高等数学 B--微积分 (一)

第五章 · 不定积分

2021 年 12 月 16 日

■ 统计与数学学院　■ 王官杰

第一节	不定积分的概念与性质
第二节	换元积分法
第三节	分部积分法
第四节	有理分式的积分

一般地，已知函数 $y = f(x)$, 容易求出 $y' = f'(x)$.

反过来，如果已知 $y' = f'(x)$, 如何找出 $y = f(x)$?

- $(?)' = 2x$
- $(?)' = e^x$
- $(?)' = \sin x$
- $(?)' = \ln x$

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=e^x$
- $(?)'=\sin x$
- $(?)'=\ln x$

问题的提出

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=e^x$
- $(?)'=\sin x$
- $(?)'=\ln x$

问题的提出

一般地，已知函数 $y = f(x)$, 容易求出 $y' = f'(x)$.

反过来，如果已知 $y' = f'(x)$, 如何找出 $y = f(x)$?

- $(?)' = 2x$
- $(?)' = e^x$
- $(?)' = \sin x$
- $(?)' = \ln x$

一般地，已知函数 $y = f(x)$, 容易求出 $y' = f'(x)$.

反过来，如果已知 $y' = f'(x)$, 如何找出 $y = f(x)$?

- $(?)' = 2x$
- $(?)' = e^x$
- $(?)' = \sin x$
- $(?)' = \ln x$

问题的提出

一般地，已知函数 $y = f(x)$, 容易求出 $y' = f'(x)$.

反过来，如果已知 $y' = f'(x)$, 如何找出 $y = f(x)$?

- $(?)' = 2x$
- $(?)' = e^x$
- $(?)' = \sin x$
- $(?)' = \ln x$

定义 若定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 及可导函数 $F(x)$ 满足关系: 对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例 1 因 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

例 2 $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2+2)' = 2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

定义 若定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 及可导函数 $F(x)$ 满足关系: 对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例 1 因 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

例 2 $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2+2)' = 2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

定义 若定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 及可导函数 $F(x)$ 满足关系: 对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例 1 因 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

例 2 $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2+2)' = 2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

注记 关于原函数，需要注意以下两点：

1. 原函数不止一个

$$F'(x)=f(x)\Longrightarrow (F(x)+C)'=f(x)$$

2. 同一个函数的任意两个原函数之间最多相差一个常数 C.

$$F'(x)=G'(x)=f(x)\Longrightarrow G(x)=F(x)+C$$

定理 (原函数存在定理) 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x)$$

简单地说, 连续函数一定有原函数.

注记 初等函数的原函数不一定还是初等函数.

原函数存在定理

定理 (原函数存在定理) 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x)$$

简单地说, 连续函数一定有原函数.

注记 初等函数的原函数不一定还是初等函数.

定义 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数，称为 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

在上面定义中，我们称 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量.

$$\boxed{F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C}$$

定义 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数，称为 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

在上面定义中，我们称 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量.

$$\boxed{F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C}$$

定义 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数，称为 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

在上面定义中，我们称 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量.

$$\boxed{F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C}$$

例 3　求函数 $f(x) = 3x^2$ 的不定积分. .... $x^3 + C$.

例 4　求函数 $f(x) = \sin x$ 的不定积分. .... $-\cos x + C$.

例 3　求函数 $f(x) = 3x^2$ 的不定积分. .... $x^3 + C$.

例 4　求函数 $f(x) = \sin x$ 的不定积分. .... $-\cos x + C$.

例 3 求函数 $f(x) = 3x^2$ 的不定积分. ……………………$x^3 + C$.

例 4 求函数 $f(x) = \sin x$ 的不定积分. ……………$-\cos x + C$.

例 3 求函数 $f(x) = 3x^2$ 的不定积分. .... $x^3 + C$.

例 4 求函数 $f(x) = \sin x$ 的不定积分. .... $-\cos x + C$.

练习 1　求不定积分.

(1) $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

练习 1　求不定积分.

(1) $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x$ ………………………………… $\dfrac{x^2}{2}+C$.

(2) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$ ………………………………… $\dfrac{x^3}{3}+C$.

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ ………………………………… $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$.

例 5 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分. .... $\ln|x|+C.$

例 6 求过点 $(1,3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

答案 $y=x^2+2.$

例 5 求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的不定积分.......................... $\ln|x| + C$.

例 6 求过点 $(1, 3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

答案 $y = x^2 + 2$.

例 5 求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的不定积分 . . . . $\ln|x| + C$.

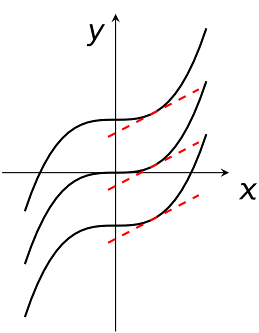
例 6 求过点 $(1, 3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

答案 $y = x^2 + 2$.

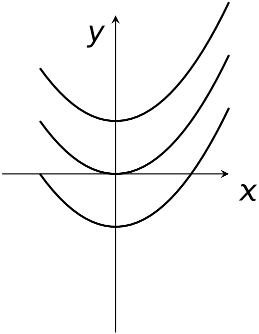
例 5 求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的不定积分. . . . . $\ln|x| + C$.

例 6 求过点 $(1, 3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

答案 $y = x^2 + 2$.



(a) $y = x^3 + C$



(b) $y = x^2 + C$

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线. 显然，求不定积分得到族积分曲线 (称为曲线族), 在同一横坐标 $x = x_0$ 处, 任一曲线的切线有相同的斜率.

性质 1　导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$
2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(x) + C$

不定积分的性质

性质 1　导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$
2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(x) + C$

不定积分的性质

性质 1 导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$
2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(x) + C$

性质 2　非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

性质 3　两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

注：　上述法则可以推广至有限多个函数的线性组合.

性质 2 非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3 两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

注: 上述法则可以推广至有限多个函数的线性组合.

性质 2 非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3 两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

注: 上述法则可以推广至有限多个函数的线性组合.

积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式.

例如，由

$$(x^{a+1})' = (a+1)x^a$$

可得

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C.$$

类似地，我们有如下基本积分公式.

基本积分公式 I

1. $\displaystyle\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
2. $\displaystyle\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

基本积分公式 I

1. $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$
2. $$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$
3. $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

1. $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
2. $\int x^a\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

例 7 求不定积分

(1) $\int (2x + 5x^2 + 7x^3)\,\mathrm{d}x$ ……………… $x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C$

(2) $\int (2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ ……………………………… $2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(3) $\int (2x + 1)^2\,\mathrm{d}x$ ……………………………… $\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

例 7　求不定积分

(1) $\int (2x + 5x^2 + 7x^3)\,\mathrm{d}x$ .... $x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C$

(2) $\int (2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ .... $2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(3) $\int (2x + 1)^2\,\mathrm{d}x$ .... $\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

例 7　求不定积分

(1) $\int (2x+5x^2+7x^3)\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x^2+\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{4}x^4+C$

(2) $\int (2-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

(3) $\int (2x+1)^2\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$

例 7 求不定积分

(1) $\int (2x + 5x^2 + 7x^3)\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C$

(2) $\int (2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots 2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(3) $\int (2x + 1)^2\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

例 7 求不定积分

(1) $\int (2x + 5x^2 + 7x^3)\,\mathrm{d}x$ .... $x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C$

(2) $\int (2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ .... $2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(3) $\int (2x + 1)^2\,\mathrm{d}x$ .... $\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

例 7 求不定积分

(1) $\displaystyle\int (2x+5x^2+7x^3)\,\mathrm{d}x \dotfill x^2+\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{4}x^4+C$

(2) $\displaystyle\int (2-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \dotfill 2x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

(3) $\displaystyle\int (2x+1)^2\,\mathrm{d}x \dotfill \frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$

练习 2　求不定积分

(1) $\int (1 - 2x^2)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

(3) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

练习 2 求不定积分

(1) $\int (1-2x^2)\,\mathrm{d}x$ .... $x-\frac{2}{3}x^3+C.$

(2) $\int (\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})\,\mathrm{d}x$ .... $\frac{1}{4}x^2+2\ln|x|-\frac{3}{x}+C.$

(3) $\int (\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$ .... $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+C.$

练习 3 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x-3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

练习 3　求不定积分

(1) $\int \sqrt{x}(x-3)\,\mathrm{d}x$ .... $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + C.$

(2) $\int \frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$ .... $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln|x| + C.$

基本积分公式 II

4 $\int e^x \, dx = e^x + C$

5 $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

基本积分公式 II

4 $\int e^x \, dx = e^x + C$

5 $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

例 8 求不定积分：

(1) $\int (4e^x - x^e)\,dx$ …………………………… $4e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

(2) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,dx$ …………………………………… $e^x + x + C.$

例 8 求不定积分：

(1) $\int (4e^x - x^e)\,dx$ .... $4e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

(2) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,dx$ .... $e^x + x + C.$

例 8　求不定积分：

(1) $\int (4e^x - x^e)\,dx$ ………………………… $4e^x - \dfrac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

(2) $\int \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,dx$ ………………………………… $e^x + x + C.$

例 8　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int (4\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}})\,\mathrm{d}x$ .... $4\mathrm{e}^x - \dfrac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1} + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$ .... $\mathrm{e}^x + x + C.$

练习 4　求不定积分：

(1) $\int (x^2 + 2^x)\,\mathrm{d}x$

练习 4 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int (x^2 + 2^x)\,\mathrm{d}x$ ………………………… $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2^x}{\ln 2} + C.$

基本积分公式 III

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

9 $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

基本积分公式 III

6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
8. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
9. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

6 $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8 $\displaystyle\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

9 $\displaystyle\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

基本积分公式 III

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

9 $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

例 9 求不定积分

(1) $\int (\sin x + 2\cos x)\,dx$ ………………$-\sin x + 2\sin x + C.$

(2) $\int \tan^2 x\,dx$

…………………………$= \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C.$

例 9 求不定积分

(1) $\int (\sin x + 2\cos x)\,dx$ .... $-\sin x + 2\sin x + C.$

(2) $\int \tan^2 x\,dx$

.... $= \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C.$

例 9 求不定积分

(1) $\int (\sin x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \sin x + 2\sin x + C.$

(2) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \tan x - x + C.$

例 9　求不定积分

(1) $\int (\sin x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \sin x + 2\sin x + C.$

(2) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \tan x - x + C.$

练习 5　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cot^2 x \, \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} \, \mathrm{d}x$

练习 5　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x$ ....$-\cot x - x + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$ ....$\sin x + \cos x + C.$

基本积分公式 IV

10 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$

基本积分公式 IV

10 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$

例 10 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ …………………… $\dfrac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ …………………… $-\dfrac{1}{x} - \arctan x + C.$

例 10　求不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ .... $-\dfrac{1}{x} - \arctan x + C.$

例 10 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\frac{1}{x} - \arctan x + C.$

例 10　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots -\frac{1}{x} - \arctan x + C.$

练习 6　求不定积分：

(1) $$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

练习 6　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x - \arctan x + C.$

基本积分公式 V

12 $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

13 $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

基本积分公式 V

12 $$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

13 $$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

小结

本节主要内容：

1. 原函数的概念：$F'(X) = f(x)$;
2. 不定积分的概念：$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$;
3. 求微分与求不定积分的互逆关系
4. 基本积分公式

基本积分公式 I

1. $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$
2. $$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$
3. $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

基本积分公式 I

1. $\int 1 \, dx = x + C$
2. $\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

基本积分公式 I

1. $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$
2. $$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$
3. $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

4 $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

5 $\displaystyle\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

基本积分公式 II

4 $\int e^x \, dx = e^x + C$

5 $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

基本积分公式 III

6. $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
7. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + C$
8. $\displaystyle\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
9. $\displaystyle\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

基本积分公式 III

6 $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

7 $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

8 $$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

9 $$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

基本积分公式 III

6 $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8 $\displaystyle\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

9 $\displaystyle\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

基本积分公式 III

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

9 $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

10 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

基本积分公式 IV

10 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$

基本积分公式 V

12 $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

13 $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

基本积分公式 V

12 $\displaystyle\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

13 $\displaystyle\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

复习 1 求不定积分

(1) $\int (\sin x - 2e^x)\,dx$

(2) $\int \frac{(2x+3)^2}{x}\,dx$

(3) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$

复习 1　求不定积分

(1) $\int (\sin x - 2e^x)\,\mathrm{d}x$ .... $-\cos x - 2e^x + C.$

(2) $\int \frac{(2x+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$ .... $2x^2 + 12x + 9\ln|x| + C.$

(3) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ .... $x - 2\arctan x + C.$

第一节	不定积分的概念与性质
第二节	换元积分法
第三节	分部积分法
第四节	有理分式的积分

例 1 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,dx$.

解法 设置中间变量，并利用复合函数求导法则.

例 1 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,dx$.

解法 设置中间变量，并利用复合函数求导法则.

例 1 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x$.

解法 设置中间变量，并利用复合函数求导法则.

解 令 $u = 2x + 1$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$, 于是

$$\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x = \int u^{10}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$$

例 1 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,dx$.

解法 设置中间变量，并利用复合函数求导法则.

解 令 $u = 2x+1$, 则 $dx = \dfrac{1}{2}\,du$, 于是

$$\int (2x+1)^{10}\,dx = \int u^{10}\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{22}u^{11}+C =$$

例 1 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x$.

解法 设置中间变量，并利用复合函数求导法则.

解 令 $u = 2x+1$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$, 于是

$$\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x = \int u^{10}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{22}u^{11}+C = \frac{1}{22}(2x+1)^{11}+C.$$

一般地，设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, 即

$$F'(u) = f(u), \quad \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C.$$

如果 $u = \phi(x)$ 可微, 则由链式法则，有

$$\mathrm{d}F(\phi(x)) = F'(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\phi(x)) + C = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}.$$

定理 (第一类换元法)

设 $f(u)$ 具有原函数, $\phi(x)$ 可导，则有

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

注记　使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 化为} \int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

第一类换元法也称为凑微分法.

定理 (第一类换元法)

设 $f(u)$ 具有原函数, $\phi(x)$ 可导，则有

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

注记　使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 化为} \int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

第一类换元法也称为凑微分法.

定理 (第一类换元法)

设 $f(u)$ 具有原函数, $\phi(x)$ 可导，则有

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x))$$
$$= \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

注记 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 化为} \int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

第一类换元法也称为凑微分法.

1. $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}\,\mathrm{d}\left(a^x\right)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$;
6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$
7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}(\cos x)$

1. $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}\,\mathrm{d}\left(a^x\right)\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$;
6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$
7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}(\cos x)$

常用的积分换元 I

1. $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\mathrm{d}\left(a^x\right)$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$;
6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$
7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$

1. $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)\,(a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\,\mathrm{d}\left(a^x\right)\,(a>0 \text{ 且 } a \neq 1);$
6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$
7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$

常用的积分换元 I

1. $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)\,(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}\,\mathrm{d}\left(a^x\right)\,(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$;
6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$
7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$

1. $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)\ (a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}\mathrm{d}\left(a^x\right)\ (a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$;
6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$
7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$

1. $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\,\mathrm{d}\left(a^x\right)$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$;
6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$
7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}(\cos x)$

常用的积分换元 II

8 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$

9 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$

10 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x) = -\mathrm{d}(\arccos x)$

11 $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x) = -\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)$

8. $$\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$$
9. $$\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$$
10. $$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x) = -\mathrm{d}(\arccos x)$$
11. $$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x) = -\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)$$

8 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$

9 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$

10 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x) = -\mathrm{d}(\arccos x)$

11 $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x) = -\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)$

常用的积分换元 II

8 $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x \, dx = d(\tan x)$

9 $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = \csc^2 x \, dx = -d(\cot x)$

10 $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$

11 $\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\arctan x) = -d(\operatorname{arccot} x)$

例 2　求不定积分 $\int \sin 2x \, dx$.

注记　观察点不同，所得结论不同.

例 2　求不定积分 $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

解 (解法 1)　$$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}(2x)$$

令 $u = 2x$, 则上式等于

$$\frac{1}{2}\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

....

注记　观察点不同，所得结论不同.

例 2 求不定积分 $\int \sin 2x \, dx$.

解 (解法 2) $\int \sin 2x \, dx = 2\int \sin x \cos x dx = 2\int \sin x \, d \sin x$

令 $u = \sin x$, 则上式等于

$$2\int u \, du = u^2 + C = (\sin x)^2 + C.$$

....

注记 观察点不同，所得结论不同.

例 2　求不定积分 $\int \sin 2x \, dx$.

解 (解法 3)　由二倍角公式易知

$$\int \sin 2x \, dx = 2\int \sin x \cos x dx = -2\int \cos x \, d\cos x$$

令 $u = \cos x$, 则上式等于

$$-2\int u \, du = -u^2 + C = -(\cos x)^2 + C$$

....

注记　观察点不同，所得结论不同.

第一类换元法

例 3　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$ ······························ $\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)\,\mathrm{d}x$ ······················ $\dfrac{1}{3}\cos(3x+4)+C$

例 3 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$ .... $\displaystyle\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)\,\mathrm{d}x$ .... $\displaystyle\frac{1}{3}\cos(3x+4)+C$

例 3　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$ .... $\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{1}{3}\cos(3x+4)+C$

例 3　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+1}$ .... $\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)\,dx$ .... $\dfrac{1}{3}\cos(3x+4)+C$

练习 1 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x+2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$

练习 1 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2} \cdots\cdots -\frac{1}{4}(4x+5)^{-1}+C$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x+2}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$

第一类换元法

例 4 求不定积分

(1) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ .... $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ .... $-e^{1/x}+C$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$ .... $\dfrac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}}+C$

例 4　求不定积分

(1) $\int xe^{x^2}\,dx$ .... $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

(2) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ .... $-e^{1/x}+C$

(3) $\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$ .... $\frac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}}+C$

例 4　求不定积分

(1) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ ······························ $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ ······························ $-e^{1/x}+C$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$ ························· $\dfrac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}}+C$

例 4　求不定积分

(1) $\displaystyle\int x e^{x^2}\,dx$ ································· $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ ································· $-e^{1/x}+C$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$ ································· $\dfrac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}}+C$

例 4　求不定积分

(1) $\displaystyle\int x e^{x^2}\,dx$ ………………………………… $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ ………………………………… $-e^{1/x}+C$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$ ………………………… $\dfrac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}}+C$

例 4　求不定积分

(1) $\displaystyle\int x e^{x^2}\,dx$ ………………………………… $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ ………………………………… $-e^{1/x}+C$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$ ………………………………… $\dfrac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}}+C$

练习 2　求不定积分

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

练习 2　求不定积分

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{1}{30}(x^3+1)^{10}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3)+C$

例 5　求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ .... $\displaystyle\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,\mathrm{d}x$ .... $\displaystyle\frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ .... $\displaystyle\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

例 5　求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

例 5 求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots\cdots \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots\cdots \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots\cdots \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

例 5　求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \dots\dots\dots\dots \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,\mathrm{d}x \dots\dots\dots\dots \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \dots\dots\dots\dots \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

例 5　求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ ………………………… $\displaystyle\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,\mathrm{d}x$ ………………… $\displaystyle\frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ ………………………… $\displaystyle\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

例 5 求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

练习 3　求不定积分：

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ (a > 0)$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}$$

练习 3　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$（$a>0$）……………………… $\arcsin\dfrac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}$ ……………………… $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C$

例 6 求不定积分

(1) $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$ ..... $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$

(2) $\int \sin^3 x \, dx$ .... $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路：m, n 有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分.

例 6 求不定积分

(1) $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx \ldots\ldots \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$

(2) $\int \sin^3 x \, dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路：m, n 有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分.

例 6　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx$ ..... $\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{2}{5}\sin^5 x+\dfrac{1}{7}\sin^7 x+C$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$ .... $\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

形如 $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ 的解题思路：m,n 有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分.

例 6　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$ ..... $\displaystyle\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x \, dx$ .... $\displaystyle\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路：m, n 有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分.

例 6　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx \ldots\ldots \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

形如 $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ 的解题思路：m, n 有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分.

练习 4 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cos^6 x \sin x \, dx$

(2) $\displaystyle\int \cos^5 x \, dx$

练习 4　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cos^6 x \sin x \,\mathrm{d}x$ .... $-\dfrac{1}{7}\cos^7 x + C$

(2) $\displaystyle\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x$ .... $\sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + \dfrac{1}{5}\sin^5 x + C$

例 7 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots -\ln|\cos x|+C$

(3) $\displaystyle\int \csc x\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots \ln|\csc x-\cot x|+C$

例 7　求不定积分

(1) $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\int \tan x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots -\ln|\cos x|+C$

(3) $\int \csc x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots \ln|\csc x-\cot x|+C$

例 7　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots -\ln|\cos x|+C$

(3) $\displaystyle\int \csc x\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots \ln|\csc x-\cot x|+C$

例 7 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,dx \dotfill \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx \dotfill -\ln|\cos x|+C$

(3) $\displaystyle\int \csc x\,dx \dotfill \ln|\csc x-\cot x|+C$

例 7 求不定积分

(1) $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\int \tan x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots -\ln|\cos x|+C$

(3) $\int \csc x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots \ln|\csc x-\cot x|+C$

例 7　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\ln|\cos x|+C$

(3) $\displaystyle\int \csc x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ln|\csc x-\cot x|+C$

练习 5　求不定积分

(1) $\int \cot x \, dx$

(2) $\int \sec x \, dx$

练习 5　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cot x \, \mathrm{d}x$ .... $\ln|\sin x| + C$

(2) $\displaystyle\int \sec x \, \mathrm{d}x$ .... $\ln|\sec x + \tan x| + C$

例 8 求不定积分 $\int \sin^2 x\,dx$ ………… $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

形如 $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ 的解题思路：m, n 都是偶数时，使用 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 降幂.

练习 6 求不定积分 $\int \cos^2 2x\,dx$.

例 8 求不定积分 $\int \sin^2 x \, dx$ .... $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路：m, n 都是偶数时，使用 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 降幂.

练习 6 求不定积分 $\int \cos^2 2x \, dx$.

例 8　求不定积分 $\int \sin^2 x \, dx$ .... $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$.

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路：m, n 都是偶数时，使用 $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 降幂.

练习 6　求不定积分 $\int \cos^2 2x \, dx$.

例 8 求不定积分 $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ .... $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

> 形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x$ 的解题思路：m, n 都是偶数时，使用 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 降幂.

练习 6 求不定积分 $\int \cos^2 2x \, \mathrm{d}x$.

例 8 求不定积分 $\int \sin^2 x \, dx$ .... $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路：m, n 都是偶数时，使用 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 降幂.

练习 6 求不定积分 $\int \cos^2 2x \, dx$. .... $\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{x}{2} + C$.

例 9 求 $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$

解 易知 $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)$ 于是

$$\int \cos 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$$

形如 $\int \cos mx \cos nx \, dx$ 的求解思路：使用积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

例 9 求 $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$

解 易知 $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)$ 于是

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx \\ &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C\end{aligned}$$

形如 $\int \cos mx \cos nx \, dx$ 的求解思路：使用积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

例 9　求 $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$

解　易知 $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)$ 于是

$$\int \cos 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx$$
$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$$

形如 $\int \cos mx \cos nx \, dx$ 的求解思路：使用积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

例 10 求 $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

解 由条件可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x-\int \frac{(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C\end{aligned}$$

形如 $\int \frac{a\sin x+b\cos x}{A\sin x+B\cos x}\,\mathrm{d}x$ 的解题思路: 令 $a\sin x+b\cos x=m(A\sin x+B\cos x)+n(A\sin x+B\cos x)'$ 拆项.

例 10 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

解 由条件可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x-\int \frac{(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C\end{aligned}$$

形如 $\displaystyle\int \frac{a\sin x+b\cos x}{A\sin x+B\cos x}\,\mathrm{d}x$ 的解题思路: 令 $a\sin x+b\cos x=m(A\sin x+B\cos x)+n(A\sin x+B\cos x)'$ 拆项.

例 10　求 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$

解　由条件可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x + \cos x - (\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \mathrm{d}x - \int \frac{(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{2} (x - \ln|\sin x + \cos x|) + C\end{aligned}$$

形如 $\int \frac{a \sin x + b \cos x}{A \sin x + B \cos x} \mathrm{d}x$ 的解题思路：令 $a \sin x + b \cos x = m(A \sin x + B \cos x) + n(A \sin x + B \cos x)'$ 拆项.

问题 $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

解决方法：改变中间变量的设置方法.

过程：令 $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int (\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \sin^5 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \cdots\cdots$$

(应用“凑微分”即可求出结果)

问题 $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

解决方法： 改变中间变量的设置方法.

过程： 令 $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int (\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \sin^5 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \cdots\cdots$$

(应用“凑微分”即可求出结果)

问题 $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

解决方法： 改变中间变量的设置方法.

过程： 令 $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int(\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int \sin^5 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\cdots\cdots$$

(应用“凑微分”即可求出结果)

定理 1 (第二类换元法) 若 $x = \phi(t)$ 是单调、可导的函数，而且 $\phi'(t) \neq 0$，则有

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t)) \\ &= \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}\end{aligned}$$

例 11 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$ .... $x-\ln(e^x+1)+C$

练习 7 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

例 11　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$ .... $x-\ln(e^x+1)+C$

练习 7　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

例 11　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$ .... $x-\ln(e^x+1)+C$

练习 7　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

例 11 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$ .... $x-\ln(e^x+1)+C$

练习 7 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ .... $\arctan(e^x)+C$

常用的变量代换

1. 三角代换
2. 倒代换
3. 简单无理函数代换

三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ 令$x=a\sin t$, $\sqrt{a^2-x^2}\Longrightarrow a\cos t$
2. $\sqrt{a^2+x^2}$ 令$x=a\tan t$, $\sqrt{a^2+x^2}\Longrightarrow a\sec t$
3. $\sqrt{x^2-a^2}$ 令$x=a\sec t$, $\sqrt{x^2-a^2}\Longrightarrow a\tan t$

三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ 令$x=a\sin t$, $\sqrt{a^2-x^2}\Longrightarrow a\cos t$
2. $\sqrt{a^2+x^2}$ 令$x=a\tan t$, $\sqrt{a^2+x^2}\Longrightarrow a\sec t$
3. $\sqrt{x^2-a^2}$ 令$x=a\sec t$, $\sqrt{x^2-a^2}\Longrightarrow a\tan t$

三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ 令$x=a\sin t$, $\sqrt{a^2-x^2}\Longrightarrow a\cos t$
2. $\sqrt{a^2+x^2}$ 令$x=a\tan t$, $\sqrt{a^2+x^2}\Longrightarrow a\sec t$
3. $\sqrt{x^2-a^2}$ 令$x=a\sec t$, $\sqrt{x^2-a^2}\Longrightarrow a\tan t$

三角代换

三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ 令$x=a\sin t$, $\sqrt{a^2-x^2} \Longrightarrow a\cos t$
2. $\sqrt{a^2+x^2}$ 令$x=a\tan t$, $\sqrt{a^2+x^2} \Longrightarrow a\sec t$
3. $\sqrt{x^2-a^2}$ 令$x=a\sec t$, $\sqrt{x^2-a^2} \Longrightarrow a\tan t$

例 12　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解　令 $x = a\sin t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{a\cos t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int 1\,\mathrm{d}t = t + C$$
$$= \arcsin\frac{x}{a} + C$$

三角代换

例 12 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $x = a\sin t,\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{1}{a\cos t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int 1\,\mathrm{d}t = t + C \\
&= \arcsin\frac{x}{a} + C
\end{aligned}
$$

三角代换

例 12　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解　令 $x = a\sin t,\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{1}{a\cos t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int 1\,\mathrm{d}t = t + C \\ &= \arcsin\frac{x}{a} + C\end{aligned}$$

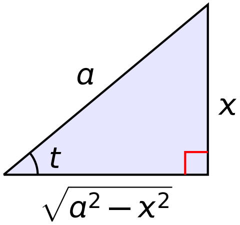
例 12 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $x = a\sin t,\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{a\cos t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int 1\,\mathrm{d}t = t + C$$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + C$$



例 13 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$

解 设 $x = a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t,\ \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C_1$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

例 13 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$

解 设 $x = a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t,\ \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1 \\
&= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C_1 \\
&= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

三角代换

例 13　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$

解　设 $x = a\tan t \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t,\ \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C_1$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

例 13　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$

解　设 $x = a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t,\ \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

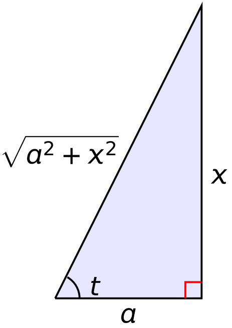
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t\\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C_1\\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1\\ &= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C_1\\ &= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C\end{aligned}$$

例 13 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$

解 设 $x = a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t,\ \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t \\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C_1 \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1 \\ &= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C_1 \\ &= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C\end{aligned}$$



例 14 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$

解 当 $x>0$ 时，设 $x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,\quad \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\tan t}=\int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_2$$

例 14 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$

解 当 $x>0$ 时，设 $x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,\quad \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

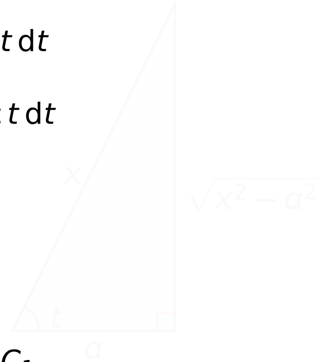
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\tan t}=\int\sec t\,\mathrm{d}t$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_2$$

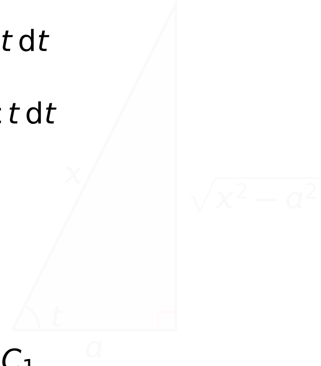


例 14 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$

解 当 $x > 0$ 时，设 $x = a\sec t\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t, \quad \mathrm{d}x = a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \int \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\tan t} = \int \sec t\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1 \\
&= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C_1 \\
&= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C_2
\end{aligned}$$



例 14 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$

解 当 $x > 0$ 时，设 $x = a\sec t \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t, \quad \mathrm{d}x = a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

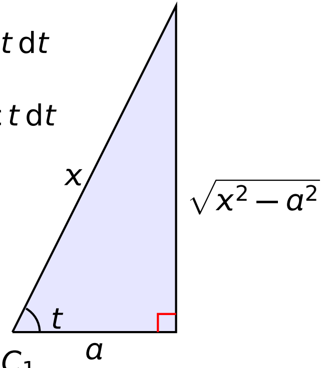
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\tan t} = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C_1$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C_2$$



当 $x<0$ 时, 设 $x=-u$, 那么 $u>0$, 利用上段结果,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}} \\
&= -\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)+C_2 \\
&= -\ln\left(-x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2 \\
&= \ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+C_2 \\
&= \ln\left(-x-\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2-\ln a^2 \\
&= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C
\end{aligned}
$$

从而

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C
$$

练习 8　求不定积分

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

练习 8 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ ………………………… $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ ………………………… $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

注记 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的，需要根据被积函数的情况决定.

例 15 求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$（三角代换很繁琐）

解 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2=t^2-1$, $x\,dx=t\,dt$,

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t} t\, dt = \int \left(t^4-2t^2+1\right) dt$$

$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C$$

$$= \frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2} + C$$

注记　积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的，需要根据被积函数的情况决定.

例 15　求 $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$（三角代换很繁琐）

解　令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2=t^2-1$, $x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t=\int \left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$

$$=\frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C$$

三角代换

注记　积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的，需要根据被积函数的情况决定.

例 15　求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ （三角代换很繁琐）

解　令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2=t^2-1,\ x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t,$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t=\int \left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$

$$=\frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C$$

注记 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的，需要根据被积函数的情况决定.

例 15 求 $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ （三角代换很繁琐）

解 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2=t^2-1$, $x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t=\int \left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$

$$=\frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C$$

注记　积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的，需要根据被积函数的情况决定.

例 15　求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$（三角代换很繁琐）

解　令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2=t^2-1,\ x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t,$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t=\int \left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$

$$=\frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C$$

注记 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的，需要根据被积函数的情况决定.

例 15 求 $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ （三角代换很繁琐）

解 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2=t^2-1,\ x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t,$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t = \int \left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C \\
&= \frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C
\end{aligned}
$$

当分母的阶较高时，可以采用倒代换 $x = \dfrac{1}{t}$.

例 16 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x$

解 令 $x = \dfrac{1}{t} \Longrightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 则

$$\int \frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7 + 2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int \frac{t^6}{1+2t^7}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^7\right| + C$$

$$= -\frac{1}{14}\ln\left|2+x^7\right| + \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

当分母的阶较高时，可以采用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

例 16　求 $\displaystyle\int \frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x$

解　令 $x=\dfrac{1}{t} \Longrightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 则

$$\int \frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int \frac{t^6}{1+2t^7}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^7\right|+C$$

$$=-\frac{1}{14}\ln\left|2+x^7\right|+\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

当分母的阶较高时，可以采用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

例 16　求 $\displaystyle\int \frac{1}{x\left(x^{7}+2\right)}\,\mathrm{d}x$

解　令 $x=\dfrac{1}{t} \Longrightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^{2}}\,\mathrm{d}t$, 则

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\left(x^{7}+2\right)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^{7}+2} \cdot\left(-\frac{1}{t^{2}}\right) \mathrm{d}t=-\int \frac{t^{6}}{1+2 t^{7}}\,\mathrm{d}t \\
&=-\frac{1}{14} \ln \left|1+2 t^{7}\right|+C \\
&=-\frac{1}{14} \ln \left|2+x^{7}\right|+\frac{1}{2} \ln |x|+C
\end{aligned}
$$

倒代换

当分母的阶较高时，可以采用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

例 16　求 $\displaystyle\int \frac{1}{x\left(x^{7}+2\right)}\,\mathrm{d}x$

解　令 $x=\dfrac{1}{t} \Longrightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^{2}}\,\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\left(x^{7}+2\right)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^{7}+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^{2}}\right)\mathrm{d}t=-\int \frac{t^{6}}{1+2t^{7}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^{7}\right|+C \\
&= -\frac{1}{14}\ln\left|2+x^{7}\right|+\frac{1}{2}\ln|x|+C
\end{aligned}$$

例 17　求 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,dx$. (分母的阶较高)

解　令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则 $dx=-\dfrac{1}{t^2}\,dt$, 于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)d$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,dt=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt^2$$

$$\overset{u=t^2}{=\!=\!=}-\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\,du=\frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)d(1+u)$$

$$=-\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3+\sqrt{1+u}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

例 17 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. (分母的阶较高)

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t^2$$

$$\overset{u=t^2}{=\!=\!=}-\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)$$

$$=-\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3+\sqrt{1+u}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

例 17 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. (分母的阶较高)

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t^2$$

$$\xlongequal{u=t^2}-\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)$$

$$=-\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3+\sqrt{1+u}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

例 17 求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$. (分母的阶较高)

解 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t^2$$

$$\xlongequal{u=t^2}-\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)$$

$$=-\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3+\sqrt{1+u}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

例 17 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. (分母的阶较高)

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t^2$$

$$\overset{u=t^2}{=\!=\!=}-\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)$$

$$=-\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3+\sqrt{1+u}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

例 17 求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. (分母的阶较高)

解 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t^2$$

$$\xlongequal{u=t^2}-\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)$$

$$=-\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3+\sqrt{1+u}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

例 17　求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$. (分母的阶较高)

解　令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t^2$$

$$\xlongequal{u=t^2}-\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)$$

$$=-\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3+\sqrt{1+u}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

例 17 求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. (分母的阶较高)

解 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t^2$$

$$\overset{u=t^2}{=\!=\!=}-\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)$$

$$=-\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3+\sqrt{1+u}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

当被积函数含有两种或两种以上的根式时 $\sqrt[k]{x},\ldots,\sqrt[l]{x}$ 时，可令 $x=t^n$（n 为各根指数的最小公倍数）

例 18 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解 令 $x=t^6$ 则 $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x=\int \frac{6t^5}{t^3\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=6\left(\int \mathrm{d}t-\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)=6(t-\arctan t)+$$

$$=6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan(\sqrt[6]{x})\right)+C$$

简单无理函数代换

例 18 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解 令 $x = t^6$ 则 $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6t^5}{t^3\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 6(t-\arctan t)+$$

$$= 6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan(\sqrt[6]{x})\right) + C$$

简单无理函数代换

例 18　求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解　令 $x=t^6$ 则 $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6t^5}{t^3\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 6(t-\arctan t)+$$

$$= 6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan(\sqrt[6]{x})\right) + C$$

简单无理函数代换

例 18 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解 令 $x = t^6$ 则 $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6t^5}{t^3\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) \quad = 6(t-\arctan t)+$$

$$= 6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan(\sqrt[6]{x})\right) + C$$

简单无理函数代换

例 18　求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解　令 $x = t^6$ 则 $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{6t^5}{t^3\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 6\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 6(t-\arctan t)+ \\
&= 6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan(\sqrt[6]{x})\right)+C
\end{aligned}
$$

例 18 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解 令 $x=t^6$ 则 $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{6t^5}{t^3\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 6\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 6(t-\arctan t)+
\end{aligned}
$$

$$
= 6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan(\sqrt[6]{x})\right)+C
$$

例 18 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解 令 $x=t^6$ 则 $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{6t^5}{t^3\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 6\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 6(t-\arctan t)+ \\ &= 6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan(\sqrt[6]{x})\right)+C\end{aligned}$$

例 19 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

解 令 $t^6 = x+1$，则 $6t^5\,dt = dx$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1}$$

$$+ 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C$$

例 19　求积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} \mathrm{d}x.$

解　令 $t^6 = x+1$，则 $6t^5 \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^3+t^2} \cdot 6t^5 \mathrm{d}t = 6 \int \frac{t^3}{t+1} \mathrm{d}t$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1}$$

$$+ 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C$$

例 19 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $t^6 = x+1$，则 $6t^5\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. 于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C \\
&= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} \\
&\quad + 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C
\end{aligned}$$

例 19　求积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

解　令 $t^6 = x+1$，则 $6t^5\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1}$$

$$+ 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C$$

练习 9　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

练习 9　求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}$

答案　$6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + C$

简单无理函数代换

当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\ldots,$ 可将无法处理的部分设为 t

例 20 求积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx$.

解 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, 则 $\frac{1+x}{x} = t^2$, $x = \frac{1}{t^2-1}$, $dx = -\frac{2t\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}$.

于是

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx = -\int \left(t^2-1\right) t \frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt$$

$$= -2\int \frac{t^2\,dt}{t^2-1}$$

$$= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right) dt = -2t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right| + C$$

例 20　求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$, 则 $\dfrac{1+x}{x}=t^2$,$x=\dfrac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{\left(t^2-1\right)^2}$.

于是

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x=-\int\left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=-2\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C$$

例 20 求积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, 则 $\frac{1+x}{x} = t^2, x = \frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x = -\frac{2t\,\mathrm{d}t}{\left(t^2-1\right)^2}$.

于是

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x = -\int \left(t^2-1\right) t \frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = -2t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right| + C$$

例 20 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}} = t$, 则 $\dfrac{1+x}{x} = t^2$, $x = \dfrac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x = -\dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{\left(t^2-1\right)^2}$.

于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x &= -\int \left(t^2-1\right) t \frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} \\
&= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = -2t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\
&= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right| + C
\end{aligned}$$

例 20　求积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$, 则 $\frac{1+x}{x}=t^2, x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-\frac{2t\,\mathrm{d}t}{\left(t^2-1\right)^2}$.

于是

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x=-\int \left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=-2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$=-2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C$$

例 20　求积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$, 则 $\frac{1+x}{x}=t^2, x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-\frac{2t\,\mathrm{d}t}{\left(t^2-1\right)^2}$.

于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x &= -\int \left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} \\
&= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = -2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C \\
&= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C
\end{aligned}
$$

例 21 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$.

解 令 $t=\sqrt{1+e^x}$, 则 $e^x=t^2-1$, $x=\ln(t^2-1)$, $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx &= \int \frac{2}{t^2-1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = 2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right) - x + C\end{aligned}$$

例 21 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, 则 $\mathrm{e}^x=t^2-1$, $x=\ln\left(t^2-1\right)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1\right)-x+C$$

例 21 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$.

解 令 $t=\sqrt{1+e^x}$, 则 $e^x=t^2-1$, $x=\ln\left(t^2-1\right)$, $dx=\dfrac{2t}{t^2-1}\,dt$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx=\int \frac{2}{t^2-1}\,dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-x+C$$

例 21 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, 则 $\mathrm{e}^x=t^2-1$, $x=\ln\left(t^2-1\right)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1\right)-x+C$$

当被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$, 可以使用根号内配方法

例 22　求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

解　易知

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x+1=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$.于是

$$\text{原式} = \int \frac{1}{1+\sec t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t(1+\cos t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \ln|\sec t+\tan t| - \tan\frac{t}{2} + c$$

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| - \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} + C.$$

例 22 求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

解 易知

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x+1=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{1+\sec t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t(1+\cos t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t+\tan t| - \tan\frac{t}{2} + c \\
&= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| - \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} + C.
\end{aligned}$$

例 22　求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

解　易知

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x+1=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$.于是

$$\text{原式} = \int \frac{1}{1+\sec t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t(1+\cos t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \ln|\sec t+\tan t| - \tan\frac{t}{2} + c$$

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| - \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} + C.$$

例 22 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

解 易知

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x+1=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$.于是

$$\text{原式} = \int \frac{1}{1+\sec t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t(1+\cos t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| - \tan\frac{t}{2} + c$$

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| - \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} + C.$$

练习 10　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$

练习 10　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ .... $2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{2\sqrt{x-3}(x+6)}{3}+C$

两类积分换元法：

1. 第一类换元（凑微分）
$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$
2. 第二类换元
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t)) = \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

    1. 三角代换
    2. 倒代换
    3. 根式代换

$$\int 1 \, dx = x + C \tag{2.1}$$

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \tag{2.2}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \tag{2.3}$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{2.4}$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \tag{2.5}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \tag{2.6}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \tag{2.7}$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \tag{2.8}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \tag{2.9}$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{2.10}$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{2.11}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \tag{2.12}$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \tag{2.13}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \tag{2.14}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \tag{2.15}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \tag{2.16}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C \tag{2.17}$$

第一节 不定积分的概念与性质

第二节 换元积分法

第三节 分部积分法

第四节 有理分式的积分

分部积分公式

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

分部积分

设 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 具有连续导数，则

$$\int uv' \, dx = \int u \, dv = uv - \int vu' \, dx = uv - \int v \, du$$

证明　由 $(uv)' = u'v + uv'$ 可得

$$uv' = (uv)' - u'v$$

故结论成立.

设 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 具有连续导数，则

$$\int uv' \,\mathrm{d}x = \int u \,\mathrm{d}v = uv - \int vu' \,\mathrm{d}x = uv - \int v \,\mathrm{d}u$$

证明　由 $(uv)' = u'v + uv'$ 可得

$$uv' = (uv)' - u'v$$

故结论成立.

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,dx$ ……………… $x\sin x+\cos x+C.$

例 2　求不定积分 $\int x^2e^x\,dx$ ………… $x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C.$

注记　若被积函数是幂函数和正（余）弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u，使其降幂一次（假定幂指数是正整数）

例 1 求不定积分 $\int x\cos x\,dx$ .... $x\sin x+\cos x+C.$

例 2 求不定积分 $\int x^2e^x\,dx$ .... $x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C.$

注记 若被积函数是幂函数和正（余）弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u，使其降幂一次（假定幂指数是正整数）

分部积分

例 1 求不定积分 $\int x\cos x\,dx$ .... $x\sin x+\cos x+C.$

例 2 求不定积分 $\int x^2 e^x\,dx$ .... $x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C.$

注记 若被积函数是幂函数和正（余）弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u，使其降幂一次（假定幂指数是正整数）

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ .... $x\sin x+\cos x+C.$

例 2　求不定积分 $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ .... $x^2\mathrm{e}^x-2(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)+C.$

注记　若被积函数是幂函数和正（余）弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u，使其降幂一次（假定幂指数是正整数）

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x\sin x + \cos x + C.$

例 2　求不定积分 $\int x^2 e^x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$

注记　若被积函数是幂函数和正（余）弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u，使其降幂一次（假定幂指数是正整数）

练习 1 求不定积分：

(1) $\int x^2 \cos x \, dx$

(2) $\int x e^{2x} \, dx$

练习 1 求不定积分：

(1) $\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$ .... $(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)+C$

(2) $\int x\mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$ .... $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{4}+C.$

例 3　求不定积分 $\int \ln x \, dx$ .... $x \ln x - x + C.$

例 4　求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

注记　若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

例 3　求不定积分 $\int \ln x \, dx$ .... $x \ln x - x + C.$

例 4　求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

注记　若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

例 3 求不定积分 $\int \ln x \, dx$ .... $x\ln x - x + C.$

例 4 求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$

.... $\dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$

注记 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

例 3　求不定积分 $\int \ln x \, dx$ .... $x \ln x - x + C.$

例 4　求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

注记　若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

例 3　求不定积分 $\int \ln x \, dx$ .... $x\ln x - x + C.$

例 4　求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

注记　若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

练习 2　求不定积分：

(1) $\int x \ln x \, dx$

(2) $\int \arcsin x \, dx$

练习 2　求不定积分：

(1) $\int x \ln x \, dx$ .... $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

(2) $\int \arcsin x \, dx$ .... $x \arcsin x + \sqrt{(1-x^2)} + C$

例 5 求积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

解 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \, dx &= \int \sin x \, d\left(e^x\right) = e^x \sin x - \int e^x \, d(\sin x) \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ &= e^x \sin x - \int \cos x \, d\left(e^x\right) \\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \, d\cos x\right) \\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx\end{aligned}$$

因此 $\int e^x \sin x \, dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

例 5 求积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

解 由分部积分可得

$$\int e^x \sin x \, dx = \int \sin x \, d\left(e^x\right) = e^x \sin x - \int e^x \, d(\sin x)$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$= e^x \sin x - \int \cos x \, d\left(e^x\right)$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \, d\cos x\right)$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx$$

因此 $\int e^x \sin x \, dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

例 5 求积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

解 由分部积分可得

$$
\begin{aligned}
\int e^x \sin x \, dx &= \int \sin x \, d\left(e^x\right) = e^x \sin x - \int e^x \, d(\sin x) \\
&= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
&= e^x \sin x - \int \cos x \, d\left(e^x\right) \\
&= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \, d\cos x\right) \\
&= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx
\end{aligned}
$$

因此 $\int e^x \sin x \, dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

例 5 求积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

解 由分部积分可得

$$\int e^x \sin x \, dx = \int \sin x \, d\left(e^x\right) = e^x \sin x - \int e^x \, d(\sin x)$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$= e^x \sin x - \int \cos x \, d\left(e^x\right)$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \, d\cos x\right)$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx$$

因此 $\int e^x \sin x \, dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

例 5 求积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

解 由分部积分可得

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x \, dx &= \int \sin x \, d\left(e^x\right) = e^x \sin x - \int e^x \, d(\sin x) \\
&= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
&= e^x \sin x - \int \cos x \, d\left(e^x\right) \\
&= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \, d\cos x\right) \\
&= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx
\end{aligned}$$

因此 $\int e^x \sin x \, dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

例 6 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int xf'(x)dx$.

解 由分部积分得

$$\int xf'(x)dx = \int x\, d[f(x)] = xf(x) - \int f(x)dx.$$

因为 $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C$$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2}$,所以

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

分部积分

例 6 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int xf'(x)dx$.

解 由分部积分得

$$\int xf'(x)dx = \int x\ d[f(x)] = xf(x) - \int f(x)dx.$$

因为 $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C$$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2}$,所以

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

例 6 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int xf'(x)dx$.

解 由分部积分得

$$\int xf'(x)dx = \int x\, d[f(x)] = xf(x) - \int f(x)dx.$$

因为 $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C$$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2}$,所以

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

例 6　已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int xf'(x)dx$.

解　由分部积分得

$$\int xf'(x)dx = \int x\, d[f(x)] = xf(x) - \int f(x)dx.$$

因为 $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C$$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2}$, 所以

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

例 6 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int xf'(x)dx$.

解 由分部积分得

$$\int xf'(x)dx = \int x\, d[f(x)] = xf(x) - \int f(x)dx.$$

因为 $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C$$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2}$,所以

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

例 7　求不定积分 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \mathrm{d}x$.

解　由分部积分得

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

于是 $I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$，即

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} I_{n-1}.$$

例 7 求不定积分 $I_n=\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x$.

解 由分部积分得

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right) \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}
\end{aligned}
$$

于是 $I_{n+1}=\frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$，即

$$
I_n=\frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{(2n-2)a^2}I_{n-1}.
$$

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
- $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\left(\sin x\right)$
- $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$
- $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$

小结

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\int x\,e^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(e^x)$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$:

- $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
- $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$
- $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$

小结

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$
- $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\,(\mathrm{e}^x)$
- $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\,(\sin x)$
- $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

第一节 不定积分的概念与性质

第二节 换元积分法

第三节 分部积分法

第四节 有理分式的积分

定义 1 如果 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理函数 (分式).

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式;
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq$ $Q(x)$ 次数，则称它为假分式.

定理 1 假分式 = 多项式 + 真分式

定义 1 如果 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理函数 (分式).

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式；
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq$ $Q(x)$ 次数，则称它为假分式.

定理 1 假分式 = 多项式 + 真分式

定义 1 如果 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理函数 (分式).

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式；
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq$ $Q(x)$ 次数，则称它为假分式.

定理 1 假分式 $=$ 多项式 $+$ 真分式

理论上，任何一个有理分式（真分式）都可分为以下六个类型的基本积分的代数和：

1 $$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

2 $$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$$

3 $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

理论上，任何一个有理分式 (真分式) 都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

有理分式分解

理论上，任何一个有理分式 (真分式) 都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

理论上，任何一个有理分式 (真分式) 都可分为以下六个类型的基本积分的代数和：

1. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C$$
2. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$$
3. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

理论上，任何一个有有理分式 (真分式) 的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

4 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$

5 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+C(n\geq 2)$

6 $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}(n\geq 2)$ 可以用递推法求出

理论上，任何一个有有理分式 (真分式) 的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

4 $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$

5 $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+C(n\geq 2)$

6 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^n}(n\geq 2)$ 可以用递推法求出

理论上，任何一个有有理分式 (真分式) 的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

4 $$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$$

5 $$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+C(n\geq 2)$$

6 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^n}(n\geq 2)$$ 可以用递推法求出

理论上，任何一个有有理分式 (真分式) 的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

4 $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$

5 $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+C(n\geq 2)$

6 $\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}(n\geq 2)$ 可以用递推法求出

定理 2　设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 3　假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}} \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式.

定理 2 设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 3 假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}} \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式.

定理 2 设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 3 假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}} \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式.

1. 分母中若有因式 $(x-a)^k$ 时，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x+a)^k}+\frac{A_2}{(x+a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x+a}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

特别地: $k=1$, 时，分解后为 $\dfrac{A}{x+a}$.

2. 分母中若有因式 $\left(x^2+px+q\right)^k$, 其中 $p^2-4q<0$, 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中 M_i, N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

特别地: $k=1$, 分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

于是，将有理函数转化为部分分式之和后，只会出现三种情况：

1. 多项式
2. $\dfrac{A}{(x+a)^n}$
3. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

前两种情况的不定积分都比较容易求出，因此只讨论最后一种情况.

讨论不定积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

易知 $x^2+px+q=(x+\dfrac{p}{2})^2+q-\dfrac{p^2}{4}$, 令 $x+\dfrac{p}{2}=t$,

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\ Mx+N=Mt+b,$$

其中 $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$, $b=N-\dfrac{Mp}{2}$.

于是

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

注记 有理函数都可积，且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合.

讨论不定积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

易知 $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$，令 $x+\frac{p}{2}=t$，

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\ Mx+N=Mt+b,$$

其中 $a^2=q-\frac{p^2}{4}$，$b=N-\frac{Mp}{2}$.

于是

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

注记　有理函数都可积，且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合.

例 1 求 $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $\displaystyle\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$. 而

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases}A+B=1,\\-3A-2B=3,\end{cases}\implies\begin{cases}A=-5,\\b=6,\end{cases}$$ 于是

$$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.$$

例 1 求 $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $\displaystyle\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$. 而

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases}A+B=1,\\ -3A-2B=3,\end{cases}\quad\Longrightarrow\begin{cases}A=-5,\\ b=6,\end{cases}$$

于是

$$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.$$

例 2　求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$.

解　令 $\dfrac{1}{x(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$. 右端通分得

$$\frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2A-B+C=0, \\ A=1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=1 \end{cases} \quad 故$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] \mathrm{d}x$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

例 2 求 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

解 令 $\displaystyle\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$. 右端通分得

$$\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases}A+B=0,\\ -2A-B+C=0,\\ A=1,\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}A=1,\\ B=-1,\\ C=1\end{cases} \quad 故$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

例 3　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}$

解　令 $\frac{1}{(1+2x)\left(1+x^2\right)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$. 右边通分得

$$\frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+(A+C)}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}.$$

比较分子系数得

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{4}{5}, \\ B=-\frac{2}{5}, \\ C=\frac{1}{5}, \end{cases} \quad 故$$

例 3　求 $\int \frac{dx}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}$

解　令 $\frac{1}{(1+2x)\left(1+x^2\right)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$. 右边通分得

$$\frac{(A+2B)x^2 + (B+2C)x + (A+C)}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}.$$

比较分子系数得

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{4}{5}, \\ B=-\frac{2}{5}, \\ C=\frac{1}{5}, \end{cases} \quad \text{故}$$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{5} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+2x} - \frac{2}{5} \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{5} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{5} \arctan x + C.
\end{aligned}
$$

练习 1 求不定积分

(1) $$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

练习 1 求不定积分

(1) $$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

答案 (1) $2\ln(x^2+2x+5)-\dfrac{1}{2}\arctan(\dfrac{x+1}{2})+C$

(2) $\ln|x+1|+2\arctan x+C$

注记 初等函数的原函数未必都是初等函数．可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”，比如

$$\int e^{x^2}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \sqrt{1+x^4}\,dx.$$