0.6 定积分

性质 1. 设 k 为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 2. （函数可加性）

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3. （区间可加性）设 $a<c<b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 1. 即使 c 不在 a 和 b 之间，上述性质依然是成立的.

性质 4.

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$$

性质 5. 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

推论. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

性质 6. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

性质 7 (积分中值定理)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

定义 1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，称为积分上限的函数或变上限积分.

定理 1.

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

定理 2 (原函存在定理)**.** 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

定理 3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

它称为微积分基本公式或牛顿一莱布尼茨公式.

定积分换元公式：令 $x=\phi(t)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

其中，当 $x=a$ 时，$t=\alpha$；当 $x=b$ 时，$t=\beta$.

(1) 用 $x=\varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量时，积分限也相应的改变.

(2) 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必象计算不定积分那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成原变量 x 的函数，而只要把新变量的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 然后相减就行了.

(3) 用第一类换元法即奏微分法解定积分时可以不换元，当然也就不存在换上下限的问题了.

(1) 用换元法解题时，要注意看换元积分公式的内容;

考察 $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 令 $x=\frac{1}{t}$ .... (×)

(2) 对分段函数和含绝对值号的积分，计算时必须分区间进行;

(3) 对被积函数进行适当变形时, 要注意符号问题.

定理. *(1)* 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

定理. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，以 T 为周期则

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x. \ (a \text{ 为任意实数})$$

设函数 $u(x)$ 、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有.

$$\int_{a}^{b} u\,\mathrm{d}v = [uv]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\,\mathrm{d}u$$

反常积分有两种类型：

1. 无限区间上的积分：无穷限的反常积分

2. 对无界函数的积分：无界函数的反常积分

定义 **2.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 如果

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \quad (b>a)$$

存在, 就称此极限为 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分, 记作

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 **3.** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上连续, 如果

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \quad (b>a)$$

存在, 就称此极限为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分, 记作

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 **4.** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 如果反常积分

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 上述两个反常积分之和为 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的反常积分，即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 **5.** 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x(\varepsilon>0)$ 存在, 就称此极限为无界函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分, 记作

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$发散.

定义 **6.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$, 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x(\varepsilon>0)$ 存在, 就定义反常积分

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

否则称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 **7.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除 $x=c(a<c<b)$ 外连续，且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$, 如果两个反常积分

$$\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛, 就定义反常积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

否则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 **8.** $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ $(r>0)$ 为 Γ 函数.

性质 **8.** Γ 函数有如下公式

1. $\Gamma(1)=1$
2. $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)\Rightarrow\Gamma(n+1)=n!$
3. 余元公式 $\Gamma(r)\Gamma(1-r)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi r)}$ $(0<r<1)$.
4. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

定义 **9.** 对任何实数 $x>-1$，定义其阶乘为

$$x!=\Gamma(x+1).$$

1. 由曲线 $y=f(x)$, x 轴，直线 $x=a$ 以及直线 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积为
$$S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
2. 由 $y=f_1(x)$,$y=f_2(x)$, $x=a$,$x=b$ 所围成的平面图形的面积为
$$S=\int_a^b |f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x$$

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到
3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到

4. 计算积分结果

1. 由曲线 $x=\varphi(y)$, y 轴，直线 $y=a$ 以及直线 $y=b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b|\varphi(y)|\,\mathrm{d}y$$

2. 由曲线 $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$，直线 $y=a$ 以及直线 $y=b$ 所围成的图形的面积为

$$S=\int_a^b|\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|\,\mathrm{d}y$$

由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$, $x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x=\int_a^b\pi y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

由曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$, $y=d$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y=\int_c^d\pi x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2\,\mathrm{d}y$$

注记. 如果旋转体是由连续曲线 $y=f(x)$ 、直线 $x=a,x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为

$$\boxed{V_y=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx}$$

0.8　多元函数

设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2,\delta$ 为某一正数, 在 $\mathbb{R}^2$ 中与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体, 称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域, 记作 $U(P_0,\delta)$, 即

$$\begin{aligned} U(P_0,\delta) &= \left\{P\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |P_0P|<\delta\right\} \\ &= \left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}. \end{aligned}$$

在几何上, $U(P_0,\delta)$ 就是平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心, 以 δ 为半径的圆盘 (不包括圆周).

定义 1. 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$**.**

定义 2. 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$**.**

定义 3. 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 A，对任意给定 $\epsilon>0$，总存在一个 $\delta>0$，只要 $(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$，就有

$$|f(x,y)-A|<\epsilon,$$

则称当 (x,y) 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

注记.　*1.* 二元函数的极限也叫二重极限.

2. 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

注记. 函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 成立等价于当 (x,y) 以任意方式趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总趋于 A.

确定极限不存在的方法

1. 令 $P(x,y)$ 沿 $y=kx$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$，若极限值与 k 有关，则可断言极限不存在;
2. 找两种不同趋近方式, 使 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在, 但两者不相等，此时也可断言 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在.

定义 **4.** 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点, 且 $P_0(x_0,y_0)\in D$, 若 $f(x,y)$ 满足

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 如果 $f(x,y)$ 在 D 的每一点处都连续, 则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 或称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

多元初等函数：由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子表示的函数.

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

注记**.** 二元函数有和一元函数类似的性质：

1. 二元初等函数在定义区域上总是连续的.

2. 若二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则它在 D 上必能取得最大值和最小值 *(*从而有界*)*.

3. 若二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则它在 D 上必能取得介于最大值和最小值之间的任何值.

定义 **5.** 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，如果极限

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ z_x(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \text{或 } f_x(x_0,y_0)$$

类似地定义函数在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

实际求 $z=f(x,y)$ 的偏导数时，因为始终只有一个自变量在变动，另一个自变量可看作常量，所以仍旧用一元函数的微分方法求解.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Longrightarrow \boxed{\text{把 } y \text{ 暂时看作常量而对 } x \text{ 求导数}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Longrightarrow \boxed{\text{把 } x \text{ 暂时看作常量而对 } y \text{ 求导数}}$$

有关偏导数的几点说明:

1. 偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 是一个整体记号，不能拆分;
2. 求分界点、不连续点处的偏导数要用定义求;
3. 多元函数在某点偏导数存在 $\overset{\times}{\Longrightarrow}$ 连续.

对 $z=f(x,y)$ 的偏导数 z_x 和 z_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$ .... 纯偏导
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$ .... 纯偏导
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$ .... 混合偏导
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$ .... 混合偏导

定义：二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

定理 **1.** 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

偏导数在经济分析中的应用：两种商品之间的关系、交叉弹性.

定义. 对于二元函数 $z=f(x,y)$，如果

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A，B 与 Δx，Δy 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数可微，并称它的全微分为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

定理. 如果函数 $z=f(x,y)$ 可微，则 $A=f_x(x,y)$，$B=f_y(x,y)$. 即有

$$\mathrm{d}z = f_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f_y(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}x=\Delta x$，$\mathrm{d}y=\Delta y$.

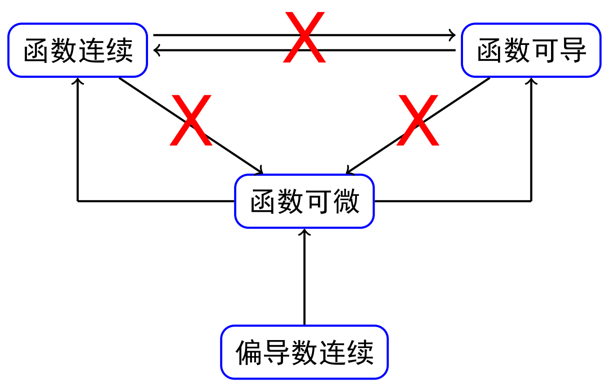
定理. 如果多元函数的各个偏导数都连续，则全微分存在.

设 $z=f(x,y)$，则全微分为

$$\mathrm{d}z = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

设 $u=f(x,y,z)$，则全微分为

$$\mathrm{d}u = f_x(x,y,z)\mathrm{d}x + f_y(x,y,z)\mathrm{d}y + f_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$



设 $z=f(x,y)$, $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$，则我们得到复合函数 $z=f(\phi(t),\psi(t))$. 此时我们有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

设 $z=f(u,v)$, $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$，则我们得到复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$. 此时我们有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{0.8.1}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{0.8.2}$$

例 **1.** 设 $z=uv$，$u=3x^2+y^2$, $v=2x+y$，求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

定理 **2.** 设方程 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，且 $F(x,y)$ 有连续偏导数，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

例 **2.** 设方程 $y-xe^y+x=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

定理 **3.** 设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，且 $F(x,y,z)$ 有连续偏导数，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

例 **3.** 设方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

定理 **4** (极值的必要条件)**.** 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数必然为零: $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

定理 **5** (极值的充分条件)**.** 如果函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点．设 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $AC-B^2>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

(2) 如果 $AC-B^2<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

(3) 如果 $AC-B^2=0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值需另外判定.

注记.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

问题. 求函数 $u=f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y)=0$ 下的极值.

解法. 令 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$，由

$$\begin{cases} L_x(x,y)=0 \\ L_y(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

消去 λ，解得的 (x,y) 即为极值可疑点.

0.9 二重积分

设曲顶柱体的底面为 xy 平面有界闭区域 D，顶面为连续曲面 $f(x,y)$，则它的体积为

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

性质 1 (函数可加性)**.**

$$\iint\limits_D \left[af(x,y)+bg(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + b\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质 2 (区域可加性)**.** 设积分区域 D 可以划分为 D_1 和 D_2，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质 3. 如果在 D 上有 $f(x,y) \ge g(x,y)$，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质 4. 设在 D 上 $m \le f(x,y) \le M$，D 的面积为 A，则有

$$mA \le \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le MA$$

性质 5. 如果在 D 上有 $f(x,y) \equiv 1$，D 的面积为 A，则有

$$\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A$$

性质 6 (积分中值定理)**.** 如果 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，D 的面积为 A，则在 D 中至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)A$$

如果积分区域 D 为 X 型区域，即有

$$D = \left\{(x,y)\middle|a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\right\}$$

二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

如果积分区域 D 为 Y 型区域，即有

$$D = \left\{(x,y)\middle| a \le y \le b, \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\right\}$$

二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

- X 型区域的特点: 穿过区域且平行于 y 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.
- Y 型区域的特点: 穿过区域且平行于 x 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.
- 注意重积分转化为累次积分时，积分的上下限怎么找.

用极坐标表示积分区域

1. 先求 θ 的范围
2. 再求 r 的函数

$$D = \{(\rho,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, \phi_1(\theta) \le r \le \phi_2(\theta)\}$$

二重积分在极坐标系与直角坐标系下的转换

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\\ &= \int_\alpha^\beta \left[\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

0.10 微分方程

定义 **1.** 含有未知函数的导数或微分的方程，即形如下面形式的方程

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

称为微分方程．其中微分方程中出现的导数的最高阶数 n，称为微分方程的阶．

通解、特解、初始条件的含义，知道如何使用初始条件确定通解中的常数已得到特解.

注意要会判断一阶微分方程所属的类别 (可分离变量、齐次微分方程 or 一阶线性微分方程)

应知道线性微分方程的解的结构.

1. 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x=g(y)\,\mathrm{d}y$
   - 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int g(y)\,\mathrm{d}y$
2. 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{y}{x})$
   - 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{y}{x})$
   - 换元：令 $v=\frac{y}{x}$，则有 $y=xv$，从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v$．代入原方程得到
   $$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=f(v)$$
   - 分离变量：得到 $\dfrac{\mathrm{d}v}{f(v)-v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$
   - 两边积分：得到通解，然后将 v 代回

1. 一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ ($q(x)=0$ 称为一阶齐次线性微分方程, $q(x)\neq 0$ 称为一阶非齐次线性微分方程)
   - 先用变量分离法求 $y'+p(x)y=0$ 的解得 $y=Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$.

- 将 $y=u(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 代入 $y'+p(x)y=q(x)$.

  ....

$$
\begin{aligned}
&u'(x)=q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\\
\Rightarrow\ &u(x)=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\\
\Rightarrow\ &y=\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)
\end{aligned}
$$

  上式即为一阶线性非齐次方程的通解公式.

研究二阶常系数线性齐次方程：$y''+py'+qy=0$.

....

设其特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1. 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为
$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$
2. 若 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 为相同实根，则方程的通解为
$$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$$
3. 若 $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$ 为共轭复根，则方程的通解为
$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

定义 **2.** 对于数列 y_x（$x=0,1,2,\cdots$），称
$$\Delta y_x=y_{x+1}-y_x$$
为 y_x 的（一阶）差分；称
$$\Delta^2 y_x=\Delta(\Delta y_x)=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x$$
为 y_x 的二阶差分.

性质**.** 差分具有以下性质：

1. $\Delta(cy_x)=c\Delta y_x$

2. $\Delta(y_x \pm z_x) = \Delta y_x \pm \Delta z_x$

3. $\Delta(y_x z_x) = z_x \Delta y_x + y_{x+1} \Delta z_x$

4. $\Delta\left(\dfrac{y_x}{z_x}\right) = \dfrac{z_x \Delta y_x - y_x \Delta z_x}{y_x y_{x+1}}$

定义**.** 形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0$$

的方程称为差分方程*(*注意，含下标的 y 至少要有两个*)*. 差分方程中未知数列下标的最大值和最小值的差，称为该差分方程的阶.（这里最大的下标为 $x+n$, 最小的下标是 x，差分方程的阶为 n）

要会判断一个方程是否是差分方程，以及要会计算差分方程的阶
如：$\Delta y_x = y_{x+1}$ 是否为差分方程？

定义 **3.** 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解.

- 满足一定的初始条件的解称为特解.
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的通解.

$y_{x+1} - a y_x = 0$ 的通解为 $y_x = c a^x$.

应知道常系数线性差分方程的解的结构.

0.11 无穷级数

定义 1. 给定数列：$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数），记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，其中第 n 项称为级数的通项.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
  - 此时称 S 为级数的和，
  - 称 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数的余项；
- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

- 调和级数：$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ .... 发散
- p-级数：$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ $(p > 0)$ .... $0 < p \leq 1$ 发散，$p > 1$ 收敛
- 几何级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ .... $|q| < 1$ 收敛, $|q| \geq 1$ 发散

性质 1. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

性质 2. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} au_n$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

推论. 级数的每一项同乘以不为 0 的常数后，其敛散性不变.

性质 3. 在一个级数前面加上（或者去掉）有限项，级数的敛散性不变.

性质 4 (收敛级数的结合律). 如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

发散级数加括号后，可能发散也可能收敛.

定理 1. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

....

注记 1. 若通项不趋于零，则级数一定发散.

例 1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 1，因此它发散.

....

注记 2. 若通项趋于零，则级数未必收敛.

例 2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 0，但是它发散.

定义 2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geq 0$（对所有 n），则称它为正项级数.

性质. 正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

定理 2. 正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和数列有界.

注记. 正项级数加括号后，其敛散性不变.

定理 3 (比较判别法). 对于两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若有 $c > 0$ 使得 $u_n \leq c v_n$，对所有 n，则有

1. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

2. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

定理 **4** (比较判别法的极限形式)**.** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都为正项级数，且有 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.

1. 若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散；

2. 若 $l = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

3. 若 $l = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

定理 **5** (比值判别法)**.** 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则有

1. 若 $l < 1$，则级数收敛；

2. 若 $l > 1$，则级数发散；

3. 若 $l = 1$，则级数可能收敛也可能发散.

定义 **3.** 正负项相间的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$，其中每个 $u_n > 0$，称为交错级数.

定理 **6** (莱布尼兹定理)**.** 如果交错级数满足条件

1. $u_{n+1} \le u_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$；

2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；

则级数收敛，且其和 $S \le u_1$，余项满足 $|R_n| \le u_{n+1}$.

例 **3.** 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛.

定理 **7.** 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定义 **4.** 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，

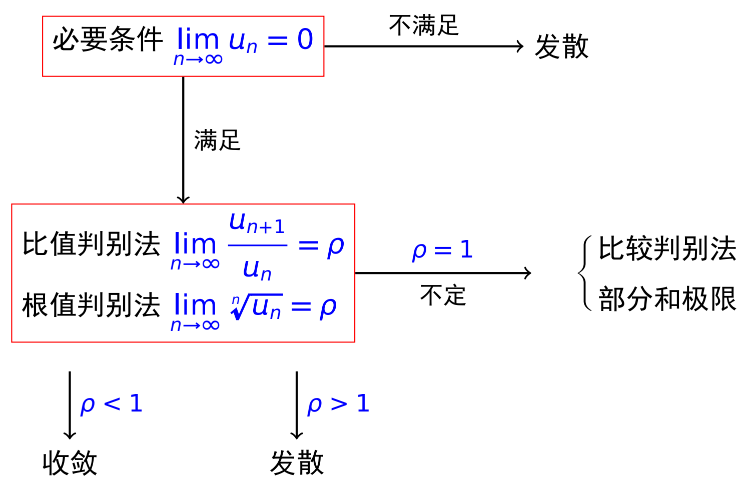
1. 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散；

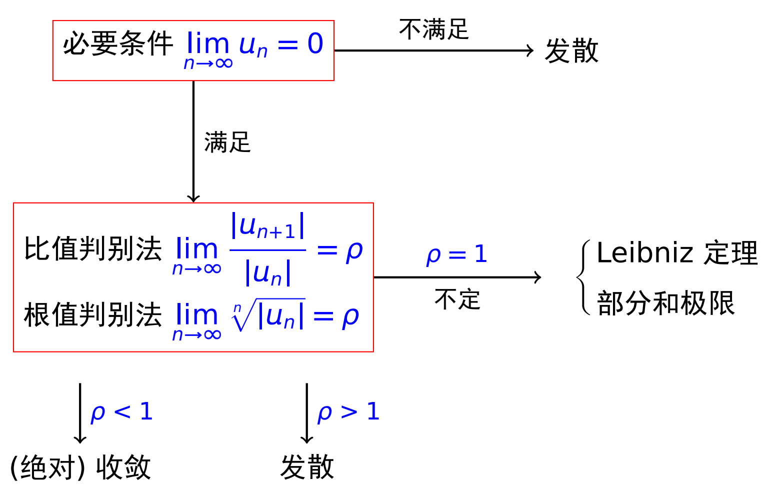
2. 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 都收敛.

定理 **8.** 对于任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$，则有

1. 当 $l < 1$ 时级数绝对收敛；

2. 当 $l > 1$ 时级数发散.





- 标准形式幂级数 ($\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_n \neq 0$)
  1. 先求幂级数的收敛半径 R, 记 $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, 则
     - $\rho \neq 0, \rho \neq +\infty \Longrightarrow R = \frac{1}{\rho}$
     - $\rho = 0 \Longrightarrow R = +\infty$
     - $\rho = \infty \Longrightarrow R = 0$
  2. 再讨论在 $x = \pm R$ 处的敛散性
- 非标准形式幂级数
  - 通过换元转化为标准形式
  - 直接用比值法或者根值法

性质 **5.** 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上连续.

性质 **6.** 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可积，且有逐项积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\end{aligned}$$

逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

性质 **7.** 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 上可导，且有逐项求导公式

$$\begin{aligned}S'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}\end{aligned}$$

逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

- 初等变换法：分解和式并套用公式

- 映射变换法：逐项求导或逐项积分

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} \arrow[r, "\text{逐项求导或积分}"] \arrow[d, dashed, "\text{难}"] & \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n} \arrow[d, "\text{求和}"] \\
\boxed{S(x)} & \boxed{S^*(x)} \arrow[l, "\text{对和式积分或求导}"']
\end{tikzcd}
$$

- 直接求和：求出级数的部分和，再求极限

- 间接求和：转换为求幂级数和，再代入值

定理 **9** (泰勒公式)**.** 如果函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶的连续导数，则当 $x \in (a,b)$ 时，$f(x)$ 可按 $x-x_0$ 的方幂展开为

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\
+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),
\end{aligned}
$$

其中余项 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在，而且当 $n\to\infty$ 时 $R_n \to 0$，则得

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,
$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数. 特别地，当 $x_0 = 0$ 时，上式变成

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,
$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

直接展开法 利用泰勒公式计算系数，并研究余项

间接展开法 利用已知的函数展开式，及幂级数性质