第三章 导数、微分、边际与弹性

一、选择题（选择正确的选项）

1. 已知生产某商品 Q 单位, 需求函数为 $Q=16-\frac{P}{3}$, 当 $P=8$ 时，若价格上涨 1%, 则需求将 (C) .

(A) 减少 0.8%　　(B) 增加 0.8%　　(C) 减少 0.2%　　(D) 增加 0.2%

2. 函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的第一类间断点的个数为 (C) .

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

3. 设 $Q=f(p)$ 为需求函数, 其中 p 为价格 (单位: 元 / 吨), Q 为需求量 (单位: 吨). 若价格为 100 元 / 吨时的需求弹性为 $\eta(100)=-\frac{100}{f(100)}$, $f'(100)=0.25$, 则当价格调整为 101 元 / 吨时, 需求量将约 (D) .

(A) 增加 25%　　(B) 增加 0.25%　　(C) 减少 25%　　(D) 减少 0.25%

4. 函数 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处是 (C) .

(A) 无定义　　(B) 有定义，但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 连续且可导

5. 设 $y=x+\sin x$, $\mathrm{d}y$ 是 y 在 $x=0$ 点的微分，则当 $\Delta x\to 0$ 时，有 (B) .

(A) $\mathrm{d}y$ 与 Δx 相比是等价无穷小

(B) $\mathrm{d}y$ 与 Δx 相比是同阶 (非等价) 无穷小

(C) $\mathrm{d}y$ 是比 Δx 高阶的无穷小

(D) $\mathrm{d}y$ 是比 Δx 低阶的无穷小

6. 设函数 $y=(1+\cos x)^{\arcsin x}$, 则微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ (D) .

(A) $-2\,\mathrm{d}x$　　(B) $-\ln 2\,\mathrm{d}x$　　(C) $2\,\mathrm{d}x$　　(D) $\ln 2\,\mathrm{d}x$

7. 设需求函数 $Q=3000\mathrm{e}^{-0.125p}$, 则当价格 $p=10$, 且上涨 1% 时，需求量 Q 约 (A)

(A) 减少 1.25%　　(B) 增加 1.25%　　(C) 减少 125%　　(D) 增加 125%

8. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 则函数 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 的定义域为 (D) .

(A) $[0,1]$　　(B) $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$　　(C) $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$　　(D) $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

9. 设函数 $f(x)=\sin 2x+3^x$, 则导数值 $f'(0)=$ (B) .

(A) $\ln 3-2$　　(B) $\ln 3+2$　　(C) 1　　(D) $\ln 3+1$

10. 设 $f(x)=3^x+x^2+\ln 3$, 则 $f'(1)$ 等于 (D) .

(A) $3\ln 3$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{3}{\ln 3}+2$　　(D) $3\ln 3+2$

11. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1-x)}{x}=$ (B)

(A) $f'(1)$　　(B) $2f'(1)$　　(C) 0　　(D) $f'(2)$

12. 某需求函数为 $Q=-100P+3000$，那么当 $P=20$ 时需求的价格弹性 $E_d=$ (D)

(A) 2　　(B) 1000　　(C) -100　　(D) -2

13. 设 $f(x)=2^x+\ln 2$, 则 $f'(1)$ 等于 (A) .

(A) $2\ln 2$;　　(B) $2\ln 2+\frac{1}{2}$;　　(C) $\frac{2}{\ln 2}$;　　(D) $\frac{2}{2\ln 2}+\frac{1}{2}$.

二、填空题（请将答案写在横线上）

1. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 所确定, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $\underline{\quad y=-2x+1\quad}$.

2. 设函数 $f(x)=\frac{1}{3x+2}$, 对正整数 n, 则 $f^{(n)}(0)=\underline{\quad (-1)^n\frac{n!3^n}{2^{n+1}}\quad}$.

3. 设产量为 Q, 单价为 P, 厂商成本函数为 $C(Q)=100+13Q$, 需求函数为 $Q(P)=\frac{800}{P+3}-2$, 则厂商取得最大利润时的产量为 $\underline{\quad 8\quad}$.

4. 设函数 $f(x)=(1+\cos x)^{\frac{1}{x}}$, $\mathrm{d}y|_{x=\frac{\pi}{2}}=\underline{\quad -\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x\quad}$.

5. 设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，其中 $f(t)$ 具有二阶导数，且 $f''(t)\neq 0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ $\underline{\dfrac{1}{f''(t)}}$.

6. 设函数 $f(x)=x(\sin x)^{\cos x}$，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

7. 设商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中 Q,P 分别表示需求量和价格. 如果商品需求弹性的绝对值大于 1，则商品的价格的取值范围是 $\underline{(10,20)}$.

8. 设曲线 $f(x)=x^n, n\in N$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴相交于 $(\xi_n,0)$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)$ $=$ $\underline{\quad \mathrm{e}^{-1} \quad}$.

9. 由参数方程 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ 所确定的曲线在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程是 $\underline{y=-\dfrac{3}{2}x+2\sqrt{2}}$.

10. 设 $y=f(\sqrt{x})f^2(x)+f(\mathrm{e})$，其中 $f(x)$ 在 R 上可导，则 $y'=$ $\underline{\dfrac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}f^2(x)+2f(\sqrt{x})f(x)f'(x)}$.

11. 设函数 $y=x\mathrm{e}^x$，对正整数 n，n 阶导数 $y^{(n)}=$ $\underline{(x+n)\mathrm{e}^x}$.

12. 某商品的需求函数为 $Q=400-100P$，则 $P=2$ 时的需求弹性为 $\underline{\quad -1 \quad}$.

13. 设函数 $y=\dfrac{x}{\ln x}$，则导数 $y'=$ $\underline{\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}}$.

14. 曲线 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 在 $t=1$ 的对应点处的切线方程是 $\underline{y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}(x-\ln 2)}$.

15. 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $y'\big|_{x=\pi}=$ $\underline{\quad -\pi \quad}$.

16. 已知某商品的需求函数为 $Q=16-\frac{P}{3}$(P 为价格, Q 为需求量)，当价格 $P=8$ 时，若价格上涨 1%，则需求量将下降约 $\underline{\ 0.2\% \ }$.

17. 曲线 $y+x\mathrm{e}^y=1$ 在点 $P(0,1)$ 处的切线方程是 $\underline{y=-\mathrm{e}x+1}$.

18. 已知某商品的需求函数为 $Q=3000-100P$，（P 为价格,Q 为需求量），当价格 $P=20$ 时，若价格上涨 1%，则需求量将下降 $\underline{\quad 2\% \quad}$.

19. 设函数 $f(x)=xe^x$, 对正整数 n, 则 $f^{(n)}(0)=$ __n__.

20. 设函数 $y=\dfrac{x\sin x}{1+x}$, 则微分 $dy=$ __$\dfrac{(\sin x+x\cos x)(1+x)-x\sin x}{(1+x)^2}dx$__.

21. 曲线 $y=xe^x$ 在点 $(0,0)$ 处切线的方程是 __$x-y=0$__.

22. 设某种商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为 $R(Q)=104Q-0.4Q^2$, 则销售量 Q 为 50 个单位时总收益的边际收入是 __64__.

23. 设生产某产品 Q 单位的总成本为 $C(Q)=1100+\dfrac{Q^2}{1200}$，则生产 1800 个单位产品时的边际成本是__3__.

24. 曲线 $y=xe^x$ 在拐点处切线的斜率是__$-e^{-2}$__.

25. 设某种商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为 $R(Q)=104Q-0.4Q^2$, 则销售量 Q 为 50 个单位时总收益的边际收入是__64__.

三、计算题（请给出必要的步骤）

1. 设 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-f(x)}$, 其中 $f(x)$ 可导, 求 dy.

解. 因为

$$
\begin{aligned}
y'&=\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'e^{-f(x)}+f\left(\frac{1}{x}\right)\left[e^{-f(x)}\right]'\\
&=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-f(x)}+f\left(\frac{1}{x}\right)e^{-f(x)}\left[-f'(x)\right]\\
&=-\left[\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x)\right]e^{-f(x)}
\end{aligned}
$$

所以

$$dy=y'dx=-\left[\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x)\right]e^{-f(x)}dx.$$

2. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(t+1)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{t+1}}=3t^2+5t+2$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=(6t+5)\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{t+1}}=\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}$.

3. 设 $f(x)$ 是可导函数, 求函数 $y=f(\tan x)\cdot\arcsin[f(x)]+\mathrm{e}^2$ 的导数.

解.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left[f(\tan x)\right]'\cdot\arcsin[f(x)]+f(\tan x)\cdot\left(\arcsin[f(x)]\right)'+\left(\mathrm{e}^2\right)' \\
&= f'(\tan x)\sec^2 x\cdot\arcsin[f(x)]+\frac{f(\tan x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}f'(x)
\end{aligned}
$$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$,其中 $\varphi(t)$ 具有连续的二阶导数, 且 $\varphi(0)=1$
.

(1) 确定 a 的值, 使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(x)$;

(2) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解. (1) 为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 必须 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=a$, 且 $f'(0)$ 存在. 因为

$$
\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)+\sin x}{1}=\varphi'(0)\Longrightarrow a=\varphi'(0),
$$

又

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}-a}{x} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\cos x-ax}{x^2} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)+\sin x-\varphi'(0)}{2x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi''(0)+1\right)
\end{aligned}
$$

所以当 $a=\varphi'(0)$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 并且

$$
f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\left[\varphi'(x)+\sin x\right]x-(\varphi(x)-\cos x)}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left[\varphi''(0)+1\right], & x=0\end{cases}
$$

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}f'(x) &= \lim_{x\to0}\frac{\left[\varphi'(x)+\sin x\right]x-(\varphi(x)-\cos x)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\left[\varphi''(x)+\cos x\right]x}{2x} \\
&= \frac{1}{2}\left[\varphi''(0)+1\right]=f'(0)
\end{aligned}
$$

所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0; \\ k^2, & x=0; \\ kxe^x+1, & x>0. \end{cases}$ 试分析在点 $x=0$ 处,

(1) k 为何值时, $f(x)$ 有极限;

(2) k 为何值时, $f(x)$ 连续;

(3) k 为何值时, $f(x)$ 可导.

解. (1) 为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极限，必须 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. 因为

$$\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1=\lim_{x\to 0^+}(kxe^x+1),$$

故 k 为任何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极限;

(2) 为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有连续，必须

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=k^2.$$

由 (1) 知， $k=\pm 1$, 则 $k=\pm 1$, 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

(3) 为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，必须 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即 $k=\pm 1$ 且 $f'_-(0)=f'_+(0)$.

- 当 $k=-1$ 时, $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=-1$, 所以当 $k=-1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.
- 当 $k=1$ 时, $f'_-(0)=1=f'_+(0)$, 所以当 $k=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

综上，当 $k=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

6. 求由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$,所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解. 易知

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(\arctan x)'}{(\ln\sqrt{1+t^2})'}=\frac{1/(1+t^2)}{t/(1+t^2)}=\frac{1}{t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-t^{-2}}{t/(1+t^2)}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

7. 求由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 所确定的隐函数 y 在 $x=0$ 处的导数 $y'(0)$.

解. 当 $x=0$ 时，由方程易知，$\ln y=0$, 从而 $y=1$. 方程两边同时对 x 求导，可得

$$\cos(xy)(1\cdot y+xy')+\frac{y'-1}{y-x}=1.$$

将 $x=0, y=1$ 代入上式可得

$$1+y'(0)-1=1,$$

于是 $y'(0)=1$.

8. 已知 $y=x\ln x$, 求 $y^{(n)}$.

解. 易知

$$y'=\ln x+1,$$

$$y''=\frac{1}{x},$$

$$y'''=-\frac{1}{x^2},$$

$$\cdots$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-2}(n-2)!x^{-(n-1)}(n=2,3,4,\cdots)$$

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^2\right), & x\leq 0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}, & x>0\end{cases}$, 求 $f'(x)$.

解. 当 $x<0$ 时, $f'(x)=2x\cos\left(x^2\right)$; 当 $x>0$ 时, $f'(x)=\dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

又因为

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\left(x^2\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x\cos\left(x^2\right)}{1}=0,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)/(1+x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/(1+x)}{1+2x}=1.$$

所以 $f'(0)$ 不存在.

综上所述, $f'(x)=\begin{cases}2x\cos\left(x^2\right), & x<0;\\ \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}, & x>0.\end{cases}$

10. 设 $f(x)=\begin{cases}b(1+\sin x)+a+2, & x>0\\ \mathrm{e}^{ax}-1, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 求 a,b 及 $f'(x)$.

解. 为使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, $f(x)$ 必在 $x=0$ 处连续, 即

$$f(0+0)=f(0-0)=f(0).$$

于是有

$$f(0+0)=a+b+2=f(0)=0.$$

为使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, $f(x)$ 必在 $x=0$ 处可导, 即 $f_-'(0)=f_+'(0)$. 于是

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{ax}-1}{x}=a,\ f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{b\sin x}{x}=b$$

由此可得 $a=b=-1$,

$$f'(x)=\begin{cases}-\cos x, & x>0\\ -\mathrm{e}^{-x}, & x\le 0\end{cases}.$$

11. 已知函数 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}$.

解. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{-2\sin 2t}{\cos t}=-4\sin t\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-4\Longrightarrow \left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=-4.$

12. 设 $y=\cos\big(f^2(x)\big)+f(\sin 1)$, 其中 $f(x)$ 可微, 求 $\mathrm{d}y$.

解. 因为 $y'=-\sin\big(f^2(x)\big)\cdot 2f(x)\cdot f'(x)$, 故

$$\mathrm{d}y=-\sin\big(f^2(x)\big)\cdot 2f(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x.$$

13. 设函数 $y=f\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)+\big(f(\sin x)\big)^3$, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有一阶导数, 求 $\mathrm{d}y$.

解. $\mathrm{d}y=\left[-f'\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}+3\big(f(\sin x)\big)^2 f'(\sin x)\cos x\right]\mathrm{d}x.$

14. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}^x=0$ 确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $y''(0)$.

解. 方程两边关于 x 求导得

$$\mathrm{e}^y y'+y+xy'-\mathrm{e}^x=0,\ y'=\frac{\mathrm{e}^x-y}{\mathrm{e}^y+x}.$$

上式两边关于 x 求导得

$$\mathrm{e}^y y''+\mathrm{e}^y(y')^2+y'+y'+xy''-\mathrm{e}^x=0,\ y''=\frac{\mathrm{e}^x-2y'-\mathrm{e}^y(y')^2}{\mathrm{e}^y+x}.$$

将 $x=0$ 代入方程 $\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}^x=0$ 得 $y=0$, 于是 $y'(0)=1$, 故 $y''(0)=-2$.

15. 设函数 $y=f(\sin x)+\cos\big(f(x)\big)$, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有一阶导数与二阶导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. $y'=f'(\sin x)\cdot\cos x-\sin(f(x))\cdot f'(x)$,

$y''=f''(\sin x)\cos^2 x-f'(\sin x)\sin x-\cos\big(f(x)\big)\big[f'(x)\big]^2-\sin\big(f(x)\big)f''(x).$

16. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 所确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1}{1+t^2}}=\dfrac{2}{t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{2}{t}\right)'\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+t^2}}=-\dfrac{2(1+t^2)}{t^4}$.

17. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<0 \\ e^x, & x\geq 0 \end{cases}$, 确定 a,b 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解. 为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 必须 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 即

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0).$$

因为 $f(0)=1,\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(ax+b)=b,\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1$, 所以 $b=1$.

为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 必须 $f'_-(0)=f'_+(0)$. 因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{(ax+1)-e^0}{x}=a,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-e^0}{x}=1,$$

所以 $a=1$.

综上所述, 当 $a=1,b=1$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=1$.

18. 已知函数 $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$, 试求 dy.

解. 易知

$$y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)+x\left[\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right]=2\cos(\ln x),$$

所以

$$dy=2\cos(\ln x)dx.$$

19. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2y-e^{2x}=\sin y$ 所确定, 试求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解. 两端对 x 求导, 得

$$2xy+x^2y'-2e^{2x}=\cos y\cdot y', \tag{3.1}$$

于是

$$y'=\frac{2xy-2e^{2x}}{\cos y-x^2}.$$

对(3.1)两端关于 x 求导, 得

$$2y+2xy'+2xy'+x^2y''-4e^{2x}=-\sin y\cdot(y')^2+\cos y\cdot y'',$$

于是

$$y''=\frac{(2y-4e^{2x})(\cos y-x^2)^2+4x(2xy-2e^{2x})(\cos y-x^2)+(2xy-2e^{2x})^2\sin y}{(\cos y-x^2)^3}.$$

20. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$ 所确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. 由条件得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-3t^2}{-2t}=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{3}{2}t-\frac{1}{2t}\right)'\cdot\frac{1}{x_t'}=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2t^2}\right)\cdot\frac{1}{-2t}=-\frac{3}{4t}-\frac{1}{4t^3}.$$

21. 设函数 $y=(x^2+1)^3(x+2)^2x^6$, 试求 y'.

解. 两边取对数, 得

$$\ln|y|=3\ln|x^2+1|+2\ln|x+2|+6\ln|x|,$$

两边对 x 求导数, 得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{6x}{x^2+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{6}{x},$$

所以

$$y'=(x^2+1)^3(x+2)^2x^6\left[\frac{6x}{x^2+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{6}{x}\right].$$

22. 已知函数 $y=\arctan \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$，试求 $\mathrm{d}y$

解. 由复合函数求导法则可得

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{1+(\mathrm{e}^{\sqrt{x}})^2}\cdot\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})'\\&=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x}})},\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x}})}\mathrm{d}x,$$

23. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(x+y)=y$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

解. 方程两端对 x 求导, 得

$$-\sin(x+y)\left(1+y'\right)=y',$$

由此解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)},$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\cos(x+y)(1+y')\left[1+\sin(x+y)\right]-\sin(x+y)\cos(x+y)(1+y')}{\left[1+\sin(x+y)\right]^2}$$

$$=-\frac{(1+y')\cos(x+y)}{\left[1+\sin(x+y)\right]^2}=\frac{-\cos(x+y)}{\left[1+\sin(x+y)\right]^3}=\frac{-y}{\left[1+\sin(x+y)\right]^3}.$$

24. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解. 由参数方程确定的函数的求导法则可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3t^2+2t}{1-1/(1+t)}=3t^2+5t+2.$$

25. 确定 a,b 的值，使得函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\geq 0 \\ ax+b, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导。

解. 可导必连续, 所以有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} ax+b=b=\lim_{x\to 0^+} f(x)=1,\ 即 b=1.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x-0}=a,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x-1}{x-0}=\ln 2,$$

从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左、右导数存在, 若 $a=\ln 2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数存在.

26. 已知函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, 试求 $\mathrm{d}y$.

解. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x.$

27. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 所确定, 计求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. 两端对 x 求导, 得 $1-y'+\dfrac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$, 所以 $y'=\dfrac{2}{2-\cos y}$.

28. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-\arctan t, \end{cases}$ 所确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. 由条件易得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t^2}{1+t^2},\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{1+t^2},$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{t}{2},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{1+t^2}{4t}$$

29. 设函数 $y=\frac{(2x+1)^2\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$, 试求 $\frac{dy}{dx}$.

解. 不妨设 $x>3$. 两边取对数得

$$\ln y=2\ln(2x+1)+\frac{1}{3}\ln(3x-2)-\frac{2}{3}\ln(x-3).$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{4}{2x+1}+\frac{1}{3x-2}-\frac{2}{3x-9},$$

所以

$$y'=y\left(\frac{4}{2x+1}+\frac{1}{3x-2}-\frac{2}{3x-9}\right).$$

四、证明题（请给出必要的步骤）

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 对任意的实数 x_1,x_2, 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$, 且 $f(0)\neq 0$, $f'(0)=1$, 证明: $f'(x)=f(x)$.

解. 因为 $f(0+0)=f(0)f(0)$, 所以 $f(0)=1$, 于是

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)[f(0+h)-f(0)]}{h}\\&=f(x)f'(0)=f(x)\end{aligned}$$

证毕.