第一章　随机事件的概率

人们所观察到的现象大体上分成两类：

1. 确定性现象: 在一定条件下必然发生的现象；
2. 不确定性现象: 在一定条件下可能发生也可能不发生的现象.
   (a) 个别现象 不能重复试验
   (b) 随机现象: 可以重复试验, 并且结果呈现某种规律

- 太阳东升西落 (确定)
- 明天是否是晴天 (不确定)
- 抛一枚均匀的硬币, 正面是否向上 (不确定)

概率论与数理统计就是研究随机现象量的规律性的数学学科.

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与样本空间

产生观测结果的行为或过程称为试验.

E1 掷一颗骰子, 观察所掷的点数是几；

E2 将一枚硬币抛两次, 观察正面 H 出现的次数;

E3 将一枚硬币抛两次, 观察正面 H, 反面 T 出现的情况;

E4 观察某产品的使用寿命;

E5 观察某地明天的天气是雨天还是非雨天.

一个试验被称为随机试验, 如果它满足条件:

1. 可能结果不止一个, 结果明确;
2. 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

小注: 可以在相同的条件下重复进行的随机试验称为可重复的随机试验 (E1–E4), 否则称为不可重复的随机试验 (E5).

在不引起混淆的情况下, 我们将用随机试验或试验指代可重复的随机试验.

随机试验的每个可能结果称为一个样本点, 全体样本点组成的集合称为样本空间.

习惯上分别用 ω 和 Ω 表示样本点与样本空间.

例 **1.** 求以下随机试验的样本空间

(1) 掷两枚硬币, 观察正、反面出现的情况;

$$\{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$$

(2) 记录某地的最低与最高气温.

$$\{(x, y) | a \le x \le y \le b\}$$

其中 a, b 分别为该地气温的下界和上界.

1.1.2 随机事件

样本空间 Ω 的任意一个子集称为一个随机事件, 简称事件.

事件常用大写字母 A,B,C 等表示.

设 A 是一个事件, 当试验中出现的样本点 $\omega\in A$ 时, 称事件 A 发生.

随机事件的分类:

1. 只含一个样本点的事件称为基本事件
2. 含有多于一个样本点的事件称为复合事件
3. Ω:必然事件
4. $\varnothing$:不可能事件

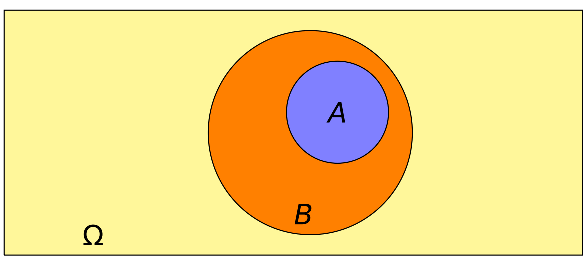
1.1.3 事件的关系与运算

事件是一个集合, 因此事件间的关系和运算可以按照集合之间的关系和运算来规定. 设试验 E 的样本空间为 Ω, $A,B,C,A_k(k=1,2,3,...)$

为 Ω 的子集.

若 $A\subset B$ (或 $B\supset A$), 则称事件 A 是事件 B 的子事件

(或事件 B 包含 事件 A).



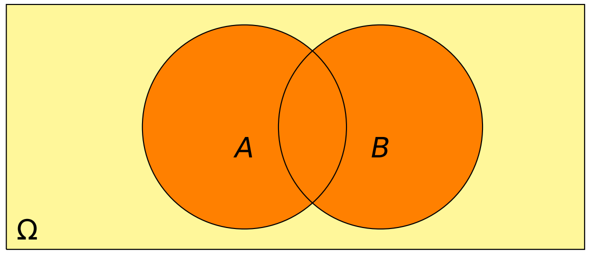
含义:若事件 A 发生时, 事件 B 一定发生.

小注:对任意事件 A, 有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$, 即 $A=B$, 则称事件 A 与 B 相等.

称事件 $A\cup B$ 为事件 A 与 B 的和事件, 其中

$A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.



含义： 事件 A、B 至少有一个发生.

事件的和可以推广到多个的情形：如 n 个事件的和事件

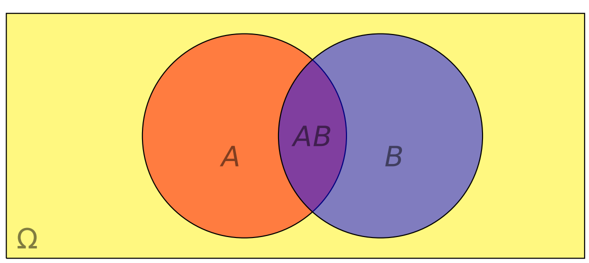
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件 } A_1, \ldots, A_n \text{ 至少有一个发生”}$$

可数个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2 \ldots, \text{ 至少有一个发生”}$$

称事件 $A \cap B$ (简记为 AB) 为事件 A 与 B 的积事件, 其中

$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{且} \omega \in B\}.$$



含义：事件 A 和 B 同时发生.

事件的积可以推广到多个的情形：如 n 个事件的积事件

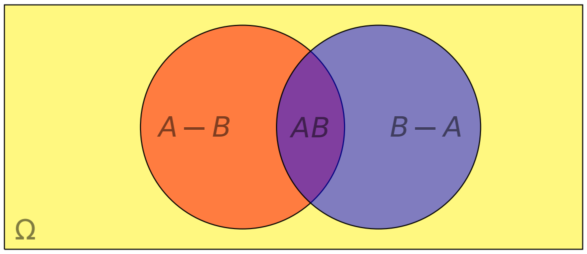
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件 } A_1, \ldots, A_n \text{ 全都发生”}$$

可数个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2 \ldots, \text{ 全都发生”}$$

称事件 $A-B$ 为事件 A 与 B 的差事件, 其中

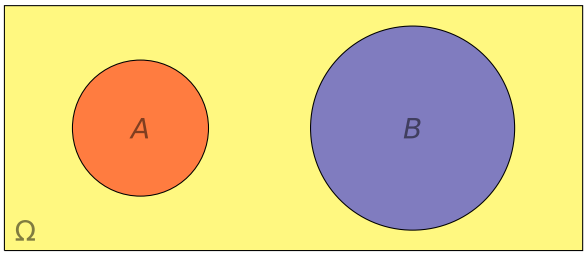
$$A-B = \{\omega | \omega \in A \text{且} \omega \notin B\}.$$



含义：事件 A 发生, 但 B 不发生.

性质：对任意两个事件 A 和 B, 总有 $A-B = A - A \cap B$.

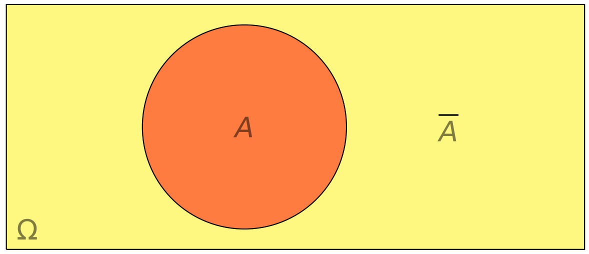
若 $A \cap B = \varnothing$, 则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥).



含义：事件 A 与 B 不可能同时发生.

称 $\Omega - A$ 为事件 A 的对立事件(或逆事件), 记为 $\overline{A}$.

含义：事件 A 不发生.



性质:

1. 由差事件与对立事件的定义, 显然 $A-B=A\cap\overline{B}$.
2. 事件 A、B 对立当且仅当 A、B 互斥且 $A\cup B=\Omega$.

集合运算的所有规律都适用于事件计算:

1. 交换律: $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$
2. 结合律: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
3. 分配律: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
4. 对偶律: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

例 **2.** 一名射手连续向某个目标射击三次, 事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标 $(i=1,2,3)$. 试用事件的运算符号表示下列事件:

(1) 三次射击至少有一次击中目标;

(2) 三次射击恰有两次击中目标;

(3) 三次射击至多有一次击中目标.

解. 由条件可得

(1) $A_1\cup A_2\cup A_3$.

(2) $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

(3) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

试验者	投掷次数	正面次数	频率
德摩根	2048	1061	0.5181
浦丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

1.2 随机事件的概率

事件的概率：刻画试验中随机事件发生的可能性大小的度量.

在概率论的发展历史上, 曾有过多种概率定义方法：

1. 概率的古典定义
2. 概率的统计定义
3. 概率的公理化定义

1.2.1 事件的频率

定义 **1.** 设在 n 次试验中, 事件 A 发生了 m 次, 则称

$$f_n(A) := \frac{m}{n}$$

为事件 A 发生的频率 *(frequency)*.

历史上的掷硬币试验：

在相同条件下重复进行的试验中, 若随着试验次数 n 的增加, 事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近, 则称 p 为事件 A 的概率, 记作 $P(A) = p$.

也就是说：概率是频率的稳定值. 意义：实际应用中常将大量重复试验中事件的频率作

为概率的近似估计.

频率的性质:

1. $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
2. $f_n(\Omega) = 1$, $f_n(\varnothing) = 0$;
3. 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 两两互斥, 则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

定义 **2.** 设 Ω 是样本空间, 对每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$ 与之对应. 若函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件:

1. 非负性: 对任意事件 A, 均有 $P(A) \geq 0$;

2. 规范性: $P(\Omega) = 1$;

3. 可列加性*:* 若事件序列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 两两互斥, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_n(A_i)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率 *(probability)*.

1.2.2 概率的性质

由概率的定义, 不难得出概率的一些性质:

性质 1 $P(\varnothing) = 0$.

证明. 因为 $\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \cdots$, 且 $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$,

由规范性及可列可加性得

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing \cup \cdots) = P(\Omega) + P(\varnothing) + \cdots$$

由概率的非负性可得 $P(\varnothing) = 0$.

性质 2(有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

性质 3 若事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A).$$

证明. 易知 $B = A \cup (B - A)$, 且 $A \cap (B - A) = \varnothing$.

由概率的可列可加性可知

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A),$$

移项可得

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

由概率的非负性可得 $P(B - A) \geq 0$, 即

$$P(B) \geq P(A).$$

推论：对任意事件 A, B, 有 $P(B - A) = P(B) - P(AB)$.

性质 4 对任一事件 A, $P(A) \leq 1$.

证明: 因为 $A \subset \Omega$, 由性质 3可得. 性质 5对任一事件 A, 有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明. 因为 $A \cup \overline{A} = \Omega$, 且 $A \cap \overline{A} = \varnothing$, 由有限可加性可得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

也即

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质 6: (加法公式) 对任意两个事件 A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明： 因为

$$A \cup B = A \cup (B - AB),$$

且

$$A(B-AB)=\varnothing,\ AB\subset B,$$

由性质 2 和性质 3 可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推论 1 对任意三个事件 A_1,A_2,A_3, 有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)\\&+P(A_1A_2A_3)\end{aligned}$$

推论 2 对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 有

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=&\sum_{k=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P\left(A_iA_j\right)\\&+\sum_{1\le i<j<k\le n}P\left(A_iA_jA_k\right)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).\end{aligned}$$

例 **1.** 设 A,B 为两事件, $P(A)=0.3$, $P(A\cup B)=0.6$,

求 $P(A\overline{B})$.

解. 易知

$$A\overline{B}=A(\Omega-B)=A-AB,$$

故

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB).$$

又因为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

所以

$$P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3.$$

例 **2.** 设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$, 求证 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$

证明. 由对偶率易知 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$, 故

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}\,\overline{B}) &= P(\overline{A\cup B}) \\
&= 1-P(A\cup B) \\
&= 1-[P(A)+P(B)-P(AB)] \\
&= 1-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB)\right] \\
&= P(AB).
\end{aligned}
$$

1.2.3 等可能概型 (古典概型)

对某些特殊类型的随机试验，要确定事件发生的概率，并不需要作重复试验，而是根据人类长期积累的关于 “对称性” 的实际经验，提出数学模型，直接计算出来，从而给出概率相应的定义．这类试验称为等可能概率模型或古典概型．

定义 **3.** 如果一个随机试验具有以下特点：

1. 样本空间只含有限多个元素 (样本点)；
2. 基本事件发生的可能性相同,

则称此随机试验是等可能概型或古典概型．此时对每个事件 $A\subset\Omega$,

$$
P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}
$$

称为事件 A 的古典概率.

例 **3.** 将一枚硬币抛两次,

(1) 设事件 A_1 为" 恰好出现一次正面” , 求 $P(A_1)$;

(2) 设事件 A_2 为" 至少出现一次正面", 求 $P(A_2)$.

解. 易知试验的样本空间为

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

故

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = 0.5,\ P(A_2) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

加法原理: 设完成一件事有 k 类方式, 每类方式分别有 $n_1, ..., n_k$ 种方法, 则完成这件事一共有

$$n_1 + \cdots + n_k$$

种方法.

特点: 一步完成.

乘法原理: 设完成一件事有 k 个步骤, 每一步需要 $n_1, ..., n_k$ 种方法, 则完成这件事一共有

$$n_1 n_2 \cdots nk$$

种方法.

特点: 多步完成.

排列数: 从 n 个元素中取 k 个不同元素排成一列的所有个数, 记为 A_n^k.

排列数公式:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

组合数: 从 n 个不同元素中, 取出 $m(m \le n)$ 个元素

的所有组合的个数, 记为 C_n^k 或 $\binom{n}{k}$.

组合数公式:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

例 **4** (无放回抽样). 设袋中有只 4 白球和 2 只黑球, 现从袋中无放回地依次摸出 2 只球 *(*即取出的球不放回*)*. 试求

(1) 取到到的两只球都是白球的概率;

(2) 取到的两只球颜色相同的概率;

(3) 到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解. 记 $A=\{$取到到的两只球都是白球$\}$ $B=\{$取到到的两只球都是黑球$\}$ $C=\{$取到到的两只球至少有一白球$\}$ $D=\{$取到到的两只球颜色相同$\}$ *(1)* 由古典概率模型:

$$P(A)=\frac{A_4^2}{A_6^2}=\frac{2}{5},\ P(B)=\frac{A_2^2}{A_6^2}=\frac{1}{15}.$$

(2) 因为 $D=A\cup B$ 且 $AB=\varnothing$, 故由概率有限可加性,

$$P(D)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{15}$$

因为 $C=\overline{B}$, 故 $P(C)=P(B)=1-P(B)=\frac{14}{15}$

例 **5.** 将 n 个球随机地放入 $N(N\geq n)$ 个盒子中去, 盒子的容量不限, 试求

(1) 每个盒子至多有一只球的概率;

(2) n 个盒子中各有一球的概率.

解. 由条件知, 这是一个古典概型问题, 每一种放法是一个基本事件. 因为每个球有 N 种放法, 由乘法原理, 共有 N^n 种放法.

(1) 每个盒子中至多只有一只球, 共有

$$N(N-1)\cdot(N-n+1)$$

种放法, 故所求概率为

$$p=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}.$$

(2) n 个盒子的选法有 C_N^n 种方法, 对选定的 n 个盒子, 每个盒子各有一个球的放法有 $n!$ 种. 由乘法原理,

共有 $n!C_N^n$ 种放法, 因此所求概率为

$$p = \frac{n!C_N^n}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}.$$

例 **6** (抽签的公平性)**.** 袋中有 a 个红球和 b 个白球, 每次从袋中任取一个球且不放回. 用事件 A_n 表示第 n 次取到红球, $1 \le n \le a+b$, 试证明

$$P(A_n) = \frac{a}{a+b},$$

即 A_n 发生的概率与 n 无关.

解**.** 考虑到取球顺序, 从 $a+b$ 个球中选取 n 个球共

有 A_{a+b}^n 种取法, 即

$$n(\Omega) = A_{a+b}^n = (a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-n+1).$$

在第 n 次取到红球共有 a 种取法, 而前面 $n-1$ 次共 A_{a+b-1}^{n-1} 种取法, 即

$$n(A_n) = A_{a+b-1}^{n-1} \cdot a = (a+b-1)\cdots(a+b-n+1) \cdot a.$$

由古典概率模型, 所求的概率为

$$P(A_n) = \frac{n(A_n)}{n(\Omega)} = \frac{a}{a+b}.$$

实际推断原理： 概率很小的事件在一次试验中实际上几乎不会发生.

例 **7.** 一位常饮奶茶的女士称：她能从一杯冲好的奶茶中辨别出该奶茶是先放牛奶还是先放茶. 做了 10 次测试, 结果是她都正确地辨别出来了. 问该女士的说法是否可信?

解**.** 假设该女士的说法不可信, 即纯粹是靠运气猜对的. 在此假设下, 每次试验的两个可能结果为:

奶 + 茶 或 茶 + 奶

且它们是等可能的, 因此是一个古典概型问题. 10 次

试验一共有 2^{10} 个等可能的结果, 10 次都猜对的概率为:

$$p = \frac{1}{2^{10}} = 0.0009766$$

由实际推断原理, 该女士的说法可信.

1.2.4 几何概型

古典概型是关于试验的结果为有限个, 且每个结果出现的可能性相同的概率模型. 一个直接的推广是：保留等可能性, 而允许试验具有无限多个结果的.

定义： 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度 (面积或体积或度数) 成比例, 则称这样的概率模型为几何概率模型.

几何概型中, 事件 A 的概率：

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

例 **8** (会面问题)**.** 甲乙两人相约在早上 8 点到 9 点在某地会面, 先到者等候另一人 20 分种, 过时则离开. 假设两人可以在指定时间内任意时刻到达, 试计算两人会面的概率.

解**.** 记 8 点为计算时刻的 0 时刻, 以分钟为时间单位, 以 x,y 分别表示甲、乙到达的时刻, 则样本空间为

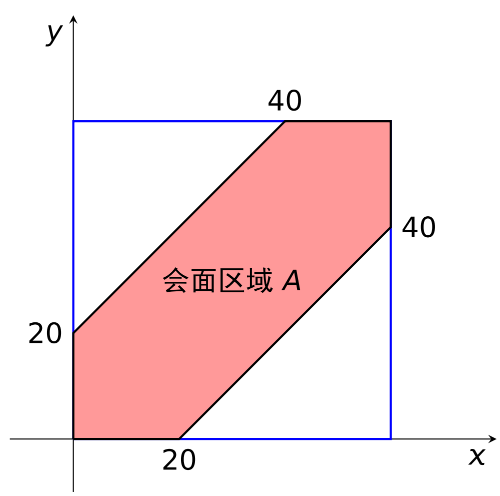
$$\Omega=\{(x,y)|0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60\}.$$

甲、乙能够会面的充要条件为

$$|x-y|\le 20,\ (x,y)\in\Omega.$$

样本空间及事件的几何表示如图所示, 由几何概型的计算公式得

$$p=S(A)/S(\Omega)=\frac{5}{9}.$$



1.3　条件概率

1.3.1　条件概率

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的概率, 称为条件概率, 记为 $P(B|A)$.

有时为了强调区别, 也称 $P(B)$ 为无条件概率.

例 **1.** 一个家庭中有两个小孩, 已知其中一个是女孩, 问另一个也是女孩的概率是多少?（假定生男生女是等可能的）

解**.** 由题意, 样本空间为

$$\Omega = \{(\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女})\ (\text{女}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}.$$

A 表示事件“至少有一个是女孩”, B 表示事件“两个

都是女孩”, 则有

$$A = \{(\text{女}, \text{女}), (\text{男}, \text{女})\ (\text{女}, \text{男})\},$$

$$B = \{(\text{女}, \text{女})\}.$$

由于事件 A 已经发生, 所以这时试验的所有可能结果只有三种, 而事件包含的基本事件只占其中的一种, 所以有

$$P(B|A) = \frac{1}{3}$$

在这个例子中, 若不知道事件已经发生的信息, 那么事件发生的概率为

$$P(B) = \frac{1}{4} \neq P(B|A).$$

原因：事件 A 的发生改变了样本空间.

注意到

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(AB) = \frac{1}{4}$$

于是

$$P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

定义 **1.** 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下, 事件 B 的条件概率.

小注：条件概率 $P(\cdot|A)$ 是概率 (满足非负性、规范性、可列可加性三个条件).

计算：根据具体的情况, 可选用下列两种方法之一来计算条件概率 $P(B|A)$

1. 在缩减后的样本空间 Ω_A 中计算；

2. 在原来的样本空间 Ω 中, 直接由定义计算.

例 **2.** 一袋中有 10 个球, 其中 3 个黑球, 7 个白球, 依次从袋中不放回取两球.

(1) 已知第一次取出的是黑球, 求第二次取出的仍是黑球的概率；

(2) 已知第二次取出的是黑球, 求第一次取出的也是黑球的概率.

解. 记 $A_i = \{第\ i\ 次取到黑球\}(i = 1, 2)$.

(1) 第一次取到黑球, 则第二次取到黑球的方法有两种, 所有可取的球有 *9* 个. 故

$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{9}$$

(2) 因为

$$P(A_1A_2) = \frac{3 \times 2}{10 \times 9} = \frac{1}{15}, \ P(A_2) = \frac{3}{10},$$

所以

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{2}{9}.$$

例 **3.** 保险公司按年向车主收取保险费, 并承担交通事故的赔偿费用. 假设车主一年内发生事故的概率为 0.2, 连续两年发生事故的概率是 0.08. 试解释保险公司的车险浮动费率规则的合理性：

(1) 若第一年内发生了事故, 则上调第二年的保险费;

(2) 若第一年内未发生事故, 则下调第二年的保险费.

解. 用事件 A 表示第一年发生了事故, 事件 B 表示第二年发生了事故, 则有

$$P(A)=P(B)=0.2,\ P(AB)=0.08.$$

若第一年内发生了事故, 则第二年发生事故的概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.08}{0.2}=0.4>P(A)$$

若第一年内未发生事故, 则第二年发生事故的概率为

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=0.15<P(A)$$

1.3.2 乘法公式

定理 **1** (乘法公式)**.** 由条件概率的定义, 得到

1. 如果 $P(A)>0$, 则有 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.
2. 如果 $P(B)>0$, 则有 $P(AB)=P(A|B)P(B)$.

推论: 如果 $P(A_1A_2)>0$, 则有乘法公式

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

更一般地, 若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则有乘法公式

$$\begin{aligned}&P(A_1A_2\cdots A_n)\\=&P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\cdots P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)\end{aligned}$$

例 **4.** 一袋中有 a 个白球和 b 个红球. 现依次不放回地从袋中取两球. 试求两次均取到白球的概率.

解. 记

$$A_i=\{\text{第 } i \text{ 次取到白球}\}(i=1,2),$$

要求 $P(A_1A_2)$. 显然

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b},\ P(A_2|A_1)=\frac{a-1}{a+b-1},$$

因此

$$P(A_1A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)=\frac{a-1}{a+b-1}\cdot\frac{a}{a+b}.$$

例 **5.** 某厂产品的废品率为 4%, 而合格品在中有 75%

是一等品, 求一等品率.

解**.** 记 A：合格品；B：一等品, 由题意知

$$P(A)=1-4\%=96\%,\ P(B|A)=75\%$$

因为 $B\subset A$, 故 $B=BA$, 所以

$$P(B)=P(BA)=P(B|A)P(A)=0.96\times 0.75=0.72.$$

1.3.3 全概率公式与贝叶斯公式

定义 **2.** 设 Ω 为某试验的样本空间, $B_1,B_2,...,B_n$ 为一组事件. 如果以下条件成立：

1. $B_1,B_2,...,B_n$ 两两互斥,
2. $B_1\cup B_2\cup...\cup B_n=\Omega$

则称 $B_1,B_2,...,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分.

例子: 对任意事件 A, A 与 $\overline{A}$ 为样本空间的一个划分.

定理 **2** (全概率公式)**.** 设试验 E 的样本空间为 Ω, A 为 E 的事件, 如果 $B_1,B_2,...,B_n$ 是 Ω 的一个划分, 且 $P(B_i)>0,(i=1,...,n)$, 则

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+\ +P(A|B_n)P(B_n).$$

应用: 利用全概率公式, 可以把复杂事件概率的计算问题, 化为若干互不相容的简单情形, 分别求概率然后求和.

证明. 因为 $B_1, B_2, ..., B_n$ 是 Ω 的一个划分, 所以

$$A = A\cap\Omega = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$$
$$(AB_i)(AB_j) = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i = 1, ..., n$$

由概率的可加性及乘法公式, 有

$$\begin{aligned} P(A) &= (AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n) \\ &= P(AB_1) + \cdots + P(AB_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

例 **6.** 两个车间生产同型号的家电. 第 1 车间的次品率为 0.15, 第 2 车间的次品率为 0.12. 两个车间生产的成品混放在一起, 假设第 1,2 车间生产的成品比例为 2 : 3. 在仓库中随机地取一件成品, 求它是次品的概率;

解**.** 记 $A = \{$从仓库种取到的是次品$\}$, $B_i = \{$产品是第 i 车间生产的$\}$; 易知 B_1, B_2 是样本空间的一个划分, 由全概率公式得:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_1)P(B_2) \\ &= 0.15 \times \frac{2}{5} + 0.12 \times \frac{3}{5} = 0.132 \end{aligned}$$

例 **7.** 假设在某时期内影响股票价格变化的因素只有银行存款利率. 经分析, 该时期内利率下调的概率为 60%, 利率不变的概率为 40%. 根据经验, 在利率下调时某支股票上涨的概率为 80%, 在利率不变时, 这支股票上涨的概率为 40%. 求这支股票上涨的概率.

解**.** 设 B_1, B_2 表示事件“利率上调”和“利率不变”, A 表示事件" 股票上涨", 易知 $B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B_1B_2 = \varnothing$, 由全概率公式:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= 80\% \times 60\% + 40\% \times 40\% \\ &= 64\% \end{aligned}$$

定理 **3.** 如果 $B_1, B_2, ..., B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分, A 是一个事件, 且 $P(B_i) > 0, P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}, i = 1, \cdots, n.$$

证明. 由乘法公式可知

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)} = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

又由全概率公式可得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \ + P(A|B_n)P(B_n).$$

故结论成立.

贝叶斯公式于 1763 年由贝叶斯 (Bayes) 给出. 它是在观察到事件 A 已发生的条件下, 寻找导致 A 发生的每个原因 B_i 的概率.

在贝叶斯公式中, $P(B_i)$ 和 $P(B_i|A)$ 分别称为原因 B_i 的先验概率和后验概率.

先验概率常常根据等可能的假设或者以往的数据积累来确定. 是在没有进一步信息（不知道事件 A 是否发生）的情况下, 人们对诸事件发生可能性大小的认识.

而在得到进一步的信息之后（知道事件 A 已经发生）, 我们得以对各个可能原因发生的概率重新加以修正

例 **8.** 由医学统计数据分析可知, 人群中患由某种病菌

引起的疾病占总人数的 0.5%. 一种血液化验以 95%

的概率将患有此疾病的人检查出呈阳性, 但也以 1%

的概率误将不患此疾病的人检验出呈阳性. 现设某人

检查出呈阳性反应, 问他确患有此疾病的概率是多少？

解**.** 记“检出阳性”为事件 A, " 被检者患病" 和“被检者不患病”分别为事件 B_1, B_2, 则

$$P(B_1) = 0.005, P(B_2) = 0.995$$

$$P(A|B_1) = 0.95, P(A|B_2) = 0.01$$

由贝叶斯公式可得*:*

$$P(B_1|A) = \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.01} \approx 0.323.$$

例 **9.** 玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率相应地为 0.8, 0.1 和 0.1. 一顾客欲买一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随机地查看 4 只, 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯, 否则退回. 试求：

(1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率 α ;

(2) 在顾客买下的一箱玻璃杯中, 确实没有残次品的概率 β.

解. 记" 顾客买下该箱玻璃杯" 为事件 A, "箱中有 i 只残次品 $(i=0,1,2)$" 为事件 B_i 显然 B_0,B_1,B_2 为

的一个划分, 由题意:

$$P(B_0)=0.8, P(B_1)=0.1, P(B_2)=0.1, P(A|B_0)=1.$$

$$P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5}, P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

解. *(1)* 由全概率公式, 有:

$$\alpha=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(A|B_i)P(B_i)$$

$$=0.8\times 1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}\approx 0.94$$

(2) 由贝叶斯公式, 有:

$$\beta=P(B_0|A)=\frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)}\approx\frac{0.8}{0.94}\approx 0.85$$

1.4 事件的独立性

设有两个事件 A,B, 一般来说, $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 是有差异的, 但有时事件 A 的发生与否并不影响事件 B 发生的概率, 即 $P(B|A)=P(B)$.

例 **1.** 袋中有 *6* 个白球, *2* 个黑球, 从中有放回地抽取两次, 每次取一球, 记 A = 第一次取到白球, B = 第二次取到白球, 则有

$$P(A)=\tfrac{6}{8}=\tfrac{3}{4}, \qquad P(B)=\tfrac{8\times 6}{8^2}=\tfrac{3}{4}$$
$$P(AB)=\tfrac{6^2}{8^2}=\tfrac{9}{16}, \quad P(B|A)=\tfrac{P(AB)}{P(A)}=\tfrac{3}{4}$$

因此 $P(B|A)=P(B)$. 同理可得 $P(B|A)=3/4=P(B)$.

小注: 这就是说, 已知事件 A 发生, 并不影响事件 B 发生的概率, 这时称事件 A,B 独立.

由乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A),$$

当事件 A,B 独立时, 有

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1.1}$$

当 $P(A) = 0$ 时, 由

$$0 \le P(AB) \le P(A) = 0$$

可知 $P(AB) = 0$, (1) 式仍然成立.

注意: $P(A) = 0$ 时, $P(B|A)$ 没有意义.

定义 **1.** 若两事件 A,B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A,B 独立, 或称 A,B 相互独立.

小注: 用

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

刻划独立性, 比用

$$P(A|B) = P(A) \text{ 或 } P(B|A) = P(B)$$

更好, 它不受 $P(B) > 0$ 或 $P(A) > 0$ 的制约, 且体现对称性.

在实际应用中, 往往根据问题的实际情况去假设事件间的独立性. 如

- 投掷硬币（或骰子）, 我们相信每次的结果都不受以前结果的影响;
- 在相同条件下做实验, 一般假定每次的实验误差相互独立;
- 一般假定生产中不同的流程（机器、人）也是相互独立的.

例 **2.** 甲乙二人独立地对目标各射击一次, 设甲射中目标的概率为 0.5, 乙射中目标的概率为 0.6, 求目标被击中的概率.

解**.** 假设 A,B 分别表示甲乙击中目标, 则 $A \cup B$ 表示目标被击中, 由于 A,B 独立,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.5 + 0.6 - 0.5 \times 0.6 \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

定理 **1.** 若事件 A 与 B 独立, 则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也分别独立.

证明. 因为 $P(AB)=P(A)P(B)$, 所以

$$\begin{aligned}P(A\overline{B}) &= P(A(\Omega-B))=P(A-AB)\\ &= P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)\\ &= P(A)[1-P(B)]\\ &= P(A)P(\overline{B})\end{aligned}$$

由对称性知, $\overline{A}$ 与 B 相互独立. 利用第一条结论, 可得 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

“两个事件互斥”和“两个事件相互独立”是不同的概念:

- 互斥 $\Longrightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
- 独立 $\Longrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

但两者也有关系:如果 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$, 则两者不可能既是互斥的又是独立的.

小注: 若 A 与 B 相互独立, 且 B 与 C 相互独立, 则

A 与 C 未必相互独立.

例子**.** 从全体有两个孩子的家庭中随机选择一个家庭, 并考虑下面三个事件:

1. A 为“第一个孩子是男孩”,
2. B 为“两个孩子不同性别”,
3. C 为“第一个孩子是女孩”.

容易验证 A 与 B 相互独立, B 与 C 相互独立, 但是 A

与 C 不独立.

定义 **2.** 设 A_1,A_2,A_3 是三个事件, 如果

1. 两两独立 $\begin{cases} P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) \end{cases}$

2. $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

则称事件 A_1, A_2, A_3 相互独立.

定义. 称 $n(n \geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, ..., A_n$ 相互独立, 如果对任意一组指标

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \quad (k \geq 2)$$

都有

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

性质. 设 $n(n \geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, ..., A_n$ 相互独立, 则

1. 其中任意 $k(k \geq 2)$ 个事件也是相互独立的.

2. 将若干个 A_i 用 $\overline{A}_i$ 替换后, 得到的新事件集也相互独立.

3. 特别地, 我们有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P\left(\overline{A}_1\right)\cdots P\left(\overline{A}_n\right) \\ &= 1 - \prod_{1}^{n}[1 - P(A_i)] \end{aligned}$$

例 **3** (保险赔付)**.** 设有 n 个人向保险公司购买人身意外保险（保险期为 1 年）, 假定投保人在一年内发生意外的概率为 0.01. 求

(1) 保险公司赔付的概率;

(2) 当 n 为多大时, 使得以上赔付的概率超过 1/2.

小注:每个人是否发生意外可以看作是相互独立的.

解. 记 $A_i=\{$第 i 个投保人出现意外$\}(i=1,2,\ldots,n)$,

$$A=\{\text{保险公司赔付}\}$$

(1) 因为 $A_1,\ldots,A_n$ 相互独立, 且 $A=\cup_{i=1}^{n}A_i$, 我们有

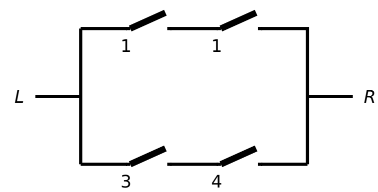
$$P(A)=1-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}P\left(\overline{A_i}\right)=1-(0.99)^n.$$

(2) 注意到 $P(A)\geq 0.5$ 等价于 $(0.99)^n\leq 0.5$, 我们有

$$n\geqslant\frac{\lg 2}{2-\lg 99}\approx 68.416$$

即当投保人数大于等于 69 人时, 赔付的概率超过 1/2.

例 **4.** 设有电路如右图所示, 其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点, 设各继电器接点闭合与否是相互独立的, 且每一继电器接点闭合的概率均为 p, 求 L 至 R 为通路的概率.



解. 设 $A=\{$第 i 个继电器闭合$\}$, $A=\{L$ 至 R 是通路$\}$, 由 $A=A_1A_2\cup A_3A_4$ 及 A_1,A_2,A_3,A_4 的独立性可得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)\\&=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)\\&\quad-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)\\&=2p^2-p^4\end{aligned}$$

例 **5.** 据以往记录的数据分析, 某船只运输某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2% (记这一事件为 A_1), 损坏 10% (记这一事件为 A_2), 损坏 90% (记这一事件为 A_3). 且 $P(A_1)=0.8, P(A_2)=0.15, P(A_3)=0.05$. 设物品件数很多, 取出一件后不影响后一件取的是否为好品的概率, 现从已被运输的物品中随机地取 3 件, 发现这三件都是好的（记这一事件为 B ）, 试求 $P(A_1|B)$.

解. 在被运输的物品中, 随机取 3 件, 相当于在物品中抽取 3 次, 每次取一件, 作不放回抽样. 由于抽取一件后, 不影响取后一件是否为好品的概率, 已知当 A_1 发生时, 一件产品是好品的概

率为 $1-2\%=98\%$. 由独立性可知, 随机取 3 件, 它们都是好品的概率为

$$P(B|A_1)=0.98^3.$$

同理可得

$$P(B|A_2)=0.9^3, P(B|A_3)=0.1^3.$$

解 (续). 由条件知 $P(A_1)=0.8, P(A_2)=0.15$, $P(A_3)=0.05, A_iA_j=\varnothing(i\neq j, i, j=1,2,3)$ 且

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$$

由贝叶斯公式可得:

$$\begin{aligned}P(A_1|B)&=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}\\&=\frac{(0.98)^3\times 0.8}{0.8624}=0.8731\end{aligned}$$