第二章　极限与连续

一、选择题（选择正确的选项）

1. 当 $x \to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x), (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$, 均是比 x 高阶无穷小量，则 α 的取值范围是（ B ）.

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(\frac{1}{2},1)$　　(D) $(0,\frac{1}{2})$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$（ A ）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

3. 下列极限中, 极限不为0 的是（ D ）.

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x+3\cos x}{x}$

(C) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^5+x^3}$

4. 下列运算正确的是（ C ）.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0$

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$

(D) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{x\ln x^2}{|x-1|}$, 则 $f(x)$ 有（ B ）.

(A) 两个可去间断点　　(B) 一个可去间断点, 一个跳跃间断

(C) 两个无穷间断点　　(D) 一个可去间断点, 一个无穷间断点

6. 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}$ 与 x^2 比较是 (A) .

(A) 高阶无穷小量 (B) 等价无穷小量 (C) 低阶无穷小量 (D) 同阶无穷小量

7. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ 的第二类间断点是 (B) .

(A) $x=1$ (B) $x=-1$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $-\dfrac{1}{2}$

8. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$ 的第一类间断点个数是 (A) .

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

9. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$ 的第一类间断点是 (C) .

(A) $x=2\pi$ (B) $x=-\pi$ (C) $x=0$ (D) $x=\pi$

10. 当 $x\to 0$ 时， $x-\sin x$ 是比 x^2 的 (B) .

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x^2)}{x-1}=$ (C)

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) 2 (C) -2 (D) $\dfrac{1}{2}$

12. 下列函数在其定义域内连续的是 (A)

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (B) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ (D) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\neq 0\\ \cos x, & x=0\end{cases}$

13. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, 则必有 (A) .

(A) $f(x)$ 在点 x_0 的某一个去心领域内有定义;

(B) $f(x)$ 仕点 x_0 处有定义;

(C) $f(x)$ 在点 x_0 的任意一个去心领域内有定义;

(D) $a=f(x_0)$.

14. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 的第一类间断点是 (C) .

(A) $x=\dfrac{\pi}{2}$; (B) $x=-\pi$; (C) $x=0$; (D) $x=\pi$.

二、填空题（请将答案写在横线上）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-\dfrac{3x}{2})^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $A=$ $\underline{\quad e^{-\frac{3}{2}}\quad}$.

2. 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos kx$ 与 x^2 是等价无穷小量, 则 $k=$ $\underline{\quad \pm\sqrt{2}\quad}$.

3. 设 $f(x)=x\sin\dfrac{3}{x}+\dfrac{\sin x}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$ $\underline{\quad 3\quad}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{2}\quad}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

6. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{kx}=9$，则 $k=$ $\underline{\quad \ln 3\quad}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 等于 $\underline{\quad 1\quad}$.

三、计算题（请给出必要的步骤）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^{\sqrt{n}}$.

解. 由条件可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\\ &= e^{-1}e=1.\end{aligned}$$