2019 年全国硕士研究生入学统一考试 (数学 II)

一、选择题（1-8 小题．每小题 4 分, 共 32 分．）

1. 当 $x \to 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ (　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

2. 曲线 $y = x\sin x + 2\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点是 (　　).

(A) $(0, 2)$　　(B) $(\pi, -2)$　　(C) $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}\right)$

3. 下列反常积分发散的是 (　　).

(A) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$　　(B) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$　　(D) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

4. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$, 则 a, b, c 依次为 (　　).

(A) $1, 0, 1$　　(B) $1, 0, 2$　　(C) $2, 1, 3$　　(D) $2, 1, 4$

5. 已知平面区域 $D = \left\{(x, y) \middle| |x| + |y| \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$, 若记

$$I_1 = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ I_2 = \iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ I_3 = \iint_D \left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

则 (　　).

(A) $I_3 < I_2 < I_1$　　(B) $I_2 < I_1 < I_3$　　(C) $I_1 < I_2 < I_3$　　(D) $I_2 < I_3 < I_1$

6. 设函数 $f(x), g(x)$ 的二阶导函数在 $x = a$ 处连续, 则 $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2} = 0$ 是两条曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 在 $x = a$ 对应的点处相切及曲率相等的 (　　).

(A) 充分不必要条件　　(B) 充分必要条件

(C) 必要不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 设 A 是四阶矩阵, A^* 为其伴随矩阵, 若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(A^*) =$ (　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

8. 设 A 是三阶实对称矩阵, E 是三阶单位矩阵, 若 $A^2+A=2E$, 且 $|A|=4$, 则二次型 x^TAx 的规范形是（　）.

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$ ____________.

2. 曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{3\pi}{2}$ 对应点处的切线在 y 的截距为 ____________.

3. 设函数 $f(u)$ 可导, $z=yf\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ____________.

4. 曲线 $y=\ln\cos x\ (0\le x\le \dfrac{\pi}{6})$ 的弧长为 ____________.

5. 已知函数 $f(x)=x\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}\,\mathrm{d}t$, 则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$ ____________.

6. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式, 则 $A_{11}-A_{12}=$ ____________.

三、解答题（1-5 题每题 10 分, 6-9 题每题 11 分, 共 94 分）

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0 \\ xe^x+1, & x\le 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求函数 $f(x)$ 的极值.

2. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$.

3. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$ 的表达式;

(2) 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\le x\le 2, 0\le y\le y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

4. 设平面区域 $D=\{(x,y)||x|\le y,(x^2+y^2)^3\le y^4\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

5. 设 n 是正整数, 记 S_n 为曲线求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(0\le x\le n\pi)$ 与 x 轴所形成图形的面积, 求 S_n, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

6. 已知函数 $u(x,y)$ 满足关系式 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$. 求 a,b 的值, 使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 之下, 上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

7. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, 证明:
(1) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$;
(2) 至少存在一点 $\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)<-2$.

8. 已知向量组 I: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$; 向量组 II: $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 I 和向量组 II 等价, 求常数 a 的值, 并将 β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

9. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.
(1) 求 x,y 之值; (2) 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$.