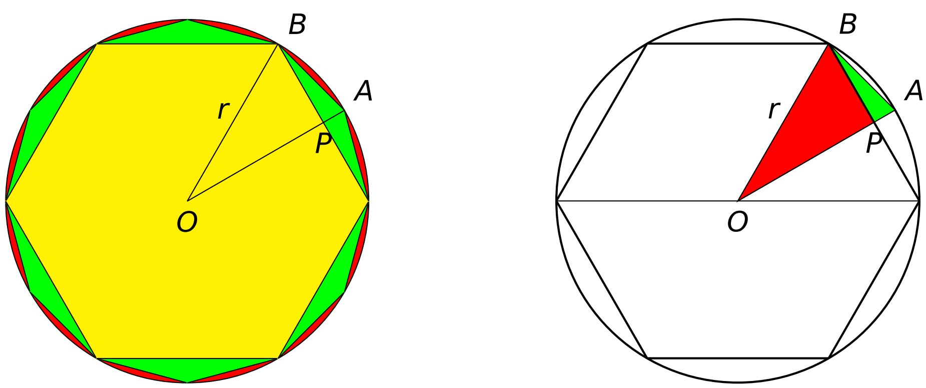
目录

第二章　极限与连续

2.1　数列的极限

2.1.1　引例



记内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边型的面积为 A_n, 则 $n\to\infty$ 时，正多边形的面积和圆的面积之差可以任意小.

“一尺之棰，日取其半，万世不竭.” ---《庄子 · 天下篇》

第一天截下的木棒长为 $X_1=\dfrac{1}{2}$；第二天截下的木棒长总和为 $X_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}$;

$$\cdots$$

第 n 天截下的木棒长总和为 $X_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$;

$$X_n=1-\frac{1}{2^n}\to 1.$$

2.1.2 数列的有关概念

定义 1. 以正整数集 N^+ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$ 排列的一列数称为数列, 通常用 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示，其中 $x_n = f(n)$, x_n 称为通项或一般项.

例子. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\qquad \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots$

例子. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots$

例子. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$

定义 2. 对数列 x_n, 若存在正数 M, 使得一切正整数 n, 恒有 $|x_n| \le M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则，称为无界.

例子. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ……有界.

例子. $x_n = 2^n$ ……无界.

注记. 数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

若存在实数 A, 对一切 n 都满足 $x_n \ge A$, 称 $\{x_n\}$ 为下有界，A 是 $\{x_n\}$ 的下界;

同样, 若存在 B, 对一切 n 都满足 $x_n \le B$, 称 $\{x_n\}$ 为上有界，B 是 $\{x_n\}$ 的上界.

若数列 $\{x_n\}$ 满足:

1. $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为单调增数列;
2. $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \le \cdots$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为 单调减数列.

单调增数列和单调减数列统称为单调数列.

定义 3. 将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下，任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列.

例子. $x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}, \ldots$

例子. $x_2, x_4, x_6 \ldots, x_{2n}, \ldots$

例子. $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}, \ldots$

注记. *在子数列* $\left\{x_{n_k}\right\}$ *中，一般项* x_{n_k} *是第* k *项, 而* x_{n_k} *在原数列* $\{x_n\}$ *中却是第* n_k *项，显然,* $n_k \geq k$.

2.1.3 数列极限的定义

问题. 随着 n 的增大，x_n 也跟着变化. 当 n 趋于无穷大时，x_n 是否会无限接近一个确定的数？

1. $x_n = 3$ 　　 $3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \longrightarrow 3$
2. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ 　　 $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$
3. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ 　　 $-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$
4. $x_n = 2^n$ 　　 $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots \times$
5. $x_n = (-1)^n$ 　　 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots \times$

定义 **4.** 设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在正整数 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A\ (n \to \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

注记. *1.* 不等式 $|x_n - A| < \epsilon$ 刻划了 x_n 与 A 的无限接近*;*

2. 一般情况下，N 与任意给定的正数 ϵ 有关*.*

为了表达方便，引入符号

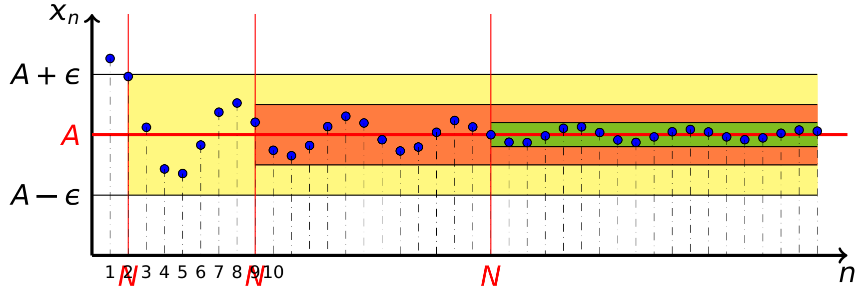
- $\forall$ .... 任意 (给定) 的.

- $\exists$ ……………………………………………………………至少有一个或存在.

使用 $\epsilon - N$ 语言，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 可以表示为：

$\forall\epsilon > 0, \exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon.$

注记. 数列极限的定义未给出求极限的方法.



当 $n > N$ 时，所有的点 x_n 都落在区间 $(A-\epsilon, A+\epsilon)$ 内，只有有限个 (至多只有 N 个) 落在其外.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，（$|q| < 1$）

例 **1.** 设 $x_n = C$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证明. $\forall\epsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例 **2.** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

证明. $\forall \epsilon > 0$，取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例 **3.** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

证明. $\forall \epsilon > 0$，取 $N = [\frac{1}{\epsilon}]$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例 **4.** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证明. 任给 $\epsilon > 0$,

1. 若 $q = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.
2. 若 $0 < |q| < 1$, 则 $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$, 要使 $n \ln|q| < \ln\epsilon$，只需要 $n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}$, 取 $N = \left[\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}\right]$, 则当 $n > N$ 时，就有
$$|q^n - 0| < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

例 **5.** 设 $x_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证明. 任给 $\epsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，故 $\exists\, N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有

$$\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right| = \frac{|x_n-a|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}} < \frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

发散的数列至少有这两种可能：

1. 无界型的：比如 $x_n = 2^n$；
2. 摆动型的：比如 $x_n = (-1)^n$.

2.1.4 收敛数列的性质

性质 1 (极限的唯一性)**.** 收敛数列的极限必唯一.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$. 由定义可知：$\forall \epsilon > 0, \exists\, N_1, N_2$, 使得:

1. 当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon$;
2. 当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \epsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$，则当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}|a-b| &= |(x_n-b)-(x_n-a)| \\ &\le |x_n-b|+|x_n-a| < \epsilon+\epsilon = 2\epsilon = |b-a|.\end{aligned}$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

性质 2 (有界性)**.** 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \le M$.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\epsilon = 1$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \le |x_n - A| + |A| < 1 + |A|,$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |A|\}$，则对任何 n 都有 $|x_n| \le M$.

推论. 无界数列必定发散.

性质 **3** (保号性)**.** 设数列收敛于 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

证明. 取 $\epsilon=A/2$，则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-A|<\epsilon=A/2$．此时 $x_n>A/2>0$.

注记**.** 这个定理表明*,* 若数列的极限为正（或负），则该数列从某一项开始以后所有项都为正（或负）*.*

推论 (保号性)**.** 设数列 $x_n\geq 0$（或 $x_n\leq 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有 $A\geq 0$（或 $A\leq 0$）.

推论**.** 如果 $x_n\geq y_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则有 $A\geq B$.

思考**.** 若将上面的等号去掉，结论如何？

性质 **4** (收敛数列与其子列件的关系)**.** 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 *A.*

注记**.** 这个定理表明*:* 若数列有两个不同的子数列收敛于不同的极限，则该数列是发散的*.*

例子**.** 数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 是发散的

- 数列: 研究其变化规律;
- 数列极限: 极限思想、精确定义、几何意义;
- 收敛数列的性质: 唯一性、有界性、保号性、子数列的收敛性.

选择**.** 已知数列 $\{x_n\}$ 的通项为 $x_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$，则该数列............................*(C)*

(A) 收敛且有界 *(B)* 收敛且无界

(C) 发散且有界 *(D)* 发散且无界

2.2 函数的极限

2.2.1 函数极限的定义

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的数叫做自变量在这一变化过程中函数的极限．我们主要研究以下两种情形:

1. 自变量 x 任意接近于有限值 $x_0(x \to x_0)$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;

2. 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大 $(x \to \infty)$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中, 对应函的数值 $f(x)$ 无限接近于确定值 A.

问题**.** 如何用数学的语言刻画" 无限接近"?

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小；
- 用 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.

定义 **1.** 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \to A \ (\text{当 } x \to x_0)$$

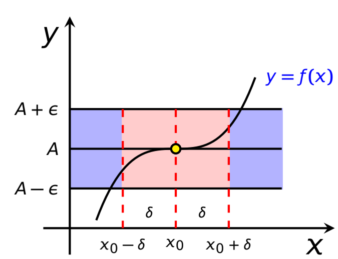
"$\epsilon - \delta$" 定义: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$时, 恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线

$$y = A$$

为中心线, 宽为 2ϵ 的带形区域内.



注记**.** *1.* 一般情况下, δ 与 ϵ 有关**.**

2. 函数极限是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

1. $y = C$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to C$

2. $y = x$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

3. $y = 2x + 1$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to 2x_0 + 1$

4. $y = \sqrt{x}$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

例 **1.** 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, ($C$ 为常数).

证明. 任给 $\epsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| <$ 时, 有

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{x \to x_0} C = C.$$

例 **2.** 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

证明. $\forall \epsilon > 0$，取 $\delta = \epsilon$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

例 **3.** 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$（$x_0 > 0$）.

证明. $\forall \epsilon > 0$，取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\epsilon\}$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| &= \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\sqrt{x_0}\,\epsilon}{\sqrt{x_0}} = \epsilon\end{aligned}$$

注记. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 4. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1; \\ 3, & x=1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

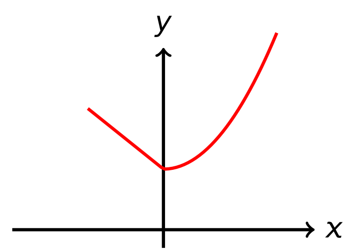
注记. 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 5. 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

例 6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0; \\ x^2+1, & x\geq 0;\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论:

1. x 从左侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^-$;
2. x 从右侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^+$;

定义. 设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时有

$$|f(x)-A|<\epsilon,$$

则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^-)=A.$$

定义. 设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义，如果对任何 $\epsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时有

$$|f(x)-A|<\epsilon,$$

则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^+)=A.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\{x|0<|x-x_0|<\delta\}\\=&\{x|0<x-x_0<\delta\}\cup\{x|-\delta<x-x_0<0\}\end{aligned}$$

于是我们有

定理. 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

例 **7.** 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$ ，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

例 **8.** 设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

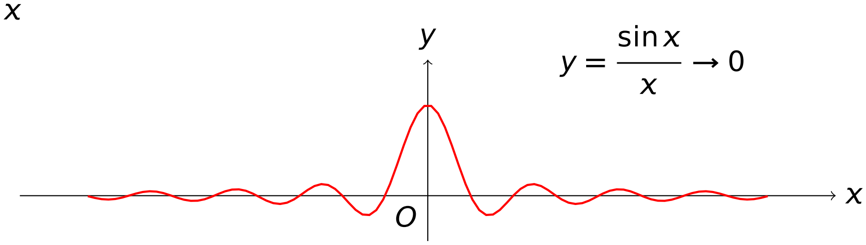
例 **9.** 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x^2-x+2, & x>1\end{cases}$ ，求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

注记. 研究当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限，不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

练习. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x<0\\ e^x, & 0<x<1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$；判断极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在，若存在求出该极限.

解. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的变化趋势.



函数 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察: 当 x 无限增大时, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题. 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

- 用 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示 $|f(x)-A|$ 任意小;
- 用 $|x|>X$ 表示 $x\to\infty$ 的过程.

定义 2. 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon>0$，总存在 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，总有 $|f(x)-A|<\epsilon$，则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

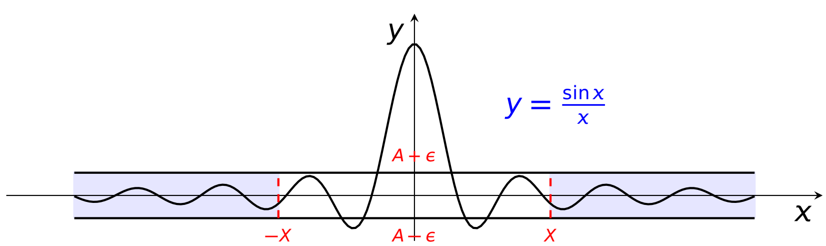
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

思考. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的 ϵ 语言定义.

"$\epsilon-X$" 定义: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists X>0$, 使当 $|x|>X$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\epsilon$.

注记. $x\to\infty$ 有两种方向，即 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$. 类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

定理. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.



当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时, 函数 $y=f(x)$ 图形完全落在以直线 $y=A$ 为中心线，宽为 2ϵ 的带形区域内.

例 **10.** 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

证明. 由条件可知:

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\frac{1}{|x|},$$

故对 $\forall\epsilon>0$, 取 $X=\frac{1}{\epsilon}$, 则当 $|x|>X$ 时恒有

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|<\epsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

例 **11.** 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}=0$.

证明. $\forall\epsilon>0$，由数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$ 知道，存在正整数 $N_1>0$, 使得当 $n>N_1$ 时有 $\dfrac{1}{2^n}<\epsilon$. 取 $X=N_1+1$，则当 $x>X$ 时有 $[x]>N_1$，从而

$$\left|\frac{1}{2^x}-0\right|=\frac{1}{2^x}\leq\frac{1}{2^{[x]}}<\frac{1}{2^{N_1}}<\epsilon.$$

$$\lim_{x\to\infty}C=C \tag{2.2.1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0\quad(k>0) \tag{2.2.2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x}=0\quad(a>1) \tag{2.2.3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}b^x=0\quad(b>1) \tag{2.2.4}$$

2.2.2 函数极限的性质

性质 **1** (唯一性)**.** *如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.*

证明. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 又 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$, 且 $A\neq B$ 由定义可知：$\forall\epsilon>0,\exists\ \delta_1,\delta_2$, 使得:

1. 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$;

2. 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$;

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，并令 $\epsilon=\frac{|A-B|}{2}$，则当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时有

$$\begin{aligned}|A-B| &= |(f(x)-A)-(f(x)-B)| \\ &\le |f(x)-A|+|f(x)-B| < \epsilon+\epsilon=2\epsilon=|B-A|.\end{aligned}$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

性质 **2** (局部有界性)**.** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在 $\delta>0$ 和 $M>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|\le M$.

证明. 取 $\epsilon=1$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon=1$. 此时

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |(f(x)-A)+A| \\ &\le |f(x)-A|+|A| < 1+|A|\end{aligned}$$

取 $M=1+|A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子**.** 设 $f(x)=1/x$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$，此时当 $0<|x-1|<1/2$ 时有 $|f(x)|\le 2$.

性质 **3** (局部保号性)**.** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>\frac{A}{2}>0$（或 $f(x)<\frac{A}{2}<0$）.

证明. 取 $\epsilon=A/2$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon=A/2$. 此时 $f(x)>A/2>0$.

例 **12.** 设 $f(x)=2x-1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1>0$，此时当 $0<|x-1|<1/4$ 时，有 $f(x)>1/2>0$.

推论 (保号性)**.** 设 $f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\ge 0$（或 $A\le 0$）.

推论**.** 如果函数 $g(x)\ge h(x)$，而且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=B$，则有 $A\ge B$.

极限的性质，对于其它形式 ($x\to\infty$、单侧极限) 的极限也成立.

2.2.3 小结

- 极限的定义：定义、几何意义；
- 极限的性质：唯一性、局部保号性、局部有界性.

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在$x=0$ 处 的左、右极限是否存在？当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

答案. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(5+x^2\right)=5$, 左极限存在,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\dfrac{1}{x}=0$, 右极限存在,

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

2.3 无穷小与无穷大

2.3.1 无穷小

定义 1. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

注记. $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小 $\iff \forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<\epsilon$.

注记. 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 、$x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$ 时的无穷小.

例子. 0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$ 时的无穷小.

例子. 函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注记. *1.* 无穷小是变量，不能与很小的数混淆. *2.* 零是可以作为无穷小的唯一的常数.

定理 1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

定理的意义：

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

证明. 必要性: 因 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 所以对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

令 $\alpha(x) = f(x) - A$, 则有 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) = A + \alpha(x)$.

充分性: 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|\alpha(x)| < \epsilon, \text{ 即 } |f(x) - A| < \epsilon,$$

也即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

定理 2. *两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.*

证明. 设 α 及 β 是当 $x \to \infty$ 时的两个无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ X_1 > 0, X_2 > 0$, 使得

1. 当 $|x| > X_1$ 时恒有
$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$
2. 当 $|x| > X_2$ 时恒有
$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$，则当 $|x| > X$ 时, 恒有

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\alpha \pm \beta \to 0 (x \to \infty)$.

问题. 无穷多个无穷小的和是不是无穷小？

答案. 不是，例如

$$\begin{array}{cccccc|l}
1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
0 & 0 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \to 1(n\to\infty)
\end{array}$$

定理 3. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明. 设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内有界, 则 $\exists\ M>0,\delta_1>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时恒有 $|u|\le M$. 又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta_2>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时恒有

$$|\alpha|<\frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\epsilon.$$

所以当 $x\to x_0$ 时, $u\cdot\alpha$ 为无穷小.

推论 1. 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小. $x\sin\frac{1}{x},x^2\arctan\frac{1}{x}\ (x\to 0)$

推论 2. 常数与无穷小的积是无穷小.

推论 3. 有限个无穷小的积是无穷小.

注意：两个无穷小的商不一定是无穷小.

问题. 无穷多个无穷小的积是不是无穷小？

答案. 不是，例如：

$$\begin{array}{cccccc|l}
1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
1 & 2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
1 & 1 & 3^2 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \to 1(n\to\infty)
\end{array}$$

例 **1.** 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$. ………………………………………… 0

练习**.** 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{1}{x}$； ………………………………………… 0

2.3.2 无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义**.** 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

注记**.** *1.* 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 时的无穷大. *2.* 特殊情况：正无穷大 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$)，负无穷大 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.)

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例：$\dfrac{1}{x}\sin(\dfrac{1}{x})$).

例 **2.** 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

证明. $\forall M>0$, 要使 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$, 只需要 $|x-1|<\frac{1}{M}$. 取 $\delta=\frac{1}{M}$, 则当 $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{M}$ 时, 就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义 2. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

练习. $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大.

练习. $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x \to 1$ 时的无穷大.

定理 4. 无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明. 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 则对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| > \dfrac{1}{\epsilon}$, 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \epsilon$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小 反之, 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| < \dfrac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

注记. 关于无穷大的讨论, 都可归结为关于无穷小的讨论.

例 3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{2x^2+1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+1}{3x+1} = \infty.$

2.3.3 小结

主要内容: 两个定义; 四个定理; 三个推论.

几点注意:

1. 无穷小（大）是变量, 不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;
2. 无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;
3. 无界变量未必是无穷大.

在自变量的同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小：反之，无穷小的倒数是否一定为无穷大?

答案. 不一定. *0* 是无穷小，但其倒数不存在. 所以课本上表示为“非零的无穷小的倒数是无穷大”.

2.4　极限运算法则

2.4.1　极限运算法则

定理 1. 如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

证明. 因为 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$ 所以

$$f(x) = A + \alpha,\ g(x) = B + \beta.\ \text{其中}\ \alpha \to 0, \beta \to 0.$$

由无穷小运算法则, 得

$$[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) = \alpha \pm \beta \to 0.$$

$$\begin{aligned}[f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) &= (A+\alpha)(B+\beta) - AB \\ &= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \to 0.\end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B+\beta)},$$

因为 $B\alpha - A\beta \to 0$, 又因为 $\beta \to 0, B \neq 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|\beta| < \frac{|B|}{2}$, 所以

$$|B+\beta| \geq |B| - |\beta| > |B| - \frac{1}{2}|B| = \frac{1}{2}|B|.$$

于是

$$|B(B+\beta)| > \frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left|\dfrac{1}{B(B+\beta)}\right| < \dfrac{2}{B^2}$, 有界, 故 (3) 成立.

推论 **1.** 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论 **2.** 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

2.4.2 求极限方法举例

1. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= a_0\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n + a_1\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0)\end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

注意：若 $Q(x_0) = 0$，则商的法则不能应用.

3. 如果基本初等函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有定义，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例 **1.** 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$.

解. 原式 $= 3\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 2\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1$

$$= 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2$$

例 **2.** 求 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5}$

解. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)&=\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}5\\&=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5\\&=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}$$

例子. 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3+1}{3+3}=\dfrac{2}{3}$

例子. 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{4}+2}=\dfrac{1}{4}$

例子. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 a、b.

解. $x\to 1$ 时, 分母的极限是零, 而商的极限存在, 故

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b=0.$$

于是

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1+a}{x+3}=\frac{2+a}{4}=2.$$

故 $a=6, b=-7$.

例 **3.** 求函数极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{1-x^2}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-x^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x}$$
$$=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

例 **4.** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解. 先用 x^3 去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

例 **5.** 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x+1}+ax+b\right)=2$, 求 ab.

解.

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2+ax(x+1)+b(x+1)}{x+1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2+(a+b)x+2+b}{x+1}
\end{aligned}
$$

若商的极限存在，则必须 $1+a=0$，$a+b=2$，解得

$$a=-1,\ b=3.$$

例 **6.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

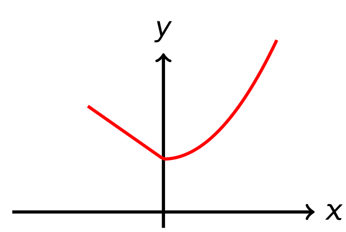
解. $n\to\infty$ 时，是无限多个无穷小之和，先变形再求极限.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例 **7.** 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ x^2+1, & x\geq 0;\end{cases}$$

求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.



解. 易知

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} &= 1-0=1,\\
\lim_{x\to 0^+} &= 1+0=1,
\end{aligned}
$$

左右极限相等，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

练习. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2\ln(1+x)+e^x+2)$; 3

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1}$; ······ 4

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$. ······ $\dfrac{5}{4}$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \not\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

$$\mathring{U}(x_0,\delta)\xrightarrow{g}U(u_0,\eta) \quad \neq \quad \mathring{U}(u_0,\eta)\xrightarrow{f}U(A,\epsilon)$$

$$\mathring{U}(x_0,\delta)\xrightarrow{\times\ f\circ g}U(A,\epsilon)$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \overset{\boxed{\begin{array}{c} x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0) \\ g(x)\neq u_0 \end{array}}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

$$\mathring{U}(x_0,\delta)\xrightarrow{g}\mathring{U}(u_0,\eta) \quad = \quad \mathring{U}(u_0,\eta)\xrightarrow{f}U(A,\epsilon)$$

$$\mathring{U}(x_0,\delta)\xrightarrow{\checkmark\ f\circ g}U(A,\epsilon)$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "\checkmark\ f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & = & U(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

定理 2. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，并且存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x) \neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A.$$

定理. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right] = f(u_0).$$

例子. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}} \overset{\boxed{\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)}}{=} \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}.$

2.4.3 小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

问题. 在某个过程中，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，那么 $f(x)+g(x)$ 是否有极限？为什么？

答案. 没有极限，使用反证法易证.

2.5 极限存在准则、两个重要极限

极限存在准则 I	极限存在准则 II
$\Downarrow$	$\Downarrow$
重要极限 I	重要极限 II
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

2.5.1 夹逼准则

定理 (极限存在准则 I). 如果数列 $x_n\le y_n\le z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

例子. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

注记. 在上述定理中，如果不等式 $x_n \le y_n \le z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立，结论不变.

证明. $\because x_n \to a, \quad z_n \to a, \therefore$ 对$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0,$ 使得

1. 当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon,$
2. 当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \epsilon.$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}, \quad$ 上两式同时成立, 即

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon, \; a - \epsilon < z_n < a + \epsilon$$

当 $n > N$ 时，恒有

$$a - \epsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \epsilon$$

即 $|y_n - a| < \epsilon$ 成立, $\quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

定理 (极限存在准则 I′)**.** 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$**.**

注记. 若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$，定理仍成立.

注记. 在上述定理中，如果不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立，结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

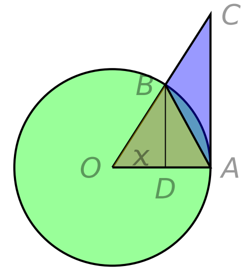
注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 y_n $(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$, 并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

一般地，如果当 $x \to 0$ 时，$\phi(x) \to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{\sin[\phi(x)]}{\phi(x)} = 1}$$

证明. 如图所示，设单位圆 O，圆心角 $\angle AOB = x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 作单位圆的切线，得 $\triangle ACO$. 设扇形 OAB 的圆心角为 x, $\triangle OAB$ 的高为 BD, 则有 $\sin x = BD$, $x=$ 弧 $\widehat{AB}$, $\tan x = AC$, 所以



$$\sin x < x < \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

上式对于 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 也成立. 当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$0<|\cos x-1| = 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\cos x = 1,$$

又因为

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

由两面夹准则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

例 **1.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1\times\dfrac{1}{1} = 1$

例 **2.** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解. 易得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例 **3.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

解. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\times 1 = 3$$

例 **4.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 4x}$.

解. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\right)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$= \frac{1}{4}\times 1\times 1 = \frac{1}{4}$$

练习**.** 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}$ .... $\frac{5}{4}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ .... $\frac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ .... $\frac{2}{3}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ .... $\frac{3}{5}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{x}$ 1

例 **5.** 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

解**.** 令 $t=x-\pi$, 则

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1$$

例 **6.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$**.** .... 1.

例 **7.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$**.** .... 1.

例 **8.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$**.** .... 1.

2.5.2 重要极限 II

定理 (极限存在准则 II)**.** 单调且有界的数列必定收敛**.**

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛**.**
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛**.**

注记**.** 若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立**.**

例子**.** 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$($n$ 重根式) 的极限存在, 并求出极限**.**

证明. 显然 $x_{n+1}>x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的; 又 $x_1=\sqrt{3}<3$, 假定 $x_k<3$, 则

$$x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3,$$

即 $\{x_n\}$ 是有界的; 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 又由 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3+x_n}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$, 则有

$$A = \sqrt{3+A} \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, A = \frac{1-\sqrt{13}}{2}(\text{舍去})$$

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

证明. 设$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 则

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = 1 + 1 &+ \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

显然 $x_{n+1} > x_n$， $\therefore \{x_n\}$ 是单调递增的;

证明. 又因为

$$
\begin{aligned}
x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,
\end{aligned}
$$

所以 $\{x_n\}$ 是有界的由单调收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 记为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \quad (\mathrm{e} = 2.71828\cdots)$$

可以证明

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \xRightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \mathrm{e}}$$

一般地，如果当 $x \to a$ 时，$\psi(x) \to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(1+\psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}} = \mathrm{e}}$$

例 **9.** 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

解. 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = \mathrm{e}^2$$

例 **10.** 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^x$

解. 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}\cdot(-\frac{1}{3})}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}} = e^{-1/3}$$

练习 **1.** 求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x}$ .... e^{-4}

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{3x}}$ .... $e^{-\frac{2}{3}}$

定理. 若 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)=A>0$，$\lim\limits_{x\to\square}v(x)=B$，则有

$$\lim_{x\to\square}u(x)^{v(x)}=A^{B}.$$

例 **11.** 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

解. 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{x-1}} = e^{2}.$$

练习 **2.** 求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4x}}$ .... $e^{\frac{1}{4}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{x+1}$ .... e^{-1}

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x-3}$ .... e^{4}

例 **12.** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解. 由条件知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\\ &= \ln \mathrm{e} = 1\end{aligned}$$

例 **13.** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

解. 令 $\mathrm{e}^x-1=u$, 即 $x=\ln(1+u)$. 则当 $x\to 0$ 时, 有 $u\to 0$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}}=1$$

2.5.3 连续复利

例子. 复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%)=M\times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4=M\times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360}=M\times 1.00501249$

事实. 常数 e 反映了连续增长的规律.

设一笔贷款 A_0 (称为本金)，年利率为 r, 则

- 一年后本利和 $A_1=A_0(1+r)$
- 两年后本利和 $A_2=A_1(1+r)=A_0(1+r)^2$

- k 年后本利和 $A_k = A_0(1+r)^k$

如果一年分 n 期计息，年利率仍为 r ，则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

k 年后本利和 $A_k = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk}$

如果计息期数 $n\to\infty$ ，即每时每刻计算复利 (称为连续复利)，则 k 年后的本利和

$$A_k = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk} = \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rk}$$

$$= A_0 e^{rk}$$

1. 两个准则
   - 两面夹 (夹逼) 准则
   - 单调有界准则
2. 两个重要极限
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$
   - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e.$

复习 **1.** 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$ ······ $e^{-\frac{2}{3}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x\sin x}$ ······ 1

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1}$ ······ e^{-3}

例子. 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解. 因为当 $x \to 0$ 时，$\cos x$ 不是无穷小，所以不能用重要极限 *II* 公式来计算.

实际上，这个函数是初等函数，且在 0 的邻域有定义，所以其极限为 $(1+1)^1 = 2$.

例子. 设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

例子. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，且当 $n \geq 1$ 时有 $x_{n+1} = \dfrac{1+x_n^2}{2}$. 研究数列的极限.

解. 先说明数列收敛，再根据数列的递归关系求出其极限.

2.6 无穷小的比较

2.6.1 无穷小的阶

例子. 比较 $x \to 0$ 时的三个无穷小 x，$2x$，x^2.

x	1	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	$\to$	0
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	$\cdots$	$\to$	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	$\cdots$	$\to$	0

定义. 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.

2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 和 α 是等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$.

4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$, $k > 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

例 **1.** 在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x 高阶.

例 **2.** 在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x^3 低阶.

例 **3.** 在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例 **4.** 在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

例 **5.** 证明*:* 当 $x \to 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

证明. 易知

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

故 $\tan x - \sin x$ 为x 的三阶无穷小.

练习 **1.** 已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 和 $g(x) = x^2$ 均为 $x \to 0$ 时的无穷小.

(1) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶?

(2) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶?

(3) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶?

(4) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价?

当 $x \to 0$ 时，有如下这些常用的等价无穷小：

(1) $\sin x \sim x$	(5) $\ln(1+x) \sim x$
(2) $\tan x \sim x$	(6) $e^x - 1 \sim x$
(3) $\arcsin x \sim x$	(7) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
(4) $\arctan x \sim x$	(8) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

意义：用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

定理. β 与 α 是等价无穷小的的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$. 称 α 是 β 的主要部分.

证明. ($\Longrightarrow$) 设 $\alpha\sim\beta$, 则有

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=0$$
$$\therefore\quad \beta-\alpha=o(\alpha),\qquad 即\beta=\alpha+o(\alpha)$$

($\Longleftarrow$) 设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$, 则有

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1$$
$$\therefore\quad \alpha\sim\beta$$

2.6.2 等价无穷小代换

定理. 设 $\alpha\sim\alpha'$、$\beta\sim\beta'$, 且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则有 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

证明. 易知

$$\begin{aligned}\lim\frac{\beta}{\alpha}&=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\\&=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\end{aligned}$$

例 **6.** 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解. 当 $x\to0$ 时, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x\sim 2x$, 因此

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}=8.$$

例 **7.** 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解. 当 $x\to0$ 时 , $\sin x\sim x$, $\arcsin x\sim x$.

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)x}{x}=\lim_{x\to0}(x+1)=1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

例子. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解. 当 $x\to 0$，$\tan x\sim x$，　$\sin x\sim x$.

$$原式 \neq \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0. \quad ✗$$

解 (正确解法). 当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x\sim 2x$，$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}. \quad ✓$$

注记. 只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

注记. 当 $\alpha_1\sim\beta_1$、$\alpha_2\sim\beta_2$ 时，下列等式总是成立：

$$\alpha_1\cdot\alpha_2 \overset{✓}{\sim} \beta_1\cdot\beta_2$$

但下列等式未必成立：

$$\alpha_1\pm\alpha_2 \overset{✗}{\sim} \beta_1\pm\beta_2$$

例子. 当 $x\to 0$ 时，有

$$\boxed{\begin{matrix} x+x^2\sim x+x^3 \\ x\sim x \end{matrix}} \xrightarrow{\text{两边同时相减}} \boxed{x^2 \overset{✗}{\sim} x^3}$$

练习 2. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$； ······ $\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{(e^{2x}-1)\ln(1-2x)}$. ······ $-\dfrac{9}{8}$

2.6.3 小结与思考

1. 无穷小的比较：反映了同一过程中, 两无穷小趋于零的速度快慢, 但并不是所有的无穷小都可进行比较.
    - 高 (低) 阶无穷小;
    - 等价无穷小;
    - 无穷小的阶.
2. 等价无穷小的代换：求极限的又一种方法, 注意适用条件.

思考. 任何两个无穷小都可以比较吗？

答案. 不能. 例如当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ 都是无穷小量, 但 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ 不存在且不为无穷大. 故当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不能比较.

2.7 函数的连续性

2.7.1 函数的连续性的概念

例子. 自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.

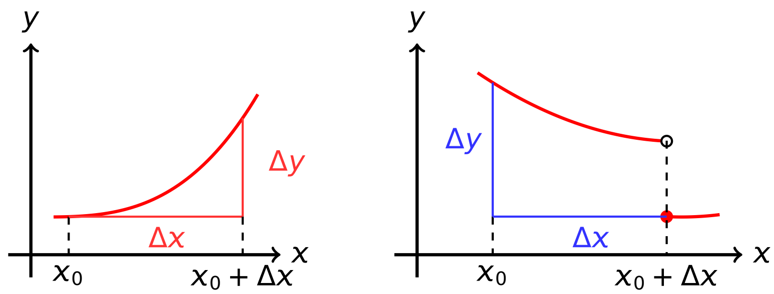
2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很小.

对于 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0，如果 x 从 x_0 作微小改变 Δx 后，y 的相应改变量 Δy 也很微小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内有定义, 当 x 在 $U(x_0, \delta)$ 内由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 称 Δx 为自变量 x 在点 x_0 的增量; 相应地, 函数 y 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量.



定义 **1.** 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big) = 0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$$\Updownarrow$$

定义 **2.** 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\varepsilon-\delta$ 定义：$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使当 $|x-x_0| < \delta$ 恒有

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 即
$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续 $\Longleftrightarrow$ 函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（极限存在）:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x\in \mathring{U}(x_0,\delta)\Longrightarrow f(x)\in U(A,\epsilon)$$

. . . .

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$（连续）:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x\in U(x_0,\delta)\Longrightarrow f(x)\in U(f(x_0),\epsilon)$$

例 **1.** 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在$x=0$ 处连续.

解**.** 易知

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0,\ f(0)=0,\ \lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$$

由定义知, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续**.**

例 **2.** 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证明. 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为 $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$, 故

$$|\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的 α, 当 $\alpha\neq 0$ 时, 有 $|\sin\alpha|<\alpha$, 故

$$|\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|,$$

所以当 $\Delta x\to 0$ 时 ,$\Delta y\to 0$. 即函数 $y=\sin x$ 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都是连续的.

定义. 若函数 $f(x)$ 在 $(a,x_0]$ 内有定义, 且 $f(x_0^-)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b)$ 内有定义, 且 $f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow f\left(x_0^-\right)=f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$$

例 **3.** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0)$

函数右连续但不左连续，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

练习 **1.** 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$，判断它在 $x=0$ 处的连续性.

答案. $f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

定义. 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

注记. 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

2.7.2 函数的间断点

定义. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 间断，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

定义 **3.** 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$, 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例子**.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处有可去间断点.

例子**.** $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ .... 可去间断点

> 可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 即可使其变为连续点.

定义**.** 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左, 右极限都存在, 但 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例子**.** $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ .... 跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点;
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

定义**.** 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例子. $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处...无穷间断点

例子. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处...振荡间断点

注记. 间断点常见位置：(*1*) 分母为零；(*2*) 分段点.

例子. 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点，并判断类型.

例子. 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\le 1, x\neq 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$ 的间断点，并判断其类型.

函数的间断点可能不只是个别的几个点.

例子. 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{当}x\text{ 是有理数时},\\ 0, \text{当}x\text{ 是无理数时}\end{cases}$$

在定义域 R 内每一点处都间断, 且都是第二类间断点.

例子. $f(x)=\begin{cases}x, \text{当}x\text{ 是有理数时},\\ -x, \text{当}x\text{ 是无理数时}\end{cases}$ 仅在 $x=0$ 处连续, 其余各点处处间断.

例 4. 求 a 的值, 使函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\ge 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

解. 易知 $f(0)=a$, 且

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

由 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$, 得 $a=1$.

2.7.3 初等函数的连续性

定理 1. 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

例子. $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 故 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 在其定义域内连续.

定理 2. 严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

例子. $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续故

$$y=\arcsin x$$

在 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上单调减少且连续;

$y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 3. 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

例子. 因为 $u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续, $y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 故 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续.

定理 4. 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

$y=\sqrt{\cos x-1}$, $\quad D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义, 故不连续.

初等函数在连续点求极限可用代入法.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad (x_0\in \text{ 定义区间})$$

例 5. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin\sqrt{e^x-1}$

解. 原式 $=\sin\sqrt{e^1-1}=\sin\sqrt{e-1}$.

2.7.4 小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
    - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
        - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
        - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
    - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
        - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
        - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
    - 初等函数在其定义区间上连续;
    - 初等函数的连续性在求极限时的应用: 代入法.

思考. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 、$f^2(x)$ 在 x_0 是否连续? 又若 $|f(x)|$ 、$f^2(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)$ 在 x_0 是否连续?

答案. 因为 $f(x)$ 在 x_0 连续, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 且

$$0\leq \big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leq |f(x)-f(x_0)|$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|.$$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x)=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]=f^2(x_0)$$

故 $|f(x)|,f^2(x)$ 在 x_0 都连续.

但反之不成立. 例 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 不连续，但 $|f(x)|,f^2(x)$ 在 $x_0=0$ 连续.

2.8 闭区间上连续函数的性质

2.8.1 最大值和最小值定理

定义. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

例子. $y = 1 + \sin x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

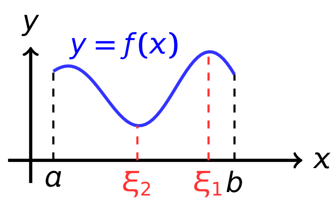
例子. $y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

例子. $y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(0, +\infty)$ 上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$

定理 1 (最值定理)**.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$, 使得 $\forall x \in [a, b]$ 时, 有

$$f(\xi_1) \ge f(x), \ f(\xi_2) \le f(x).$$



1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

例 1. 函数 $y = \tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是连续的，但在这个开区间上它是无界的，而且也没有最大值和最小值.

例 2. 函数 $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x + 3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

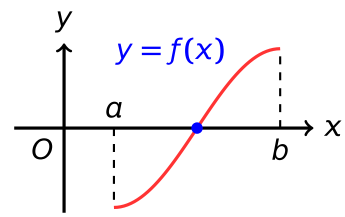
在区间 $[0, 2]$ 虽然有界，但既无最大值也无最小值.

2.8.2　零点定理与介值定理

定义. 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 2 (零点定理)**.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

几何解释: 连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧, 则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



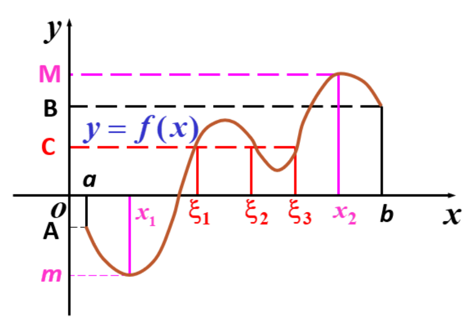
例 3. 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

例 4. 证明方程 $2\sin x=x+1$ 有实数解.

定理 3 (介值定理)**.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

证明. 令 $g(x)=f(x)-C$. 则由零值定理可以得到结论.

几何意义：在 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ (C 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间) 至少相交一点.



推论. 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

证明. 设 $f(x_1)=M, f(x_2)=m$, 在区间 $[x_1,x_2]$(或者 $[x_2,x_1]$) 上运用介值定理可得结论

例 5. 证明方程 $x^5-3x+1=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明. 令 $f(x)=x^5-3x+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$$f(0)=1>0,\ f(1)=-1<0,$$

由零点定理, $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$, 即

$$\xi^5-3\xi+1=0$$

$\therefore$ 方程$x^5-3x+1=0$ 在$(0,1)$ 上至少有一根ξ.

例 **6.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $[a,b]$ 上的 n 个点，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ ，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

证明. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m. 于是

$$m\le f(x_i)\le M,\quad i=1,2,\cdots n$$

从而

$$nm\le\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le nM\Longrightarrow m\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le M$$

1. 若 $f(a)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ 或 $f(b)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$, 则可取 $\xi=a$ 或 $\xi=b$.
2. 若 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ 与 $f(a)$, $f(b)$ 不同，由介值定理可知，在 (a,b) 至少存在一点 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

综上，命题得证.

例 **7.** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对于任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $a\le f(x)\le b$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有不动点，即存在 $x^*\in[a,b]$, 使 $f(x^*)=x^*$.

证明. 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由于 $a\le f(x)\le b$, 故

$$g(a)\ge 0,\ g(b)\le 0.$$

1. 若 $g(a)=0$, 可取 $x^*=a$.

2. 若 $g(b)=0$, 可取 $x^*=b$.

3. 若 $g(a)>0, g(b)<0$, 则由介值定理知，存在 $x^*\in(a,b)$, 使 $g(x^*)=0$, 即有 $f(x^*)=x^*$.

例 **8.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a, f(b)>b$. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$

证明. 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 而

$$F(a)=f(a)-a<0,\ F(b)=f(b)-b>0,$$

由零点定理, $\exists\xi\in(a,b)$, 使

$$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0,$$

即 $f(\xi)=\xi$

2.8.3 均衡价格的存在性

假设需求函数 $D=D(P)$ 和供给函数 $S=S(P)$ 都是连续函数. 如果生产某种商品的资源十分昂贵，则价格为零时供给必为零，即 $S(0)=0$; 再假定 $D(0)>0$, 即消费者有消费欲望. 令

$$Z(P)=D(P)-S(P);\ \text{于是}\ Z(0)=D(0)-S(0)>0.$$

另外，当价格涨到某个充分大的值 $P=P^*$ 时，公司会发现生产该产品利润丰厚，而顾客会感到价格过高，这样必然导致供过于求，即 $D(P^*)<S(P^*)$, 从而

$$Z(P^*)=D(P^*)-S(P^*)<0.$$

又 $D=D(P)$ 和 $S=S(P)$ 都是区间 $[0,P^*]$ 上的连续函数，所以 $Z(P)=D(P)-S(P)$ 也是区间 $[0,P^*]$ 上的连续函数，于是由零点定理，存在 $P_e\in(0,P^*)$, 使得

$$Z(P_e)=D(P_e)-S(P_e)=0,$$

即

$$D(P_e) = S(P_e)，且 P_e > 0.$$

定理. 假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数，且满足:

1. 价格为零时，需求超过供给，即 $D(0) > S(0)$;
2. 存在某个价格 $P = P^* > 0$, 使得在此价格下，供给超过需求，即 $S(P^*) > D(P^*)$.

则市场上一定存在一个正的均衡价格，即存在 $P_e > 0$, 使得 $D(P_e) = S(P_e)$.

2.8.4 小结

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

  注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法: 先利用最值定理, 再利用介值定理;
  2. 辅助函数法: 先作辅助函数 $F(x)$, 再利用零点定理;

思考. 假设有一个登山者头天上午 8 点从山脚开始上山，晚上 6 点到达山顶，第二天上午 8 点从山顶沿原路下山，下午 6 点到达山脚. 问该登山者在上、下山过程中，会同时经过同一地点吗？为什么？

答案. 会.

不妨设山高为 h, 登山者头天登山的高度函数 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 在 $[8,18]$ 上连续，且

$$f_1(8)=0,\ f_1(18)=h;\ f_2(8)=h,\ f_2(18)=0$$

设

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x),$$

则 $f(x)$ 在 $[8,18]$ 上连续, 且

$$f(8)=-h<0,\ f(18)=h>0.$$

由零点定理知存在一点 $\xi\in(8,18)$, 使 $f(\xi)=0$.

问题. 证明方程 $x=a\sin x+b$, 其中 $a>0,b>0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

问题. 若 $f(x)$ 在 $[\,a,b\,]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 则在 $[x_1,x_n]$ 上必有 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots\ldots+f(x_n)}{n}$$