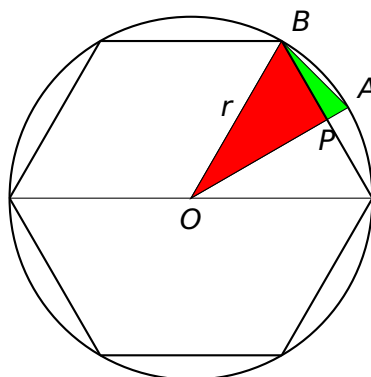
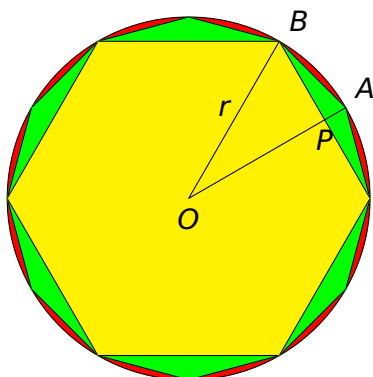


第二章 极限与连续

2.1 数列的极限

2.1.1 引例



记内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边型的面积为 A_n , 则 $n \rightarrow \infty$ 时, 正多边形的面积和圆的面积之差可以任意小.

“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”

--- 《庄子·天下篇》

第一天截下的木棒长为 $X_1 = \frac{1}{2}$; 第二天截下的木棒长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

...

第 n 天截下的木棒长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1.$$

2.1.2 数列的有关概念

定义 1. 以正整数集 N^+ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ 排列的一列数称为**数列**, 通常用 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 表示, 其中 $x_n = f(n)$, x_n 称为**通项**或**一般项**.

$$\text{例子. } x_n = \frac{1}{2^n} \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$\text{例子. } x_n = \frac{n}{n+1} \qquad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

$$\text{例子. } x_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

定义 2. 对数列 x_n , 若存在正数 M , 使得一切正整数 n , 恒有 $|x_n| \leq M$ 成立, 则称数列 x_n **有界**, 否则, 称为**无界**.

$$\text{例子. } x_n = \frac{n}{n+1} \dots\dots\dots \text{有界.}$$

$$\text{例子. } x_n = 2^n \dots\dots\dots \text{无界.}$$

注记. 数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

若存在实数 A , 对一切 n 都满足 $x_n \geq A$, 称 $\{x_n\}$ 为**下有界**, A 是 $\{x_n\}$ 的**下界**;

同样, 若存在 B , 对一切 n 都满足 $x_n \leq B$, 称 $\{x_n\}$ 为**上有界**, B 是 $\{x_n\}$ 的**上界**.

若数列 $\{x_n\}$ 满足:

1. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, 称数列 $\{x_n\}$ 为**单调增数列**;

2. $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为**单调减数列**.

单调增数列和单调减数列统称为**单调数列**.

定义 3. 将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下, 任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的**子数列**, 简称**子列**.

$$\text{例子. } x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}, \dots$$

$$\text{例子. } x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2n}, \dots$$

例子. $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$

注记. 在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中, 一般项 x_{n_k} 是第 k 项, 而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项, 显然, $n_k \geq k$.

2.1.3 数列极限的定义

问题. 随着 n 的增大, x_n 也跟着变化. 当 n 趋于无穷大时, x_n 是否会无限接近一个确定的数?

$$1. x_n = 3 \quad 3, 3, 3, 3, \dots \rightarrow 3$$

$$2. x_n = \frac{1}{2^n} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \rightarrow 0$$

$$3. x_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow 0$$

$$4. x_n = 2^n \quad 2, 4, 8, 16, \dots \times$$

$$5. x_n = (-1)^n \quad -1, 1, -1, 1, \dots \times$$

定义 4. 设 $\{x_n\}$ 为一个数列, 如果存在常数 A , 对任何 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A , 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

注记. 1. 不等式 $|x_n - A| < \epsilon$ 刻划了 x_n 与 A 的无限接近;

2. 一般情况下, N 与任意给定的正数 ϵ 有关.

为了表达方便, 引入符号

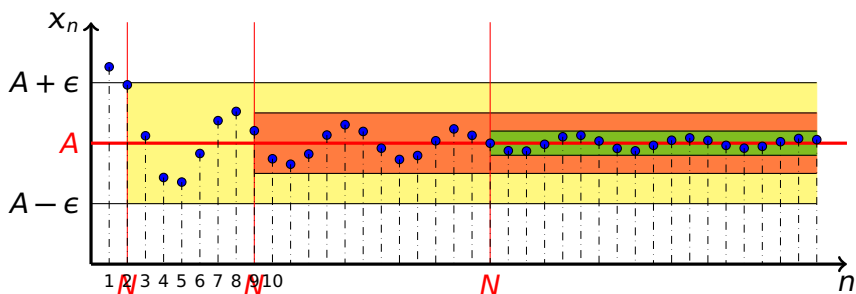
- $\forall \dots \dots \dots$ 任意 (给定) 的.

- \exists 至少有一个或存在.

使用 $\epsilon - N$ 语言, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 可以表示为:

$\forall \epsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \epsilon$.

注记. 数列极限的定义未给出求极限的方法.



当 $n > N$ 时, 所有的点 x_n 都落在 $(A - \epsilon, A + \epsilon)$ 内, 只有有限个 (至多只有 N 个) 落在其外.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, (k > 0)$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0, (k > 0)$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, (|q| < 1)$

例 1. 设 $x_n = C$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$.

证明. $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = 1$, 则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例 2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

证明. $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$, 则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例 3. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

证明. $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$, 则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例 4. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证明. 任给 $\epsilon > 0$, 若 $q = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. 若 $0 < |q| < 1$, 则 $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$,

要使 $n \ln |q| < \ln \epsilon$, 只需要 $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$, 取 $N = [\frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^n - 0| < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

例 5. 设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证明. 任给 $\epsilon > 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 故 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有,

$$\left| \sqrt{x_n} - \sqrt{a} \right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

发散的数列至少有这两种可能:

1. 无界型的: 比如 $x_n = 2^n$;
2. 摆动型的: 比如 $x_n = (-1)^n$.

2.1.4 收敛数列的性质

性质 **1** (极限的唯一性). 收敛数列的极限必唯一.

证明. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$. 由定义可知: $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, N_2$, 使得: 当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon$; 当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \epsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$, 则当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} |a - b| &= |(x_n - b) - (x_n - a)| \\ &\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b - a|. \end{aligned}$$

这是不可能的, 故收敛数列不可能有两个极限.

性质 **2** (有界性). 设 $\{x_n\}$ 收敛, 则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leq M$.

证明. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 取 $\epsilon = 1$, 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leq |x_n - A| + |A| < 1 + |A|,$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |A|\}$, 则对任何 n 都有 $|x_n| \leq M$.

推论. 无界数列必定发散.

性质 **3** (保号性). 设数列收敛于 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

证明. 取 $\epsilon = A/2$, 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $x_n > A/2 > 0$.

注记. 这个定理表明, 若数列的极限为正 (或负), 则该数列从某一项开始以后所有项都为正 (或负).

问题. 如何用数学的语言刻画"无限接近"?

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \rightarrow x_0$ 的过程.

定义 1. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对于任何 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{)}$$

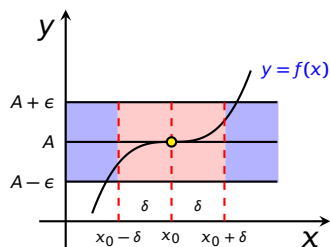
“ $\varepsilon - \delta$ ” 定义: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线

$$y = A$$

为中心线, 宽为 2ε 的带形区域内.



注记. 1. 一般情况下, δ 与 ε 有关.

2. 函数极限是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

1. $y = C$

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y \rightarrow C$

2. $y = x$

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y \rightarrow x_0$

$$3. y = 2x + 1$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y \rightarrow 2x_0 + 1$

$$4. y = \sqrt{x}$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y \rightarrow \sqrt{x_0}$

例 1. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ (C 为常数).

证明. 任给 $\epsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C.$$

例 2. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证明. $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 3. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ ($x_0 > 0$).

证明. $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\epsilon\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| &= \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\sqrt{x_0}\epsilon}{\sqrt{x_0}} = \epsilon \end{aligned}$$

注记. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 4. 设 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

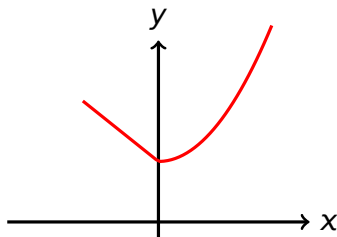
注记. 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 5. 函数极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

例 6. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0; \\ x^2 + 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.



定义. 设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

定义. 设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

注意到

$$\begin{aligned} & \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\} \\ &= \{x | 0 < x - x_0 < \delta\} \cup \{x | -\delta < x - x_0 < 0\} \end{aligned}$$

于是我们有

定理. 极限存在等价于左右极限都存在且相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

例 7. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

例 8. 设 $f(x) = |x|$, 研究函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

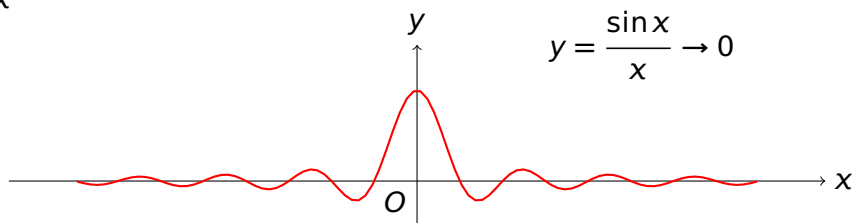
例 9. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ x^2-x+2, & x > 1 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

注记. 研究当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限, 不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

练习. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x < 0 \\ e^x, & 0 < x < 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases}$; 判断极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在, 若存在求出该极限.

解. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 的过程中, 对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A .

通过上面演示实验的观察: 当 x 无限增大时, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题. 如何用数学语言刻画函数“无限接近”.

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $|x| > X$ 表示 $x \rightarrow \infty$ 的过程.

定义 2. 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义, 如果存在常数 A , 对任何 $\varepsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限, 记为

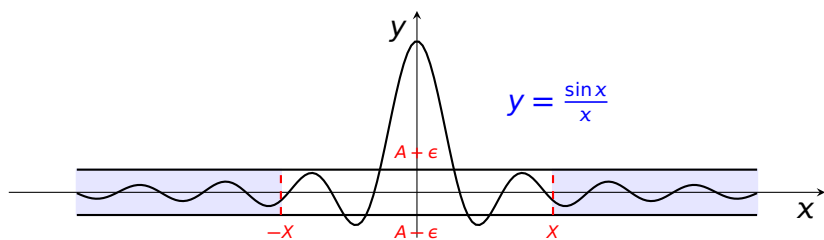
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

思考. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的 ϵ 语言定义.

" $\epsilon-X$ " 定义: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

注记. $x \rightarrow \infty$ 有两种方向, 即 $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow +\infty$. 类似地可以定义 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

定理. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.



当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线, 宽为 2ϵ 的带形区域内.

例 10. 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

证明. 由条件可知:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{1}{|x|},$$

故对 $\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\epsilon}$, 则当 $|x| > X$ 时恒有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \epsilon,$$

即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

例 11. 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$.

证明. $\forall \epsilon > 0$, 由数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 知道, 存在正整数 $N_1 > 0$ 使得当 $n > N_1$ 时有 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. 取 $X = N_1 + 1$, 则当 $x > X$ 时有 $[x] > N_1$, 从而

$$\left| \frac{1}{2^x} - 0 \right| = \frac{1}{2^x} \leq \frac{1}{2^{[x]}} < \frac{1}{2^{N_1}} < \epsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C = C \quad (2.2.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k > 0) \quad (2.2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \quad (2.2.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = 0 \quad (b > 1) \quad (2.2.4)$$

2.2.2 函数极限的性质

性质 **1** (唯一性). 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.

证明. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 且 $A \neq B$ 由定义可知: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2$, 使得: 当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$; 当 $x \in U(x_0, \delta_2)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$; 取 $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|A-B|}{2}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有

$$\begin{aligned} |A - B| &= |(f(x) - A) - (f(x) - B)| \\ &\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |B - A|. \end{aligned}$$

这是不可能的, 故收敛数列不可能有两个极限.

性质 **2** (局部有界性). 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leq M$.

证明. 取 $\epsilon = 1$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f(x) - A) + A| \\ &\leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| \end{aligned}$$

取 $M = 1 + |A|$, 就得到函数极限的局部有界性.

例子. 设 $f(x) = 1/x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, 此时当 $0 < |x - 1| < 1/2$ 时有 $|f(x)| \leq 2$.

性质 3 (局部保号性). 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ (或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$).

证明. 取 $\epsilon = A/2$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $f(x) > A/2 > 0$.

例 12. 设 $f(x) = 2x - 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 > 0$, 此时当 $0 < |x - 1| < 1/4$ 时, 有 $f(x) > 1/2 > 0$.

推论 (保号性). 设 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

推论. 如果函数 $g(x) \geq h(x)$, 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = B$, 则有 $A \geq B$.

极限的性质, 对于其它形式 ($x \rightarrow \infty$ 、单侧极限) 的极限也成立.

2.2.3 小结

- 极限的定义: 定义、几何意义;
- 极限的性质: 唯一性、局部保号性、局部有界性.

试问函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 10, & x = 0 \\ 5 + x^2, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的左、右极限是否存在? 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$f(x)$ 的极限是否存在?

2.3 无穷小与无穷大

2.3.1 无穷小

定义 1. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 就称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

注记. $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \epsilon$.

注记. 类似地, 可以定义 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 、 $x \rightarrow x_0^-$ 和 $x \rightarrow x_0^+$ 时的无穷小.

例子. 0 、 x 、 x^2 、 $\sin x$ 、 $1 - \cos x$ 、 $\sqrt{1+x} - 1$ 和 $e^x - 1$ 都是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

例子. 函数 $\frac{1}{x}$ 、 $\frac{2}{1+x}$ 和 $\frac{x}{x^2+1}$ 都是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

注记. 1. 无穷小是变量, 不能与很小的数混淆. 2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

定理 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

定理的意义:

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

证明. 必要性: 因 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 所以对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

令 $\alpha(x) = f(x) - A$, 则有 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) = A + \alpha(x)$.

充分性: 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|\alpha(x)| < \epsilon, \text{ 即 } |f(x) - A| < \epsilon,$$

也即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

定理 2. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.

证明. 设 α 及 β 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的两个无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists X_1 > 0, X_2 > 0$, 使得当 $|x| > X_1$ 时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$

当 $|x| > X_2$ 时恒有

$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max \{X_1, X_2\}$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有

$$|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\alpha \pm \beta \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$.

问题. 无穷多个无穷小的和是不是无穷小?

定理 3. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明. 设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 内有界, 则 $\exists M > 0, \delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时恒有 $|u| \leq M$. 又设 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|u \cdot \alpha| = |u| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

所以当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u \cdot \alpha$ 为无穷小.

推论 1. 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2. 常数与无穷小的积是无穷小. $x \sin \frac{1}{x}, x^2 \arctan \frac{1}{x} (x \rightarrow 0)$

推论 3. 有限个无穷小的积是无穷小.

注意: 两个无穷小的商不一定是无穷小.

问题. 无穷多个无穷小的积是不是无穷小?

例 1. 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x})$ 0

练习. 求下列函数极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$;

2.3.2 无穷大

绝对值无限增大的变量称为[无穷大](#).

定义. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的 $M > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta$, 就有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时为[无穷大](#), 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

注记. 1. 类似地, 可以定义 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大. 2. 特殊情况:

正无穷大 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$), 负无穷大 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.)

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.

3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例: $\frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})$).

例 2. 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

证明. $\forall M > 0$, 要使 $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$, 只需要 $|x-1| < \frac{1}{M}$. 取 $\delta = \frac{1}{M}$, 当 $0 < |x-1| < \delta = \frac{1}{M}$ 时, 就有

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

定义 2. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

练习. $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{x+1}{x^2}$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大.

练习. $\frac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x \rightarrow 1$ 时的无穷大.

定理 4. 无穷大的倒数为无穷小, 而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$,

即 $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \epsilon$. 所以当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小 反之, 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$.

则 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| < \frac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而

$\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M$. 所以当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

注记. 关于无穷大的讨论, 都可归结为关于无穷小的讨论.

例 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x^2+1} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x+1} = \infty$.

2.3.3 小结

主要内容: 两个定义; 四个定理; 三个推论.

几点注意:

1. 无穷小(大)是变量, 不能与很小(大)的数混淆, 零是唯一的无穷小的数;
2. 无穷多个无穷小的代数和(乘积)未必是无穷小;
3. 无界变量未必是无穷大.

在自变量的同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小: 反之, 无穷小的倒数是否一定为无穷大?

2.4 极限运算法则

2.4.1 极限运算法则

定理 1. 如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 那么

$$1. \lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$2. \lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$3. \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{要求分母不为零})$$

证明. 因为 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$ 所以

$$f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta. \quad \text{其中 } \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0.$$

由无穷小运算法则, 得

$$\begin{aligned} [f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) &= \alpha \pm \beta \rightarrow 0. \\ [f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) &= (A + \alpha)(B + \beta) - AB \\ &= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

推论 1. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c \lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论 2. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

2.4.2 求极限方法举例

1. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= a_0 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n + a_1 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0)\end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

注意: 若 $Q(x_0) = 0$, 则商的法则不能应用.

3. 如果基本初等函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有定义, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

例 1. 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$.

解. 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1$
 $= 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2$

例 2. 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5}$

解. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3 \neq 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)} = \frac{2^3 - 1}{3} = \frac{7}{3}$$

例子. 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$.

$$\begin{aligned} \text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3+1}{3+3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

例子. 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

$$\begin{aligned} \text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

例子. 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x - 3} = 2$, 求 a, b .

解. $x \rightarrow 1$ 时, 分母的极限是零, 而商的极限存在, 故

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1+a}{x+3} = \frac{2+a}{4} = 2. \end{aligned}$$

故 $a = 6, b = -7$.

例 3. 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x} \\
 &= -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

例 4. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1}$.

解. 先用 x^3 去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}}{7 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

例 5. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x + 1} + ax + b \right) = 2$, 求 ab .

解.

$$\begin{aligned}
 \text{左边} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 + ax(x+1) + b(x+1)}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+a)x^2 + (a+b)x + 2+b}{x+1}
 \end{aligned}$$

若商的极限存在, 则必须 $1+a=0$, $a+b=2$ 解得

$$a = -1, b = 3.$$

例 6. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$

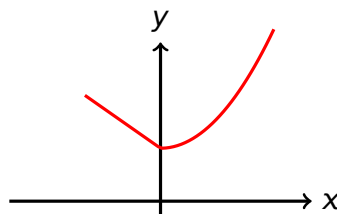
解. $n \rightarrow \infty$ 时, 是无限多个无穷小之和, 先变形再求极限.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例 7. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0; \\ x^2 + 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.



解. 易知

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} = 1 - 0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = 1 + 0 = 1,$$

左右极限相等, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

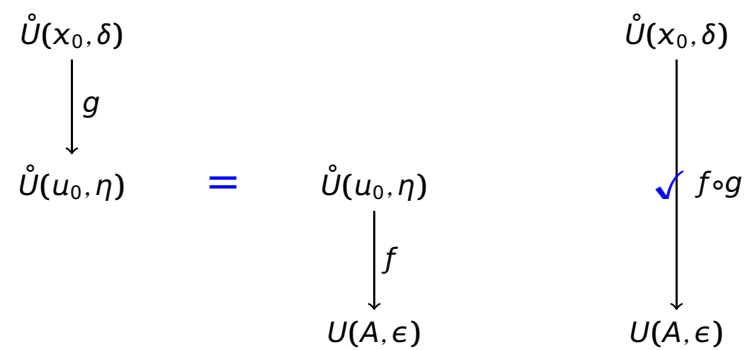
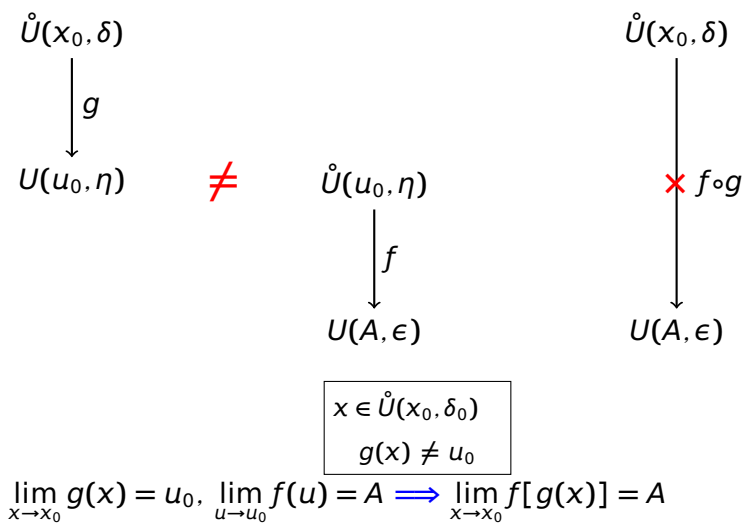
练习. 求下列函数极限:

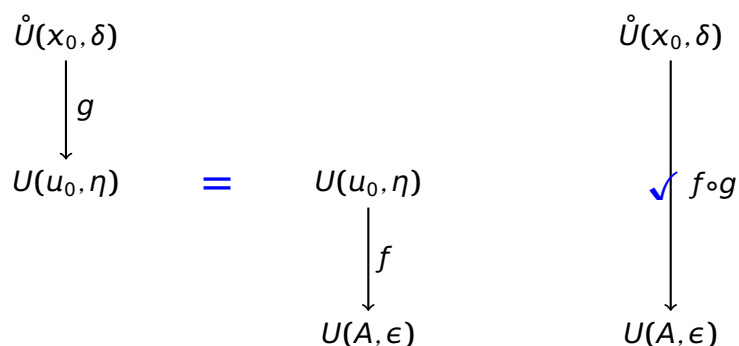
(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2 \ln(1+x) + e^x + 2);$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\sqrt{x}-1};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}.$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A$$





定理 2. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 并且存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$ 时 $g(x) \neq u_0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A.$$

定理. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right] = f(u_0).$$

例子. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$

2.4.3 小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;

2. 极限求法;

- 多项式与分式函数代入法求极限;
- 消去零因子法求极限;
- 无穷小因子分出法求极限;
- 利用无穷小运算性质求极限, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$
- 利用左右极限求分段函数极限.

3. 复合函数的极限运算法则

问题. 在某个过程中, 若 $f(x)$ 有极限, $g(x)$ 无极限, 那么 $f(x) + g(x)$ 是否有极限? 为什么?

2.5 极限存在准则、两个重要极限

极限存在准则 I	极限存在准则 II
↓	↓
重要极限 I	重要极限 II
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

2.5.1 夹逼准则

定理 (极限存在准则 I). 如果数列 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 而且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$.

例子. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$

注记. 在上述定理中, 如果不等式 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立, 结论不变.

证明. $\because y_n \rightarrow a, z_n \rightarrow a, \therefore \forall \epsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0$, 使得当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \epsilon$, 当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \epsilon$. 取 $N = \max \{N_1, N_2\}$, 上两式同时成立, 即

$$a - \epsilon < y_n < a + \epsilon, \quad a - \epsilon < z_n < a + \epsilon$$

当 $n > N$ 时, 恒有

$$a - \epsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \epsilon$$

即 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

定理 (极限存在准则 I'). 如果 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$.

注记. 若将 $x \rightarrow x_0$ 全部改为 $x \rightarrow \infty$, 定理仍成立.

注记. 在上述定理中, 如果不等式 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立, 结论不变.

准则 I 和准则 I' 称为**夹逼准则**或者**两面夹准则**

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$, 并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

一般地, 如果当 $x \rightarrow 0$ 时, $\phi(x) \rightarrow 0$, 则有

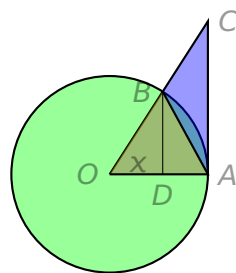
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\phi(x)]}{\phi(x)} = 1$$

证明. 如图所示, 设单位圆 O , 圆心角 $\angle AOB = x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) 作单位圆的切线, 得 $\triangle ACO$. 设扇形 OAB 的圆心角为 x , $\triangle OAB$ 的高为 BD , 则有 $\sin x = BD$, $x = \text{弧 } \widehat{AB}$, $\tan x = AC$, 所以

$$\sin x < x < \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



上式对于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} = 0, \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

由两面夹准则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

例 1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

例 2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解. 易得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \right) \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \times 1 = 3\end{aligned}$$

例 4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$.

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} \\ &= \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

练习. 求下列函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$$

例 5. 求 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$.

解. 令 $t = x - \pi$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -1 \end{aligned}$$

例 6. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ 1.

例 7. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$ 1.

例 8. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2}$ 1.

2.5.2 重要极限 II

定理 (极限存在准则 II). 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.

2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记. 若数列是某一项开始单调变化, 结论仍然成立.

例子. 证明数列 $x_n = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{\cdots + \sqrt[3]{3}}}$ (n 重根式) 的极限存在, 并求出极限.

证明. 显然 $x_{n+1} > x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的; 又 $x_1 = \sqrt[3]{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{3 + x_k} < \sqrt[3]{3 + 3} < 3,$$

即 $\{x_n\}$ 是有界的; 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 又由 $x_{n+1} = \sqrt[3]{3 + x_n}$ 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3 + x_n}$$

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = A$, 则有

$$A = \sqrt[3]{3 + A} \Rightarrow A = \frac{1 + \sqrt[3]{13}}{2}, A = \frac{1 - \sqrt[3]{13}}{2} \text{ (舍去)}$$

n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

\Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

证明. 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, 则

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots (n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

显然 $x_{n+1} > x_n$, $\therefore \{x_n\}$ 是单调递增的;

证明. 又因为

$$\begin{aligned} x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 是有界的由单调收敛准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (e = 2.71828 \cdots)$$

可以证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xrightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

一般地, 如果当 $x \rightarrow a$ 时, $\psi(x) \rightarrow 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}} = e$$

例 9. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2\end{aligned}$$

例 10. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x$

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1} \cdot (-\frac{1}{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}} = e^{-1/3}\end{aligned}$$

练习 1. 求函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^x$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{3x}}$$

定理. 若 $\lim_{x \rightarrow \square} u(x) = A > 0$, $\lim_{x \rightarrow \square} v(x) = B$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow \square} u(x)^{v(x)} = A^B.$$

例 11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2x}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^2.\end{aligned}$$

练习 2. 求函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{4x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x-3}$$

例 12. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

解. 由条件知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \ln e = 1 \end{aligned}$$

例 13. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

解. 令 $e^x - 1 = u$, 即 $x = \ln(1+u)$. 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $u \rightarrow 0$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}} = 1$$

2.5.3 连续复利

例子. 复利问题: 假设银行活期存款的年利率为 0.5%, 存入 M 元一年后最多可以得到多少钱?

- 粗略: $M(1 + 0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常: $M \left(1 + \frac{0.5\%}{4} \right)^4 = M \times 1.00500938$
- 极端: $M \left(1 + \frac{0.5\%}{360} \right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实. 常数 e 反映了连续增长的规律.

设一笔贷款 A_0 (称为**本金**), 年利率为 r , 则

- 一年后本利和 $A_1 = A_0(1 + r)$
- 两年后本利和 $A_2 = A_1(1 + r) = A_0(1 + r)^2$
- k 年后本利和 $A_k = A_0(1 + r)^k$

如果一年分 n 期计息, 年利率仍为 r , 则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

k 年后本利和 $A_k = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nk}$

如果计息期数 $n \rightarrow \infty$, 即每时每刻计算复利 (称为**连续复利**), 则 k 年后的本利和

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}} \right]^{rk} \\ &= A_0 e^{rk} \end{aligned}$$

1. 两个准则

- 两面夹 (夹逼) 准则
- 单调有界准则

2. 两个重要极限

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

复习 **1.** 求函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin x)^{\frac{1}{3x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x \sin x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} \right)^{3x+1}$$

例子. 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解. 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x$ 不是无穷小, 所以不能用重要极限 // 公式来计算.

实际上, 这个函数是初等函数, 且在 0 的邻域有定义, 所以其极限为 $(1 + 1)^1 = 2$.

例子. 设数列 $x_n = \frac{n!}{n^n}$, 研究数列的极限.

例子. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{1}{2}$, 且当 $n \geq 1$ 时有 $x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{2}$. 研究数列的极限.

解. 先说明数列收敛, 再根据数列的递归关系求出其极限.

2.6 无穷小的比较

2.6.1 无穷小的阶

例子. 比较 $x \rightarrow 0$ 时的三个无穷小 x , $2x$, x^2 .

x	1	0.1	0.01	0.001	...	$\rightarrow 0$
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	...	$\rightarrow 0$
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	...	$\rightarrow 0$

定义. 设 α 、 β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记为 $\beta = o(\alpha)$.

2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 和 α 是等价无穷小, 记为 $\beta \sim \alpha$.

4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

例 1. 在 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 x^2 比 x 高阶.

例 2. 在 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 x^2 比 x^3 低阶.

例 3. 在 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例 4. 在 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

例 5. 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

证明. 易知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故 $\tan x - \sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

练习 1. 已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 和 $g(x) = x^2$ 均为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

(1) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶?

(2) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶?

(3) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶?

(4) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价?

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有如下这些常用的等价无穷小:

$$(1) \sin x \sim x$$

$$(5) \ln(1+x) \sim x$$

$$(2) \tan x \sim x$$

$$(6) e^x - 1 \sim x$$

$$(3) \arcsin x \sim x$$

$$(7) 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$(4) \arctan x \sim x$$

$$(8) \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$$

意义：用等价无穷小可给出函数的近似表达式。

定理. β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$. 称 α 是 β 的主要部分.

证明. (\Rightarrow) 设 $\alpha \sim \beta$, 则有

$$\begin{aligned} \lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} &= \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0 \\ \therefore \beta - \alpha &= o(\alpha), \quad \text{即 } \beta = \alpha + o(\alpha) \end{aligned}$$

(\Leftarrow) 设 $\beta = \alpha + o(\alpha)$, 则有

$$\begin{aligned} \lim \frac{\beta}{\alpha} &= \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) = 1 \\ \therefore \alpha &\sim \beta \end{aligned}$$

2.6.2 等价无穷小代换

定理. 设 $\alpha \sim \alpha'$ 、 $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则有 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$.

证明. 易知

$$\begin{aligned} \lim \frac{\beta}{\alpha} &= \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \\ &= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \end{aligned}$$

例 6. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{1 - \cos x}$.

解. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 8.$$

例 7. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积, 则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换, 而不会改变原式的极限.

例子. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x}$.

解. 当 $x \rightarrow 0$, $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$.

$$\text{原式} = \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{(2x)^3} = 0. \quad \text{✗}$$

解 (正确解法). 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 2x \sim 2x$, $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^3$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3} = \frac{1}{16}. \quad \text{✓}$$

注记. 只能分别代换乘除项, 不能分别代换加减项.

注记. 当 $\alpha_1 \sim \beta_1$, $\alpha_2 \sim \beta_2$ 时, 下列等式总是成立:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \sim \beta_1 \cdot \beta_2 \quad \text{✓}$$

但下列等式未必成立:

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 \not\sim \beta_1 \pm \beta_2 \quad \text{✗}$$

例子. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{array}{c} x + x^2 \sim x + x^3 \\ x \sim x \end{array} \xrightarrow{\text{两边同时相减}} \begin{array}{c} x^2 \sim x^3 \end{array}$$

练习 2. 求下列函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\arcsin 2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{(e^{2x} - 1) \ln(1 - 2x)}.$$

2.6.3 小结与思考

1. 无穷小的比较: 反映了同一过程中, 两无穷小趋于零的速度快慢, 但并不是所有的无穷小都可进行比较.

- 高 (低) 阶无穷小;
- 等价无穷小;
- 无穷小的阶.

2. 等价无穷小的代换: 求极限的又一种方法, 注意适用条件.

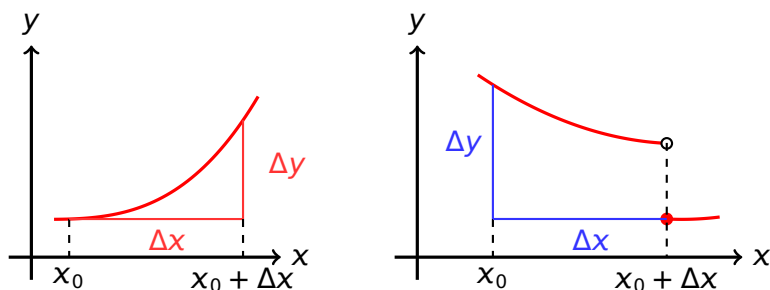
思考. 任何两个无穷小都可以比较吗?

2.7 函数的连续性

2.7.1 函数的连续性的概念

例子. 自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1. 当时间变化很微小时, 气温的变化也很微小.



2. 当边长变化很微小时, 正方形的面积变化很微小.

对于 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0 , 如果 x 从 x_0 作微小改变 Δx 后, y 的相应改变量 Δy 也很微小, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内有定义, 当 x 在 $U(x_0, \delta)$ 内由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 称 Δx 为自变量 x 在点 x_0 的增量; 相应地, 函数 y 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量.

定义 1. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.



定义 2. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\varepsilon - \delta$ 定义: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

从定义我们可以看出, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续 \iff 函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (极限存在):

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

.....

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (连续):

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)$$

例 1. 试证函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续.

解. 易知

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

由定义知, 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

例 2. 证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明. 任取 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

因为 $\left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 1$, 故

$$|\Delta y| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|.$$

对任意的 α , 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有 $|\sin \alpha| < \alpha$, 故

$$|\Delta y| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| < |\Delta x|.$$

所以当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta y \rightarrow 0$. 即函数 $y = \sin x$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是连续的.

定义. 若函数 $f(x)$ 在 $(a, x_0]$ 内有定义, 且 $f(x_0^-) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, b)$ 内有定义, 且 $f(x_0^+) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

例 3. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 0, \\ x-2, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2 = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2) = -2 \neq f(0)$$

函数右连续但不左连续, 故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

练习 1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$, 判断它在 $x=0$ 处的连续性.

定义. 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续:

- 函数在开区间 (a, b) 内连续;
- 在左端点 $x = a$ 处右连续;
- 在右端点 $x = b$ 处左连续.

注记. 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

2.7.2 函数的间断点

定义. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义, 如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则称它在点 x_0 **间断**, 或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的**间断点**.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

定义 **3**. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$, 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**可去间断点**.

例子. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处有可去间断点.

例子. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ **可去间断点**

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 即可使其变为连续点.

定义. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左, 右极限都存在, 但 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

例子. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ 跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点: 函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等, 则为可去间断点;
2. 左右极限不相等, 则为跳跃间断点.

定义. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例子. $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处 无穷间断点

例子. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处 振荡间断点

注记. 间断点常见位置: (1) 分母为零; (2) 分段点.

例子. 求函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点, 并判断类型.

例子. 求 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \leq 1, x \neq 0 \\ \frac{x^2-4}{x-2}, & x > 1, x \neq 2 \end{cases}$ 的间断点, 并判断其类型.

函数的间断点可能不只是个别的几个点.

例子. 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

在定义域 R 内每一点处都间断, 且都是第二类间断点.

例子. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ -x, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$ 仅在 $x = 0$ 处连续, 其余各点处处间断.

例 4. 求 a 的值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续.

解. 易知 $f(0) = a$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + x) = a, \end{aligned}$$

由 $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$, 得 $a = 1$.

2.7.3 初等函数的连续性

定理 1. 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

例子. $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内连续.

定理 2. 严格单调递增 (递减) 的连续函数必有严格单调递增 (递减) 的连续反函数.

例子. $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加且连续故

$$y = \arcsin x$$

在 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 3. 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 也连续.

例子. 因为 $u = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续, $y = \sin u$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,

故 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续.

定理 4. 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.

2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

例子. $y = \sqrt{\cos x - 1}$, $D: x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义, 故不连续.

初等函数在连续点求极限可用代入法.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in \text{定义区间})$$

例 5. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \sqrt{e^x - 1}$

解. 原式 $= \sin \sqrt{e^1 - 1} = \sin \sqrt{e - 1}$.

2.7.4 小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.

2. 区间上的连续函数

3. 间断点的分类

- **第一类间断点**: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
 - **可去间断点**: $f(x_0^-) = f(x_0^+)$
 - **跳跃间断点**: $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$
- **第二类间断点**: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
 - **无穷间断点**: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
 - **振荡间断点**: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大

4. 初等函数的连续性

- 初等函数在其定义区间上连续;
- 初等函数的连续性在求极限时的应用: 代入法.

思考. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 是否连续? 又若 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 连续, $f(x)$ 在 x_0 是否连续?

2.8 闭区间上连续函数的性质

2.8.1 最大值和最小值定理

定义. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

例子. $y = 1 + \sin x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

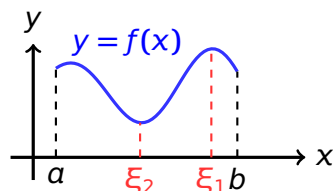
例子. $y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

例子. $y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(0, +\infty)$ 上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$

定理 1 (最值定理). 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m .

若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$, 使得
 $\forall x \in [a, b]$ 时, 有

$$f(\xi_1) \geq f(x), \quad f(\xi_2) \leq f(x).$$



1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

例 1. 函数 $y = \tan x$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是连续的, 但在这个开区间上它是无界的, 而且也没有最大值和最小值.

例 2. 函数 $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x + 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

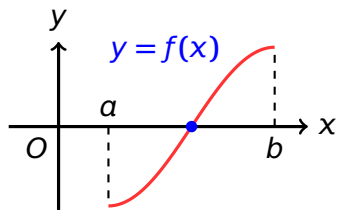
在区间 $[0, 2]$ 虽然有界, 但既无最大值也无最小值.

2.8.2 零点定理与介值定理

定义. 如果 x_0 使 $f(x_0) = 0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**零点**.

定理 2 (零点定理). 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.

几何解释: 连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧, 则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



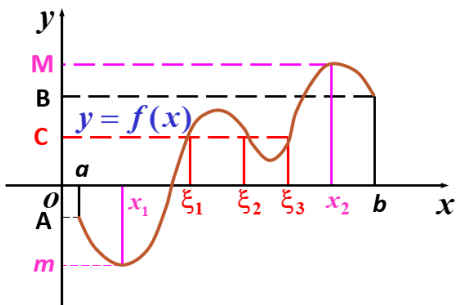
例 3. 证明方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ 内各有一个实根.

例 4. 证明方程 $2 \sin x = x + 1$ 有实数解.

定理 3 (介值定理). 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等, 则对于 A 与 B 之间的任何数 C , 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

证明. 令 $g(x) = f(x) - C$. 则由零值定理可以得到结论.

几何意义: 在 $[a, b]$ 上的连续曲线 $y = f(x)$ 与水平直线 $y = C$ (C 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间) 至少相交一点.



推论. 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

证明. 设 $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$, 在区间 $[x_1, x_2]$ (或者 $[x_2, x_1]$) 上运用介值定理可得结论

例 5. 证明方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在开区间 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

证明. 令 $f(x) = x^5 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 又

$$f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0,$$

由零点定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^5 - 3\xi + 1 = 0$$

\therefore 方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 上至少有一根 ξ .

例 6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, x_1, x_2, \dots, x_n 为 $[a, b]$ 上的 n 个点, 证明: 在 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

证明. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 与最小值 m . 于是

$$m \leq f(x_i) \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

从而

$$nm \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq nM \implies m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M$$

1. 若 $f(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ 或 $f(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$, 则可取 $\xi = a$ 或 $\xi = b$.

2. 若 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ 与 $f(a), f(b)$ 不同, 由介值定理可知, 在 (a, b) 至少存在一点 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

综上, 命题得证.

例 7. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且对于任意的 $x \in [a, b]$ 都有 $a \leq f(x) \leq b$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中有不动点, 即存在 $x^* \in [a, b]$, 使 $f(x^*) = x^*$.

证明. 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由于 $a \leq f(x) \leq b$, 故

$$g(a) \geq 0, g(b) \leq 0.$$

1. 若 $g(a) = 0$, 可取 $x^* = a$.
2. 若 $g(b) = 0$, 可取 $x^* = b$.
3. 若 $g(a) > 0, g(b) < 0$, 则由介值定理知, 存在 $x^* \in (a, b)$, 使 $g(x^*) = 0$, 即有 $f(x^*) = x^*$.

例 8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < a, f(b) > b$. 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \xi$

2.8.3 均衡价格的存在性

假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数. 如果生产某种商品的资源十分昂贵, 则价格为零时供给必为零, 即 $S(0) = 0$; 再假定 $D(0) > 0$, 即消费者有消费欲望. 令

$$Z(P) = D(P) - S(P); \text{ 于是 } Z(0) = D(0) - S(0) > 0.$$

另外, 当价格涨到某个充分大的值 $P = P^*$ 时, 公司会发现生产该产品利润丰厚, 而顾客会感到价格过高, 这样必然导致供过于求, 即 $D(P^*) < S(P^*)$, 从而

$$Z(P^*) = D(P^*) - S(P^*) < 0.$$

又 $D = D(P)$ 和 $S = S(P)$ 都是区间 $[0, P^*]$ 上的连续函数, 所以 $Z(P) = D(P) - S(P)$ 也是区间 $[0, P^*]$ 上的连续函数, 于是由零点定理, 存在 $P_e \in (0, P^*)$, 使得

$$Z(P_e) = D(P_e) - S(P_e) = 0,$$

即

$$D(P_e) = S(P_e), \text{ 且 } P_e > 0.$$

定理. 假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数, 且满足:

1. 价格为零时, 需求超过供给, 即 $D(0) > S(0)$;
2. 存在某个价格 $P = P^* > 0$, 使得在此价格下, 供给超过需求, 即 $S(P^*) > D(P^*)$.

则市场上一定存在一个正的均衡价格, 即存在 $P_e > 0$, 使得 $D(P_e) = S(P_e)$.

2.8.4 小结

- 四个定理

1. 最值定理
2. 零点定理
3. 介值定理
4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路

1. 直接法：先利用最值定理，再利用介值定理；
2. 辅助函数法：先作辅助函数 $F(x)$ ，再利用零点定理；

思考. 假设有一个登山者头天上午 8 点从山脚开始上山，晚上 6 点到达山顶，第二天上午 8 点从山顶沿原路下山，下午 6 点到达山脚. 问该登山者在上、下山过程中，会同时经过同一地点吗？为什么？

问题. 证明方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

问题. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$