreklilik özellikleri

Gösterilebilir ki

- ▶ ζ fonksiyonu $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ üzerinde süreklidir.
- ▶ \mathbf{Q} üzerinde sıçrama süreksizlikleri vardır.
- ▶ ζ hemen her yerde türevlenirdir.
- ▶ türevi hemen her yerde sıfıra eşittir.
- ▶ \mathbf{Q} üzerine doğal bir genişlemesi vardır.

Jimm'in bazı süreklilik özellikleri

Gösterilebilir ki

- ▶ ζ fonksiyonu $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ üzerinde süreklidir.
- ▶ \mathbf{Q} üzerinde sıçrama süreksizlikleri vardır.
- ▶ ζ hemen her yerde türevlenirdir.
- ▶ türevi hemen her yerde sıfıra eşittir.
- ▶ \mathbf{Q} üzerine doğal bir genişlemesi vardır.

Jimm'in bazı süreklilik özellikleri

Gösterilebilir ki

- ▶ ζ fonksiyonu $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ üzerinde süreklidir.
- ▶ \mathbf{Q} üzerinde sıçrama süreksizlikleri vardır.
- ▶ ζ hemen her yerde türevlenirdir.
- ▶ türevi hemen her yerde sıfıra eşittir.
- ▶ \mathbf{Q} üzerine doğal bir genişlemesi vardır.

Şimdi şu örneği ele alalım:

Örnek

$$\begin{aligned}\zeta(1 + [3, 3, 3 \dots]) &= \zeta([4, 3, 3 \dots]) = [1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, \dots] \\ &= 1 + \frac{1}{\underbrace{[1, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]}_{=\zeta([3, 3, 3, \dots])}}\end{aligned}$$

Daha genel olarak şu denklem geçerlidir:

Fonksiyonel Denklem (*)

$$\zeta(1 + x) = 1 + \frac{1}{x}$$

(*) fonksiyonel denklemi aşağıdaki şu daha temel fonksiyonel denklemlerden türetilebilir:

$$\zeta(\zeta(x)) = x$$

$$\zeta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\zeta(x)}$$

$$\zeta(-x) = -\frac{1}{\zeta(x)}$$

$$\zeta(1-x) = 1 - \zeta(x)$$

Fonksiyonel denklemlerin bir de iki-değişkenli ifadesi mevcuttur.

$$\zeta(x) = y \iff \zeta(y) = x$$

$$xy = 1 \iff \zeta(x)\zeta(y) = 1$$

$$x + y = 0 \iff \zeta(x)\zeta(y) = -1$$

$$x + y = 1 \iff \zeta(x) + \zeta(y) = 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \iff \frac{1}{\zeta(x)} + \frac{1}{\zeta(y)} = 1$$

$\implies \zeta$, harmonik sayı çiftlerini korur.

$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ 'nin şu Möbius grubuna izomorf olduğunu hatırlayalım:

$$\left\{ \frac{px + q}{rx + s} \mid ps - qr = \pm 1, p, q, r, s \in \mathbf{Z} \right\}$$

Fact

Şu üç envölüsyon, $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ grubunu üretir:

$$U_X := \frac{1}{X}, \quad V_X := -X, \quad K_X := 1 - X$$

(+ bazı bağıntılar)

Fonksiyonel denklemler şu şekilde yazılır

$$\zeta U = U\zeta, \quad \zeta K = K\zeta, \quad \zeta V = UV\zeta$$

\implies ki bu da ζ 'in $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$ 'nin **Dyer dış otomorfizmi** olduğunu gösterir .

En genel fonksiyonel denklem şu şekilde yazılır:

$$\zeta(Mx) = \zeta(M)\zeta(x), \quad M \in \text{PGL}_2(\mathbf{Z})$$

(burada $\zeta(M)$, M 'nin Dyer otomorfizmi altındaki görüntüsünü göstermektedir.).

Bu denkleme göre ζ “bir çeşit” **kovaryant** fonksiyondur.

Note: Şayet

$$f\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{pf(z)+1}{rf(z)+s} \quad \forall \frac{pz+q}{rz+s} \in \text{PGL}_2(\mathbf{Z})$$

ise, f 'ye katı kovaryant (veya equivariant) denir. Bu türden üst yarı sahada analitik fonksiyonlar, modüler formlar kullanarak elde edilebilir.

Ölgu I

\mathbb{Z} nihayetinde devirli sürekli kesirleri yine nihayetinde devirli sürekli kesirlere götürür.



\mathbb{Z} kuadratik irrasyonelleri yine kuadratik irrasyonellere götürür.
yani \mathbb{Z} "gerçel-çarpım kümesini" muhafaza eder.

(iz, norm, işaret gibi değerlere saygı duymaz)

Örnekler

$$\zeta(\sqrt{2}) = \zeta([1, 2, 2, \dots]) = 1 + \sqrt{2}$$

Ama genelde bu kadar basit değildir:

$$\zeta(\sqrt{11}) = \frac{15 + \sqrt{901}}{26}, \quad \zeta(-\sqrt{11}) = \frac{15 - \sqrt{901}}{26}$$

Ölgu I

ζ nihayetinde devirli sürekli kesirleri yine nihayetinde devirli sürekli kesirlere götürür.



ζ **kuadratik irrasyonelleri** yine **kuadratik irrasyonellere** götürür.
yani ζ "gerçel-çarpım kümesini" muhafaza eder.

(iz, norm, işaret gibi değerlere saygı duymaz)

Örnekler

$$\zeta(\sqrt{2}) = \zeta([1, 2, 2, \dots]) = 1 + \sqrt{2}$$

Ama genelde bu kadar basit değildir:

$$\zeta(\sqrt{11}) = \frac{15 + \sqrt{901}}{26}, \quad \zeta(-\sqrt{11}) = \frac{15 - \sqrt{901}}{26}$$

Ölgu I

ζ nihayetinde devirli sürekli kesirleri yine nihayetinde devirli sürekli kesirlere götürür.



ζ **kuadratik irrasyonelleri** yine **kuadratik irrasyonellere** götürür.
yani ζ "gerçel-çarpım kümesini" muhafaza eder.

(iz, norm, işaret gibi değerlere saygı duymaz)

Örnekler

$$\zeta(\sqrt{2}) = \zeta([1, 2, 2, \dots]) = 1 + \sqrt{2}$$

Ama genelde bu kadar basit değildir:

$$\zeta(\sqrt{11}) = \frac{15 + \sqrt{901}}{26}, \quad \zeta(-\sqrt{11}) = \frac{15 - \sqrt{901}}{26}$$

Olgu II

ζ sürekli kesirlerin sonlarına saygı duyar (yani x, y 'nin sürekli kesirleri nihayetinde kesişiyorsa, $\zeta(x)$ ve $\zeta(y)$ için de aynısı doğrudur).



ζ , $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$ -etkisine saygı duyar (yani x and y aynı $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$ -yörüngesindeyse, $\zeta(x)$ ve $\zeta(y)$ de aynı yörüngededir.)

Daha kesin bir dille ifade etmek gerekirse

$$\zeta(Mx) = \zeta(M)\zeta(x) \quad M \in \text{PGL}_2(\mathbb{Z}), x \in \mathbb{R}$$

ve dolayısıyla

$$x = My \implies \zeta(x) = \zeta(M)\zeta(y), \quad \zeta(M) \in \text{PGL}_2(\mathbb{Z})$$

Ölgu II

ζ sürekli kesirlerin sonlarına saygı duyar (yani x, y 'nin sürekli kesirleri nihayetinde kesişiyorsa, $\zeta(x)$ ve $\zeta(y)$ için de aynısı doğrudur).



ζ , $\text{PGL}_2(\mathbf{Z})$ -**etkisine saygı duyar** (yani x and y aynı $\text{PGL}_2(\mathbf{Z})$ -yörüngesindeyse, $\zeta(x)$ ve $\zeta(y)$ de aynı yörüngededir.)

Daha kesin bir dille ifade etmek gerekirse

$$\zeta(Mx) = \zeta(M)\zeta(x) \quad M \in \text{PGL}_2(\mathbf{Z}), x \in \mathbf{R}$$

ve dolayısıyla

$$x = My \implies \zeta(x) = \zeta(M)\zeta(y), \quad \zeta(M) \in \text{PGL}_2(\mathbf{Z})$$

Olgu I&II birlikte şunu gösterir

Olgu III

ζ , \mathbf{R} 'deki “bozuk rank-2 kafeslerin modül uzayının” bir envolüsyonunu dayatır, bu esnada “gerçel-çarpım” mahallini (locus) korur.

$$\zeta \circ \mathbf{R}/\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z})$$

Yani, Olgular bize diyor ki

ζ aslında bir modüler fonksiyondur.

Dahası da var:

Örnek IV

ζ , kuadratik irrasyoneller üzerindeki Galois etkisiyle değişmelidir, yani

$$\zeta(a + \sqrt{b}) = A + \sqrt{B}$$

$$\iff$$

$$\zeta(a - \sqrt{b}) = A - \sqrt{B}$$

Şimdi iki-değişkenli fonksiyonel denklemlere dönelim:

$$xy = 1 \iff \zeta(x)\zeta(y) = 1$$

$$x + y = 0 \iff \zeta(x)\zeta(y) = -1$$

$$x + y = 1 \iff \zeta(x) + \zeta(y) = 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \iff \frac{1}{\zeta(x)} + \frac{1}{\zeta(y)} = 1$$

ve $x = a + \sqrt{b}$ bir kuadratik irrasyonel olmak üzere, $y = \bar{x}$ yazalım:

$$x\bar{x} = 1 \iff \zeta(x)\zeta(\bar{x}) = 1$$

$$x + \bar{x} = 0 \iff \zeta(x)\zeta(\bar{x}) = -1$$

$$x + \bar{x} = 1 \iff \zeta(x) + \zeta(\bar{x}) = 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\bar{x}} = 1 \iff \frac{1}{\zeta(x)} + \frac{1}{\zeta(\bar{x})} = 1$$

Sayılar Kuramından Hatırlatma

Şayet $x = a + \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbf{Q}$, $b > 0$) ise

x 'in **normu** $N(x) := x\bar{x} \iff N(a + \sqrt{b}) = a^2 - b$

x 'in **izi** $T(x) := x + \bar{x} \iff T(a + \sqrt{b}) = 2a$

Örnek

$$N(1 + \sqrt{2}) = -1, \quad T(1 + \sqrt{2}) = 2$$

Şunu elde ederiz:

Mütekabiliyet I

$$x\bar{x} = 1 \iff \zeta(x)\zeta(\bar{x}) = 1; \text{ i.e. } N(x) = 1 \iff N(\zeta(x)) = 1 \\ \implies$$

ζ , kuadratik sayı cisimlerindeki **norm+1 ünitlerin** bir envolüsyonuna kısıtlanır.

$$\zeta \circ \{a + \sqrt{a^2 - 1} \mid 1 < a \in \mathbf{Q}\}$$

ve şunu elde ederiz:

Correspondence II

$$x + \bar{x} = 0 \iff \zeta(x)\zeta(\bar{x}) = -1; \text{ i.e. } T(x) = 0 \iff N(\zeta(x)) = -1.$$

$\implies \zeta$, **positive rasyonellerin kareköklerinin kümesiyle** kuadratik sayı cisimlerindeki **norm-1 ünitlerin kümesi** arasında bir eşleme kurar.

$$\zeta : \{\sqrt{q} \mid q \in \mathbf{Q}\} \rightarrow \{a + \sqrt{a^2 + 1} \mid a \in \mathbf{Q}\}$$

Bu mütakabiliyetler bariz olmaktan çok uzaktır:

Mütakabiliyet II-Örnek

$$\sqrt{\frac{39}{17}} = [1, \overline{1, 1, 16, 1, 1, 2}] \implies$$

$$\zeta\left(\sqrt{\frac{39}{17}}\right) = [4, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4}] = A \implies$$

$$N(A) = N\left(\frac{7663 + \sqrt{70845893}}{3482}\right) = -1.$$

Mütekabiliyet II-Başka örnekler

$$\begin{aligned}\sqrt{N} &\rightarrow \zeta(\sqrt{N}) \\ \sqrt{3} &\rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{13} + 3) \\ \sqrt{5} &\rightarrow \frac{1}{3}(\sqrt{10} + 1) \\ \sqrt{6} &\rightarrow \frac{1}{14}(\sqrt{221} + 5) \\ \sqrt{7} &\rightarrow \frac{1}{6}(\sqrt{37} + 1) \\ \sqrt{8} &\rightarrow \frac{1}{4}(\sqrt{17} + 1) \\ \sqrt{10} &\rightarrow \frac{1}{7}(\sqrt{65} + 4) \\ \sqrt{11} &\rightarrow \frac{1}{26}(\sqrt{901} + 15) \\ \sqrt{12} &\rightarrow \frac{1}{34}(\sqrt{1517} + 19) \\ \sqrt{13} &\rightarrow \frac{1}{3}(\sqrt{13} + 2) \\ \sqrt{14} &\rightarrow \frac{1}{5}(\sqrt{34} + 3) \\ \sqrt{15} &\rightarrow \frac{1}{18}(\sqrt{445} + 11) \\ \sqrt{17} &\rightarrow \frac{1}{19}(\sqrt{442} + 9)\end{aligned}$$

Mütekabiliyet III

$$x + y = 1 \iff \zeta(x) + \zeta(\bar{x}) = 1; \text{ i.e. } T(x) = 1 \iff T(\zeta(x)) = 1$$

$$\zeta \circ \{ \frac{1}{2} + \sqrt{a} \mid 0 < a \in \mathbf{Q} \}$$

Şunu elde ederiz:

Mütekabiliyet IV

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\bar{x}} = 1 \iff \frac{1}{\zeta(x)} + \frac{1}{\zeta(\bar{x})} = 1; \text{ i.e. } T\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \iff T\left(\frac{1}{\zeta(x)}\right) = 1$$

$$T(x) = N(x) \iff T(\zeta x) = N(\zeta x)$$

Bir başka deyişle,

$$\zeta \circ \{a + \sqrt{a^2 - 2a} \mid 1 < a \in \mathbf{Q}\}$$

... ve bu türden başka mütekabiliyetler de mevcuttur.

Daha yüksek mertebeden cebirsel sayılar hakkında ne söylenebilir?

Tahmin

Şayet x cebirsel ve mertebesi > 2 ise, $\zeta(x)$ aşkındır. ¹

¹Testing the transcendence conjecture of Jimm and its continued fraction statistics
(joint with H. Ayrar, to appear)

Daha yüksek mertebeden cebirsel sayılar hakkında ne söylenebilir?

Tahmin

Şayet x cebirsel ve mertebesi > 2 ise, $\zeta(x)$ aşkındır. ¹

¹Testing the transcendence conjecture of Jimm and its continued fraction statistics
(joint with H. Ayrar, to appear)

$$\begin{aligned}\zeta(\sqrt[3]{2}) &= \zeta([1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, \dots]) \\ &= [2, 1, 3, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1_6, 3, 1_{12}, 3, 1_8, 2, 3, 1, 1, 2, \dots] \\ &= 2.784731558662723 \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(\pi) &= \zeta([3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \dots]) = \\ &\quad [1_2, 2, 1_5, 2, 1_{13}, 3, 1_{290}, 5, 3, \dots] \\ &= 1.7237707925480276079699326494931025145558144289232 \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(e) &= \zeta([2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]) = \\ &\quad [1, 3, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, \dots, \overline{4, 1_{2n}}] \\ &= 1.3105752928466255215822495496939143349712038085627 \dots\end{aligned}$$

(Bu sayıları PSLQ-algoritmasını muhtelif sabit kümeleri üzerinde çalıştırarak tanımayı denedik ama başarısız olduk.)

Teşekkür

- ▶ Sinan Sertöz
- ▶ Stefano Isola
- ▶ Peter Kleban

Atıflar

- ▶ TÜBİTAK GRANT NO: 115F412
- ▶ Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques binaires définies ou indéfinies. M. H. Poincaré.
- ▶ Mayer, Dieter H. "Transfer Operators, the Selberg Zeta Function and the Lewis-Zagier Theory of Period Functions." (2012)
- ▶ Isola, Stefano. "Continued fractions and dynamics." (2014)
- ▶ Isola, Stefano. "From infinite ergodic theory to number theory (and possibly back)." (2011)
- ▶ Alkauskas, Giedreus "The moments of Minkowski question mark function: the dyadic period function", Glasg. Math. J. 52 (1) (2010), 41-64.
- ▶ Denjoy, Arnaud. "Sur une fonction réelle de Minkowski." J. Math. Pures Appl 17.9 (1938): 105.
- ▶ *Jimm, a Fundamental Involution.* (with H. Ayrál) arXiv:1501.03787
- ▶ *On the involution of the real line induced by Dyer's outer automorphism of $PGL(2, \mathbb{Z})$.* (with H. Ayrál) arXiv:1605.03717
- ▶ *A subtle symmetry of Lebesgue's measure.* (with H. Ayrál) arXiv:1605.07330
- ▶ *Testing the transcendence conjecture of Jimm and its continued fraction statistics.* (with H. Ayrál, to appear)
- ▶ *An involution of reals, discontinuous on rationals and whose derivative vanish almost everywhere.* (with H. Ayrál, to appear)
- ▶ Some deformations of Lebesgue's measure on the boundary of the Farey tree (with H. Ayrál, in progress)
- ▶ Dynamics of a family of continued fraction maps (with H. Ayrál, in progress)
- ▶ Conumerator and the conominator, in progress.

MERI