第四章　中值定理及导数的应用

一、选择题（选择正确的选项）

1. 设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x)>f(x)>0$, 则 (B).

(A) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$　　(B) $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$　　(C) $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<\mathrm{e}^2$　　(D) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>\mathrm{e}^3$

2. 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小量

① $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$　　② $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$　　③ $x-\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos x\right)\sin x$

④ $\mathrm{e}^{x^4-x}-1$ 从低阶到高阶排列顺序为 (D).

(A) ①②③④　　(B) ③①②④　　(C) ④③②①　　(D) ④②①③

3. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 (B).

(A) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-1}, & 0<x\le 2\\ \mathrm{e}, & x=0\end{cases}$, $[0,2]$　　(B) $f(x)=x^2-2x-3$, $[-1,3]$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^4}$, $[0,2]$　　(D) $f(x)=|x|$, $[-1,1]$

4. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=-\mathrm{e}^x$, 且 $f'(0)=0$, 则 (A).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 δ 邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$ 内三阶导数 $f'''(x)>0$, 且二阶导数值 $f''(x_0)=0$, 则曲线 $y=f(x)$ (C).

(A) 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内是凹弧, 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内是凸弧

(B) 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内是凸弧

(C) 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内是凸弧, 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内是凹弧

(D) 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内是凹弧

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x+1)}{x^2-3x-4}$, 下列说法错误的是 (C) .

(A) 有渐近线 $y=0, x=4$

(B) $x=4$ 为无穷间断点

(C) 在区间 $(1,4)$ 上有界

(D) 若补充定义 $f(-1)=-\dfrac{1}{5}$, 则 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处连续

7. 函数 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x=$ (C) .

(A) 0 (B) $2x$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) π

8. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, 则下列说法正确的是 (B) .

(A) 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 内单调减少 (B) 没有极值

(C) 在 $(-\infty,\dfrac{1}{2})$ 内图形是下凹的 (D) 没有拐点

9. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续且取得极小值, 则 $f(x)$ 在 x_0 处必有 (D) .

(A) $f'(x_0)=0$ (B) $f''(x_0)>0$

(C) $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$ (D) $f'(x_0)=0$ 或不存在

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 在开区间 (a,b) 内可导, 则 (B) .

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时, 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=0$

(B) 对任何 $x_0\in(a,b)$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时, 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f'(x_0)=0$

(D) 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$

11. 函数 $y=x^3+12x+1$ 在定义域内 (D) .

(A) 图形是凸的 (B) 图形是凹的 (C) 单调减少 (D) 单调增加

12. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理条件的是 (A) .

(A) $f(x)=x^2-5x+6$, $[2,3]$ (B) $f(x)=\sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$

(C) $f(x)=\sqrt{x^2}\mathrm{e}^{x^2}$, $[-1,1]$ (D) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<5, \\ 1, & x\geq 5., \end{cases}$ $[0,5]$

13. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 (D)

(A) $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{x-1}, & 0<x\leq 2 \\ \mathrm{e}, & x=0 \end{cases}$ (B) $f(x)=|x|$，$[-1,1]$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^4}$，$[0,2]$ (D) $f(x)=x^2-2x-3$，$[-1,3]$

14. 若 $(0,1)$ 是曲线 $y=x^3+(b-1)x^2+c$ 的拐点，则有（ A ）

(A) $b=1, c=1$　(B) $b=-1, c=-1$　(C) $b=1, c=-1$　(D) $b=-1, c=1$

15. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理的是（ B ）.

(A) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, $[0,2]$

(B) $f(x)=\sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$

(C) $f(x)=xe^x$ $[0,1]$

(D) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<5 \\ 1, & x\geq 5, \end{cases}$, $[0,5]$

二、填空题（请将答案写在横线上）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^x-2)+1}{x^2}=$ ___1___.

2. 函数 $y=x^{2x}$ 在 $(0,1]$ 上的最小值 ___$y(\dfrac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$___.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$ ___2___.

4. 设 $f'(0)=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}x\right)}{x}=$ ___1___.

5. 函数 $y=x-\ln(1+x)$ 在区间 ___$(-1,0]$___ 内单调减少.

6. 已知点 $(1,1)$ 是曲线 $y=x^2+a\ln x$ 的拐点，则 $a=$ ___2___.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{2}{x}}{\arcsin x}=$ ___0___.

8. 设 $f'(0)=1$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-h)}{h}=$ ___3___.

9. 设 $f(x)=\ln\sin x, x\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$, 则满足罗尔中值定理中的数值 $\xi=$ ___$\dfrac{\pi}{2}$___.

10. 为使函数 $f(x)=(1-x)^{\frac{2}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续, 应定义 $f(0)=$ ___e^{-2}___.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$ ___2___.

12. 函数 $y=x^2-\dfrac{16}{x}(x<0)$ 的最小值是 __12__.

13. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的单调递减区间是 __$(0,\mathrm{e}^{-1})$__.

14. 函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在区间 $[-10,10]$ 上的最大值为 __$f(-10)=132$__.

15. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x$ 的极大值是 __10__.

16. 函数 $y=x^2-\dfrac{54}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的最小值是 __27__.

17. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)$，则方程 $f'(x)=0$ 的实根个数为 __2__.

18. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值是 __10__.

三、计算题（请给出必要的步骤）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解. 设 $y=(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\ln y=\dfrac{\ln(\sin x+\cos x)}{x}$. 因为

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}}{1}=1,$$

所以原式 $=\mathrm{e}$

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, 求:

(1) 函数 $f(x)$ 的增减区间及极值;

(2) 函数图形的凹凸区间及拐点;

(3) 函数图形的渐近线.

解. 易知 $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, 令 $y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0$, $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}=0$ 得 $x=0$, $x=3$.

(1) 列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	+	−	0	+
y	↗	无极值	↗	↘	有极小值	↗

因此，函数的单增区间为 $(-\infty,1)$ 和 $(3,+\infty)$, 单减区间为 (1,3); 极小值为 $y(3)=\dfrac{27}{4}$.

(2) 列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	$+$
y	凸	有拐点	凹	凹

因此, 函数图形在区间 $(-\infty,0)$ 内是凸的, 在区间 $(0,1),(1,+\infty)$ 内是凹的; 拐点为点 $(0,0)$.

(3) 由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\infty$, 可知 $x=1$ 是铅直渐近线.

3. 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(3\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-2\right)^{\frac{1}{x}}$.

解. 设 $y=\left(3\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-2\right)^{\frac{1}{x}}$, 则

$$\ln y=\frac{\ln\left(3\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-2\right)}{x}$$

由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)}{3\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-2}}{1}=-3,$$

所以原式$=\mathrm{e}^{-3}$.

4. 求由方程 $y^5+2y=x+3x^7$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 在点 (0,0) 处的切线方程并求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. 方程两边同时对 x 求导, 得

$$5y^4y'+2y'=1+21x^6,\ y'=\frac{1+21x^6}{5y^4+2},$$

把 $x=0,\ y=0$ 代入上式得, $y'(0)=\dfrac{1}{2}$, 切线方程: $y-0=\dfrac{1}{2}(x-0)$.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{126x^5\left(5y^4+2\right)-\left(1+21x^6\right)\cdot20y^3y'}{\left(5y^4+2\right)^2}=\frac{126x^5\left(5y^4+2\right)^2-20y^3\left(1+21x^6\right)^2}{\left(5y^4+2\right)^3}.$$

5. 求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1$ 的单调区间与极值及凹凸区间与拐点.

解. 易知 $f(x)$ 的定义域为 $D:(-\infty,+\infty)$, 其一阶导数和二阶导数为;

$$f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-e^x=x\mathrm{e}^x,$$

$$f''(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=0$; 令 $f''(x)=0$, 得 $x=-1$.

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	凸减	有拐点	凹减	极小值	凹增

因此, 单增区间为 $(0,+\infty)$, 单减区间为 $(-\infty,0)$, 极小值为 $f(0)=0$; 凹区间为 $(-1,+\infty)$, 凸区间为 $(-\infty,-1)$, 拋点为 $\left(-1,-\frac{2}{\mathrm{e}}+1\right)$.

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解. 设 $y=(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$, 则 $\ln y=\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}$. 因为

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x\big/\cos x}{2x\big/(1+x^2)}=-\frac{1}{2},$$

所以原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

7. 把一根长度为 a 的铁丝截成两段, 其中一段折成正方形框架, 另一段弯成圆周问当如何截取时，可使围成的正方形和圆的面积之和达到最小?

解. 设正方形边长为 x, 圆的半径为 r, 则 $4x+2\pi r=a\Longrightarrow x=\frac{1}{4}(a-2\pi r)$.

$$S_{总}=x^2+\pi r^2=\frac{1}{16}(a-2\pi r)^2+\pi r^2$$

令

$$S'_{总}=-\frac{\pi}{4}(a-2\pi r)+2\pi r=0$$

得 $r=\dfrac{a}{2\pi+8}$，此时 $S''_{总}=\dfrac{\pi^2}{2}+2\pi>0$, 所以当 $r=\dfrac{a}{2\pi+8}$, $x=\dfrac{a}{\pi+4}$ 时, 正方形和圆的面积之和达到最小.

8. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2+xy+x^2+x=0$ 所确定的满足 $y(-1)=1$ 的隐函数，求 $y'(-1)$ 及 $y''(-1)$, 并计算极限 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{y(x)-1}{(x+1)^2}$.

解. 方程两边关于 x 求导得

$$2yy'+y+xy'+2x+1=0, \tag{4.1}$$

于是

$$y'(x)=-\frac{2x+y+1}{x+2y},\ y'(-1)=0.$$

对(4.1)式两边关于 x 求导得

$$2\left[(y')^2+yy''\right]+y'+y'+xy''+2=0,$$

于是

$$y''(x)=-\frac{2\left(y'\right)^2+2y'+2}{x+2y},\ y''(-1)=-2.$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{y(x)-1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-1}\frac{y'(x)}{2(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{y''(x)}{2}=y''(-1)=-1$$

9. (A 班) 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x+x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

解. 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\ln(\mathrm{e}^x+x)}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2(\mathrm{e}^x+1)}{\cos x(\mathrm{e}^x+x)}}=\mathrm{e}^4$.

计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1/(1+x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$

10. **(本题 10 分)** 求 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}+\arctan x}$ 的单调区间和极值.

解. $y'=\dfrac{x(x+1)}{1+x^2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\arctan x}$, 令 $y'=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=0$. 列表如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

由此可见，递增区间为 $(-\infty,-1),(0,+\infty)$; 递减区间为 $(-1,0)$. 极小值为 $f(0)=-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$ 极大值为 $f(-1)=-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}}$.

11. 求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{\sin x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}}=\mathrm{e}^2$

12. 一房地产公司有 50 套公寓要出租, 当月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去, 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 问房租金定为多少时可获得最大收入?

解. 设房租金定为 x 元, 每月收入 y 元, 于是

$$y=\left(50-\frac{x-1000}{50}\right)(x-1000)=\frac{-1}{50}(x-3500)(x-100).$$

易知

$$y'=\frac{-1}{50}(x-3500+x-100)=0,$$

得 $x=1800$.

(A 班) 需求函数为 $p=10-\dfrac{Q}{5}$,

(1) 求当 $Q=20$ 时的边际收益, 并说明其经济意义;

(2) 求当 $p=6$ 时的收益弹性, 并说明其经济意义.

解. 由条件得

(1) 收益关于需求的函数为:

$$R(Q)=Q\cdot p=10Q-\frac{Q^2}{5},$$

求导得

$$R'(Q)=10-\frac{2}{5}Q,\ R'(20)=2.$$

其经济意义为：当 $Q=20$ 时, 产量增加（减少）1 个单位, 收益增加（减少）约 2 个单位.

(2) 收益关于价格的函数为:

$$R'(p)=Q\cdot p=50p-5p^2,$$

于是收益关于价格的弹性为

$$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}R'(p)=\frac{p}{50p-5p^2}(50-10p),$$

从而

$$\left.\frac{ER}{Ep}\right|_{p=6}=-0.5.$$

其经济意义为: 当 $p=6$ 时, 价格上涨（下降）1%, 收益减少（增加）0.5%.

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{3x}}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{3x}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\frac{1+\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^x}}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

14. 求曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的凹凸区间与拐点.

解. 易知 $y'=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$, $y''=(x-2)\mathrm{e}^{-x}$, 使 $y''=0$ 的点: $x=2$

列表讨论,

结论: 凹区间: $(2,+\infty)$, 凸区间: $(-\infty,2)$, 拐点: $\left(2,2\mathrm{e}^{-2}\right)$

15. (1) 求函数 $y=f(x)=2x^3-9x^2+12x$ 的单调区间与极值;

(2) 设 a 为实数, 试讨论方程 $f(x)=a$ 的不同实数解的个数.

解. (1) $y'=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$, 驻点 $x=1,2$

列表讨论,

结论: 增区间: $(-\infty,1),(2,+\infty)$, 减区间: $(1,2)$,

极大值为 $y(1)=5$, 极小值为 $y(2)=4$.

(2) 当 $a<4$ 或 $a>5$ 时, 方程 $f(x)=a$ 恰有一个实数解;

当 $a=4$ 或 $a=5$ 时, 方程 $f(x)=a$ 恰有二个实数解;

当 $4<a<5$ 时, 方程 $f(x)=a$ 恰有三个实数解.

16. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{\ln(1+3x)}}$.

解. 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{\ln(1+3x)}}=\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+3x}{3x}}=\mathrm{e}^2$.

17. 求曲线 $y=x^4-2x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

解. $D=(-\infty,+\infty)$, $y'=4x^3-6x^2$, $y''=12x^2-12x=12x(x-1)$, 令 $y''=0$, 得 $x_1=0, x_2=1$；列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凹	拐点	凸	拐点	凹

因此, 凹区间：$(-\infty,0),(1,+\infty)$；凸区间：$(0,1)$；拐点：$(0,1),(1,0)$.

18. 求极限 $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

解. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1/x}{-1}}=\mathrm{e}^{-1}$.

19. 问 a, b 为何值时, 点 $A(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+1$ 的拐点?

解. 由于

$$y'=3ax^2+2bx,\ y''=6ax+2b.$$

因函数 $y=ax^3+bx^2+1$ 是二阶可导函数, 所以, 若点 $A(1,3)$ 要成为曲线 $y=ax^3+bx^2+1$ 的拐点, 则应有

$$\begin{cases} y(1)=a+b+1=3, \\ y''(1)=6a+2b=0. \end{cases}$$

解方程组, 得 $a=-1$, $\quad b=3$, 此时

$$y''=6-6x=6(1-x).$$

当 $x<1$ 时, $y''>0$；$x>1$ 时, $y''<0$. 故 $a=-1$, $\quad b=3$ 时, 点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+1$ 的拐点.

20. 某商场每年销售商品 a 件, 分为 x 批采购进货. 已知每批采购费用为 b 元, 而未销售商品的库存费用为 c 元/件 · 年. 设销售商品是均匀的, 问分多少批进货时, 才能使以上两种费用的总和为最省?

解. 总费用

$$w(x) = bx + \frac{ac}{2x}\ (x \geq 0),$$

那么

$$w'(x) = b - \frac{ac}{2x^2},\ w''(x) = \frac{ac}{x^3} > 0$$

令 $w'(x) = 0$, 则 $x = \sqrt{\frac{ac}{2b}}$. 又 $w''(\sqrt{\frac{ac}{2b}}) > 0$, 即 $w(\sqrt{\frac{ac}{2b}})$ 为 $w(x)$ 的最小值. 从而当批数取最接近 $\sqrt{\frac{ac}{2b}}$ 的自然数时, 才能使两种费用之和最省.

21. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \arcsin x}$.

解. 由 $\arcsin x \sim x$, $(x \to 0)$ 可得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

22. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

解. 易知

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\sin x \ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x},$$

而

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\csc x\cot x} \\
&= -\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x\tan x}{x} \\
&= -\lim_{x\to 0^+}\tan x = 0,
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \mathrm{e}^0 = 1$.

23. 某企业生产某种产品，固定成本 20000 元，每生产一单位产品，成本增加 100 元。已知总收益 R 是年产量 Q 的函数，即

$$R = R(Q) = \begin{cases} 400Q - \frac{1}{2}Q^2, & 0 \leq Q \leq 400 \\ 80000, & Q > 400 \end{cases}$$

问每年生产多少产品时，总利润最大？最大利润是多少？

解. 由题意

$$C = C(Q) = 20000 + 100Q,$$

从而总利润函数为

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)=\begin{cases}300Q-\dfrac{Q^2}{2}-20000, & 0\le Q\le 400\\ 60000-100Q, & Q>400\end{cases}$$

于是

$$L'(Q)=\begin{cases}300-Q, & 0<Q<400,\\ -100, & Q>400.\end{cases}$$

令 $L'(Q)=0$, 得 $Q=300$. 注意到 $L(0)=-20000$, $L(300)=25000$ ， $L(400)=20000$, 且 $Q>300$, $L'(Q)<0$ 以及 $L(Q)$ 的连续性。所以当年产量为 300 个单位时，总利润最大.

24. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x})^{\sin x}$.

解. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{-\sin x\ln x}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x}=1.$

25. 求曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的出凸区间及拐点.

解. 由条件易得

$$y'=(1-x)\mathrm{e}^{-x}, y''=(x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

令 $y''=0$ 得 $x=2$. 当 $x<2$ 时 $y''<0$; 当 $x>2$ 时 $y''>0$. 所以拐点为 $\left(2,2\mathrm{e}^{-2}\right)$, 凸区间为 $(-\infty,2)$, 凹区间为 $(2,+\infty)$.

26. 某企业生产产品 x 件时, 总成本函数为 $C(x)=ax^2+bx+c$, 总收益函数为 $R(x)=px^2+qx$, 其中 $a,b,c,p,q>0, a>p, b<q$. 当企业按最大利润投产时, 对每件产品征收税额为多少才能使总税额最大?

解. 设每件产品的税额为 t, 那么企业的利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)-tx=(p-a)x^2+(q-b-t)x-c.$$

求导得

$$L'(x)=2(p-a)x+(q-b-t),$$

令 $L'(x)=0$ 得驻点 $x_0=\dfrac{t+b-q}{2(p-a)}$. 由于 $L''(x_0)=2(p-a)<0$, 所以此时企业利润最大，此时的总税额为

$$T(t)=tx_0=\frac{t^2+t(h-q)}{2(p-a)},$$

求导得

$$T'(t)=\frac{2t+b-q}{2(p-a)},$$

由 $T'(t)=0$ 得 $t_0=\dfrac{q-b}{2}$, 由于 $T''(t_0)=\dfrac{1}{p-a}<0$, 故此时的总税额最大，因此每件产品应征税额为 $\dfrac{q-b}{2}$.

四、证明题（请给出必要的步骤）

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

解. (1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$. 于是由零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点 $\eta\in(0,\xi),\zeta\in(\xi,1)$, 使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0},\ f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}.$$

于是 $f'(\eta)f'(\zeta)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{1-\xi}=1.$

2. 若 $0<a<1$, 则对于 $x>0$, 证明 $x^a-ax\le 1-a$.

解. 令 $f(x)=x^a-ax$, 易知 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续, 则

$$f'(x)=ax^{a-1}-a=a\left(x^{a-1}-1\right).$$

当 $0<x<1$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x>1$ 时, $f'(x)<0$, 所以当 $x>0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 $f(1)=1-a$, 即

$$x^a-ax\le 1-a\ (x>0).$$

3. 当 $0<a<b<1$ 时, 证明不等式 $\dfrac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\dfrac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$.

解. 令 $f(x)=\arcsin x$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\arcsin b-\arcsin a=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}(b-a).$$

由 $0<a<\xi<b<1$, 有

$$\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\frac{b-a}{\sqrt{1-\xi^2}}<\frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}.$$

所以,

$$\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}.$$

4. (A 班) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,在 $(0,\pi)$ 内可导,证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

解. 令 $F(x)=f(x)\sin x$, 显然 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 在 $(0,\pi)$ 内可导,

$$F(0)=F(\pi)=0$$

由罗尔中值定理知, 至少存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 又

$$F'(\xi)=f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0,$$

故 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 在 $(0,\pi)$ 内可导, 且 $f(0)=f(\pi)=0$. 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=-f(\xi)$.

解. 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^x$, 显然 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 在 $(0,\pi)$ 内可导,

$$F(0)=F(\pi)=0$$

由罗尔中值定理知, 至少存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 又

$$F'(\xi)=f'(\xi)e^{\xi}+f(\xi)e^{\xi}=0,$$

故 $f'(\xi)=-f(\xi)$.

5. 证明: 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x > x+\dfrac{1}{3}x^3$.

解. 设 $f(x)=\tan x-x-\dfrac{1}{3}x^3$, 则

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=(\tan x+x)(\tan x-x).$$

设 $g(x)=\tan x-x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$g'(x)=\sec^2 x-1=\tan^2 x>0,$$

于是 $g(x)$ 单调递增, 从而有 $g(x)>g(0)=0$. 所以当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时,

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=(\tan x+x)(\tan x-x)>0,$$

从而 $f(x)$ 单调递增, $f(x)>f(0)=0$.

(A 班) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 试证明: 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=3f(\xi)$.

解. 设 $F(x)=\mathrm{e}^{-3x}f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由条件易知

$$F(a)=\mathrm{e}^{-3a}f(a)=0,$$

$$F(b)=\mathrm{e}^{-3b}f(b)=0,$$

$$F'(x)=-3\mathrm{e}^{-3x}f(x)+\mathrm{e}^{-3x}f'(x).$$

由罗尔定理得, 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=3f(\xi)$.

6. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明在区间 $(0,1)$ 内至少有一点 c, 使得 $f'(c)=-\dfrac{f(c)}{c}$.

解. 令 $F(x)=xf(x)$, 则由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 得 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 再由 $f(1)=0$ 得 $F(1)=0$, 而 $F(0)=0$, 由罗尔定理, 至少存在一点 $c\in(0,1)$, 使得 $F'(c)=0$. 而由

$$F'(x)=xf'(x)+f(x)$$

得 $F'(c)=cf'(c)+f(c)=0$, 由于 $c\in(0,1)$, 从而 $f'(c)=-\dfrac{f(c)}{c}$. 故在区间 $(0,1)$ 内至少有一点 c, 使得 $f'(c)=-\dfrac{f(c)}{c}$.

7. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=1$, 则 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

解. 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$，由题设知 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且有

$$F'(x)=\frac{f'(x)\mathrm{e}^x-f(x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x}=0,$$

从而 $F(x)=C$，$x\in R$ (C 为常数)，由题设 $f(0)=1$ 可得

$$F(0)=C=\frac{f(0)}{\mathrm{e}^0}=1,$$

故

$$F(x)=\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x}=1,\ x\in R,$$

即

$$f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in R.$$

8. 证明：当 $x>0$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

解. 构造函数

$$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}},$$

易知，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$. 当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{(\sqrt{1+x})^2}=\frac{2\sqrt{1+x}-(2+x)}{2(\sqrt{1+x})^3}<0,$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，所以当 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即

$$\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}}<0,$$

从而有

$$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2.$$

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导, 且 $f(2)=4$. 试证存在一点 $\xi\in(0.2)$, 使得 $2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=8$.

解. 令 $F(x)=x^2 f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导. 根据拉格朗日中值定理, 存在一点 $\xi\in(0.2)$, 使得

$$\frac{F(2)-F(0)}{2-0}=F'(\xi).$$

整理理即得 $2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=8$.