第一章　复习 I

1.1　集合与函数

例 **1.** 求下列函数的定义域：

$$f(x)=\sqrt{x-2} \tag{1.1.1}$$

$$f(x)=\ln(x^2-1) \tag{1.1.2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3} \tag{1.1.3}$$

求函数的定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；
2. 对数里面要求大于零；
3. 分母要求不能等于零.

例 **2.** 将函数 $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 分解为简单函数的复合.

- 简单函数指的是由基本初等函数的四则运算得到的函数.
- 基本初等函数指的是常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六种.

1.2 极限与连续

对于数列极限，我们有如下基本公式：

$$\lim_{n\to\infty} c = c \tag{1.2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0) \tag{1.2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0 \quad (k > 0) \tag{1.2.3}$$

对于 $x \to \infty$ 的函数极限，我们有如下基本公式：

$$\lim_{x\to\infty} c = c \tag{1.2.1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k\text{ 为正整数}) \tag{1.2.2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \tag{1.2.3}$$

对于 $x \to x_0$ 的函数极限，如果 $f(x)$ 是初等函数，x_0 在 $f(x)$ 的定义区间中，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

例 **1.** 设

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \le 0 \\ x^2+1 & 0 < x \le 1 \\ \frac{2}{x} & x > 1 \end{cases}$$

判断该函数在 $x \to 0$ 及 $x \to 1$ 时的极限是否存在.

定理**.** 极限存在当且仅当左右极限都存在而且相等.

各种极限都有四则运算法则：

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) \tag{1.2.1}$$

$$\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) \tag{1.2.2}$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \tag{1.2.3}$$

例 **2.** 求下列极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} \tag{1.2.1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x} \tag{1.2.2}$$

事实**.** 等价无穷小代换有如下特点：

- 我们只有对 $x\to 0$ 的代换公式；
- 只能对乘除因子代换，不能对加减项代换.

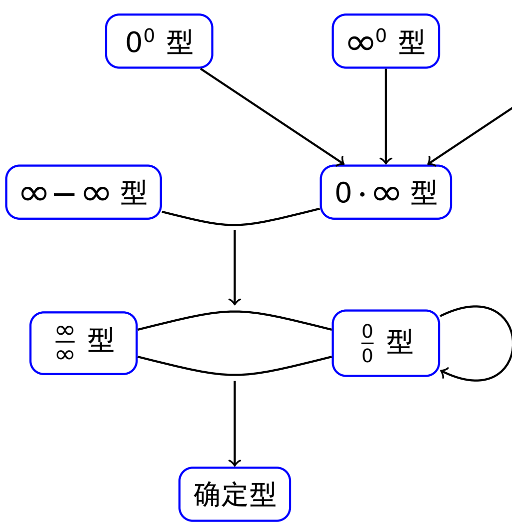
例 **3.** 求下列极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x} \tag{1.2.1}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x} \tag{1.2.2}$$

事实**.** 洛必达法则有如下特点：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限.



例 **4.** 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

定理 **1.** 若 $x\to\square$ 时，$a(x)\to 0$，$b(x)\to\infty$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to\square}\left(1+a(x)\right)^{b(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}a(x)b(x)}}$$

例 **5.** 求函数 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型．其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\le 1, x\ne 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\ne 2\end{cases}$$

注记**.** 函数的间断点通常在这两种点中出现：

1. 使得分母为零的点；

2. 分段函数的交界点.

1.3 导数与微分

- $(C)'=0$
- $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)'=a^x\ln a$
- $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$
- $(\sin x)'=\cos x$
- $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

导数有如下四则运算法则：

- $(u\pm v)'=u'\pm v'$

- $(Cu)' = Cu'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

例 **1.** 求下列函数的导数：

(1) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$；

(2) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$；

(3) $f(x) = \cos(\ln x)$.

定理**.** 设 $y = f(u)$, $u = g(x)$，则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例 **2.** 对下面的方程求导数 y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$；
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y) y'_x$.

1.4 导数的应用

定理**.** 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，

(3) $f(a) = f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

定理. 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

定理. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内都可导,

(3) 在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例 **1.** 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 存在两个不同的点 $\theta,\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\theta)f'(\eta)=1$.

思路路解析:

(1) 第一问用零点定理 ($F(x)=f(x)-(1-x)$).

(2) 第二问利用第一问结论与拉格朗日中值定理.

$$f(\xi)-f(0)=f'(\theta)\xi,\ f(1)-f(\xi)=f'(\eta)(1-\xi)$$

两式相乘，并用第一问结论即可证明.

例 **2.** 求下列函数的单调区间与极值：

(1) $f(x)=x^3-3x^2+7$;

(2) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

事实. 对于单调区间与极值，有如下基本结果：

- $f'(x)>0$ 的区间为单调增加区间；
- $f'(x)<0$ 的区间为单调减少区间；
- $f'(x)=0$ 或者不存在的点很可能为极值点.

事实. 一般地，对于函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点.

事实. 特殊地，若函数在区间（开或闭，有限或无限）上可导，且在区间内只有一个驻点，则有

- 如果该驻点为极大值，则它也是最大值；
- 如果该驻点为极小值，则它也是最小值.

例 **3.** 求下列曲线的凹向与拐点：

(1) $f(x)=x^4-2x^3+1$;

(2) $f(x)=(x-2)^{\frac{5}{3}}$.

事实. 对于凹向与拐点，有如下基本结果：

- $f''(x)>0$ 的区间为凹（上凹）区间；
- $f''(x)<0$ 的区间为凸（下凹）区间；
- $f''(x)=0$ 或者不存在的点很可能为拐点.

例 **4.** 求曲线 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 的渐近线：

事实. 对于曲线的渐近线，我们有如下定义：

- 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，则 $y=b$ 为水平渐近线；
- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，则 $x=a$ 为铅垂渐近线.

若 $y=f(x)$ 可导，则变化率 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为 $f(x)$ 的边际函数.

- 总成本函数 $C(Q) \Longrightarrow$ 边际成本 $C'(Q)$
- 总收益函数 $R(Q) \Longrightarrow$ 边际收益 $R'(Q)$

若 $y=f(x)$ 可导，则相对变化律

$$\frac{\mathrm{E}y}{\mathrm{E}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=y'\frac{x}{y}$$

称为 $f(x)$ 的弹性函数.

1.5 不定积分

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C \tag{1.5.1}$$

$$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \tag{1.5.2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \tag{1.5.3}$$

$$\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \tag{1.5.4}$$

$$\int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + C \tag{1.5.5}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \tag{1.5.6}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \tag{1.5.7}$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \tag{1.5.8}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \tag{1.5.9}$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{1.5.10}$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{1.5.11}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \tag{1.5.12}$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \tag{1.5.13}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \tag{1.5.14}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \tag{1.5.15}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \tag{1.5.16}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \tag{1.5.17}$$

$$\begin{aligned}\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x))\\ &= \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}\end{aligned}$$

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

这个公式利用换元 $u=ax+b$ 可以得到.

例 **1.** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$.

例 **2.** 求不定积分 $\int \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\psi(t))\,\mathrm{d}(\psi(t))\\ &= \left[\int f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)}\end{aligned}$$

例 **3.** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

例 **4.** 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$.

1. $\displaystyle\int f(\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\sin t$
2. $\displaystyle\int f(\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\tan t$
3. $\displaystyle\int f(\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\sec t$

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 **5.** 求下列不定积分

1. 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.
2. 求不定积分 $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
3. 求不定积分 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.
4. 求不定积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.
5. 求不定积分 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.