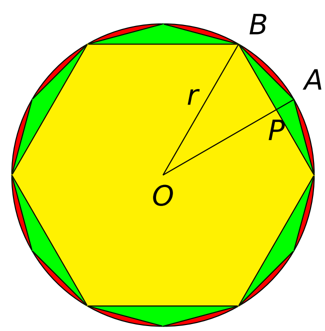
第十一章　无穷级数

11.1　无穷级数的概念



1. 正六边形的面积 a_1,
2. 正十二边形的面积 $a_1 + a_2$,
3. ……
4. 正 3×2^n 边形的面积 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 即

$$A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

当 $n \to \infty$ 时, 即为无穷项相加, 即是级数问题.

"一尺之棰, 日取其半, 万世不竭"

—-《庄子・天下》

如果把每天截取的棒长相加, 到第 n 天所得之棒长之和为:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n}$$

显然总的棒长小于 1 , 并且 n 的值愈大, 其数值愈接近于 1; 当 $n \to \infty$ 时, S_n 的极限为 1.

此时上式中项无限增加，成为无穷多个数相加的式子, 即是级数问题.

定义 **1.** 给定数列：$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为*(常数项)* 无穷级数，简称*(常数)* 级数，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，其中第 n 项称为级数的一般项.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
  - 此时称 S 为级数的和，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$.
  - 称 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数的余项；
- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注记. 常数项级数收敛 *(发散)* $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在 *(不存在)*

例 **1.** 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解. 易知

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

所以第 n 次部分和为

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

故该级数收敛, 其和为 1.

例 **2.** 讨论无穷级数 $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \cdots$ 的敛散性.

解. 由条件易知

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\Longrightarrow S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

故级数收敛, 其和为 $\frac{1}{2}$.

练习 **1.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

例 **3.** 证明调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 是发散的.

....

方法一. 易知 $x>0$ 时, 有 $x>\ln(1+x)$, 于是

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \\ &> \ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \ln(1+n) \to \infty, (n \to \infty) \end{aligned}$$

故级数发散.

方法二. 由条件可知

$$\begin{aligned} & S_1 = 1, \ s_2 = 1+\frac{1}{2} \\ & S_4 = 1+\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} > 1+\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 1+\frac{2}{2} \\ & S_8 = 1+\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underline{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}} \\ & \quad > 1+\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underline{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} = 1+\frac{3}{2} \\ & \quad \cdots\cdots \end{aligned}$$

子序列无极限, 所以 $\lim S_n$ 不存在, 级数发散.

反证法. 易知

$$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

假设调和级数收敛, 其和为 S, 则

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0,$$

但由第一式可知

$$0\geq\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$$

这是不可能的, 故级数发散.

练习 **2.** 证明算术级数 $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d]+\cdots$ 是发散的（其中 a 与 d 不同时为零）.

答案**.** 易知级数的部分和为

$$\begin{aligned} s_n=&a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d]\\ =&na+\frac{n(n-1)}{2}d \end{aligned}$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$，故所给算术级数是发散的

11.1.1　等比级数及其在经济学上的应用

定义 **2.** 我们称无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}ax^{n-1}=a+ax+ax^2+\cdots+ax^{n-1}+\cdots$$

为几何级数（或称等比级数），其中 $a\neq0$，而 x 称为级数的公比.

定理 **1.** 对于等比级数

1. 当 $|x|<1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n$ 收敛, 且其和为

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}ax^n=\frac{a}{1-x}$$

2. 当 $|\ x\ |\geq1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n$ 发散

证明*.* 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n$ 的部分和为

$$S_n=a+ax+ax^2+\cdots+ax^{n-1}$$

1. 若 $x \neq 1$，则

$$S_n = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^{n-1}$$
$$= \frac{a - ax^n}{1-x} = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$$

- 当 $|x| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-x}$，故收敛.
- 当 $|x| > 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, 故发散.

2. 当 $|x| = 1$ 时,

- 当 $x = 1$ 时, $S_n = na \to \infty$, 故发散.
- 当 $x = -1$ 时，级数为 $a - a + a - a + \cdots \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在, 故发散.

综上可知

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n \begin{cases} \text{当}|x| < 1 \text{ 时, 收针} \\ \text{当 } |\ |x| \geq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases}$$

例子. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \cdots$

易知公比为 $x = -\dfrac{1}{2}$, $|x| = \dfrac{1}{2} < 1$, 故级数收敛, 且其和为 $\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2}{3}$.

例子. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$

公比 $x = 2$, $|x| = 2 > 1$, 故级数发散.

练习 **3.** 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\ln^n a (a > 0)$ 的敛散性.

答案. 因为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3\ln^n a$ 是以 $\ln a$ 为公比的等比级数, 故

1. $|\ln a| < 1$, 即 $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < a < \mathrm{e}$ 时，级数收敛.

2. $|\ln a| > 1$, 即 $0 < a \le \dfrac{1}{e}$ 或 $a \ge e$ 时，级数发散.

11.1.2　无穷级数的基本性质

定义 (余项级数). 将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 去掉前 n 项后得到的级数

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为原级数的余项级数.

性质 1. 若级数收敛, 则其每个余项级数收敛；反之若级数的某个余项级数收敛，则级数收敛.

注记. 在一个级数前面加上（或者去掉）有限项，级数的敛散性不变.

例 4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 次部分和 $S_n = \frac{n}{2n-1}$，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+2}$ 的敛散性. 若级数收敛，求出它的和.

解. 收敛，$-\dfrac{1}{6}$.

性质 2. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

问题 1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 一个收敛一个发散，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 是否也发散？一定发散.

问题 2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也发散？ . . . . 不一定.

性质 3. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a u_n$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

推论. 级数的每一项同乘以不为 0 的常数后，其敛散性不变.

例 **5.** 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n}\right)$ 的和.

解**.** $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$.

例 **6.** 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}3\ln\frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

解**.** 因 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 发散，故级数发散.

练习 **4.** 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2+(-1)^{n+1}}{3^n}-\frac{4}{4n^2-1}\right]$ 的和.

答案**.** $-\frac{3}{4}$.

性质 **4** (收敛级数的结合律)**.** 如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

例 **7.** 已知几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

加括号后得到的新级数

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\cdots\\&=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\cdots=\frac{3/2}{1-1/4}=2.\end{aligned}$$

注意：

1. 发散级数加括号后，可能发散也可能收敛.
2. 收敛级数可以加括号, 但收敛级数去括号后所成的级数不一定收敛.

   例子**.** $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛

   $1-1+1-1+\cdots$ 发散

3. 如果加括号后所成的级数发散, 则原级数也发散.

4. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(u_n \geq 0)$ 加括号与去括号均不影响其敛散性.

定理 2 (级数收敛的必要条件)**.** 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

....

证明. 易知 $u_n = S_n - S_{n-1}$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\ &= S - S = 0\end{aligned}$$

注记 **1.** 若一般项不趋于零，则级数一定发散.

例 **8.** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的一般项趋于 1，因此它发散.

....

注记 **2.** 若一般项趋于零，则级数未必收敛.

例 **9.** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的一般项趋于 0，但是它发散.

练习 **5.** 判断级数的敛散性. 如果级数收敛，求出它的和.

(1) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \cdots + \frac{2n-1}{2n} + \cdots$

(2) $(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{3}{4} + \frac{1}{9}) + (\frac{3}{8} + \frac{1}{27}) + \cdots$

1. 常数项级数的基本概念

2. 基本审敛法

   - 由定义, 若 $S_n \to s$, 则级数收敛;
   - 当 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数发散;
   - 根据基本性质判断.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots) = 1 + \frac{1}{2}S$$

$\therefore\ S = 2$ 即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ ✓

. . . .

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + (2 + 4 + 8 + \cdots)$$
$$= 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + \cdots) = 1 + 2T$$

$\therefore\ T = -1$ 即 $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$ ✗

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$ ✗

11.2 正项级数

定义 1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geq 0$（对所有 n），则称它为正项级数.

性质. 正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

定理 1. 正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和数列有界.

注记. 正项级数加括号后，其敛散性不变.

11.2.1　比较判别法

定理 2 (比较判别法)**.** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \le v_n$，对所有 n 成立，则有

1. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

2. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

由于级数的每一项同乘以一个不为零的常数 k, 以及去掉级数前面部分的有限项不会影响级数的收敛性. 我们可得如下推论：

推论 1. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 且存在正整数 N, 使当 $n \geqslant N$ 时, 有 $u_n \leqslant k v_n$ $(k > 0)$ 成立, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 且当 $n \geqslant N$ 时, 有 $u_n \geqslant k v_n$ $(k > 0)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 1. 判断级数 $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的敛散性.

例 2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性.

例 3. 讨论 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} = 1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p} + \ldots$ 的敛散性.

解**.** *(1)* 当 $p \le 1$ 时，$\dfrac{1}{n^p} \ge \dfrac{1}{n}$, 由比较判别法，级数发散.

(2) 当 $p > 1$ 时，$\dfrac{1}{n^p} < \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, 故

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} < 1 + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} + \ldots + \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$
$$= 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1}.$$

即 S_n 有界，级数收敛.

$$p-\text{级数}\ \begin{cases}\text{收敛},\ p>1\text{时},\\ \text{发散},\ p\le 1\text{时}.\end{cases}$$

练习 **1.** 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$ 的敛散性.

用“比较法”判别级数敛（散），需要找一个通项较大（小）的敛（散）级数作比较，而不等式的放大（缩小）常常比较困难.

在实际中，常用比较判别法的极限形式.

定理 **3** (比较判别法的极限形式)**.** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都为正项级数，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$.

1. 若 $0<l<+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散；

2. 若 $l=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

3. 若 $l=+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

例 **4.** 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{3n^2+n}}$ 的敛散性.

例 **5.** 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

例 **6.** 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

例 **7.** 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

对于两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$,

1. 若 u_n 是 v_n 的高阶无穷小, 则当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛;

2. 若 u_n 是 v_n 的低阶无穷小, 则当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散;

3. 若 u_n 是 v_n 的同阶无穷小, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或发散.

练习 **2.** 判断级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n-2}$ .... 发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ .... 收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\pi}{n} - \sin\dfrac{\pi}{n}\right)$ .... 收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}\right)$ .... 收敛.

11.2.2　比值判别法

定理 **4** (比值判别法)**.** 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则有

1. 若 $\rho < 1$，则级数收敛；

2. 若 $1 < \rho \leq +\infty$，则级数发散；

3. 若 $\rho = 1$，则级数可能收敛也可能发散.

证明*.* 当 ρ 为有限数时, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho\right| < \varepsilon \Longrightarrow \rho - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon \ (n > N)$$

1. 当 $\rho < 1$ 时, 取 $\varepsilon < 1 - \rho$, 使 $r = \varepsilon + \rho < 1$, 则

$$u_{N+2} < r u_{N+1},\ u_{N+3} < r u_{N+2} < r^2 u_{N+1}, \cdots,$$

而级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} r^{m-1} u_{N+1}$ 收敛, 由比较判别法知 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{N+m}$ 收敛，从而原级数收敛.

2. 当 $\rho > 1$ 时, 取 $\varepsilon < \rho - 1$, 使 $r = \rho - \varepsilon > 1$, 则当 $n > N$ 时,

$$u_{n+1} > ru_n > u_n, \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0.$$

故原级数发散.

例 **8.** 判断下列级数的收敛性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ .... 收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{10^n}$ .... 发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$ .... 收敛.

注记**.** 第 *(3)* 小题比值判别法失效，用比较判别法

注意事项：

1. 当一般项含有 $n!$, n^n, x^n 或 c^n 等因子时, 常选用比值判别法;
2. 当 $\rho = 1$ 时, 比值判别法失效;

   例子**.** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.
3. 值审敛法的条件是充分而非必要的.

   例子**.** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛，但 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在.

练习 **3.** 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{3^n}$ 的敛散性.

11.2.3　根值判别法

定理 5 (根值判别法)**.** 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则有

1. 若 $\rho < 1$，则级数收敛；

2. 若 $\rho > 1$，则级数发散；

3. 若 $\rho = 1$，则级数可能收敛也可能发散.

例 9. 设 $a > 0$，判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{na}{n+1}\right)^n$ 的敛散性.

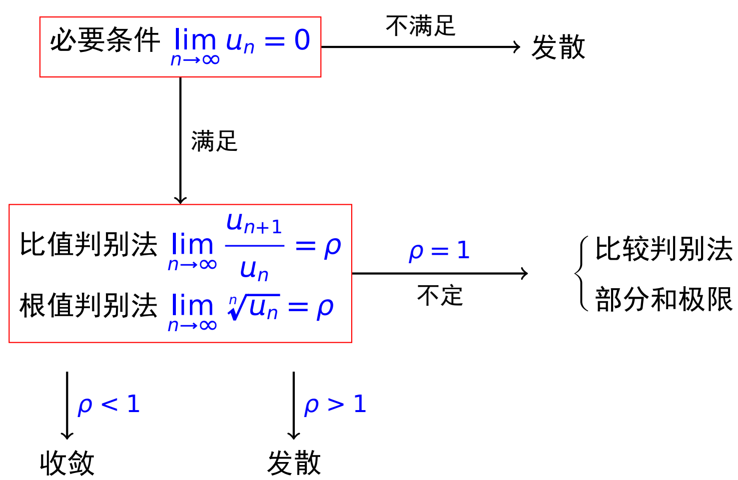
解. $a < 1$ 收敛, $a \geq 1$ 发散.

练习 4. 判定级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2^n(\arctan n)^n}$ .... 收敛

正项级数审敛法

1. 充要条件: 部分和有界
2. 基本性质
3. 比较判别法
4. 比值判别法



思考**.** 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 能否推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛? 反之是否成立?

答案**.** 由条件易知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

反之不成立. 例如: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收剑, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散.

11.3 任意项级数

11.3.1 交错级数及其审敛法

定义 **1.** 正负项相间的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$，即

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2k-1} - u_{2k} + \cdots,$$

其中每个 $u_n > 0$，称为交错级数**.**

定理 **1** (莱布尼兹定理)**.** 如果交错级数满足条件

1. $u_{n+1} \le u_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$；
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$；

则级数收敛，且其和 $S \le u_1$，余项满足 $|R_n| \le u_{n+1}$**.**

证明. 由条件 $u_{n-1} - u_n \ge 0$ 可得数列

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

是单调增加的, 又

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \le u_1$$

故数列 s_{2n} 是有界的, 从而有

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s \le u_1.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + u_{2n+1}) = S$$

于是级数收敛于和 S, 且 $S \leq u_1$.

余项 $R_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots) \Longrightarrow |R_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$, 满足交错级数收敛的两个条件, 故 $|R_n| \leq u_{n+1}$.

例 **1.** 判断交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的敛散性.

例 **2.** 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ 的收敛性.

解**.** 易知

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)' = \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \ (x \geq 2)$$

故函数 $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 单调递减, 于是 $u_n > u_{n+1}$, 又

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0.$$

由莱布尼茨定理，原级数收敛.

注意事项

1. 莱布尼茨判别法是判定级数收攻的充分而非必要条件;
2. 判定 $u_{n+1} < u_n$ 的方法
    - $u_{n+1} - u_n < 0$
    - $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
    - 相应函数的单调性.

11.3.2　绝对收敛与条件收敛

定义: 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

任意项级数的各项取绝对值就得到得正项级数.

定理 **2.** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

证明. 令 $v_n = \dfrac{1}{2}(u_n+|u_n|) \quad (n=1,2,\cdots)$, 则 $v_n \geq 0$, 且 $v_n \leq |u_n|$, 由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛. 又

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(2v_n - |u_n|)$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

定义 **2.** 对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，

1. 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散；

2. 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 都收敛.

注记**.** 绝对收敛的级数必收敛*.*

例 **3.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$ 的敛散性. . . . . 收敛

定理 **3.** 对于任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$，则有

1. 当 $\rho < 1$ 时级数绝对收敛；

2. 当 $\rho > 1$ 时级数发散.

例 **4.** 判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的*:*

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}$； . . . . 绝对收敛

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}$； . . . . 对一切 x 绝对收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$； .... $|x| < 1$ 绝对收敛, $|x| > 1$ 发散, $x = 1$ 发散，$x = -1$ 条件收敛

练习 **1.** 判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

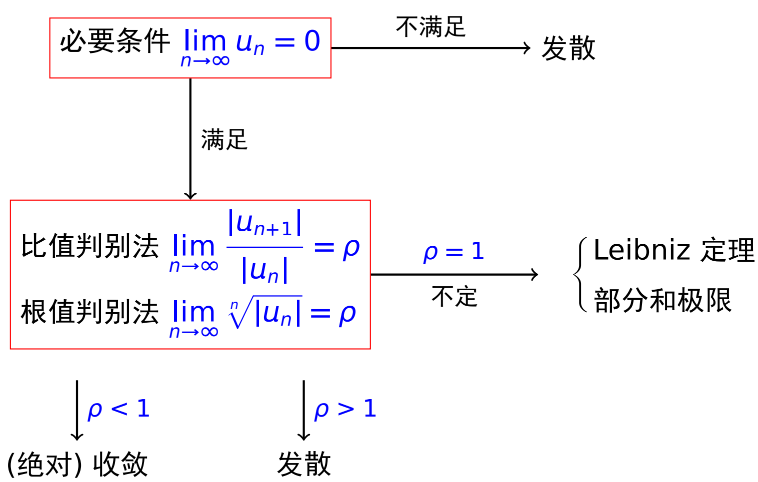
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n-1}$； .... 发散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$； .... 条件收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. .... 绝对收敛

任意项级数审敛法

1. 级数收敛的定义
2. 级数收敛的必要条件
3. 按级数收敛的基本性质
4. 交错级数 (莱布尼茨定理)
5. 绝对收敛



11.4 幂级数

如果 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都是定义在区间 D 上的函数, 我们把下式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为函数项无穷级数，简称函数项级数 .

定义 **1.** 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数，即

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

称为 $x-x_0$ 的幂级数.

特别地，当 $x_0=0$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，即

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

称为 x 的幂级数.

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，

- 若 $x=x_0$ 时级数收敛，称 x_0 为幂级数的收敛点；
- 若 $x=x_0$ 时级数发散，称 x_0 为幂级数的发散点.

幂级数的全体收敛点构成的集合称为幂级数的收敛域. 在收敛域 I 上, 幂级数的和是 x 的函数 $S(x)$, 称 $S(x)$ 为幂级数的和函数, 记为

$$S(x) = \sum_{n=0}^{n} x^n,\ x \in I$$

定义 **2.** 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛, 则必有一个确定的正数 R 存在, 使得

1. 当 $|x|<R$ 时, 幂级数绝对收敛;
2. 当 $|x|>R$ 时, 幂级数发散;

3. 当 $x=\pm R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

称正数 R 为幂级数的收敛半径, 开区间 $(-R,R)$ 叫做幂级数的收敛区间.

注记. 幂级数的收敛域是 $(-R,R),[-R,R),(-R,R]$ 或 $[-R,R]$ 这四个区间之一, 需要根据幂级数在 $x=\pm R$ 处的收敛性判定.

若幂级数的只在 $x=0$ 出收敛，规定其收敛半径为 $R=0$；若幂级数在 $(-\infty,+\infty)$ 收敛，规定其收敛半径为 $R=+\infty$.

问题 **1.** 如何求幂级数的收敛半径？

定理 **1.** 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则 幂级数的收敛半径为：

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

证明. 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 应用比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|=\rho|x|.$$

1. 如果 $\rho\neq 0$, 则 $\rho|x|<1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛，$\rho|x|>1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，从而收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$.

2. 若 $\rho=0$, 则对任意 x 有 $\rho|x|=0$,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛,从而收敛半径为 $R=+\infty$.

3. 若 $\rho=+\infty$, 则对任意 $x\neq 0$ 有 $\rho|x|=\infty$，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，从而收敛半径为 $R=0$.

问题. 给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解. 首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0<R<+\infty$，则收敛域有四种可能

- $(-R,R)$
- $(-R,R]$
- $[-R,R)$
- $[-R,R]$

2. 若 $R=0$，则收敛域为 $\{0\}$；

3. 若 $R=+\infty$，则收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 **1.** 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ 的收敛域. .... $(-1,1]$

例 **2.** 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ 的收敛域. .... $(-1,1)$

例 **3.** 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛域. .... $(-\infty,+\infty)$

例 **4.** 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域.

解. 令 $t=2x+1$, 易得收敛域为 $[-1,0)$.

例 **5.** 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3^nx^{2n}}{n}$ 的收敛域.

解. 令 $t=x^2$ 或者令 $t=3x^2$, 易得收敛域为 $[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$.

练习 **1.** 求下列幂级数的收敛域

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2x+3)^{2n}$ .... $(-2,-1)$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\dfrac{1}{2})^n$ .... $(0,1]$

定理. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R=\min\{R_1,R_2\}$，则有

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big)\pm\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n,$$

其中等式在 $(-R,R)$ 中成立.

定理. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R=\min\{R_1,R_2\}$，则有

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中 $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，等式在 $(-R,R)$ 中成立.

性质 1. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上连续.

性质 2. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可积，且有逐项积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\end{aligned}$$

逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径 *(收敛域可能改变)*.

性质 3. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 上可导，且有逐项求导公式

$$\begin{aligned}S'(x) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)'\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}\end{aligned}$$

逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径 *(收敛域可能改变)*.

例 6. 对几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 逐项求导和逐项积分.

解. 易知

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

逐项求导得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots,$$

逐项积分得

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots.$$

- 初等变换法：分解和式并套用公式
- 映射变换法：逐项求导或逐项积分

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n} \arrow[rrr, "\text{逐项求导或积分}"] \arrow[d, dashed, "\text{难}"] & & & \boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n} \arrow[d, "\text{求和}"] \\
\boxed{S(x)} & & & \boxed{S^*(x)} \arrow[lll, "\text{对和式积分或求导}"']
\end{tikzcd}$$

例 **7.** 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ 在 $(-1,1)$ 的和函数.

解**.** 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, 则

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x},x\in(-1,1)$$

于是

$$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1)$$

例 **8.** 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 的和函数.

解**.** 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$, 则

$$S'(x)=1-x+x^2-\cdots=\frac{1}{1+x},\ (-1<x<1)$$

又因为 $S(0)=0$, 对上式两边积分可得

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t+S(0)=\ln(1+x),$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x),(-1<x\leq 1)$$

例 **9.** 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解**.** 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$, 易知其收敛区间为 $(-1,1)$, 则

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)'' \\ &= x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n} = s\left(\frac{1}{2}\right) = 8.$$

练习 **2.** 求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 的和. *(提示：运用两次逐项求积，然后进行两次求导即可)*

答案**.** $\frac{3}{2}$.

11.4.1 泰勒公式和泰勒级数

定理 **2** (泰勒公式)**.** 如果函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶的连续导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)$ 可按 $x-x_0$ 的方幂展开为

$$\begin{aligned}f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ +\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),\end{aligned}$$

其中余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$\begin{aligned}f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ +\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),\end{aligned}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 介于 0 和 x 之间.

令 $\xi=\theta x$，则 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$.

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在，而且当 $n\to\infty$ 时 $R_n\to 0$，则得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数. 特别地，当 $x_0=0$ 时，上式变成

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

例 **10.** 求初等函数的幂级数展开式.

(1) $f(x)=\mathrm{e}^x$ .... $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x\in R$

(2) $f(x)=\sin x$ .... $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in R$

求初等函数的幂级数展开式.

(1) $f(x)=(1+x)^\alpha$ .... $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_\alpha^n x^n$, $x\in(-1,1)$

(a) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1)$

(b) $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2\cdot 4}x^2+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots\ +(-1)^n\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots$, $x\in[-1,1]$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots\ +(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots$, $x\in[-1,1]$

例 **11.** 求初等函数的幂级数展开式.

(1) $f(x)=\ln(1+x)$ .... $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n,\ x\in(-1,1]$

(2) $f(x)=\arctan x$ .... $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1,1]$

(3) $f(x)=\cos x$ .... $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in R$

例 **12.** 求 $\arcsin x$ 的幂级数展开式.

解**.** 由 $(1+x)^{\alpha}$ 的幂级数展开式，可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots$$

等式两边从 0 到 x 积分，即有

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\cdots$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+C_{\alpha}^{1}x+C_{\alpha}^{2}x^2+C_{\alpha}^{3}x^3+\cdots+C_{\alpha}^{n}x^n+\cdots$$

例 **13.** 将函数 $e^{-x/3}$ 展成 x 的幂级数.

解. 由 e^x 的幂级数展开

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

易得

$$e^{-x/3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^n n!}.$$

例 **14.** 将函数 $\sin^2 x$ 展成 x 的幂级数.

解. 由条件 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, 将 $\cos x$ 的展开式中的 x 换成 $2x$, 得

$$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

于是

$$\begin{aligned}\sin^2 x&=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\\&=\frac{1}{2}\left[1-1+\frac{2^2x^2}{2!}-\frac{2^4x^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}x^{2n}}{2\cdot(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

例 **15.** 将函数 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $(x-1)$ 的幂级数.

解. 由条件可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+(x-1)}+\frac{1}{4+(x-1)}\right]\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n,\ (-1<x<3)$$

$$\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{4}\right)^n,\ (-3<x<5)$$

所以

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n,\ (-1<x<3)$$

例 **16.** 将函数 $\frac{1}{5-x}$ 展成 $x-2$ 的幂级数.

解**.** 令 $x-2=t$, 即 $x=t+2$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{5-x}&=\frac{1}{3-t}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}}\\&=\frac{1}{3}\cdot\left[1+\frac{t}{3}+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{t}{3}\right)^n+\cdots\right]\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}(x-2)+\frac{1}{3^3}(x-2)^2+\cdots\ -1<x<5\end{aligned}$$

练习 **3.** 将函数 $\ln(1-x^2)$ 展成 x 的幂级数.

练习 **4.** 将函数 $\frac{x}{x+1}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.