微积分课程

微积分 1 复习

2021 年 12 月 30 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

第一章 集合与函数

第二章 极限与连续

第三章 导数与微分

第四章 导数的应用

第五章 不定积分

函数的两要素

函数的两要素： 定义域与对应法则.

函数的两要素

函数的两要素： 定义域与对应法则.

注记　两个函数相同, 当且仅当两者的定义域和对应法则都相同.

函数的定义域

函数的定义域

求函数的定义域时有三个基本要求:

函数的定义域

求函数的定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；

函数的定义域

求函数的定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；
2. 对数里面要求大于零；

函数的定义域

求函数的定义域时有三个基本要求:

1. 根号里面要求大于等于零;
2. 对数里面要求大于零;
3. 分母要求不能等于零.

给定函数 $y = f(x)$, 设其定义域 D 关于原点对称,

函数的性质

给定函数 $y = f(x)$, 设其定义域 D 关于原点对称,

1 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

函数的性质

给定函数 $y = f(x)$, 设其定义域 D 关于原点对称,

1. 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.
2. 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

给定函数 $y=f(x)$, 设其定义域 D 关于原点对称,

1. 若 $\forall x\in D$, 总有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.
2. 若 $\forall x\in D$, 总有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在一个不为零的常数 l, 使得对任意的 $x\in D$, 有 $(x\pm l)\in D$, 且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数; l 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

函数的性质

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I \subset D$, x_1, x_2 为区间 I 上的任意两个数,

(1) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加或递增;

函数的性质

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I \subset D$, x_1, x_2 为区间 I 上的任意两个数,

(1) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加或递增;

(2) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少或递减;

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I \subset D$, x_1, x_2 为区间 I 上的任意两个数,

(1) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加或递增;

(2) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少或递减;

设函数 $y = f(x)$ 在数集 I 上有定义, 如果存在一个正数 M, 对于所有 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \le M$, 则称函数 $f(x)$ 是在 I 上的有界函数. 若不存在这样的 M, 则称 $f(x)$ 是在 I 上的无界函数.

复合函数的分解

例 1 将函数 $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$ 分解为简单函数的复合.

复合函数的分解

例 1　将函数 $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ 分解为简单函数的复合.

- 简单函数指的是由基本初等函数的四则运算得到的函数.

例 1　将函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$ 分解为简单函数的复合.

- **简单函数**指的是由基本初等函数的四则运算得到的函数.
- **基本初等函数**指的是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五种.

第一章	集合与函数
第二章	极限与连续
第三章	导数与微分
第四章	导数的应用
第五章	不定积分

设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在正整数 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A \ (n \to \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

数列极限

1. 极限的唯一性: 收敛数列的极限必唯一.

1. 极限的唯一性: 收敛数列的极限必唯一.
2. 有界性: 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \le M$.

1. 极限的唯一性: 收敛数列的极限必唯一.
2. 有界性: 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leq M$.
3. 保号性: 设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

1. 极限的唯一性: 收敛数列的极限必唯一.
2. 有界性: 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leq M$.
3. 保号性: 设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.
4. 收敛数列与其子列件的关系: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 A.

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \to A \ (\text{当 } x \to x_0)$$

设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $X > 0$，使得当 $|x| > X$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

函数极限

设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\le 0\\ x^2+1 & 0<x\le 1\\ \frac{2}{x} & x>1\end{cases}$$

判断该函数在 $x\to 0$ 及 $x\to 1$ 时的极限是否存在.

例 1 设

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \leq 0 \\ x^2+1 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & x > 1 \end{cases}$$

判断该函数在 $x \to 0$ 及 $x \to 1$ 时的极限是否存在.

定理 极限存在当且仅当左右极限都存在而且相等.

1. 唯一性: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.
2. 局部有界性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leq M$.
3. 局部保号性: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \dfrac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \dfrac{A}{2} < 0$）.
   - 保号性：设 $f(x) \geq 0$（或 $f(x) \leq 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）.
   - 如果函数 $g(x) \geq h(x)$，而且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = B$，则有 $A \geq B$.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$)，就称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$)，就称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

1. 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.

无穷小与无穷大

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$)，就称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时的无穷小.

1. 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.
2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$)，就称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

1. 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.
2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$)，就称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

1. 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.
2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$)，就称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

1. 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.
2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

1. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.

1. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.
2. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

无穷小与无穷大

1. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.
2. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.
    1. 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

1. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.
2. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.
   1. 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.
   2. 常数与无穷小的积是无穷小.

1. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.
2. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.
   1. 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.
   2. 常数与无穷小的积是无穷小.
   3. 有限个无穷小的积是无穷小.

1. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.
2. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.
   1. 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.
   2. 常数与无穷小的积是无穷小.
   3. 有限个无穷小的积是无穷小.

1. 无穷多个无穷小的和不一定是无穷小;

1. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.
2. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.
    1. 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.
    2. 常数与无穷小的积是无穷小.
    3. 有限个无穷小的积是无穷小.

1. 无穷多个无穷小的和不一定是无穷小;
2. 无穷多个无穷小的积不一定是无穷小;

无穷小与无穷大

1. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.
2. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.
   1. 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.
   2. 常数与无穷小的积是无穷小.
   3. 有限个无穷小的积是无穷小.

1. 无穷多个无穷小的和不一定是无穷小;
2. 无穷多个无穷小的积不一定是无穷小;
3. 两个无穷小的商不一定是无穷小.

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义．如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义．如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

1. 无穷大是变量，不能与很大的数混淆；

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义．如果对任何给定的 $M>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$, 就有 $|f(x)|>M$, 则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义．如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

1. 无穷大是变量，不能与很大的数混淆；
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
3. 无穷大是一种特殊的无界变量，但是无界变量未必是无穷大 (例：$\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$).

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义．如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

1. 无穷大是变量，不能与很大的数混淆；
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是极限不存在的一种特殊情形．
3. 无穷大是一种特殊的无界变量，但是无界变量未必是无穷大（例：$\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$）．

无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大．

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是 同阶的无穷小.

无穷小的阶

定义　设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是 同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 和 α 是 等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$.

无穷小的阶

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是 同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 和 α 是 等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$.

4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$, $k > 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

常用的等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，有如下这些常用的等价无穷小：

(1)	$\sin x \sim x$	(5)	$\ln(1+x) \sim x$
(2)	$\tan x \sim x$	(6)	$e^x - 1 \sim x$
(3)	$\arcsin x \sim x$	(7)	$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
(4)	$\arctan x \sim x$	(8)	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

极限的运算法则

如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

极限的运算法则

如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

极限的运算法则

如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

1. $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$
2. $\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$
3. $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

极限的运算法则

如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$
3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

极限的运算法则

如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$
3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

1. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c \lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

极限的运算法则

如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$
3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

1. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c \lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

2. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，并且存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时 $g(x) \neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A.$$

1 如果 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim_{u\to u_0} f(u) = A$，并且存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时 $g(x) \neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A.$$

2 若 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right] = f(u_0).$$

1 如果 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim_{u\to u_0} f(u)=A$，并且存在 $\delta_0>0$ 使得 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x)\neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A.$$

2 若 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 且 $\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]=f(u_0).$$

例 2　对于 $x\to x_0$ 的函数极限，如果 $f(x)$ 是初等函数，x_0 在 $f(x)$ 的定义区间中，则有

1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，并且存在 $\delta_0>0$ 使得 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x)\neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A.$$

2 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 且 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]=f(u_0).$$

例 2　对于 $x\to x_0$ 的函数极限，如果 $f(x)$ 是初等函数，x_0 在 $f(x)$ 的定义区间中，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

定理 (极限存在准则 I) 如果数列 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 而且 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim_{n\to\infty} z_n = A$, 则有 $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

定理 (极限存在准则 I) 如果数列 $x_n \le y_n \le z_n$,而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

例子 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

定理 (极限存在准则 I) 如果数列 $x_n \le y_n \le z_n$，而且 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

例子 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

注记 在上述定理中，如果不等式 $x_n \le y_n \le z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立，结论不变.

定理 (极限存在准则 I′)　如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$，且 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim_{x\to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.

定理 (极限存在准则 I′) 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$, 且 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$.

注记 若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$, 定理仍成立.

定理 (极限存在准则 I′) 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记 若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$，定理仍成立.

注记 在上述定理中，如果不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立，结论不变.

定理 (极限存在准则 I′) 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记 若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$, 定理仍成立.

注记 在上述定理中, 如果不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立, 结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I′)　如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$, 且 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim_{x\to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记　若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$，定理仍成立.

注记　在上述定理中，如果不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立，结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 y_n $(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$，并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

定理 (极限存在准则 II) 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.

定理 (极限存在准则 II) 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

定理 (极限存在准则 II) 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记 若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

重要极限 I

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

重要极限 I

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

一般地，如果当 $x \to 0$ 时，$\phi(x) \to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\sin[\phi(x)]}{\phi(x)}=1}$$

重要极限 II

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad \xRightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

一般地，如果当 $x \to \square$ 时，$\psi(x) \to 0$，则有

$$\lim_{x\to\square}\Big(1+\psi(x)\Big)^{\frac{1}{\psi(x)}}=e$$

函数极限的求法

1. 多项式与分式函数代入法求极限;

函数极限的求法

1. 多项式与分式函数代入法求极限;
2. 消去零因子法求极限;

函数极限的求法

1. 多项式与分式函数代入法求极限;
2. 消去零因子法求极限;
3. 无穷小因子分出法求极限;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

4. 利用无穷小运算性质求极限;
5. 利用左右极限求分段函数极限;
6. 等价无穷小代换：只能对乘除因子代换，不能对加减项代换.
7. 洛必达法则：在一定条件下, $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$
   - 如果能用等价无穷小代换，优先使用它;

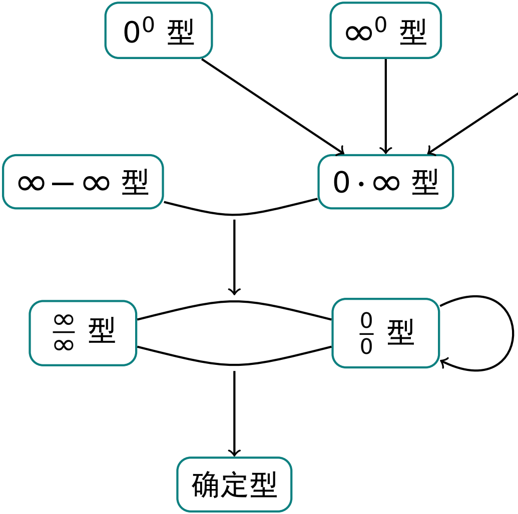
函数极限的求法

4. 利用无穷小运算性质求极限;
5. 利用左右极限求分段函数极限;
6. 等价无穷小代换：只能对乘除因子代换，不能对加减项代换.
7. 洛必达法则：在一定条件下，$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$
   - 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
   - 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限.

幂指函数求极限

$$\lim_{x \to \square} u^{v(x)}(x) = e^{\lim\limits_{x \to \square} v(x) \ln[u(x)]}$$

函数求极限


0^0 型
∞^0 型
1^∞ 型
$\infty - \infty$ 型
$0 \cdot \infty$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
确定型

定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 2　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 2　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\varepsilon-\delta$ 定义：$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 即
$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

连续的概念

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 即
$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件：

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，即
$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续 $\Longleftrightarrow$ 函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$（极限存在）：

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$（极限存在）:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$（连续）:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)$$

单侧连续

定义　若函数 $f(x)$ 在 $(a, x_0]$ 内有定义, 且 $f(x_0^-) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

单侧连续

定义　若函数 $f(x)$ 在 $(a,x_0]$ 内有定义, 且 $f(x_0^-)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b)$ 内有定义, 且 $f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定义　若函数 $f(x)$ 在 $(a, x_0]$ 内有定义，且 $f(x_0^-) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, b)$ 内有定义，且 $f\left(x_0^+\right) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right) = f(x_0)$$

连续函数

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

连续函数

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;

连续函数

定义　如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;

定义　如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

连续函数

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a, b) 内连续;
- 在左端点 $x = a$ 处右连续;
- 在右端点 $x = b$ 处左连续.

注记 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 **间断**，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的**间断点**.

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义, 如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则称它在点 x_0 间断, 或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 **间断**，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的**间断点**.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点，有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义, 如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 间断，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 但
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

可去间断点

定义 3 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

定义 3 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

> 可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义，即可使其变为连续点.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

跳跃间断点

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

跳跃间断点

定义　如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点;

跳跃间断点

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点；
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

定义　如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例子　$f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处........................无穷间断点

第二类间断点

定义　如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例子　$f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处........................无穷间断点

例子　$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处......................振荡间断点

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例子 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处........................无穷间断点

例子 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处......................振荡间断点

注记 间断点常见位置:（1）分母为零;（2）分段点.

定理 1 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \left(g\left(x_0\right) \neq 0\right)$ 在点 x_0 处也连续.

反函数的连续性

定理 2　严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

定理 3　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

定理 4 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

定理 4 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

定理 4 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

$y=\sqrt{\cos x-1}$, $D: x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义, 故不连续.

定义　对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

最值定理

定义　对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

定理 5 (最值定理)　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

最值定理

定义　对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

定理 5 (最值定理)　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

零点定理

定义 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定义 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 6 (零点定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

定理 7 (介值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

介值定理

定理 7 (介值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

第一章	集合与函数
第二章	极限与连续
第三章	**导数与微分**
第四章	导数的应用
第五章	不定积分

定义　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在

定义　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义．若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数（或微商）．记为 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

导函数的定义

如果 $f(x)$ 在区间 I 内可导，则每个 $x_0 \in I$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，

导函数的定义

如果 $f(x)$ 在区间 I 内可导，则每个 $x_0 \in I$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，从而得到一个函数 $f'(x)$：

$$f' : x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

如果 $f(x)$ 在区间 I 内可导，则每个 $x_0 \in I$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，从而得到一个函数 $f'(x)$：

$$f' : x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 I 内的导函数（简称导数），记为 $f'(x)$，或 y'，或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$．此时有

$$f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

单侧导数

定义　设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 上有定义，

定义 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，

单侧导数

定义 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

单侧导数

定义 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

定义 设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上有定义，

单侧导数

定义　设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

定义　设 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，

定义　设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

定义　设 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$.

定义 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

定义 设 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$.

注记 导数存在 $\Longleftrightarrow$ 左导数和右导数都存在且相等.

可导与连续的关系

定理 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

注意: $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\not\Rightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点可导.

导数的四则运算

定理 1 如果函数 $u(x), v(x)$ 在点 x 处可导, 则它们的和、差、积、商 (除分母不为零外) 在点 x 处也可导，并且

导数的四则运算

定理 1 如果函数 $u(x), v(x)$ 在点 x 处可导, 则它们的和、差、积、商 (除分母不为零外) 在点 x 处也可导，并且

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$

定理 1 如果函数 $u(x), v(x)$ 在点 x 处可导, 则它们的和、差、积、商 (除分母不为零外) 在点 x 处也可导，并且

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.
2. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

定理 1 如果函数 $u(x), v(x)$ 在点 x 处可导, 则它们的和、差、积、商 (除分母不为零外) 在点 x 处也可导，并且

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.
2. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \ (v(x) \neq 0)$.

反函数的求导法则

定理 2　如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$, 则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

定理 2 如果函数 $x = \varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且有

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

注记 上式也可以写成 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

推论 设 $y = f(u)$，$u = g(v)$，$v = h(x)$. 则复合函数 $y = f(g(h(x)))$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

定理 2　如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$, 则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

注记　上式也可以写成 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

推论　设 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(x)$. 则复合函数 $y=f(g(h(x)))$ 的导数公式为：

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$$

或者

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

定理 3　设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则它们的复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

定理 3　设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则它们的复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

定理 3　设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则它们的复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

或者

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

隐函数求导

- 显函数：由 $y = f(x)$ 直接确定的函数关系.

隐函数求导

- 显函数：由 $y = f(x)$ 直接确定的函数关系.
- 隐函数：由 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数.

隐函数求导

- 显函数：由 $y=f(x)$ 直接确定的函数关系.
- 隐函数：由 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数.

$$F(x,y)=0 \Longrightarrow y=f(x)$$ 隐函数的显化

- 显函数：由 $y = f(x)$ 直接确定的函数关系.
- 隐函数：由 $F(x,y) = 0$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数.

$$F(x,y) = 0 \Longrightarrow y = f(x) \qquad \text{隐函数的显化}$$

问题　隐函数不易显化或不能显化如何求导?

- 显函数：由 $y=f(x)$ 直接确定的函数关系.
- 隐函数：由 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数.

$$F(x,y)=0 \Longrightarrow y=f(x) \qquad \text{隐函数的显化}$$

问题　隐函数不易显化或不能显化如何求导?

答案　利用复合函数求导法则，将 y 看成 x 的函数，方程两边同时对 x 求导.

例 1 对下面的方程求导数 y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

例 1 对下面的方程求导数 y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$；
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y) y'_x$.

对数求导法

对于多个函数相乘除或者幂指数函数 $(u(x))^{v(x)}$ 的情形，可以先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

对于多个函数相乘除或者幂指数函数 $(u(x))^{v(x)}$ 的情形，可以先在方程两边取对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数.

例 2　设 $y = x^{\sin x}(x > 0)$, 求 y'.

已知参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，求 y 关于 x 的一阶和二阶导数.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right]' \Big/ \phi'(t).$$

常数和基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0 \qquad (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \qquad \left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

高阶导数的定义

类似地，我们可以定义：

- 二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$.

类似地，我们可以定义：

- 二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$.
- 三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$.

高阶导数的定义

类似地，我们可以定义：

- 二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$.
- 三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$.
- 一般地, 函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$$

类似地，我们可以定义：

- 二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$.
- 三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$.
- 一般地, 函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数. 相应地, $f(x)$ 称为零阶导数 ; $f'(x)$ 称为一阶导数.

高阶导数的求法

高阶导数的求法主要有

1. 直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数.
2. 间接法：利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出 n 阶导数.

高阶导数的运算法则

设函数 u 和 v 具有 n 阶导数，则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

高阶导数的运算法则

设函数 u 和 v 具有 n 阶导数，则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

设函数 u 和 v 具有 n 阶导数，则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$
3. $$\begin{aligned}(u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' \\ &+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} \\ &+ \cdots + uv^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\end{aligned}$$

设函数 u 和 v 具有 n 阶导数，则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$
3. $$\begin{aligned}(u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' \\ &+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} \\ &+ \cdots + uv^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\end{aligned}$$

莱布尼茨公式

定义 1　对于自变量在点 x_0 处的改变量 Δx，如果函数 $y = f(x)$ 的相应改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

其中 A 与 Δx 无关

定义 1　对于自变量在点 x_0 处的改变量 Δx，如果函数 $y=f(x)$ 的相应改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

其中 A 与 Δx 无关，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，并称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处 (相应于自变量增量 Δx) 的微分，记为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \text{ 或 } \mathrm{d}f(x_0),$$

即

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

定义 1　对于自变量在点 x_0 处的改变量 Δx，如果函数 $y = f(x)$ 的相应改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

其中 A 与 Δx 无关，则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，并称 $A\Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处 (相应于自变量增量 Δx) 的微分，记为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \text{ 或 } \mathrm{d}f(x_0),$$

即

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

注记　微分 $\mathrm{d}y$ 叫做函数增量 Δy 的线性主部.

由定义知:

1. dy 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;

函数的微分

由定义知：

1. $\mathrm{d}y$ 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;
2. $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小;

函数的微分

由定义知：

1. $\mathrm{d}y$ 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;
2. $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小;
3. 当 $A \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0),$$

即 $\mathrm{d}y$ 与 Δy 是等价无穷小;

由定义知：

1. $\mathrm{d}y$ 是自变量的改变量 Δx 的线性函数；
2. $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小；
3. 当 $A \neq 0$ 时，有
$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0),$$
即 $\mathrm{d}y$ 与 Δy 是等价无穷小；
4. A 是与 Δx 无关的常数，但与 $f(x)$ 和 x_0 有关；

由定义知:

1. $\mathrm{d}y$ 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;
2. $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小;
3. 当 $A \neq 0$ 时, 有
$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0),$$
即 $\mathrm{d}y$ 与 Δy 是等价无穷小;
4. A 是与 Δx 无关的常数, 但与 $f(x)$ 和 x_0 有关;
5. 当 $|\Delta x|$ 很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ (线性主部).

定理 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A = f'(x_0)$.

函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$, 即 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

1. 函数和、差、积、商的微分法则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$$

2. 复合函数的微分法则

1. 若 $y=f(u)$，则有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$；
2. 若 $y=f(u), u=g(x)$，则仍有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$.

2. 复合函数的微分法则

1. 若 $y=f(u)$，则有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$；
2. 若 $y=f(u), u=g(x)$，则仍有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$.

无论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分形式总是 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$, 称为一阶微分的形式不变性.

定义 2　设函数 $y = f(x)$ 在 x 处可导，则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数. $f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 为边际函数值.

定义 2　设函数 $y = f(x)$ 在 x 处可导，则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数. $f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 为边际函数值.

当 $x = x_0$ 时，x 改变一个单位，y 改变 $f'(x_0)$ 个单位.

定义 (弹性函数的定义)　一般地，若函数 $y=f(x)$ 在区间内 (a,b) 可导，且 $f(x)\neq 0$，则称

$$\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}=y'\cdot\frac{x}{y}$$

为函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的点弹性函数，简称弹性函数.

注意：弹性的意义，尤其是价格的需求函数的意义.

第一章	集合与函数
第二章	极限与连续
第三章	导数与微分
第四章	导数的应用
第五章	不定积分

定理 (罗尔定理) 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

(3) $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

定理 (拉格朗日中值定理)　如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

定理 (柯西中值定理) 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续，

(2) 在开区间 (a,b) 内都可导，

(3) 在开区间 (a,b) 内 $g'(x) \neq 0$,

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系:

$$\begin{tikzcd} \text{罗尔定理} & \text{拉格朗日中值定理} \arrow[l, "f(a)=f(b)"'] & \text{柯西中值定理} \arrow[l, "g(x)=x"'] \end{tikzcd}$$

用中值定理证明不等式

例 1 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 存在两个不同的点 $\theta, \eta \in (0,1)$, 使得 $f'(\theta)f'(\eta)=1$.

思路路解析:

(1) 第一问用零点定理 $(F(x)=f(x)-(1-x))$.

(2) 第二问利用第一问结论与拉格朗日中值定理.

$$f(\xi)-f(0)=f'(\theta)\xi,\ f(1)-f(\xi)=f'(\eta)(1-\xi)$$

两式相乘，并用第一问结论即可证明.

定理 1 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，那么

1. 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.
2. 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

定理 1 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，那么

1. 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.
2. 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

若 $f'(x)\geq 0$ (≤ 0) 在 (a,b) 上成立，且等号仅在仅在个别点成立，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加 (减少)

定义 若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的单调区间.

定义 若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的单调区间.

单调区间的求法:

利用导数等于零的点和不可导点，划分出区间，然后判断各区间内导数的符号.

定义 1 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义.

1. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

定义 1 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义.

1. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.
2. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) > f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极小值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

定义 1 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义.

1. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.
2. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) > f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极小值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

定理 2 (极值的必要条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$.

极值的必要条件

定理 2 (极值的必要条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

极值的必要条件

定理 2 (极值的必要条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：

极值的必要条件

定理 2 (极值的必要条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y = x^3$.

极值的必要条件

定理 2 (极值的必要条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y = x^3$.
- 极值点未必都是驻点：

定理 2 (极值的必要条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y = x^3$.
- 极值点未必都是驻点：比如 $y = |x|$.

定理 2 (极值的必要条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y = x^3$.
- 极值点未必都是驻点：比如 $y = |x|$.
- 可导函数的极值点一定是驻点.

定理 2 (极值的必要条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y = x^3$.
- 极值点未必都是驻点：比如 $y = |x|$.
- 可导函数的极值点一定是驻点.
- 极大值不一定比极小值大.

定理 3 (极值的第一充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 而且在它的某个去心邻域内可导.

判别极值的第一充分条件

定理 3 (极值的第一充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 而且在它的某个去心邻域内可导.

1. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$, 在右邻域内 $f'(x) < 0$, 则 x_0 为极大值点.

定理 3 (极值的第一充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 而且在它的某个去心邻域内可导.

1. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$, 在右邻域内 $f'(x) < 0$, 则 x_0 为极大值点.
2. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) < 0$, 在右邻域内 $f'(x) > 0$, 则 x_0 为极小值点.

判别极值的第一充分条件

定理 3 (极值的第一充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 而且在它的某个去心邻域内可导.

1. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$, 在右邻域内 $f'(x) < 0$, 则 x_0 为极大值点.
2. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) < 0$, 在右邻域内 $f'(x) > 0$, 则 x_0 为极小值点.
3. 若在 x_0 的左邻域内和右邻域内 $f'(x)$ 的符号不变, 则 x_0 不是极值点.

定理 4 判别极值的第二充分条件 设 $f'(x_0) = 0$ 而且 $f''(x_0)$ 存在.

1. 若 $f''(x_0) > 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.
2. 若 $f''(x_0) < 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

定理 4 判别极值的第二充分条件 设 $f'(x_0) = 0$ 而且 $f''(x_0)$ 存在.

1. 若 $f''(x_0) > 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.
2. 若 $f''(x_0) < 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

注记 1 当 $f''(x_0) = 0$ 时，上面的定理无法判定．例如 $f(x) = x^3$ 和 $f(x) = x^4$.

函数的极值

求函数极值的一般步骤：

1. 求导数 $f'(x)$;

函数的极值

求函数极值的一般步骤：

1. 求导数 $f'(x)$;
2. 找出驻点（即方程 $f'(x) = 0$ 的根）和不可导点;

函数的极值

求函数极值的一般步骤：

1. 求导数 $f'(x)$;
2. 找出驻点（即方程 $f'(x) = 0$ 的根）和不可导点;
3. 判断:
   - 驻点 $\left\langle \begin{array}{ll} f''(x_0) \neq 0 & \text{第一或第二充分条件} \\ f''(x_0) = 0 & \text{第一充分条件} \end{array} \right.$
   - 不可导点：第一充分条件;

求函数极值的一般步骤：

1. 求导数 $f'(x)$;
2. 找出驻点（即方程 $f'(x)=0$ 的根）和不可导点;
3. 判断:
   - 驻点 $\left\langle \begin{array}{ll} f''(x_0)\neq 0 & \text{第一或第二充分条件} \\ f''(x_0)=0 & \text{第一充分条件} \end{array} \right.$
   - 不可导点：第一充分条件;
4. 结论.

函数的极值

求函数极值的一般步骤：

1. 求导数 $f'(x)$;
2. 找出驻点（即方程 $f'(x) = 0$ 的根）和不可导点;
3. 判断:
   - 驻点 $\left\langle \begin{array}{ll} f''(x_0) \neq 0 & \text{第一或第二充分条件} \\ f''(x_0) = 0 & \text{第一充分条件} \end{array} \right.$
   - 不可导点：第一充分条件;
4. 结论.

注意格式: 极大 (小) 值为 $f(x_0) = a$ 或极大 (小) 值点为 $x = x_0$.

定义　设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (或凹弧) ;

函数的凹凸性

定义 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (或凹弧) ; 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的 (或凸弧).

定理 5 假设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数，那么

定理 5 假设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数，那么

1. 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) > 0$，则函数的曲线在 (a,b) 上是凹的.

定理 5 假设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数，那么

1. 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) > 0$，则函数的曲线在 (a,b) 上是凹的.
2. 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) < 0$，则函数的曲线在 (a,b) 上是凸的.

函数的拐点

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

函数的拐点

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

性质 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

性质 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

....

例 2 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 2 (x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

性质 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

. . . .

例 2 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 2 (x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.（二阶导数不存在）

定义　曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

性质　在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

性质　拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

....

例 2　求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 2　(x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.（二阶导数不存在）

例 3　求曲线 $y = x^4$ 的凹凸区间和拐点.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

性质 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

....

例 2 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 2 (x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow f''(x_0) = 0$.（二阶导数不存在）

例 3 求曲线 $y = x^4$ 的凹凸区间和拐点.

注记 3 $f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow (x_0, y_0)$ 为拐点.

定义　曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

性质　在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

性质　拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

....

例 2　求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 2　(x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.（二阶导数不存在）

例 3　求曲线 $y = x^4$ 的凹凸区间和拐点.

注记 3　$f''(x_0) = 0$ $\not\Rightarrow$ (x_0, y_0) 为拐点.（二阶导数除在 $x = 0$ 处均大于零）

函数拐点的求法

$f(x)$ 在 x_0 的邻域内二阶可导，且 $f''(x_0) = 0$,

1. 若 x_0 两边 $f''(x)$ 变号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.
2. 若 $f'''(x_0) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

定义

1. 若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$，称 $y = b$ 为其水平渐近线.
2. 若 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$，称 $x = a$ 为其铅直渐近线.

水平和铅直渐近线

定义

1. 若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$，称 $y = b$ 为其水平渐近线.
2. 若 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$，称 $x = a$ 为其铅直渐近线.

注记 (1) $x \to \infty$ 可以改为 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$.

定义

1. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$，称 $y = b$ 为其水平渐近线.
2. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，称 $x = a$ 为其铅直渐近线.

注记 (1) $x \to \infty$ 可以改为 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$.

(2) $x \to a$ 可以改为 $x \to a^+$ 或 $x \to a^-$.

定义 2 (斜渐近线) 若直线 $y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

定义 2 (斜渐近线) 若直线 $y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

定理 6 直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad 而且 \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b.$$

定义 2 (斜渐近线) 若直线 $y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

定理 6 直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad 而且 \quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b.$$

注记 $x \to \infty$ 可以改为 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$.

一般地，对于函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点.

函数的最值

一般地，对于函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点.

特殊地，若函数在区间（开或闭，有限或无限）上可导，且在区间内只有一个驻点，则有

- 如果该驻点为极大值，则它也是最大值；
- 如果该驻点为极小值，则它也是最小值.

第一章	集合与函数
第二章	极限与连续
第三章	导数与微分
第四章	导数的应用
第五章	不定积分

积分公式大全

$$\int 1 \, dx = x + C \tag{5.1}$$

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \tag{5.2}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \tag{5.3}$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{5.4}$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \tag{5.5}$$

积分公式大全

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \tag{5.6}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \tag{5.7}$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \tag{5.8}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \tag{5.9}$$

积分公式大全

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{5.10}$$

$$\int \csc x \, \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{5.11}$$

$$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C \tag{5.12}$$

$$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C \tag{5.13}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \tag{5.14}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \tag{5.15}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \tag{5.16}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C \tag{5.17}$$

第一类换元法

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x))$$
$$= \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到.

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到.

例 1　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$.

例 2　求不定积分 $\int \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\psi(t))\,\mathrm{d}(\psi(t)) \\ &= \left[\int f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)}\end{aligned}$$

例 3　求不定积分 $\int \frac{1}{e^x + 1}\,dx.$

例 4　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$.

三角函数换元总结

1 $\int f(\sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x = a\sin t$

三角函数换元总结

1. $\int f(\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\sin t$
2. $\int f(\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\tan t$

三角函数换元总结

1. $\int f(\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\sin t$
2. $\int f(\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\tan t$
3. $\int f(\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\sec t$

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 5　求下列不定积分

1 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 5　求下列不定积分

1. 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.
2. 求不定积分 $\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.

分部积分公式：$\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$

例 5　求下列不定积分

1. 求不定积分 $\int x\cos x\,dx$.
2. 求不定积分 $\int xe^x\,dx$.
3. 求不定积分 $\int x\ln x\,dx$.

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 5　求下列不定积分

1. 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.
2. 求不定积分 $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
3. 求不定积分 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.
4. 求不定积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 5　求下列不定积分

1. 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.
2. 求不定积分 $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
3. 求不定积分 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.
4. 求不定积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.
5. 求不定积分 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.