

第一章 集合与函数

一、单项选择题

1. 用区间表示满足不等式 $|x| > |x-4|$ 的所有 x 的集合是 ().
(A) $(-2, 2)$ (B) $(2, +\infty)$ (C) $(-\infty, -2)$ (D) $(-\infty, +\infty)$
2. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ 的定义域是 ().
(A) $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ (B) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$ (D) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
3. 函数 $f(x) = \begin{cases} x-3, & -4 \leq x \leq 0 \\ x^2+1, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$ 的定义域是 ().
(A) $-4 \leq x \leq 0$ (B) $0 \leq x \leq 3$
(C) $[-4, 3]$ (D) $\{x | -4 \leq x \leq 0\} \cap \{x | 0 < x \leq 3\}$
4. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 则 $f(x^2)$ 的定义域是 ().
(A) $[0, 4]$ (B) $[0, 2]$ (C) $[-2, 2]$ (D) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
5. 下列各组中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数的是 ().
(A) $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = x$ (B) $f(x) = x+1, g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
(C) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2\ln|x|$ (D) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, g(x) = \frac{|x|}{x}$
6. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2 \\ x+9, & -2 < x < 2 \\ 2^x, & x \geq 2 \end{cases}$, 则下列等式中不成立的是 ().
(A) $f(-2) = f(2)$ (B) $f(1) = f(4)$ (C) $f(-1) = f(3)$ (D) $f(0) = f(-3)$

7. 设 $y = f(x)$ 为单调增加函数, 则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的单调性为 ().
 (A) 单调增加 (B) 单调减少 (C) 有增有减 (D) 不能确定
8. 函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 在其定义域上是 ().
 (A) 有界奇函数 (B) 有界偶函数 (C) 无界奇函数 (D) 无界偶函数
9. 设 $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = 2x + 1$, 则复合函数 $f[g(x)] = ()$.
 (A) $4x^2 + 4x + 3$ (B) $4x^2 + 4x - 1$ (C) $2x^2 - 3$ (D) $x^2 + 2x + 1$
10. 下列函数必定是奇函数的是 ().
 (A) $y = f(x^2)$ (B) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
 (C) $y = f(x) - f(-x)$ (D) $y = 5$
11. 函数 $y = 10^{x-1} - 2$ 的反函数是 ().
 (A) $y = 1 + \lg(x+2)$ (B) $y = 1 + \lg(x-2)$
 (C) $y = 1 + \ln(x+2)$ (D) $y = 1 - \lg(x+2)$
12. 已知 $f(x)$ 是线性函数, 且 $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, 则 $f(x) = ()$.
 (A) $-2x$ (B) $2x$ (C) $x - 3$ (D) $x + 3$
13. $f(x) = x(e^x - e^{-x})$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是 ().
 (A) 有界函数 (B) 单调增加函数 (C) 偶函数 (D) 奇函数
14. 设 $f(x) = p \sin x + 2qx \cos x + x^2$, 其中 p, q 为常数, 已知 $f(2) = 3$, 则 $f(-2) = ()$.
 (A) 3 (B) 5
 (C) $p \sin 2 - 4q \cos 2 + 4$ (D) $8q \cos 2 + 5$
15. 设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $g(x) = 1-x$, 则 $f[g(x+1)] = ()$.
 (A) $\frac{-x}{1+x}$ (B) $\frac{x}{1+x}$ (C) $\frac{2x}{1-x}$ (D) $\frac{1+x}{x}$
16. 下列函数中为奇函数的是 ().
 (A) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| > 1 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & -1 < x < 0 \end{cases}$;
 (B) $\psi(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & |x| \geq 1 \end{cases}$;
 (C) $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{e^x}, & x < 0 \end{cases}$;
 (D) $h(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{1}{e^x}, & x < 0 \end{cases}$.

17. $f(x) = (\sin 3x)^2$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上为 ().
- (A) 周期是 3π 的周期函数 (B) 周期是 $\frac{\pi}{3}$ 的周期函数
(C) 周期是 $\frac{2\pi}{3}$ 的周期函数 (D) 不是周期函数
18. 函数 $f(x) = \ln \frac{a-x}{a+x} (a > 0)$ 是 ().
- (A) 奇函数 (B) 偶函数
(C) 非奇非偶函数 (D) 奇偶性决定于 a 的值
19. 设 $f(x) = \begin{cases} -x^3, & -3 \leq x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$, 则此函数是 ().
- (A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 有界函数 (D) 周期函数
20. 下列函数中一定没有反函数的是 ().
- (A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 单调函数 (D) 有界函数
21. 设 $f(x) = x|x|, x \in (-\infty, +\infty)$, 则 $f(x)$ ().
- (A) 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调减;
(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增;
(C) 在 $(-\infty, 0)$ 内单调增, 而在 $(0, +\infty)$ 内单调减;
(D) 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减, 而在 $(0, +\infty)$ 内单调增.
22. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则函数 $f\left(x + \frac{1}{4}\right) + f\left(x - \frac{1}{4}\right)$ 的定义域为 ().
- (A) $[0, 1]$ (B) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$ (C) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ (D) $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$
23. 函数 $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在其定义域上是 ().
- (A) 有界奇函数 (B) 有界偶函数 (C) 无界奇函数 (D) 无界偶函数

二、填空题

1. 函数 $f(x) = \arcsin(x^2 - x - 1)$ 的定义域 $D =$ _____.
2. 函数 $y = \ln \ln x$ 的定义域 $D =$ _____.
3. 函数 $f(x) = \arcsin(x^2 - x - 1)$ 的定义域 $D =$ _____.

4. 函数 $y = \ln \ln x$ 的定义域 $D =$ _____.

5. 函数 $y = \ln \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1}$ 的定义域 $D =$ _____.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$, 则 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

7. 设 $f(x) = \begin{cases} x+3, & 1 \leq x \leq 3 \\ \cos 2, & 3 < x \leq 5 \end{cases}$, 则 $f(x+2)$ 的定义域为_____.

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 则复合函数 $f(\sin x)$ 的定义域为_____.

9. 函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.

10. 设函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$, 则 $f[g(x)] =$ _____.

11. 设 $f(x) = \cos 2x$, $f[g(x)] = 1 - x^2$, 则 $g(x) =$ _____, $g(x)$ 的定义域为_____.

12. $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2 \\ x^2-1, & x \geq 2 \end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.

13. 已知 $f(x) = \sin x$, $f[\phi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\phi(x) = \arcsin(1 - x^2)$ 的定义域为_____.

14. 设 $f(x+1) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] =$ _____.

15. 若 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3$, 则 $f(x) =$ _____.

16. 函数 $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$ 的定义域为_____.

17. 设 $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{5}{t} + 2t^2$, 则 $f(t^2+1) =$ _____.

18. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域为_____.

19. 已知 $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, 则 $f[g(x)]$ 的定义域为_____.

20. 若 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 则 $f\{f[f(x)]\} =$ _____.

21. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 则 $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 的定义域为_____.

22. $f(x) = \log_2(\log_2 x)$ 的定义域为_____.

三、计算题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \leq 1 \\ 2x - x^2, & x > 1 \end{cases}$, 求 $f(1+a) + f(1-a)$, 其中 $a > 0$.

2. 设 $f(x-2) = x^2 - 2x + 3$, 求 $f(x+2)$.

3. 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^3 + x}{x^4 + 3x^2 + 1}$ ($x \neq 0$), 求 $f(x)$.

4. 设 $f(x) = \arcsin \frac{2x-1}{5} + \sqrt{\sin \pi x}$, 求 $f(x)$ 的定义域.

5. 设 $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$, 求 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域.

6. 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $\varphi(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

7. 求函数 $y = \ln \frac{a-x}{a+x}$ ($a > 0$) 的反函数的形式.

8. $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

9. 设 $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 及 $f[\varphi(x)]$.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 0 \\ \sqrt{x} + 1, & 0 \leq x \leq 4 \\ x - 1, & 4 < x < +\infty \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(x)$.

四、综合与应用题

1. 设 $y = 1 + a + f(\sqrt{x} - 1)$ 满足条件 $y|_{a=0} = x$ 及 $y|_{x=1} = 2$, 求 $f(x)$ 及 y .
2. 设 $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)} + \arcsin \frac{2x-1}{4}$, 求 $f(x)$ 的定义域.
3. 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.
4. 求函数 $y = x|x| + 4x$ 的反函数.
5. 判定函数 $f(x) = (e^{x+|x|} - 1) \cdot \ln(1 + |x| - x)$ 的奇偶性.
6. 设 $f(x)$ 对一切实数 x_1, x_2 成立 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$, 且 $f(0) \neq 0$, $f(1) = a$, 求 $f(0)$ 及 $f(n)$. (n 为正整数).
7. 某厂按年度计划消耗某种零件 48000 件, 若每个零件每月库存费 0.02 元, 采购费每次 160 元, 为节省库存费, 分批采购. 试将全年总的采购费和库存费这两部分之和 $f(x)$ 表示为批量 x 的函数.
8. 市场中某种商品的需求函数为 $q_d = 25 - p$, 而该种商品的供给函数为 $q_s = \frac{20}{3}p - \frac{40}{3}$, 试求市场均衡价格和市场均衡数量.
9. 某商品的成本函数 (单位: 元) 为 $C = 81 + 3q$, 其中 q 为该商品的数量. 试问:
 - (1) 如果商品的售价为 12 元/件, 该商品的保本点是多少?
 - (2) 售价为 12 元/件时, 售出 10 件商品时的利润为多少?
 - (3) 该商品的售价为什么不应定为 2 元/件?
10. 某商品的需求量 Q 是价格 P 的线性函数 $Q = a + bP$, 已知该商品的最大需求量为 40000 件 (价格为零时的需求量), 最高价格为 40 元/件 (需求量为零时的价格). 求该商品的需求函数与收益函数.
11. 收音机每台售价为 90 元, 成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 100 台以上的, 每多订购 1 台, 售价就降低 1 分, 但最低价为每台 75 元.
 - (1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;
 - (2) 将厂方所获的利润 l 表示为订购量 x 的函数;
 - (3) 某一商行订购了 1000 台, 厂方可获利润多少?

五、分析与证明题

1. 证明 $f(x) = (2 + \sqrt{3})^x - (2 - \sqrt{3})^x$ 是奇函数.
2. 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于 $x = a, x = b$ 均对称 ($a \neq b$), 试证:
 $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.