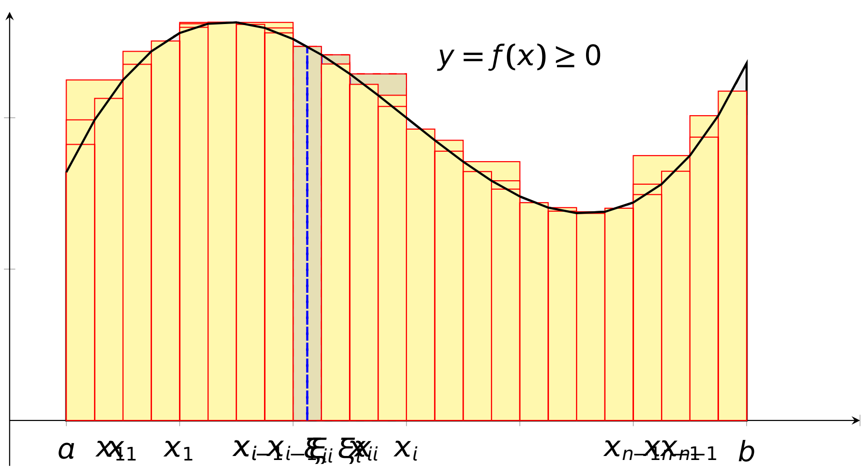
第六章　定积分

6.1　定积分的概念

例 **1.** 计算由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.



$$S=\sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

例子**.** 计算由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1. 将区间 $[a,b]$ 分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $1\leq i\leq n$.

2. 在每小段区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到面积的近似值为 $S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

3. 令 $\Delta x = \max\limits_i\{\Delta x_i\}$, 则当 $\Delta x \to 0$ 时就得到面积的实际值为 $S = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

例 **2.** 设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1. 将时间段 $[a,b]$ 分为 n 段 $[t_{i-1},t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.
2. 在每小段区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到位移的近似值为 $s \approx \sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.
3. 令 $\Delta t = \max\limits_i\{\Delta t_i\}$, 则当 $\Delta t \to 0$ 时就得到位移的实际值为 $s = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

定义. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\Delta x = \max\limits_i\{\Delta x_i\}$，如果对 $[a,b]$ 的任意分法，对在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上 ξ_i 的任意取法，当 $\Delta x \to 0$ 时，近似和的极限总趋于同一个数 I，我们就称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是可积的，并将这个极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为

$$I = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：

- x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式
- a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间

注记 **1.** 定积分的值只跟被积函数 $f(x)$ 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母无关. 即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

注记 **2.** 定积分定义中的区间分法和 ξ_i 的取法是任意的.

定理 **1** (存在定理)**.** 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续函数（或者是只有有限个间断点的有界函数），则它在 $[a,b]$ 上是可积的.

注记 **3.** 如果 $a>b$，我们规定

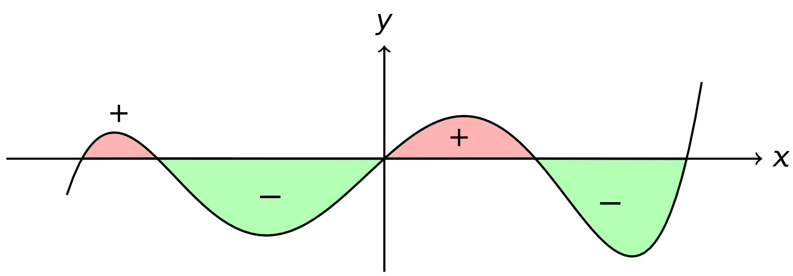
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

特别地，如果 $a=b$，我们可以得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

注记 **4** (几何意义)**.** 设由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 S

- 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$，则定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S$.
- 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leq 0$，则定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -S$.
- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负，则定积分为各部分面积的代数和.



例 **3.** 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

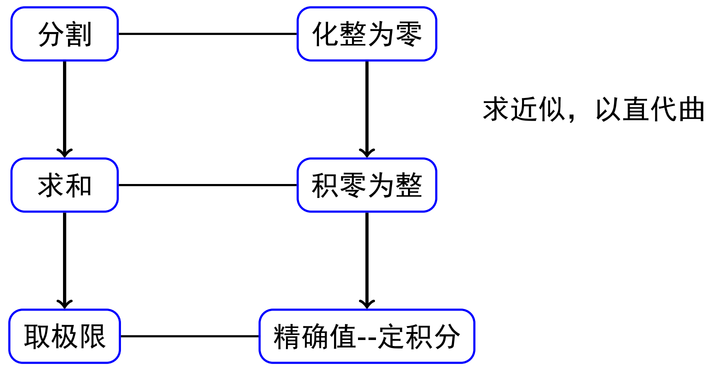
解**.** 将区间 $[0,1]$ n 等分, 分点为 $x_i=\frac{i}{n},(i=1,2,\cdots,n)$. 易知小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i=\frac{1}{n},(i=1,2,\cdots,n)$. 取 $\xi_i=x_i$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i^2\Delta x_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

两边令 $\Delta x \to 0$ 取极限得 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

1. 定积分的实质: 特殊和式的极限.

2. 定积分的思想方法



6.2　定积分的性质

性质 **1.** 设 k 为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 **2.** （函数可加性）

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 **3.** （区间可加性）设 $a < c < b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 **1.** 即使 c 不在 a 和 b 之间，上述性质依然是成立的.

性质 **4.**

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

性质 5. 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

推论. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

例 1. 比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ .... $>$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$ .... $<$

练习 1. 比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ .... $<$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$ .... $<$

性质 6. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

例 2. 估计下面的积分值：

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

解. $[1,\mathrm{e}]$

练习 2. 估计积分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的值.

答案. 由 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 得

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0.$$

$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调下降, 故 $x = \frac{\pi}{4}$ 为极大点, $x = \frac{\pi}{2}$ 为极小点,

$$M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi},\ m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

所以

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

性质 **7** (积分中值定理)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

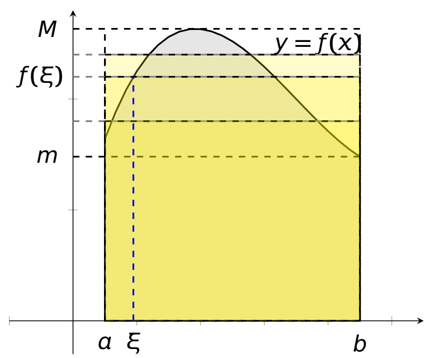
注记 **2.** 上述性质也是说，存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

说明连续函数在区间 $[a,b]$ 上的平均值是可以取到的.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$



例 **3.** 设 $f(x)$ 可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, 求

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)\mathrm{d}t.$$

证明. 由积分中值定理可知，存在 $\xi \in [x, x+2]$, 使得

$$\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)\mathrm{d}t = \xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)(x+2-x).$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)\mathrm{d}t = 2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)$$
$$= 2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi) = 6.$$

1. 定积分的性质

   注意估值性质、积分中值定理的应用

2. 典型问题

   (1) 估计积分值;

   (2) 不计算定积分比较积分大小.

6.3 微积分基本公式

例子**.** 设某物体作直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是时 $v(t) \geq 0$, 求物体在这段时间内所经过的路程.

变速直线运动中路程为 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t.$

另一方面这段路程可表示为

$$s(T_2) - s(T_1) \Longrightarrow \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1).$$

其中 $s'(t) = v(t)$

定义 **1.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x \in [a,b]$，称为积分上限的函数或变上限积分**.**

定理 **1.**

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$$

证明. 由导数的定义及积分中值定理易证.

注记 1. 上述定理说明，对于闭区间上的连续函数，它的原函数总是存在的.

定理 2. 对于更一般的变限积分，我们有下面求导公式：

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

特别地，我们有

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$$

$$\left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$$

证明. 由复合函数求导公式易证.

例 1. 求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{\sin x} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{x}$ 1

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x (\mathrm{e}^t - 1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$ .... $\dfrac{1}{2}$

练习 1. 求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t}{x}$ 1

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_x^0 \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}$ .... $-\dfrac{1}{2}$

例 2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 且 $f(x)>0$. 证明函数 $F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数.

证明. 易知

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}>0$$

故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数.

例 **3.** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x)<1$. 证明

$$2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$$

在 $[0,1]$ 上只有一个解.

证明. 令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-1$, 则

$$F(0)=-1<0,\ F(1)=1-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1[1-f(t)]\,\mathrm{d}t>0.$$

故方程有解. 又

$$F'(x)=2-f(x)>0,$$

故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，仅有一解.

定理 **3** (原函存在定理)**.** 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

注记 (原函数存在定理的意义)**.** *1.* 肯定了连续函数的原函数是存在的.

2. 初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

定理 **4** (微积分基本公式)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

证明. 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 又 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数, 所以

$$F(x)-\Phi(x)=C, x\in[a,b].$$

令 $x=a$ 可得 $F(a)-\Phi(a)=C$，又 $\Phi(a)=0$, 故 $F(a)=C$, 所以

$$\int_a^b \mathrm{d}x=\Phi(b)=F(b)-C=F(b)-F(a).$$

若记 $[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

又可表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b$$

它称为微积分基本公式或牛顿一莱布尼茨公式.

当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 仍成立.

微积分基本公式表明:

一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它的任意一个原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量.

牛顿--莱布尼茨公式架起了微分学与积分学之间的桥梁，将求定积分问题转化为求原函数的问题.

例 **4.** 求下列定积分.

(1) $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 1\\ 5, 1<x\le 2\end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

解**.** *(1)* $\frac{1}{3}$, *(2)* 6.

练习 **2.** 求下列定积分.

(1) $\int_0^1 e^x\,dx$ .... $e-1$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ 1

(3) $\int_{-1}^2 |2x|\,dx$ 5

(4) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$ .... $-\ln 2$

本节主要内容

1. 积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$
2. 积分上限函数的导数 $\Phi'(x)=f(x)$
3. 微积分基本公式 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

牛顿--莱布尼茨公式架起了微分学与积分学之间的桥梁.

6.4 定积分的换元积分法

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足：

(1) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上具有连续导数且值域为 $[a,b]$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{*}$$

公式 *(*)* 被称为定积分的换元公式.

注：换元公式对 $a>b$ 也适用.

证明. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

则

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(t)] + C,$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= F(b) - F(a)\\ &= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]\\ &= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

例 **1.** 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x$.

解**.** 令 $x = a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\ \mathrm{d}t$, 且当 $x=0$ 时, $t=0$, 当 $x=a$ 时 ,$t=\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t\ \mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}a^2.\end{aligned}$$

例 **2.** 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解**.** 令 $t=\cos x$, 则 $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$,

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0,\quad x=0\Rightarrow t=1,$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 t^5\mathrm{d}t = \left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

解. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, d(\cos x) = \left[-\frac{1}{6}\cos^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}.$

应用换元公式时应注意:

(1) 用 $x=\varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量时，积分限也相应的改变.

(2) 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必象计算不定积分那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成原变量 x 的函数，而只要把新变量的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 然后相减就行了.

(3) 用第一类换元法即奏微分法解定积分时可以不换元，当然也就不存在换上下限的问题了.

例 **3.** 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} \, dx$

解. 由条件可得：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} \, dx &= \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x| dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \, d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x \, d(\sin x) \\
&= \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{2}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

例 **4.** 计算 $\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

解. 由条件知：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}} = \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}\sqrt{(1-\ln x)}} \\
&= 2\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}} \\
&= 2[\arcsin(\sqrt{\ln x})]_{\sqrt{e}}^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

例 **5.** 计算 $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.\quad (a>0)$

解. 令 $x=a\sin t, dx=a\cos t\,dt$, 于是

$$x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2},\ x=0\Rightarrow t=0.$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t}{a\sin t+\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}[\ln|\sin t+\cos t|]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

应用换元公式时应注意:

(1) 用换元法解题时，要注意看换元积分公式的内容;

考察 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx$, 令 $x=\frac{1}{t}$ .... (×)

(2) 对分段函数和含绝对值号的积分，计算时必须分区间进行;

(3) 对被积函数进行适当变形时, 要注意符号问题.

定理. *(1)* 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx.$

....

证明. (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx$.

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_a^0 f(-t)\,dt$(令 $t=-x$)

$$=\int_a^0 f(t)\,dt=-\int_0^a f(x)\,dx$$

从而 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=-\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=0.$

(2) 同理可得.

例 **6.** 求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$ 0

(2) $\int_{-1}^{1} (x+1)^3\,\mathrm{d}x$ 4

例 **7.** 证明 $\int_0^{2\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x = 0$.

例 **8.** 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解. 易知

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^1 \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \frac{x^2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{1-(1-x^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^1 \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= 4-4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \ (\text{圆的面积}) \\
&= 4-\pi
\end{aligned}
$$

例 **9.** $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，以 T 为周期, 则

$$
\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.\ (a\ \text{为任意实数})
$$

解. 由条件易知

$$
\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x
$$

$$
\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(T+t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

例 **10.** 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$*;*

(2) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$*.*

证明. (1) 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2} - t))(-\mathrm{d}t)$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$$

我们立即可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ \mathrm{d}x$$

(2) 令 $x = \pi - t$, 则

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} (\pi - t) f[\sin(\pi - t)](-\mathrm{d}t)$$

$$= -\int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)(-\mathrm{d}t)$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x$$

从而

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

利用上述结论, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x}\\&=-\frac{\pi}{2}[\arctan(\cos x)]_0^{\pi}\\&=-\frac{\pi}{2}[\arctan(-1)-\arctan 1]=\frac{\pi^2}{4}\,.\end{aligned}$$

定积分的换元法

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

奇偶函数、周期函数的几个等式.

6.5 定积分的分部积分法

设函数 $u(x)$ 、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有.

$$\boxed{\int_a^b u\,\mathrm{d}v=[uv]_a^b-\int_a^b v\,\mathrm{d}u}$$

证明. 易知 $(uv)'=u'v+uv'$, 于是

$$\int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x=[uv]_a^b$$

即

$$[uv]_a^b=\int_a^b u'vdx+\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x$$

从而

$$\int_a^b udv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

例 **1.** 求下列定积分.

(1) $\int_1^5 \ln x\,\mathrm{d}x$ .... $5\ln 5-4$

(2) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ 1

练习 **1.** 求下列定积分.

(1) $\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$ 1

(3) $\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. .... $2\mathrm{e}^2+2$

例 **2.** 证明定积分公式

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ \mathrm{d}x \left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ \mathrm{d}x\right)\\
&= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\ \text{为正偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\ \text{为大于1 的正奇数} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Hint: 递推公式

证明. 由分部积分公式可得

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^{n-1}\mathrm{d}(-\cos x)\\
&= \left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cos^2 x\ \mathrm{d}x\\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n}x\,\mathrm{d}x\\
&= (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n
\end{aligned}
$$

于是 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$，易得

$$\left.\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \\ I_{2m+1} &= \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{结论}$$

例 **3.** 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$.

解**.** 因为 $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$，故

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\cos 2x} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}(\tan x) \\ &= \frac{1}{2}[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[\ln\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4} \end{aligned}$$

例 **4.** 计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

解**.** 由分部积分可得：

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2+x}\right) \\ &= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}\left(\ln(1+x)\right) \\ &= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{2+x} \cdot \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln 2}{3} + [\ln(1+x) - \ln(2+x)]_0^1 \\ &= \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3. \end{aligned}$$

例 **5.** 设 $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$，求 $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[x^2f(x)\right]\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2\,\mathrm{d}(x^2)\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\cos 1 - 1)\end{aligned}$$

设函数 $u(x)$ 、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有.

$$\boxed{\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u}$$

思考. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，而且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$．求 $\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解. 由分部积分公式易得

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\ \mathrm{d}f'(2x)\\ &= \frac{1}{2}[xf'(2x)]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}[f(2x)]_0^1\\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}[f(2)-f(0)] = 2\end{aligned}$$

练习 **2.** 求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; .... $1-\frac{2}{\mathrm{e}}$

(2) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$. .... $\frac{1}{4}-\frac{\mathrm{e}}{4}$

(3) 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$. .... $\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}})$

6.6　反常积分和 Γ 函数

反常积分有两种类型：

1. 无限区间上的积分：无穷限的反常积分

2. 对无界函数的积分：无界函数的反常积分

6.6.1　无限区间上的反常积分

定义 **1.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 如果

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (b>a)$$

存在, 就称此极限为 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 **2.** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上连续, 如果

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (b>a)$$

存在, 就称此极限为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分, 记作

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 **3.** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 如果反常积分

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 上述两个反常积分之和为 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的

反常积分，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 **1.** 求反常积分

(1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 1

(2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ . . . . $p \le 1$ 发散; $p > 1$ 时收敛于 $\dfrac{1}{p-1}$

练习 **1.** 求反常积分

(1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 1

例 **2.** 计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$. . . . . 发散

例 **3.** 计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$.

解 (错误解法). ：因为

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}(\cos a - \cos(-a)) = 0,$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x = 0. \qquad (x)$$

. . . .

解 (正确做法). 因为 $\int_{-\infty}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$ 发散，故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$ 发散.

$\boxed{\text{严格按照定义计算反常积分.}}$

例 4. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x$.

解 (错误解法)**.** 由条件可得:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{x}{1+x^2} dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \ln\left(1+a^2\right) + \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \ln\left(1+b^2\right) \\ &= \infty + \infty \\ &= \infty\end{aligned}$$

第一步的等号默认了收敛性，故该方法为错误做法.

解 (正确做法)**.** 因为 $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x$ 发散，故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x$ 发散.

反常积分收敛还是发散严格按照定义判断.

例 5. 计算 $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2} \mathrm{d}x$.

解 (错误解法)**.** 由条件可得:

$$\begin{aligned}&\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2} \mathrm{d}x \\ = \neq& \frac{1}{3} \left[\lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x - \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{1}{x+2} \mathrm{d}x\right] \\ =& \frac{1}{3} \left[\lim_{b\to+\infty} \ln|b-1| - \lim_{b\to+\infty} (\ln|b+2| - \ln 4)\right]\end{aligned}$$

因为 $\lim_{b\to+\infty} \ln|b-1|$ 不存在，故 $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2} \mathrm{d}x$ 发散.

第一个等号不成立!!

解 (正确做法).

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{1}{x^2+x-2}dx\\ &= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left[\int_2^b\frac{1}{x-1}dx-\int_2^b\frac{1}{x+1}dx\right]\\ &= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln|b-1|-(\ln|b+2|-\ln 4)\right]\\ &= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\frac{|b-1|}{|b+2|}+\ln 4\right]=\frac{1}{3}\ln 4.\end{aligned}$$

例 **6.** 求反常积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解. π

6.6.2　无界函数的反常积分

定义 **4.** 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$, 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx(\varepsilon>0)$ 存在, 就称此极限为无界函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分, 记作

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$发散.

定义 **5.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$, 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx(\varepsilon>0)$ 存在, 就定义反常积分

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$$

否则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

定义 **6.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除 $x=c(a<c<b)$ 外连续，且 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$, 如果两个反常积分

$$\int_a^c f(x)dx \text{ 和 } \int_c^b f(x)dx$$

都收敛, 就定义反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

否则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 **7.** 求反常积分

(1) $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ .... -1

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ .... $p \geq 1$ 发散，$p<1$ 时收敛于 $\dfrac{1}{1-p}$

练习 **2.** 求反常积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$. .... 2.

6.6.3 Γ 函数

定义 **7.** $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ $(r>0)$ 为 Γ 函数.

性质 **1.** Γ 函数有如下公式

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r) \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$
3. 余元公式 $\Gamma(r)\Gamma(1-r) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi r)}$ $(0<r<1)$.
4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

定义 **8.** 对任何实数 $x > -1$，定义其阶乘为

$$x! = \Gamma(x+1).$$

例 **8.** (1) 求 $\Gamma(4)$ .... $3! = 6$

(2) 求 $\Gamma(\frac{5}{2})$ .... $\dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$

练习 **3.** 求 $\dfrac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ .... $\dfrac{15}{8}$

反常积分的定义及计算

注意

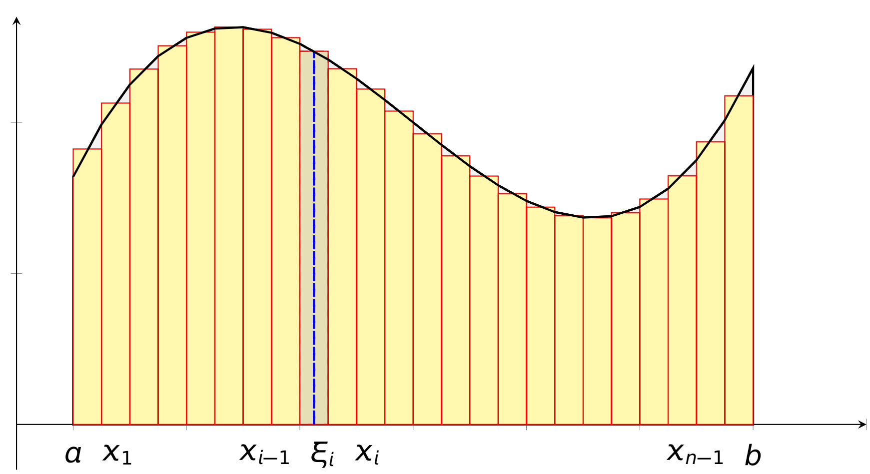
1. 与定积分的区别与联系;
2. 有时题目可能含两类反常积分，要会处理

   如 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int_0^{c}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$
3. 换元法中，反常积分化成常义积分就按照常义积分做，但仍要注意判断有无无穷间断点.

6.7　定积分的几何应用

6.7.1　定积分的元素法

例子**.** 计算由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

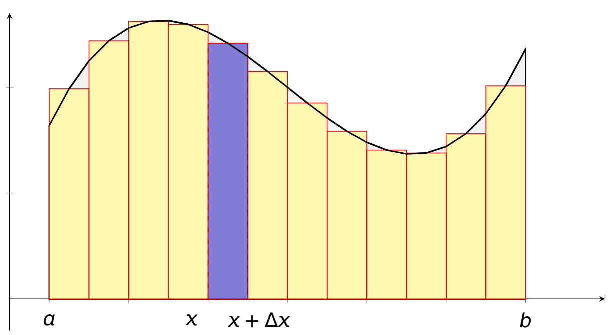


$$S=\sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

面积表示为定积分的步骤如下

1. 分割区间：把区间 $[a,b]$ 分成 n 个长度为 Δx_i 的小区间, 相应的曲边梯形被分为 n 个小曲边梯形，若记第 i 个小曲边梯形的面积为 ΔS_i, 则 $S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$.
2. 求近似值：计算 ΔS_i 的近似值 $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$, $\xi_i \in \Delta x_i$.
3. 求和：得 S 的近似值 $S\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
4. 取极限：得 S 的精确值

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



---

1. 在区间 $[a,b]$ 上任取一点 x 及增量 Δx
2. 计算面积的增量 ΔS 的近似值 $\Delta S\approx f(x)\Delta x \Longrightarrow \mathrm{d}S=f(x)\,\mathrm{d}x$
3. 两边积分得面积

$$S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

当所求量 U(面积、体积等) 符合下列条件:

1. U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量;

2. U 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性，就是说，如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和;

3. 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 的形式, 就可以考虑用定积分来表达这个量 U

元素法的一般步骤：

1. 根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$;

2. 设想把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，取其中任一小区间并记为 $[x,x+\mathrm{d}x]$ ，求出相应于这小区间的部分量 ΔU 的近似值. 如果 ΔU 能近似地表示为 $[a,b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 $\mathrm{d}x$ 的乘积，就把 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为量 U 的元素且记作 $\mathrm{d}U$, 即 $\mathrm{d}U=f(x)\,\mathrm{d}x$;

3. 以所求量 U 的元素 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式,在区间 $[a,b]$ 上作定积分,得 $U=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 即为所求量 U 的积分表达式.

注记 (应用)**.** 平面图形的面积、体积、经济应用等.

6.7.2 平面图形的面积

1. 由曲线 $y=f(x)$, x 轴，直线 $x=a$ 以及直线 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积为
$$S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

2. 由 $y=f_1(x)$,$y=f_2(x)$, $x=a$,$x=b$ 所围成的平面图形的面积为
$$S=\int_a^b |f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x$$

1. 画出曲线草图

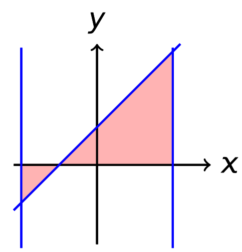
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到

- 取代表元：取其中任一小区间并记为 $[x, x+\mathrm{d}x]$，求出相应于这小区间的部分量 ΔA 的近似值，记作 $\mathrm{d}A$；
- 写出面积表达式

4. 计算积分结果

例 **1.** 求由直线 $y = x+1$, x 轴，$x = -2$ 和 $x = 2$ 所围成的图形的面积.

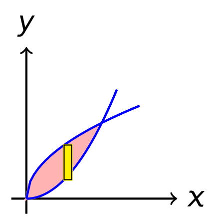


解. $S = 5$

练习 **1.** 求由曲线 $y = 1-x^2$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

解. $\dfrac{4}{3}$

例 **2.** 计算由两条抛物线 $y^2 = x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.



解. 两曲线的交点为 $(0,0)$,$(1,1)$, 选 x 为积分变量, 则 $x \in [0,1]$

面积元素

$$\mathrm{d}A = \left(\sqrt{x} - x^2\right)\mathrm{d}x$$

于是

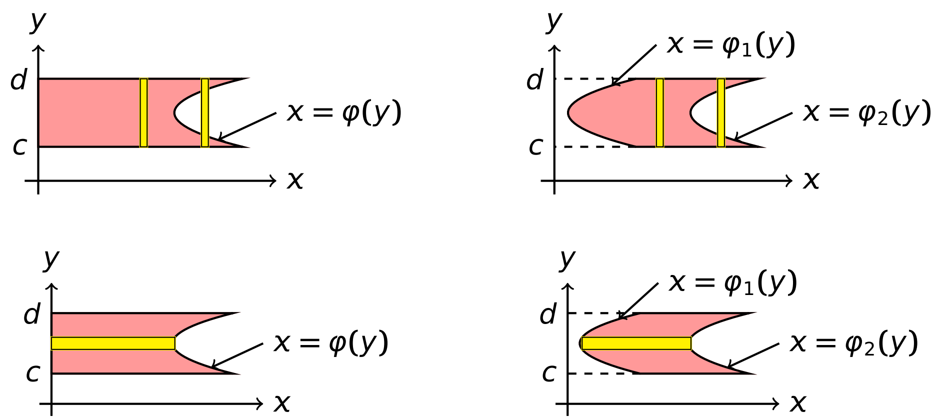
$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

练习 **2.** 求由抛物线 $y^2=x$ 和 $y^2=2-x$ 所围成的图形的面积.

练习 **3.** 求由抛物线 $y^2=x$ 和直线 $x=4$ 所围成的图形的面积.

答案. $\frac{8}{3}$, $\frac{32}{3}$

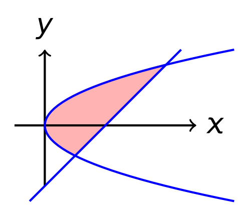
问题. 积分变量是否只能选择 x?



---

1. 由曲线 $x=\varphi(y)$, y 轴，直线 $y=c$ 以及直线 $y=d$ 所围成的曲边梯形的面积为
$$S=\int_c^d |\varphi(y)|\,\mathrm{d}y$$
2. 由曲线 $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$，直线 $y=c$ 以及直线 $y=d$ 所围成的图形的面积为
$$S=\int_c^d |\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|\,\mathrm{d}y$$

例 **3.** 计算由曲线 $y^2=2x$ 和直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.



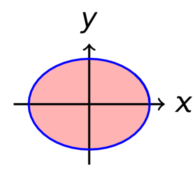
解. 先求两曲线的交点：

$$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases} \Longrightarrow (2,-2),\ (8,4)$$

选 y 为积分变量, 则 $y \in [-2, 4]$

$$\mathrm{d}A = \left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y \Longrightarrow A = \int_{-2}^{4} \mathrm{d}A = 18.$$

例 **4.** 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积.

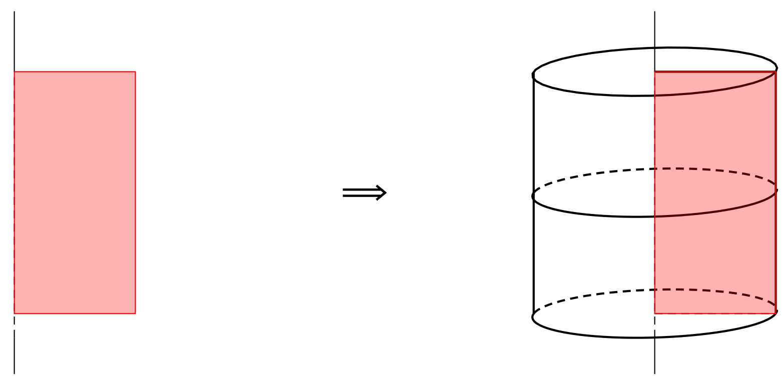


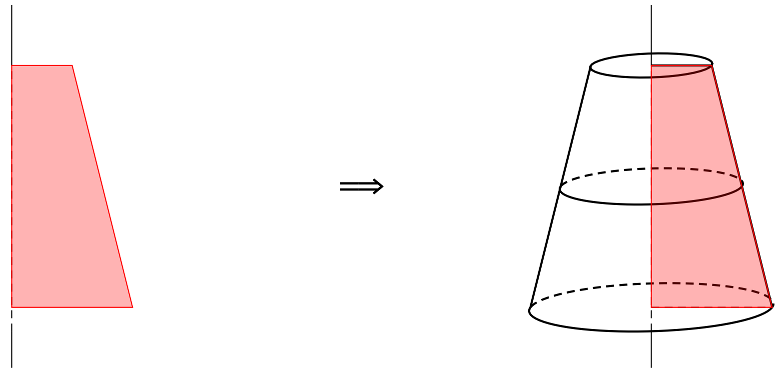
解**.** 椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, 由对称性知总面积等于 4 倍第一象限部分面积.

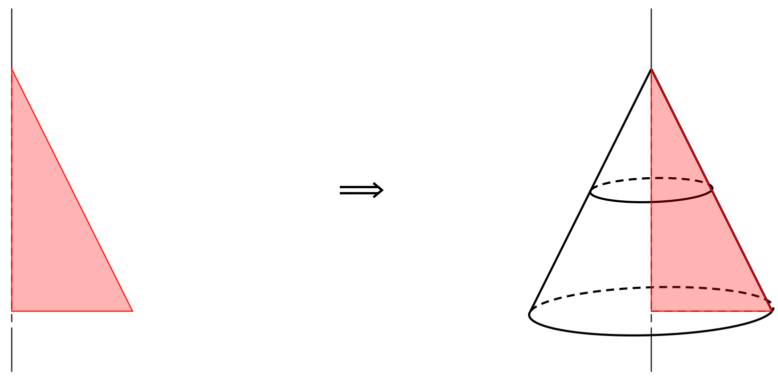
$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,\mathrm{d}(a\cos t) \\ &= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ \mathrm{d}t = \pi ab. \end{aligned}$$

6.7.3　旋转体的体积

由一个平面图形绕着平面内一条直线旋转一周而成的立体叫旋转体**.** 这直线叫做旋转轴**.**

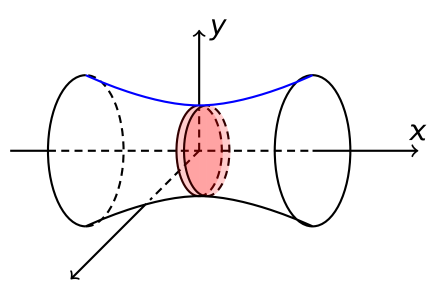






由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$



例 **5.** 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

解. 此旋转椭球体可以看成上半椭圆 $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ 与 x 轴 $(y = 0)$ 所围图形绕 x 轴旋转

而成, 则所求体积为

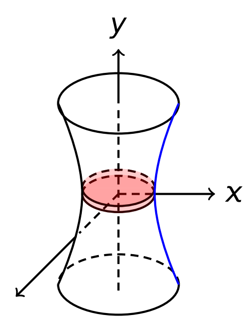
$$\begin{aligned}V&=\int_{-a}^{a}\pi\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}\\&=\frac{4}{3}\pi ab^2\end{aligned}$$

练习 **4.** 求由 $y=x$，$x=a$, 及 x 轴所成的平面图形，绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

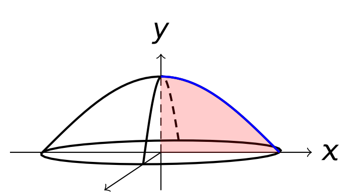
答案. $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

由曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$, $y=d$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y=\int_c^d \pi x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2\,\mathrm{d}y$$



例 **6.** 求由 $x=0$, $y=0$, $y=\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 所围平面图形绕 y 轴旋转的旋转体的体积.



解. 因 $y=\cos x$ 的反函数为 $x=\arccos y$, 则所求体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1(\arccos y)^2\,\mathrm{d}y=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\,\mathrm{d}(\cos t)\quad(\text{令}t=\arccos y)\\&=\left[-\pi t^2\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,\mathrm{d}t=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,\mathrm{d}(\sin t)\\&=[2\pi t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=\pi^2+[2\pi\cos t]^{\frac{\pi}{2}}=\pi^2-2\pi.\end{aligned}$$

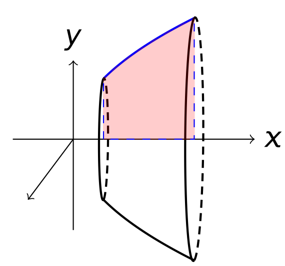
注记. 如果旋转体是由连续曲线 $y=f(x)$ 、直线 $x=a,x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为

$$\boxed{V_y=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx}$$

利用这个公式，可知上例中

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x|\cos x|\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}(\sin x)\\&=[2\pi x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\pi^2+[2\pi\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi^2-2\pi.\end{aligned}$$

练习 **5.** 求由曲线 $y=\sqrt{x}$，直线 $x=1$, $x=4$ 以及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.



解. $\dfrac{15\pi}{2}$.

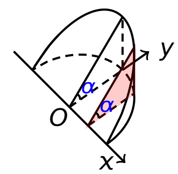
6.7.4　平行截面面积已知的立体的体积

如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算.

$A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积，$A(x)$ 为 x 的已知连续函数, 则

$$\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x, \Longrightarrow V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 **7.** 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角 α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.



解**.** 如图建立坐标系，则底圆方程为

$$x^2 + y^2 = R^2$$

易知，垂直于 x 轴的截面为直角三角形，其面积为

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\tan\alpha,$$

于是，立体的体积为

$$V = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\tan\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

1. 定积分的元素法：$U = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. 平面图形的面积：
   - $S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|\,\mathrm{d}x$
   - $S = \int_a^b |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|\,\mathrm{d}y$
3. 旋转体体积
   - $V_x = \int_a^b \pi y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$
   - $V_y = \int_c^d \pi x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_c^d [\varphi(y)]^2\,\mathrm{d}y$
4. 平行截面面积已知的立体的体积:$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$

6.8　定积分的经济应用

6.8.1　由边际函数求原函数

例 **1.** 已知边际成本为 $C'(x)=7+\frac{25}{\sqrt{x}}$, 固定成本为 1000, 求总成本函数.

解**.** 由条件易知

$$\begin{aligned} C(x) &= C(0)+\int_0^x C'(x)\mathrm{d}x \\ &= 1000+\int_0^x \left(7+\frac{25}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x \\ &= 1000+[7x+50\sqrt{x}]_0^x \\ &= 1000+7x+50\sqrt{x} \end{aligned}$$

6.8.2　由变化率求总量

例 **2.** 某工厂生产某商品在时刻 t 的总产量的变化率为 $x'(t)=100+12t$ (单位小时）. 求 $t=2$ 到 $t=4$ 这两小时的总产量.

解**.** 由条件易知

$$\begin{aligned} Q &= \int_2^4 x'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_2^4 (100+12t)\mathrm{d}t \\ &= \left[100+6t^2\right]_2^4 = 272. \end{aligned}$$

6.8.3　收益流的现值和将来值

1. 收益流: 收益若是连续地获得，则收益被看作是一种随时间连续变化的收益流.
2. 收益流量: 收益流对时间的变化率.
3. 收益流将来值: 将收益流存入银行并加上利息之后的存款值.

4. 收益流现值: 收益流的现值是这样一笔款项，若将它存入银行，将来从收益流中获得的总收益，与包括利息在内的银行存款值有相同的价值.

若有一笔收益流的收益流量为 $p(t)$ (元/年) 考虑从现在开始 $(t=0)$ 到 T 年后这一时间段的将来值和现值. (以连续复利率计息)

分析 在区间 $[0,T]$ 内任取一小区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$, 在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内所获得的金额近似为 $p(t)\mathrm{d}t$, 从 $t=0$ 开始, $p(t)\mathrm{d}t$ 这一金额是在 t 年后的将来获得, 从而在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内

收益现值 $\approx [p(t)\mathrm{d}t]e^{-rt} = p(t)\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}t$

总现值 $= \int_0^T p(t)e^{-rt}\mathrm{d}t.$

对于将来值 ,$p(t)\mathrm{d}t$ 在 $T-t$ 年后获得利息从而在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内

收益流的将来值 $\approx [p(t)\mathrm{d}t]e^{r(T-t)} = p(t)e^{r(T-t)}\mathrm{d}t$

故，总的将来值 $= \int_0^T p(t)e^{r(T-t)}\mathrm{d}t.$

例 **3.** 假设以年连续复利率 0.1 计息, 求收益流量为 100 元/年的收益流在 20 年内的现值和将来值.

解**.** 由条件可得

$$
\begin{aligned}
\text{现值} &= \int_0^{20} 100\mathrm{e}^{-0.1t}\mathrm{d}t \\
&= 1000\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right) \\
&\approx 864.66 \\
\text{将来值} &= \int_0^{20} 100e^{0.1(20-t)}\mathrm{d}t \\
&= 1000\mathrm{e}^{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right) \\
&\approx 6389.06
\end{aligned}
$$

1. 由边际函数求原函数
2. 由变化率求总量
3. 收益流的现值和将来值