第八章　多元函数微分学

1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数都连续;

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数都存在.

若用"$P \Longrightarrow Q$" 表示性质 P 推出性质 Q, 则有 (　　)

(A) ③ $\Longrightarrow$ ② $\Longrightarrow$ ①　　**(B)** ③ $\Longrightarrow$ ④ $\Longrightarrow$ ①

(C) ③ $\Longrightarrow$ ① $\Longrightarrow$ ④　　**(D)** ② $\Longrightarrow$ ③ $\Longrightarrow$ ①

2. 二元函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极大值点是 (　　).

(A) $(1,0)$　　**(B)** $(-3,2)$　　**(C)** $(-3,0)$　　**(D)** $(1,2)$

3. 设 $z=\sin(xy)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ (　　).

(A) $y\sin(xy)$　　**(B)** $-y\sin(xy)$　　**(C)** $y\cos(xy)$　　**(D)** $-y\cos(xy)$

4. 如果 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$, 则二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处 (　　).

(A) 一定连续　　**(B)** 一定偏导数存在

(C) 一定可微　　**(D)** 一定有极值

5. 设 $z=xe^{xy}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　　).

(A) xye^{xy}　　**(B)** e^{xy}　　**(C)** x^2e^{xy}　　**(D)** $(1+xy)e^{xy}$

6. 设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　　).

(A) $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$　　**(B)** $\dfrac{y}{x^2+y^2}$　　**(C)** $\dfrac{x}{x^2+y^2}$　　**(D)** $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$

7. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在的 (　　).

(A) 充分条件　　**(B)** 必要条件　　**(C)** 充要条件　　**(D)** 无关条件

8. 函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在其定义域上 (　).

(A) 有极大值无极小值　　(B) 无极大值有极小值

(C) 有极大值有极小值　　(D) 无极大值无极小值

9. [另附] 函数 $f(x,y)=xy$ 在其定义域上 (　).

(A) 有极大值无极小值　　(B) 无极大值有极小值

(C) 有极大值有极小值　　(D) 无极大值无极小值

10. 设 $z=\sqrt{\ln(xy)}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　).

(A) $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln(xy)}}$　(B) $\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$　(C) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$　(D) $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}$

11. 设 $z=x^2e^y+y^2\sin x$, 则 $dz|_{(\pi,0)}=$____________.

12. 设二元函数 $z=\int_1^{xy}\ln t\,dt$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

13. 设 $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$, 则 $df(x,y)|_{x=1,y=1}=$____________.

14. 设 $z=f(3x-2y,xy)$, 且 $f(u,v)$ 可微，则全微分 $dz=$____________.

15. 设 $z=f(x\ln y, y-x)$, 且 f 具有一阶连续偏导数, 则全微分 $dz=$____________.

16. 已知函数 $z=\ln(1+x^2-y^2)$, 则 $dz|_{(1,1)}=$____________.

17. 函数 $z=x^2y+\dfrac{x}{y}$ 的全微分 $dz=$____________.

18. 设函数 $z=e^x\sin y$, 则 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=$____________.

19. 函数 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ 的定义域是____________.

20. 求二元函数 $z=3x^2-4xy+5y^2-2x-6y+1$ 的极值.

参考答案： 函数 z 在点 $(1,1)$ 处取极小值 $z(1,1)=-3$.

21. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

参考答案： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy};\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$.

22. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z=xyz$ 所确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

参考答案：$\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}=\dfrac{z}{x(z-1)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{e^z-xy}=\dfrac{z}{y(z-1)},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{-z}{xy(z-1)^3}$.

23. 求二元函数 $f(x,y)=xy$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

参考答案： $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

24. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z=x^3y^2+z$ 所确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

参考答案： $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{6x^2y(\mathrm{e}^z-1)^2-6x^5y^3\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z-1)^3}$.

25. 设二元函数 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$，试讨论参数 a,b 满足什么条件时，$f(x,y)$ 有唯一极大值，或有唯一极小值.

参考答案： 当 $b^2<2a^2$ 且 $a>0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一极大值；当 $b^2<2a^2$ 且 $a<0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一极小值.

26. 已知 f 具有二阶连续偏导数，且 $z=f\left(x^2-y^2,xy\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

参考答案： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_u+yf_v=2xf_1'+yf_2',\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+4x^2f_{11}''+4xyf_{12}''+y^2f_{22}''$.

27. 设 $x^3+y-xyz^5=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

参考答案： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3x^2-yz^5}{5xyz^4};\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1-xz^5}{5xyz^4}$.

28. 已知直角三角形斜边长为 l，试求两条直角边等于何值时，直角三角形的周长最大？

参考答案： $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{x}l$ 时，$(x+y+l)_{\max}=(\sqrt{2}+1)l$.

29. 已知 f 具有二阶连续偏导数，且 $z=f(xy,\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

参考答案： $f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^3}f_{22}''.$

30. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

参考答案： $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$

31. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

参考答案： $\frac{7\sqrt{2}}{8}.$

32. 设 $z=\arctan(xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

参考答案： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}.$

33. [另附] 设 $z=\arctan(\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

参考答案： $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$

34. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{y}{z}=\ln\frac{z}{x}$ 所确定，求 $\mathrm{d}z$.

参考答案： $\mathrm{d}z=\frac{z^2}{y+z}\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}y\right).$

35. 已知求函数 $z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

参考答案： $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}.$

36. 设二元函数 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内具有二阶连续的偏导数，且

$$F(x_0,y_0)=0,\ F_x(x_0,y_0)=0,\ F_{xx}(x_0,y_0)\cdot F_y(x_0,y_0)\neq 0.$$

证明：由方程 $F(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内确定的隐函数 $y=y(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极值.

参考答案： 略.

37. 设 $z=f[x+\varphi(y)]$, 其中 f 二次可导, φ 可导, 证明 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

参考答案： 略.

38. 设 $y=f(x,t)$, 而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都具有一阶连续偏导数, 试证

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

参考答案： 略