

第五章 不定积分

一、单项选择题

1. 设 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的原函数, 则下列各式中正确的是 ().

- (A) $\int f(x) dx = g(x) + C$; (B) $\int g(x) dx = f(x) + C$;
(C) $\int f'(x) dx = g(x) + C$; (D) $\int g'(x) dx = f(x) + C$.

2. 下列各式中等于 $f(x)$ 的是 ().

- (A) $\int df(x)$; (B) $d \int f(x) dx$; (C) $\int f'(x) dx$; (D) $(\int f(x) dx)'$.

3. $\int f(x) dx = \sqrt{2x^2+1} + C$ 则 $\int xf(2x^2+1)dx = ()$.

- (A) $x\sqrt{2x^2+1} + C$; (B) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1} + C$;
(C) $\frac{1}{4}\sqrt{2x^2+1} + C$; (D) $\frac{1}{4}\sqrt{2(2x+1)^2+1} + C$.

4. 函数 $\cos \frac{\pi}{2}x$ 的一个原函数是 ().

- (A) $\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}x$; (B) $\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x$; (C) $-\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}x$; (D) $-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x$.

5. $\int 3^x e^x dx = ()$.

- (A) $(3e)^x + C$; (B) $\frac{1}{3}(3e)^x + C$; (C) $3e^x + C$; (D) $\frac{(3e)^x}{1+\ln 3} + C$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} = ()$.

- (A) $\sqrt{1-2x} + C$; (B) $-\sqrt{1-2x} + C$; (C) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x} + C$; (D) $-2\sqrt{1-2x} + C$.

7. 设 $\int \frac{x}{f(x)} dx = \ln(1+x) + C$, 则 $\int \frac{f(x)}{x} dx = ()$.

- (A) $\frac{1}{\ln(1+x)} + C$; (B) $\frac{\ln(1+x)}{x} + C$; (C) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$; (D) $x + \frac{x^2}{2} + C$.

8. 不定积分 $\int \sin^2 \frac{x}{2} = (\quad)$.

(A) $2\cos^2 \frac{x}{2} + C$;

(B) $x + \sin x + C$;

(C) $\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$;

(D) $1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} + C$.

9. $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx = (\quad)$.

(A) $\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$;

(B) $-\frac{1}{\arcsin x} + C$;

(C) $\pm \frac{1}{\arcsin x} + C$;

(D) $-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$.

10. $\int x^5 e^{x^3} dx = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{3}e^x(x-1) + C$;

(B) $\frac{1}{3}e^{x^3}(x^3-1) + C$;

(C) $e^{x^3}(x^3-1) + C$;

(D) $e^{x^3}(x^3+1) + C$.

11. $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$, 则 $f'(x) = (\quad)$.

(A) $1/x$;

(B) $x \ln x - x + C$;

(C) $-1/x^2$;

(D) e^x .

12. $x^x(1+\ln x)$ 的原函数是 (\quad) .

(A) $\frac{1}{1+x} x^{x+1} + \ln x + C$;

(B) $x^x + C$;

(C) $x \ln x + C$;

(D) $\frac{1}{2}x^x \ln x + C$.

13. 当 $x < -1$ 时, $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$;

(B) $\arcsin \frac{1}{x} + C$;

(C) $-\arcsin \frac{1}{x} + C$;

(D) $\pm \arcsin \frac{1}{x} + C$.

14. $\int x^2 \sin 2x dx = (\quad)$.

(A) $\frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} \cos x + \sin 2x \right) + C$;

(B) $\frac{1-2x^2}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C$;

(C) $\frac{1-x^2}{4} (\cos 2x + \sin 2x) + C$;

(D) $\frac{1-x^2}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C$.

15. $\int (\arcsin x)^2 dx = (\quad) .$

- (A) $x(\arcsin x)^2 + C;$
 (B) $x(\arcsin x)^2 + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + C;$
 (C) $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C;$
 (D) $x(\arcsin x)^2 + \frac{2 \arcsin x}{3(1-x^2)^3} + C.$

16. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = (\quad) .$

- (A) $\tan x - \sec x + C;$
 (B) $\cot x - \csc x + C;$
 (C) $\tan \frac{x}{2} + C;$
 (D) $\tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + C.$

17. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = (\quad) .$

- (A) $\frac{1}{2} \arctan(\cos 2x) + C;$
 (B) $-\frac{1}{2} \arctan(\cos 2x) + C;$
 (C) $\arctan(-\cos 2x) + C;$
 (D) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + 1} \right| + C.$

18. 设 $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, 则 $I = (\quad) .$

- (A) $-2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + C;$
 (B) $2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + C;$
 (C) $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C;$
 (D) $-2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$

19. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = (\quad) .$

- (A) $x - \cos x - C;$
 (B) $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C;$
 (C) $\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$
 (D) $\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

20. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2} dx = (\quad) .$

- (A) $\frac{1}{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C;$
 (B) $\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{4(1+x^2)^2} + C;$
 (C) $-\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C;$
 (D) $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2(1+x^2)} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$

21. 将 $\frac{x+1}{x^2(x^2+1)(x^2+x+1)}$ 分解为部分分式, 下列做法中, 正确的做法是设它为 () .

- (A) $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{1+x^2} + \frac{c}{x^2+x+1}$; (B) $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{1+x^2} + \frac{c_1x+c_2}{x^2-x+1}$;
(C) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{1+x^2} + \frac{d}{x^2+x+1}$; (D) $\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_1x+b_2}{1+x^2} + \frac{c_1x+c_2}{x^2+x+1}$

22. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + 1} dx = ()$.

- (A) $\ln|\sin^2 x + 1| + C$; (B) $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C$;
(C) $x - \arctan(\sqrt{2}x) + C$; (D) $x - \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

23. $I = \int e^{2x} \sin 3x dx = ()$.

- (A) $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x - 2\cos 2x) + C$; (B) $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 2x) + C$;
(C) $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C$; (D) $\frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C$.

24. 已知函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, 且 $F(\frac{\pi}{4}) = 0$, 则 $F(x) = ()$.

- (A) $\ln|1 + \cos^2 x| - \ln \frac{3}{2}$;
(B) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$;
(C) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - \sin x}{\sqrt{2} + \sin x} \right|$;
(D) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - \sin x}{\sqrt{2} + \sin x} \right| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|3 - 2\sqrt{2}|$.

25. 设 $f(x) \neq 0$, 且有连续的二阶导数, 则 $\int \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{(f'(x))^2}{(f(x))^2} \right\} dx = ()$.

- (A) $\frac{f'(x)}{f(x)} + C$; (B) $\frac{f(x)}{f'(x)} + C$; (C) $f(x)f'(x) + C$; (D) $[f'(x)]^2 + C$.

二、填空题

1. 设 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int \sin x f(\cos x) dx =$ _____.

2. 设 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int f(\sin x) \cos x dx =$ _____.

3. 设 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则 $\int x f'(x)dx =$ _____.
4. 如果等式 $\int f(x)e^{-\frac{1}{x}}dx = -e^{\frac{1}{x}} + C$ 成立, 则函数 $f(x) =$ _____.
5. 设 $\int x f(x)dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)}dx =$ _____.
6. 若 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则 $\int e^{-x} f(e^{-x})dx =$ _____.
7. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx =$ _____.
8. 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x f(x)dx =$ _____.
9. 若 $f(x) = e^{-x}$, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx =$ _____.
10. 若 $\int f(x)dx = x^2 + C$, 则 $\int x f(1-x^2)dx =$ _____.
11. 如果 $\frac{2}{1+x^2}f(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]^2$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.
12. $\int x^2 \sqrt{1+x^3}dx =$ _____.
13. 若函数 $f(x^2-1) = \ln \frac{x^2}{x^2-2}$, 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 则 $\int \varphi(x)dx =$ _____.
14. 设 $f'(\ln x) = 1+x$ ($x > 0$), 则 $f(x) =$ _____.
15. $\int \frac{f(x) - x f'(x)}{f^2(x)}dx =$ _____.
16. $f'(\cos x + 2) = \sin^2 x + \tan^2 x$, 则 $f(x) =$ _____.
17. 设 $f(x)$ 连续可导, 则 $\int f'(2x)dx =$ _____.
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} =$ _____, 其中 a 是正的常数.

19. 已知 $\frac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x) \cdot \frac{\cos x}{x} dx =$ _____.

20. 已知曲线上任一点的二阶导数 $y'' = 6x$, 且在曲线上 $(0, -2)$ 处的切线为 $2x - 3y = 6$, 则这条曲线方程为 _____.

三、计算题

1. $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$

2. $\int \tan^{10} x \cdot \sec^2 x dx$

3. $\int \sin^5 x dx$

4. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$

5. $\int x \cdot \sqrt[4]{x+9} dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

7. $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

9. $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$

10. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx$

11. $\int (x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$

12. 求 $\int \frac{3^x 5^x}{(25)^x - 9^x} dx$

13. 求 $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$

14. 求 $\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4} dx$.

15. 求 $\int \frac{x^2 \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

16. 计算积分 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{(x+1)^2} dx$

17. 计算积分 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx$.

18. 求不定积分 $\int \frac{x dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x-12}}$.

19. 求不定积分 $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$.

20. 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$

21. 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$

22. 求不定积分 $\int \frac{dx}{1+\tan x}$.

23. 求 $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}} dx$

四、综合与应用题

1. 一质点作直线运动，已知其加速度为 $a = 12t^2 - 3 \sin t$. 如果 $v(0) = 5$, $s(0) = -3$, 求:

- (1) 速度 v 与时间 t 的关系;
- (2) 位移 s 与时间 t 的关系.

2. 一曲线通过点 $(e^2, 3)$, 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

3. 导出计算积分 $I_n = \int \tan^n x \, dx$ 的递推公式, 其中 n 为自然数.

$$I_1 = \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C, \quad I_0 = \int dx = x + C.$$

4. 若 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\ln x}{x}$, 问 $f(x)$ 与 $\frac{\ln x}{x}$ 间有什么关系? 并求 $\int x f'(x) dx$.

5. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y^2(x - y) = x^2$ 所确定的隐函数, 试求 $\int \frac{dx}{y^2}$.

6. 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$.

7. 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 计算 $\int f(x) dx$.

8. 设 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$, 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 求 $\int \varphi(x) dx$.

9. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的不定积分.

10. 在什么条件下, 积分 $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$ 表示有理函数?

11. 设 $f(x)$ 是单调连续函数, $f^{-1}(x)$ 是它的反函数, 且 $\int f(x) dx = F(x) + C$. 求 $\int f^{-1}(x) dx$.

12. 设 $f'\left(x \tan \frac{x}{2}\right) = (x + \sin x) \tan \frac{x}{2} + \cos x$, 求 $f(x)$.

五、分析与证明题

1. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $f(x)$ 可微且其反函数 $f^{-1}(x)$ 存在, 则

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C.$$

2. 证明函数 $\frac{1}{2}e^{2x}$, $e^x \operatorname{sh} x$ 和 $e^x \operatorname{ch} x$ 都是 $\frac{e^x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$ 的原函数.

3. 设 $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, 证明: $y = \frac{x^2}{2} \operatorname{sgn} x$ 是 $y = |x|$ 的原函数.