

第六章 定积分及其应用

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且不恒等于零, 则下列各式中不恒为常数的是 ().

(A) $f(b) - f(a)$ (B) $\int_a^b f(x) dx$ (C) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (D) $\int_a^x f(t) dt$

2. 下列选项中是广义积分的是 ().

(A) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ (B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ (C) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (D) $\int_{-1}^1 e^{-x} dx$

3. 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{2} - \sin x \right| dx = ()$.

(A) $\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{4} - 1$ (C) $1 - \frac{\pi}{4}$ (D) 0

4. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $I(u) = \int_a^u f(x) dx - \int_a^u f(t) dt$, $a < u < b$, 则 $I(u)$ ().

(A) 恒大于零 (B) 恒小于零 (C) 恒等于零 (D) 可正, 可负

5. 下列不等式中, 成立的是 ().

(A) $\int_1^e \ln^2 x dx > \int_1^e \ln x dx$ (B) $\int_e^{e^2} \ln^2 x dx > \int_e^{e^2} \ln x dx$
(C) $\int_1^{+\infty} x^3 dx > \int_1^{+\infty} x^2 dx$ (D) $\int_{-1}^{-2} x^4 dx > \int_{-1}^{-2} x^3 dx$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则对任意 $x \in [a, b]$, 下列式子正确的是 ().

(A) $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x)$ (B) $\frac{d}{dx} \int_x^b f(x) dx = f(x)$
(C) $\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x)$ (D) $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(t)$

7. 设 $I_1 = \int_3^4 \ln x dx$, $I_2 = \int_3^4 (\ln x)^3 dx$, 则 I_1 与 I_2 的大小关系是 ().

- (A) $I_1 = I_2$ (B) 不能确定 (C) $I_1 < I_2$ (D) $I_1 > I_2$

8. 设函数 $f(x)$ 为连续偶函数, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $F(-x) = ()$.

- (A) 0 (B) $F(x)$ (C) $-F(x)$ (D) 非零常数

9. [另附] 设函数 $f(x)$ 为连续奇函数, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $F(-x) = ()$.

- (A) 0 (B) $F(x)$ (C) $-F(x)$ (D) 非零常数

10. 设 $I_1 = \int_1^2 x^2 dx$, $I_2 = \int_1^2 x^4 dx$, 则 I_1 与 I_2 的大小关系是 ().

- (A) $I_1 = I_2$ (B) 不能确定 (C) $I_1 < I_2$ (D) $I_1 > I_2$

11. $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. 由 $y = x^3$, $y = 0$ 及 $x = 1$ 所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $\int_0^x f(t) dt = x^3 + \ln(x+1)$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. $\int_{-1}^1 (x^3 \cos x + 1) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. 设 $F(x) = \int_{x^2}^0 t e^{-t} dt$, 则 $F'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. $\int_{-1}^1 \left(x^2 \tan x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

18. 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. 曲线 $y = 2x^2$ 与直线 $y = 4x$ 围成平面图形的面积为_____.

20. 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-5x} dx =$ _____.

21. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{x^2} f(t) dt = x^4$, 则 $f(x) =$ _____.

22. 设 $y = \int_0^{x^3} \sqrt{1+t^2} dt$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

23. 计算定积分 $\int_0^4 \cos(\sqrt{x}-1) dx$.

参考答案: $4 \sin 1$.

24. (A班) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在区间 $(0, 1)$ 上大于零, 并满足 $xf'(x) - f(x) = \frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 且假设 $y = f(x)$ 与 $x = 1, y = 0$ 所围成的图形 S 的面积为 2. 求:

(1) $f(x)$;

(2) 当 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小? 其最小体积为多少?

参考答案: $f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + (4-a)x$; 当 $a = -5$ 时, 旋转体体积最小, 此时最小体积为 $V(-5) = \frac{9}{2}\pi$.

25. (B班) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续二阶导数且满足方程:

$$xf'(x) = f(x) + 140x^6.$$

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 是否存在函数 $f(x)$, 它在开区间 $(0, 1)$ 上大于零, 并满足上面的方程, 且曲线 $y = f(x) (x \in [0, 1])$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围成的图形 D 的面积为 2? 请说明理由.

参考答案: $f(x) = 28x^6 + Cx$; 不存在这样的函数.

26. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{2 + \sin x} + x^3 \cos x \right) dx$.

参考答案: $\ln 3$.

27. 计算定积分 $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

参考答案: $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

28. 过点 $(1, 2)$ 作抛物线 $y = x^2 + 1$ 的切线, 设该切线与抛物线及 y 轴所围的平面区域为 D .

(1) 求 D 的面积 A ;

(2) 求 D 绕 x 轴一周的旋转体体积 V_x .

参考答案: $S = \frac{1}{3}, V_x = \frac{8}{15}\pi$.

29. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.

参考答案: $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

30. 设函数曲线 $y = \ln x$, 试求:

(1) 曲线上 $x = e$ 处的切线方程;

(2) 曲线与切线以及 x 轴所围成的图形的面积;

(3) 该图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

参考答案: 切线方程为: $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, $S = \frac{1}{2}(e - 2)$, $V_x = \frac{6 - 2e}{3}\pi$.

31. 计算定积分 $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

参考答案: $\frac{\pi}{16}$.

32. 计算定积分 $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

参考答案: $4 - 2\sqrt{e}$.

33. 计算定积分 $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

参考答案: $\frac{\pi}{16}$.

34. 计算定积分 $\int_{-2}^4 |x^2 - 2x - 3| dx$.

参考答案: $\frac{46}{3}$.

35. 计算定积分 $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ (提示: 令 $t = \sqrt[4]{x}$, $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$)

参考答案: $2 + 4 \ln \frac{3}{2}$

36. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.

参考答案: $\frac{\pi}{8}$.

37. 设平面图形由曲线 $y = e^x$, 直线 $y = ex$, $x = 0$ 围成. 试求:

(1) 该图形的面积;

(2) 该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

参考答案: $\frac{1}{2}e - 1, \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3}e^2 - 1 \right)$.

38. 计算定积分 $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$.

参考答案: 2.

39. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$.

参考答案: $2 \left(e - \frac{1}{e} \right)$.

40. 求曲线 $y = \ln x$ 在区间 $(2, 6)$ 内的一条切线, 使得该切线与直线 $x = 2$, $x = 6$ 和该曲线所围成的平面图形的面积最小.

参考答案: 切线方程为 $y = \frac{1}{4}x - 1 + \ln 4$.

41. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

参考答案: 略.

42. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 (1-x)f(x) dx$$

参考答案: 略

43. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) < 0$, 证明函数

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$$

在 (a, b) 单调递减.

参考答案: 由 $F'(x) < 0$ 易得.

44. 设函数 $f(x)$ 为连续函数, 验证: $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$. 并利用此

结果计算积分 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

参考答案: $\frac{\pi^2}{4}$.