第三章　导数、微分、边际与弹性

一、单项选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1-x)}{x}=(\quad)$.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 3

2. 函数 $f(x)=|x|^3$ 在 $x=0$ 处满足下列哪个结论 $(\quad)$.

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在，不连续

(C) 连续，不可导　　(D) 可导

3. 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续是 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导的 $(\quad)$.

(A) 充分但非必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

4. 设函数 $f(x)$ 可导，记 $g(x)=f(x)+f(-x)$，则导数 $g'(x)$ 为 $(\quad)$.

(A) 奇函数　　(B) 偶函数　　(C) 非奇非偶　　(D) 奇偶性不定

5. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处 $(\quad)$.

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

(C) 可导，且 $f'(0)=0$　　(D) 可导，且 $f'(0)=1$

6. 设 e^{2x} 为 $f(x)$ 的导函数，则 $f''(x)=(\quad)$.

(A) e^{2x}　　(B) $2e^{2x}$　　(C) $4e^{2x}$　　(D) 0

7. 设 $f'(0)=2$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)-f(0)$ 是 x 的 $(\quad)$.

(A) 低阶无穷小量　　(B) 同阶无穷小量　　(C) 高阶无穷小量　　(D) 等价无穷小量

8. 设 $f(x)=x\ln 2x$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=2$，则 $f(x_0)=$ (　　).

(A) 1　　(B) $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$　　(C) $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　(D) e^2

9. 曲线 $y=x\ln x-x$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处的切线方程是 (　　).

(A) $y=\mathrm{e}-x$　　(B) $y=x-\mathrm{e}$　　(C) $y=x-\mathrm{e}+1$　　(D) $y=\mathrm{e}+x$

10. 设 $f(x)$ 可导且 $f'(-2)=2$，又 $y=f(-x^2)$，则 $\mathrm{d}y|_{x=\sqrt{2}}=$ (　　).

(A) $2\,\mathrm{d}x$　　(B) $-2\,\mathrm{d}x$　　(C) $4\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$　　(D) $-4\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$

11. 设 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ (　　).

(A) $f'(x)$　　(B) $f'(0)$　　(C) $f(0)$　　(D) $\frac{1}{2}f(0)$

12. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则该函数在 $x=0$ 处 (　　).

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

13. 设 $y=f(x)$，已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+2x)}{6x}=3$，则 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=$ (　　).

(A) $-9\,\mathrm{d}x$　　(B) $18\,\mathrm{d}x$　　(C) $-3\,\mathrm{d}x$　　(D) $2\,\mathrm{d}x$

14. 设 $y=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，$y'|_{x=0}=$ (　　).

(A) 0　　(B) $-5!$　　(C) -5　　(D) -15

15. 设可微函数 $y=f(x)$，如果 $f'(x_0)=0.5$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是 (　　).

(A) Δx 的等价无穷小　　(B) Δx 的同阶但不等价的无穷小

(C) Δx 的低阶无穷小　　(D) Δx 的高阶无穷小

16. 下列函数中，在点 $x=0$ 处可导的是 (　　).

(A) $f(x)=|x|$　　(B) $f(x)=|x-1|$

(C) $f(x)=|\sin x|$　　(D) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x & x>0 \end{cases}$

17. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为 ( ).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

18. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2g(x) & x\le0\end{cases}$ 其中 $g'(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ( ).

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可导　　(D) 可导

19. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\left(1/x^2\right) & x\ne0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ( ).

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

20. 设 $F(x)=\max\left[f_1(x),f_2(x)\right]$，$0<x<2$，其中 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=x^2$，则 ( ).

(A) $F'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<0.5\\ 2x & 0.5<x<2\end{cases}$　　(B) $F'(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le1\\ 2x & 1<x<2\end{cases}$

(C) $F'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 2x & 1\le x<2\end{cases}$　　(D) $F'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 2x & 1<x<2\end{cases}$

二、填空题

1. 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $\mathrm{d}y=$____________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$____________.

3. 设 (x_0,y_0) 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点，若在该点的切线过原点，则系数应满足的关系是____________.

4. 设 $y=f(x)$，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+2h)}{6h}=3$，则 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=$____________.

5. 设 $f\left(\sqrt{x}\right)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则 $f''(x)|_{x=1}=$____________.

6. 设 $f(x)$ 具有二导数，且 $f'(x)=\left[f(x)\right]^2$，则 $f''(x)=$____________.

7. 设函数 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n)$（其中 n 为正整数），则 $f'(0)=$____________.

8. 曲线 $y=(1+x)e^x$ 在点 $x=0$ 处的切线方程为 $y=$____________.

9. 设 $f(x)=x^2$，则 $f'[f(x)]=$____________.

10. 某商品的需求量 Q 与价格 P 的关系为 $Q=P^5$，则需求量 Q 对价格 P 的弹性是____________.

11. 设函数 $f(u)$ 二阶可导，且 $y=f(\ln x)$，则 $y''=$____________.

12. 设 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$，则 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=$____________.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $y=f\left(x^{2006}\right)+[f(x)]^{2006}$，则 $\frac{dy}{dx}=$____________.

14. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，则 $\frac{dy}{dx}=$____________.

15. 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$____________.

16. 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}|x|$ 在点 $x=0$ 处的导数 $f'(0)=$____________.

17. 设 $y=2x+1$，则其反函数 $x=x(y)$ 的导数 $x'(y)=$____________.

18. 设 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$____________

19. 问自然数 n 至少多大，才能使 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处二阶可导（$f''(0)$ 存在），并求其值.____________.

三、计算题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x\le 0 \\ e^x+1, & x>0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

2. 设 $y=\dfrac{x\arctan x}{1+x}$，求 $\mathrm{d}y$.

3. 设 $y=3^{x}+x^{3}+x^{\cos 3x}$, 求 y'.

4. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=f\left[x+g\left(y\right)\right]$. 所确定，其中 f 和 g 均可导，求 y'.

5. 设 $y=x\cdot\arctan\frac{1}{x}+\ln\sqrt{1+x^{2}}$，求 y'.

6. 设 $y=\dfrac{(x+1)^{2}\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x+2)^{2}}}$，求 y'.

7. 已知 $y^{x}=x^{y}$，求 y'.

8. 由 $\mathrm{e}^{x^{2}+y^{2}}+\sin\left(xy\right)=5$ 确定 y 是 x 的函数 $y(x)$，求 $y'(x)$.

9. 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{y}-xy=0$ 确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}^{2}y}{\mathrm{d}x^{2}}\right|_{x=0}$

10. 设 $\begin{cases}x=2\sin 3t\\ y=\mathrm{e}^{t}+\ln 2\end{cases}$,求 $\dfrac{\mathrm{d}^{2}y}{\mathrm{d}x^{2}}$.

11. 设曲线方程为 $\begin{cases}x=t+\sin t+2\\ y=t+\cos t\end{cases}$,求此曲线在点 $x=2$ 处的切线方程，及 $\dfrac{\mathrm{d}^{2}y}{\mathrm{d}x^{2}}$.

12. 设 $f(x)$ 存在二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

13. 设曲线 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $y=f\left(\sin^{2}x\right)+f(\cos^{2}x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

四、综合与应用题

1. 一人以 2m 每秒的速度通过一座高 20m 的桥，此人的正下方有一小船以 $\dfrac{4}{3}$ m 每秒的速度与桥垂直的方向前进，求第 5 秒末人与船相离的速率。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}k+\ln(1+x) & x\geq 0\\ \mathrm{e}^{\sin x} & x<0\end{cases}$，当 k 为何值时，点 $x=0$ 处可导；此时求出 $f'(x)$.

3. 若 $y=f(x)$ 是奇函数且在点 $x=0$ 处可导，则点 $x=0$ 是函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 什么类型的间断点？说明理由.

4. 试确定常数 a,b 的值，使得函数 $f(x)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^x+a & x<0 \\ x^2+bx+1 & x\ge 0 \end{cases}$ 处处可导.

5. 已知某商品的需函数为 $Q=\dfrac{1200}{P}$，试求：

(1) 从 $P=30$ 到 $P=20,25,32,50$ 各点间的需求弹性；

(2) $P=30$ 时的需求弹性，并说明其经济意义。

6. 设 $f(x)$ 对任何 x 满足 $f(x+1)=2f(x)$, 且 $f(0)=1$，$f'(0)=C$ (常数)，求 $f'(1)$.

7. 试确定常数 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases} \cos 3x & x\le 0 \\ b\mathrm{e}^x+a & x>0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处可导.

8. 设 $f(x)=\begin{cases} \cos x & x\le 0 \\ ax^2+bx+c & x>0 \end{cases}$, 求 a,b,c 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导.

五、分析与证明题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f\left(x+y\right)=f(x)+f\left(y\right)+xy$，且 $f'(0)=1$，证明 $f'(x)=1+x$

2. 设 $f(x)=g(x)\sin^{\alpha}(x-x_0)$ $(\alpha>1)$，其中 $g(x)$ 在 x_0 处连续，证明：$f(x)$ 在 x_0 处可导。

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且在 $x=0$ 处连续，对任意的 x_1，x_2 均有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2).$$

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

(2) 又设 $f'(0)=a$ (常数)，证明 $f(x)=ax$.

4. 设函数 $f(x)$ 对任何实数 x_1，x_2 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. 且 $f'(0)=1$, 证明：函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)=1$.

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}$, 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，但右导数不存在.