2019 年全国硕士研究生入学统一考试 (数学 I)

一、选择题（1-8 小题．每小题 4 分，共 32 分．）

1. 当 $x\to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=(\quad)$．

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, & x\le 0 \\ x\ln x, & x>0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 $(\quad)$．

(A) 可导点，极值点　(B) 不可导的点，极值点

(C) 可导点，非极值点　(D) 不可导点，非极值点

3. 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是 $(\quad)$．

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{u_n}$　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$

4. 设函数 $Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$，如果对于上半平面 $(y>0)$ 内任意有向光滑封闭曲线 C 都有

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

那么函数 $P(x,y)$ 可取为 $(\quad)$．

(A) $y-\dfrac{x^2}{y^2}$　(B) $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^2}$　(C) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$　(D) $x-\dfrac{1}{y}$

5. 设 A 是三阶实对称矩阵，E 是三阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 x^TAx 的规范形是 $(\quad)$．

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

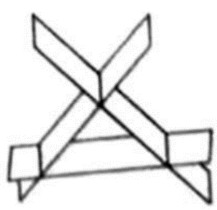
6. 如图所示，有三张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i(i=1,2,3)$ 组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\overline{A}$，则 $(\quad)$．

(A) $r(A)=2, r(\overline{A})=3$

(B) $r(A)=2, r(\overline{A})=2$

(C) $r(A)=1, r(\overline{A})=2$

(D) $r(A)=1, r(\overline{A})=1$



7. 设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是 $(\quad)$．

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　(D) $P(AB)=P(\overline{AB})$

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 则 $P\{|X-Y|<1\}$ (　　).

(A) 与 μ 无关，而与 σ^2 有关　　(B) 与 μ 有关，而与 σ^2 无关

(C) 与 μ，σ^2 都有关　　(D) 与 μ，σ^2 都无关

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

1. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________.

2. 微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解为 $y=$____________.

3. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$____________.

4. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geq 0)$ 的上侧，则 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$____________.

5. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为三阶矩阵，若 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为____________.

6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$F(x)$ 为其分布函数，$E(X)$ 其数学期望，则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=$____________.

三、解答题（共 9 小题，1-5 小题每题 10 分，6-9 小题每题 11 分，共 94 分）

1. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$；(2) 求曲线 $y=y(x)$ 的凸凹区间及拐点.

2. 设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿方向 $l=-3i-4j$ 的方向导数最大，最大值为 10.

(1) 求常数 a,b 之值；(2) 求曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geq 0)$ 的面积.

3. 求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(x\geq 0)$ 与 x 轴之间形成图形的面积.

4. 设 $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$；(2) 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

5. 设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-2)^2=(1-z)^2(0\le z\le 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

6. 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$ 为 R^3 空间的一组基，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 在这组基下的坐标为 $\begin{pmatrix}b\\c\\1\end{pmatrix}$.

(1) 求 a,b,c 之值；

(2) 证明：α_2,α_3,β 也为 R^3 空间的一组基，并求 α_2,α_3,β 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵.

7. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y 之值；(2) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

8. 设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为：$P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p$，$(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(1) 求 Z 的概率密度；(2) p 为何值时，X,Z 不相关；(3) 此时，X,Z 是否相互独立.

9. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$，其中 μ 是已知参数，σ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求常数 A 的值；

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.