复习

1.1 随机事件的概率

主要内容：随机事件的关系与运算, 概率的加法公式, 古典概率模型, 条件概率的定义, 乘法公式, 全概率公式, 贝叶斯公式, 随机事件的独立性.

1.1.1 随机事件

关系	记号	概率论含义
包含	$A \subset B$	A 发生则 B 一定发生
相等	$A = B$	A 与 B 必定同时发生
互斥	$A \cap B = \varnothing$	A 与 B 不会同时发生
对立	$A = \overline{B}$	A 与 B 有且仅有一个发生

运算	记号	概率论含义
并	$A \cup B$	A 与 B 至少一个发生
积	AB	A 与 B 都发生
差	$A - B$	A 发生但 B 不发生
补	$\overline{A}$	A 不发生

1.1.2 随机事件的概率

定义：如果一个随机试验具有以下特点：

1. 样本空间只含有限多个样本点；
2. 各样本点出现的可能性相等,

则称此随机试验是古典型的. 此时对每个事件 $A \subset \Omega$, 其概率

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 的样本点数}}{\text{样本点总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

称为事件 A 的古典概率.

古典概型是关于试验的结果为有限个, 且每个结果出现的可能性相同的概率模型. 一个直接的推广是：保留等可能性, 而允许试验具有无限多个结果的.

定义： 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度 (面积或体积或度数) 成比例, 则称这样的概率模型为几何概率模型.

几何概型中, 事件 A 的概率：

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

定义 **1.** 设 Ω 是样本空间, 对每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$ 与之对应. 若函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件：

1. 非负性：对任意事件 A, 均有 $P(A) \geq 0$；
2. 规范性：$P(\Omega) = 1$；
3. 可列加性: 若事件序列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 两两互斥, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_n(A_i)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率 *(probability)*.

概率可加性的常用公式：

1. $P(\varnothing)=0$.
2. 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥, 则
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$
特别地, 若两个事件 A,B 互斥, 则
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

概率可加性的常用公式：

3. 对任意事件 A, 有
$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right).$$
4. 若事件 $A\subset B$, 则
$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$
特别地, $A\subset B \Longrightarrow P(A)\leq P(B)$.
5. 对任意两个事件 A,B, 有
    - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.
    - $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

1.1.3 条件概率

定义：设 $P(B)>0$, 称
$$P(A|B):=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生条件下, 事件 A 的条件概率. 在古典概率模型中,
$$P(A|B)=\frac{\text{事件 } AB \text{ 包含的样本点数}}{\text{事件 } B \text{ 包含的样本点数}}=\frac{n(AB)}{n(B)}.$$

由条件概率的定义, 如果 $P(B)>0$, 则

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

类似地, 如果 $P(A)>0$, 则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

以上等式称为乘法公式.

定义：设 Ω 为某试验的样本空间, $B_1,B_2,\cdots$ 为一组事件. 如果以下条件成立：

1. $B_1,B_2,\cdots$ 两两互斥；
2. $\cup_i B_i=\Omega$,

则称 $B_1,B_2,\cdots$ 为样本空间 Ω 的一个划分（分割）, 或称 $B_1,B_2,\cdots$ 为一个完备事件组. 对任意满足 $0<P(B)<1$ 的事件 B, B 与 $\overline{B}$ 构成一个完备事件组.

全概率公式：如果 $B_1,B_2,\cdots$ 构成一个完备事件组, 且都有正概率, 则对任意事件 A 有

$$\boxed{P(A)=\sum_i P(B_i)P(A|B_i).}$$

特殊情况：如果事件 B 满足 $0<P(B)<1$, 则对事件 A, 有

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

贝叶斯定理：如果 $B_1,B_2,\cdots$ 构成一个完备事件组, 且都有正概率, 则对任意正概率的事件 A 有

$$\boxed{P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)},\quad i=1,2,\cdots}$$

1.1.4 事件的独立性

定义：若两事件 A、B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称事件 A、B 相互独立. 实际意义：若 $P(B) > 0$, 则上式等价于

$$P(A|B) = P(A),$$

即事件 A 的概率不受事件 B 发生与否的影响.

性质：若事件 A 与 B 相互独立, 则

$$\overline{A} \text{ 与 } B\text{、}A \text{ 与 } \overline{B}\text{、}\overline{A} \text{ 与 } \overline{B}$$

也是相互独立的.

小注: 若 A 与 B 相互独立, 且 B 与 C 相互独立, 则 A 与 C 未必相互独立.

定义. 称 $n(n \geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立, 如果对任意一组指标

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \quad (k \geq 2)$$

都有

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

性质. 设 $n(n \geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立, 则

1. 其中任意 $k(k \geq 2)$ 个事件也是相互独立的.

2. 将若干个 A_i 用 $\overline{A_i}$ 替换后, 得到的新事件集也相互独立.

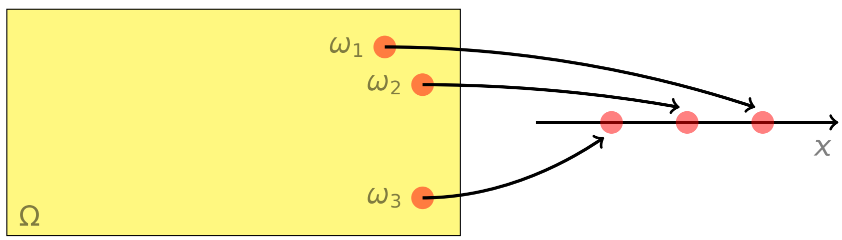
3. 特别地, 我们有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P\left(\overline{A}_1\right) \cdots P\left(\overline{A}_n\right) \\ &= 1 - \prod_1^n [1 - P(A_i)] \end{aligned}$$

1.2 一维随机变量及其分布

定义 **1.** 设 $X = X(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的实值函数, 称 $X = X(\omega)$ 为随机变量.

下图给出样本点 ω 与实数 $X = X(\omega)$ 对应的示意图.



随机变量一般用大写英文字母 X、Y、Z 或小写希腊字母 ξ、η、γ 来表示.

一般地, 若 I 是一个实数集, $\{X \in I\}$ 记为事件 B, 即

$$B = \{\omega | X(\omega) \in I\},$$

则

$$P\{X \in I\} = P(B) = P\{\omega | X(\omega) \in I\}.$$

按照随机变量可能取值的情况，可以把它们分为两类：离散型随机变量和非离散型随机变量, 而非离散型随机变量中最重要的是连续型随机变量.

定义 **2.** 如果随机变量的全部可能取的值只有有限个或可列无限多个, 则称这种随机变量为离散型随机变量.

一般地, 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 x_k $(k = 1, 2, ...)$, X 取各个可能值的概率, 即事件 $\{X = x_k\}$ 的概率为

$$P\{X = x_k\} = p_k,\ k = 1, 2, ...,\tag{1}$$

称 (1) 式为离散型随机变量 X 的分布律或概率分布.

分布律也可以用下面的表格来表示：

X	x_1	x_2,	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2,	$\cdots$	p_n	$\cdots$

由概率的定义, 式 p_k 应满足以下条件：

1. $p_k \geq 0, k = 1, 2 \ldots;$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

1.2.1 常用离散型分布

定义：若随机变量 X 只能取 0 或 1, 其概率分布为：

$$P\{X=1\}=p,\ P\{X=0\}=1-p \quad (0<p<1)$$

则称 X 服从参数为 p 的两点分布, 记为

$$X \sim b(1,p).$$

定义：如果随机变量 X 服从以下分布律

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

其中 $0<p<1, 0 \leq k \leq n$, 则称 X 服从参数为 n,p 的二项分布. 记为

$$X \sim b(n,p).$$

定义：如果随机变量 X 服从以下分布律

$$P\{X=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad m=0,1,\cdots$$

其中 $\lambda>0$, 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为

$$X \sim \pi(\lambda).$$

定理 (泊松定理)**.** 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 在每次试验中发生概率为 p_n （注意这与实验的次数 n 有关）, 如果 $n \to \infty$ 时, $np_n \to \lambda$ (λ 为常数), 则对任意给定的非负整数 k, 有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

1.2.2 随机变量的分布函数

定义：对任何随机变量 X, 称函数

$$F(x) := P\{X \le x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

为 X 的分布函数. 设 $F(x)$ 为某随机变量的分布函数, 则其有以下性质：

1. 广义单增：对任意实数 $a < b$, 总有 $F(a) \le F(b)$；

2. $0 \le F(x) \le 1$, 且 $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$

离散型随机变量 X 的概率分布 $p_k = P\{X = x_k\}$ 满足

1. $p_k \ge 0, \quad k = 1, 2, \cdots$

2. $\sum_k p_k = 1$

3. $F(x) = \sum_{x_k \le x} p_k$

1.2.3 连续型随机变量及其概率密度函数

设 X 为连续性随机变量, 则对每个实数 a, 总有

$$P\{X = a\} = 0.$$

任意区间上概率的计算：由概率密度函数的定义可知,

$$P\{X \in (a, b]\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

上式中的区间 $(a, b]$ 改为 $(a, b), [a, b)$ 或 $[a, b]$ 后等式仍成立.

连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足

1. $f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

定义：若随机变量 X 有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad (a < b)$$

则称 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布, 记为

$$X \sim U[a,b].$$

定义：如果随机变量 X 有以下概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

其中 $\lambda > 0$, 则称 X 服从参数为 λ 的指数分布. 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

定义：如果随机变量 X 有以下概率密度

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

其中 μ, σ 为常数且 $\sigma > 0$, 则称 X 服从正态分布. 简记为

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

称 $N(0,1)$ 为标准正态分布, 并简写 $\varphi_{0,1}(x)$ 为 $\varphi(x)$.

正态分布的分布函数为

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt,$$

该函数不是初等函数. 标准正态分布的分布函数简记为 $\Phi(x)$.

标准正态分布的分布函数的性质

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

服从正态分布随机变量的标准化：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

1.2.4 随机变量函数的分布

设离散型随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

令 $Y = g(X)$, 则 Y 也是一个离散型随机变量, 其分布可按如下步骤求得

1. 根据函数关系列出 Y 的所有可能值；
2. 对 Y 的每个可能值 y, $P\{Y = y\}$ 等于所有满足 $g(x_k) = y$ 的 p_k 之和.

对连续型随机变量 X, 求 $Y = g(X)$ 的密度函数的基本方法是

1. 根据函数关系先求 Y 的分布函数
$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$$
2. 然后对 $F_Y(y)$ 求导可得 Y 的概率密度.

定理 **1.** 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$; 函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$) 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] \cdot |h'(y)|, & y \in (\alpha, \beta) \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

其中 $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数,

$$\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty)), \ \beta = \max(g(-\infty), g(+\infty)).$$

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b$, 则 $Y \sim N\left(a\mu + b, (a\sigma)^2\right)$.

1.3 多维随机变量及其分布

1.3.1 随机向量的联合分布

定义：设 (X, Y) 为二维随机向量, 称二元函数

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

为 (X, Y) 的联合分布函数. 联合分布函数的性质：

1. $F(x, y)$ 对每个自变量都是广义单增的；
2. $0 \le F(x, y) \le 1$；
3. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$；

二维离散型随机向量 (X, Y) 的联合概率分布 $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ 满足

1. $p_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots$
2. $\sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1$；

二维连续型随机向量 (X, Y) 的联合概率密度 $f(x, y)$ 满足

1. $f(x, y) \ge 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$；
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 1$；

二维连续型随机向量 (X, Y) 的联合分布函数

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s, t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s,$$

若联合概率密度 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续, 则有

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

对任意的平面区域 D, 有

$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint_{(x,y)\in D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

1.3.2　随机向量的边缘分布

二维随机向量 (X,Y) 作为一个整体, 有联合分布函数 $F(x,y)$, 其分量 X 与 Y 都是随机变量, 有各自的分布函数, 分别记成 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 称为 X 和 Y 的边缘分布函数. 边缘分布由联合分布完全确定:

$$F_X(x) = F(x,+\infty), \qquad F_Y(y) = F(+\infty,y).$$

二维离散型随机向量 (X,Y) 的边缘概率分布为

$$p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}, \qquad i = 1,2,\cdots$$

$$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}, \qquad j = 1,2,\cdots$$

二维连续型随机向量 (X,Y) 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

1.3.3　随机向量的条件分布

当 $p_{\cdot j} > 0$ 时, $Y = y_j$ 时 X 的条件概率分布为

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

当 $p_{i\cdot} > 0$ 时, $X = x_i$ 时 Y 的条件概率分布为

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

若 $f_Y(y) > 0$, 在 $Y = y$ 条件下, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

若 $f_X(x) > 0$, 在 $X = x$ 条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

定义. 若 $f_Y(y) > 0$, 则称

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(s|y)\,\mathrm{d}s.$$

为 $Y = y$ 条件下, X 的条件分布函数.

定义. $f_X(x) > 0$, 则称

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(t|x)\,\mathrm{d}t.$$

为 $X = x$ 条件下 Y 的条件分布函数.

1.3.4 随机变量的独立性

二维离散型随机向量 (X, Y) 相互独立的充要条件为

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

对所有的 i, j 都成立.

二维连续型随机向量 (X,Y) 相互独立的充要条件为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

对几乎所有的实数 x,y 成立.

1.3.5 随机向量函数的分布

设离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

令 $Z=g(X,Y)$, 则 Z 也是一个离散型随机变量, 其分布可按如下步骤求得

1. 根据函数关系列出 Z 的所有可能值;

2. 对 Z 的每个可能值 z, $P\{Z=z\}$ 等于所有满足 $g(x_i,y_j)=z$ 的 p_{ij} 之和.

对连续型随机变量 (X,Y), 求 $Z=g(X,Y)$ 的密度函数的基本方法是

1. 根据函数关系先求 Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$$

2. 然后对 $F_Z(z)$ 求导可得 Z 的概率密度.

1.3.6 常用的随机向量

定义：设 D 是平面上的有界区域, 其面积为 d, 若二维随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{d} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

则称 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布.

若 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布, 则 (X,Y) 落在某一区域 A 内的概率

$$\begin{aligned} P\{(X,Y)\in A\} &= \iint_A f(x,y)dxdy \\ &= \iint_{A\cap D} \frac{1}{d}dxdy \\ &= \frac{S}{d} \end{aligned}$$

其中 S 为 $A\cap D$ 的面积.

定理：若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且

$$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2),\ i=1,2,\cdots,n$$

则对不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,

$$a_1X_1+\cdots+a_nX_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right).$$

定理：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $aX+b\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$.

1.4 随机变量的数字特征

主要内容：期望的定义：离散型、连续型, 随机变量的函数的期望, 期望、方差、协方差的性质, 相关系数, 常见分布的数字特征, 大数定律

1.4.1 数学期望

定义：设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \qquad k=1,2,\cdots.$$

若级数

$$\sum_k x_k p_k$$

绝对收敛, 则称其和为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$.

定义：设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛, 则称此积分为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$.

定理：设 X 为随机变量, $Y=g(X)$, 则

1. 若 X 为离散型随机变量, 分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \qquad k=1,2,\cdots.$$

则

$$E(Y)=\sum_k g(x_k)p_k.$$

定理（续）：

2. 若 X 为连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$, 则

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

设 $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为随机变量, c, k 为常数, 则有

1. $E(c)=c$；
2. $E(kX)=kE(X)$；
3. $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$；推论：$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

4. 若 X_1, X_2 相互独立, 则有

$$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2).$$

推论：若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则有

$$E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)=\prod_{k=1}^{n} E(X_k)$$

注：如果没有相互独立这一条件, 上式一般不成立!

1.4.2 方差与标准差

定义：设 X 是一随机变量, 若 $X-E(X)$ 平方的期望存在, 则称该期望为 X 的方差, 记为 $D(X)$（或 $\mathrm{Var}(X)$）, 即

$$D(X) := E[(X-E(X))^2].$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差. 方差的常用计算公式：

$$D(X) = E(X^2) - [EX]^2.$$

设 $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为随机变量, c, k 为常数, 则有

1. $D(c) = 0$, $D(X+c) = D(X)$;
2. $D(X) \geq 0$, 且等式成立当且仅当 X 几乎必然为常数;
3. $D(kX) = k^2 D(X)$;

注：若事件 A 的概率为 1, 则称该事件几乎必然成立.

4. 若 X_1, X_2 相互独立, 则有

$$D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2).$$

推论：若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则有

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k)$$

注：如果没有相互独立这一条件, 上式一般不成立.

1.4.3 协方差与相关系数

定义. 定义：对于二维随机向量 (X, Y), 称

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

为 X 与 Y 的协方差*(Covariance)*.

由定义直接可得：任意随机变量与其自身的协方差就是该随机变量的方差, 即

$$\operatorname{Cov}(X,X)=D(X).$$

设 X,Y,Z 为随机变量, a,b,c,d 为常数, 则有

1. $\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{Cov}(Y,X)$；
2. $\operatorname{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\operatorname{Cov}(X,Y)$；
3. $\operatorname{Cov}(X,Y+Z)=\operatorname{Cov}(X,Y)+\operatorname{Cov}(X,Z)$；
4. $\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$；
5. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{Cov}(X,Y)$.

推论. 两随机变量相互独立, 则协方差等于零；反之未必成立.

定义. 对于二维随机变量 (X,Y), 如果两个变量的方差都不为零, 称

$$\rho_{X,Y}:=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\operatorname{Cov}(X^*,Y^*)$$

为 X 与 Y 的相关系数*(Correlation)*, 也可以记为 $\rho(X,Y)$.

性质. 相关系数表示随机变量之间的线性相关程度：

1. $|\rho_{X,Y}|\le 1$.
2. $\rho_{X,Y}=-1$ 当且仅当 $Y=aX+b$, $a<0$.
3. $\rho_{X,Y}=1$ 当且仅当 $Y=aX+b$, $a>0$.

定义. 若随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}=0$, 则称 X 与 Y 线性互不相关, 简称不相关.

- $\rho_{X,Y}=-1$ 当且仅当 $Y=aX+b$, $a<0$；
- $\rho_{X,Y}=1$ 当且仅当 $Y=aX+b$, $a>0$.

性质. 相互独立 $\Longrightarrow$ 不相关；反之未必成立.

1.4.4 矩协方差矩阵

设 X 和 Y 是随机变量, 若

$$\mu_k = E\left(X^k\right), k = 1, 2, \cdots$$

存在, 称它为 X 的 k 阶原点矩, 简称 k 阶矩. 若

$$\nu_k = E\left\{[X - E(X)]^k \right|, k = 2, 3, \cdots$$

存在, 称它为 X 的 k 阶中心矩. 若

$$E\left(X^k Y^l\right), k, l = 1, 2, \cdots$$

存在, 称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩. 若

$$E\left\{[X - E(X)]^k [Y - E(Y)]^l\right\}, k, l = 1, 2, \cdots$$

存在, 称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

1.4.5 n 维正态分布

n 维正态随机变量具有以下四条重要性质:

1. n 维正态变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的每一个分量 $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 都是正态变量; 反之, 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态变量, 且相互独立, 则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维正态变量.
2. n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是 X_1, $X_2, \cdots, X_n$ 的任意线性组合 $l_1X_1 + l_2X_2 + \cdots + l_nX_n$ 服从一维正态分布 (其中 $l_1, l_2, \cdots$, l_n 不全为零).
3. 若 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 是 $X_j (j = 1, 2, \cdots ,, n$) 的线性函数, 则 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ 也服从多维的正态分布. 这一性质称为正态变量的线性变换不变性.
4. 设 $(X_i, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 则"$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立" 与"X_1, $X_2, \cdots, X_n$ 两两不相关" 是等价的.

1.5 大数定律和中心极限定理

主要内容：切比雪夫不等式, 大数定律, 中心极限定理

1.5.1 大数定律

切比雪夫不等式：设随机变量 X 有期望和方差, 则对于任给的 $\varepsilon>0$, 有

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

即

$$P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

定义 **1.** 设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,\cdots$ 是一个随机变量序列, a 是一个常数, 若对任何正数 ε, 有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-a|<\varepsilon\}=1$$

则称序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,\cdots$ 依概率收敛于 a, 记为 $Y_n\xrightarrow{P}a$

依概率收敛的序列有如下性质:

- 设 $X_n\xrightarrow{P}a,Y_n\xrightarrow{P}b$, 又设 $g(x,y)$ 在点 (a,b) 连续, 则

$$g(X_n,Y_n)\xrightarrow{P}g(a,b)$$

定理 **1** (伯努利大数定律)**.** 设试验 E 是可重复进行的, 事件 A 在每次试验中出现的概率 $P(A)=p$ $(0<p<1)$, 将试验独立地进行 n 次, 用 n_A 表示其中事件 A 出现的次数, 则对于任意正数 ε 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

定理 2 (切比雪夫大数定律的特殊情况). 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 且具有相同的数学期望和方差: $E(X_k)=\mu$, $D(X_k)=\sigma^2 (k=1,2,\cdots)$ 作前 n 个随机变量的算术平均 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ 则对于任意正数 ε, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}P\{\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}\\=&\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)\right|<\varepsilon\right\}=1\end{aligned}$$

定理 3 (辛钦大数定律). 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立, 服从同一分布, 具有数学期望 $E(X_k)=\mu(k=1,2,\cdots)$, 则对于任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

1.5.2 中心极限定理

常用结论：大量的同分布随机变量的和、平均值近似地服从正态分布.

定理 4 (独立同分布情形的中心极限定理). 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望和方差 : $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2>0 (i=1,2,\cdots)$, 则随机变量之和 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的标准化变量

$$Y_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足:

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\Phi(x)$$

该定理表明：n 很大时，Y_n 近似服从标准正态分布.

定理 **5** (棣莫弗一拉普拉斯中心极限定理)**.** 设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $n,p(0<p<1)$ 的二项分布, 则对于任意 x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\Phi(x)$$

当 n 充分大时, 对任意 $a<b$, 有

$$\begin{aligned} P\{a\leqslant\eta_n\leqslant b\}&=P\left\{\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant\frac{\eta_u-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}\\ &\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\end{aligned}$$

1.6 样本及抽样分布

主要内容：常用统计量, 三大统计分布：χ^2 分布、t 分布、F 分布, 正态分布常用统计量的分布

定义：称随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 构成一个（简单）随机样本, 如果这些随机变量

1. 相互独立；
2. 服从相同的分布.

它们共同服从的分布称为总体分布；样本个数 n 称为样本容量.

定义：对样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 称

$$\overline{X}:=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$

为样本均值.

定义：对样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 称

$$S^2:=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

为样本方差；称

$$S:=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

为样本标准差.

样本方差的性质：

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right).$$

χ^2 分布的性质：

1. 若 X 服从标准正态分布, 则 X^2 服从 1 个自由度的 χ^2 分布, 即
$$X^2 \sim \chi_1^2.$$
2. 可加性：设 $Y_1 \sim \chi_m^2$, $Y_2 \sim \chi_n^2$, 且两者相互独立, 则
$$Y_1 + Y_2 \sim \chi_{m+n}^2.$$

定理：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 都服从标准正态分布, 则

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

服从 n 个自由度的 χ^2 分布, 即

$$\chi^2 \sim \chi_n^2.$$

定理：设两个随机变量 X, Y 相互独立, 并且

$$X \sim N(0,1), \qquad Y \sim \chi_n^2.$$

则

$$T := \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从具有 n 个自由度的 t 分布.

定理：设两个随机变量 Y_1, Y_2 相互独立, 并且

$$Y_i \sim \chi_{n_i}^2, \qquad i = 1, 2.$$

则

$$F := \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2} \sim F_{n_1,n_2}.$$

F 分布的性质：

1. 若 $F \sim F_{m,n}$, 则
$$\frac{1}{F} \sim F_{n,m}.$$
2. $F_{m,n}(1-\alpha) = \dfrac{1}{F_{n,m}(\alpha)}$.
3. 若 $X \sim t_n$, 则
$$X^2 \sim F_{1,n}.$$

定理 1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本. 则 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立, 且有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \qquad \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1},$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2, \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

定理 2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别是取自两个相互独立的正态总体
$$N(\mu_1, \sigma^2), \qquad N(\mu_2, \sigma^2)$$
的样本. 则
$$U := \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim N(0,1),$$
其中 $\overline{X}$, $\overline{Y}$ 分别是两个样本各自的均值.

定理 3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别是取自两个相互独立的正态总体
$$N(\mu_1, \sigma^2), \qquad N(\mu_2, \sigma^2)$$
的样本. 则
$$T := \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2},$$
其中 $\overline{X}$, $\overline{Y}$, S_1^2, S_2^2 分别是两个样本各自的均值及方差.

定理 4. 设 $X_1, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, \cdots, Y_n$ 分别是取自两个相互独立的正态总体
$$N(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

的样本. 则

$$F := \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\mu_1\right)^2 \Big/ \left(m\sigma_1^2\right)}{\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\mu_2\right)^2 \Big/ \left(n\sigma_2^2\right)} \sim F_{m,n}$$

定理 **5.** 设 $X_1,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,\cdots,Y_n$ 分别是取自两个相互独立的正态总体

$$N(\mu_1,\sigma_1^2), \qquad N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

的样本. 则

$$F := \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{m-1,n-1}.$$

1.7 参数估计

1.7.1 参数估计

主要内容：矩估计, 极大似然估计, 估计量的无偏性和方差的比较

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$, 其中 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 为待估计的 k 个未知参数, 假设 X 的 $1\sim k$ 阶原点矩都存在, 则有

$$\mu_i = E\left(X^i\right) = \mu_i(\theta_1,\cdots,\theta_k) \quad i=1,2,\cdots,k$$

取

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^i \quad i=1,2,\cdots,k$$

得方程组

$$\mu_i(\theta_1,\cdots,\theta_k) = \hat{\mu}_i \quad i=1,2,\cdots,k$$

解得

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n) \quad i=1,2,\cdots,k$$

称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩法估计量简称矩估计

例子**.** 当总体中只有一个参数时, 矩估计即是用样本均值估计总体期望.

例子**.** 当总体中有两个或以上的参数时, 总体期望与方差的矩估计分别为

$$\hat{\mu}=\overline{X},\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

若总体为离散型, 其分布律为

$$P\{X=x\}=p\left(x,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right),$$

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本, 其观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ · 记

$$A=\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\},$$

则事件 A 发生的概率为

$$L\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=\prod_{i=1}^{n}p\left(x_i,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$$

设连续型总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\ \theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k).$$

则样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 在观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 处的联合概率密度为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\ \theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta_1,\cdots,\theta_k).$$

此时 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 被看做固定但是未知的参数.

如果将观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 看成固定的, 将

$$L(x_1,\cdots,x_n;\ \theta_1,\cdots,\theta_k)$$

看做 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数, 则该函数被称为似然函数.

如果似然函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ \theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

在

$$(\theta_1^*,\theta_2^*,\cdots,\theta_k^*)$$

处达到最大值, 则称上述参数为未知参数的极大似然估计.

求极大似然估计的一般方法:

1. 写出似然函数 L;

2. 求似然函数的对数 $\ln L$；

3. 对 $\ln L$ 求导（偏导）并令导数等于零, 得到似然方程组；

4. 解方程组得到 $\ln L$ 的驻点, 判断该驻点是否最大值点；

5. 将最大值点表达式中的 x_i 换为 X_i, 就得到参数的极大似然估计.

1.7.2 估计量的评选标准

估计量的评选标准：

- 无偏性, 即 $E(\hat{\theta}) = \theta$
- 有效性, 即方差越小的估计量越有效
- 相合性, 即 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ