

目录

第五章 不定积分	3
5.1 不定积分的概念与性质	3
5.1.1 原函数与不定积分的概念	3
5.1.2 不定积分的几何意义	5
5.1.3 不定积分的性质	5
5.1.4 基本积分表	6
5.1.5 小结	9
5.2 换元积分法	9
5.2.1 第一类换元法	9
5.2.2 第二类换元法	15
5.2.3 小结	22
5.3 分部积分法	24
5.4 有理分式的积分	27

第五章 不定积分

5.1 不定积分的概念与性质

5.1.1 原函数与不定积分的概念

一般地, 已知函数 $y = f(x)$, 容易求出 $y' = f'(x)$.

反过来, 如果已知 $y' = f'(x)$, 如何找出 $y = f(x)$?

- $(?)' = 2x$

- $(?)' = e^x$

- $(?)' = \sin x$

- $(?)' = \ln x$

定义. 若定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 及可导函数 $F(x)$ 满足关系: 对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例 1. 因 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

例 2. $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2 + 2)' = 2x$, 因此 x^2 和 $x^2 + 2$ 都是 $2x$ 的原函数.

注记. 关于原函数, 需要注意以下两点:

1. 原函数不止一个

$$F'(x) = f(x) \implies (F(x) + C)' = f(x)$$

2. 同一个函数的任意两个原函数之间最多相差一个常数 C .

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \implies G(x) = F(x) + C$$

定理 (原函数存在定理). 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x)$$

简单地说, 连续函数一定有原函数.

注记. 初等函数的原函数不一定还是初等函数.

定义. 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数, 称为 $f(x)$ 的**不定积分**, 记为

$$\int f(x) dx$$

在上面定义中, 我们称 \int 为**积分号**, $f(x)$ 为**被积函数**, $f(x) dx$ 为**被积表达式**, x 为**积分变量**.

$$F'(x) = f(x) \iff \int f(x) dx = F(x) + C$$

例 3. 求函数 $f(x) = 3x^2$ 的不定积分. $x^3 + C$.

例 4. 求函数 $f(x) = \sin x$ 的不定积分. $-\cos x + C$.

练习 1. 求不定积分.

$$(1) \int x dx \dots\dots\dots \frac{x^2}{2} + C.$$

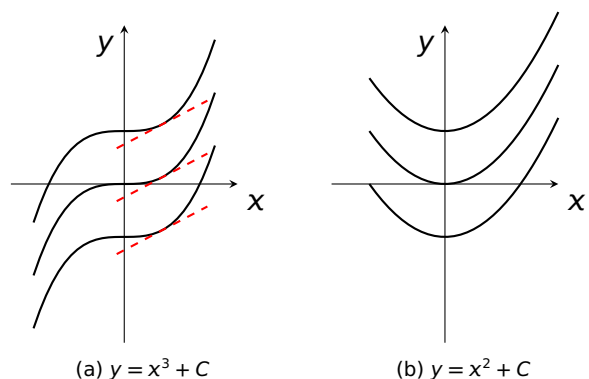
$$(2) \int x^2 dx \dots\dots\dots \frac{x^3}{3} + C.$$

$$(3) \int \sqrt{x} dx \dots\dots\dots \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.$$

例 5. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的不定积分. $\ln|x| + C$.

例 6. 求过点 $(1, 3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

答案. $y = x^2 + 2$.



5.1.2 不定积分的几何意义

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的**积分曲线**. 显然, 求不定积分得到族积分曲线 (称为**曲线族**), 在同一横坐标 $x = x_0$ 处, 任一曲线的切线有**相同的斜率**.

5.1.3 不定积分的性质

性质 **1**. 导数运算与不定积分运算互为逆运算:

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$2. \int F'(x) dx = F(x) + C$$

类似地, 微分运算与不定积分运算互为逆运算:

$$1. d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$2. \int d(F(x)) = F(x) + C$$

性质 **2**. 非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

性质 **3**. 两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

注：上述法则可以推广至有限多个函数的线性组合.

5.1.4 基本积分表

积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式.

例如，由

$$(x^{a+1})' = (a+1)x^a$$

可得

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C.$$

类似地，我们有如下基本积分公式.

$$1. \int 1 dx = x + C$$

$$2. \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

例 7. 求不定积分

$$(1) \int (2x + 5x^2 + 7x^3) dx \dots\dots\dots x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C$$

$$(2) \int (2 - \sqrt{x}) dx \dots\dots\dots 2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$(3) \int (2x + 1)^2 dx \dots\dots\dots \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$$

练习 2. 求不定积分

$$(1) \int (1 - 2x^2) dx \dots\dots\dots x - \frac{2}{3}x^3 + C.$$

$$(2) \int \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx \dots\dots\dots \frac{1}{4}x^2 + 2 \ln|x| - \frac{3}{x} + C.$$

$$(3) \int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \dots\dots\dots \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

练习 3. 求不定积分

$$(1) \int \sqrt{x}(x-3) dx \dots\dots\dots \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$(2) \int \frac{(x+1)^2}{x} dx \dots\dots\dots \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln|x| + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

例 8. 求不定积分:

$$(1) \int (4e^x - x^e) dx \dots\dots\dots 4e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$$

$$(2) \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx \dots\dots\dots e^x + x + C.$$

练习 4. 求不定积分:

$$(1) \int (x^2 + 2^x) dx \dots\dots\dots \frac{x^3}{3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8. \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$9. \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

例 9. 求不定积分

$$(1) \int (\sin x + 2 \cos x) \, dx \dots\dots\dots -\sin x + 2 \sin x + C.$$

$$(2) \int \tan^2 x \, dx \dots\dots\dots = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + C.$$

练习 5. 求不定积分

$$(1) \int \cot^2 x \, dx \dots\dots\dots -\cot x - x + C.$$

$$(2) \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} \, dx \dots\dots\dots \sin x + \cos x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

例 10. 求不定积分:

$$(1) \int \frac{x^4}{x^2+1} \, dx \dots\dots\dots \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$$

$$(2) \int \frac{1}{x^2(x^2+1)} \, dx \dots\dots\dots -\frac{1}{x} - \arctan x + C.$$

练习 6. 求不定积分:

$$(1) \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \dots\dots\dots x - \arctan x + C.$$

$$12. \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$13. \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

5.1.5 小结

本节主要内容:

1. 原函数的概念: $F'(x) = f(x)$;
2. 不定积分的概念: $\int f(x) dx = F(x) + C$;
3. 求微分与求不定积分的互逆关系
4. 基本积分公式

复习 1. 求不定积分

$$(1) \int (\sin x - 2e^x) dx \dots\dots\dots -\cos x - 2e^x + C.$$

$$(2) \int \frac{(2x+3)^2}{x} dx \dots\dots\dots 2x^2 + 12x + 9 \ln|x| + C.$$

$$(3) \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx \dots\dots\dots x - 2 \arctan x + C.$$

5.2 换元积分法**5.2.1 第一类换元法**

例 1. 求不定积分 $\int (2x+1)^{10} dx$.

解法. 设置中间变量, 并利用复合函数求导法则.

解. 令 $u = 2x + 1$, 则 $dx = \frac{1}{2} du$, 于是

$$\int (2x+1)^{10} dx = \int u^{10} \frac{1}{2} du = \frac{1}{22} u^{11} + C = \frac{1}{22} (2x+1)^{11} + C.$$

一般地, 设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, 即

$$F'(u) = f(u), \quad \int f(u) du = F(u) + C.$$

如果 $u = \phi(x)$ 可微, 则由链式法则, 有

$$dF(\phi(x)) = F'(\phi(x))\phi'(x) dx = f(\phi(x))\phi'(x) dx,$$

于是

$$\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = F(\phi(x)) + C = \left[\int f(u) du \right]_{u=\phi(x)}.$$

定理 (第一类换元法). 设 $f(u)$ 具有原函数, $\phi(x)$ 可导, 则有

$$\begin{aligned} \int f(\phi(x))\phi'(x) dx &= \int f(\phi(x)) d(\phi(x)) \\ &= \left[\int f(u) du \right]_{u=\phi(x)} \end{aligned}$$

注记. 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x) dx \text{ 化为 } \int f[\phi(x)]\phi'(x) dx$$

第一类换元法也称为凑微分法.

$$1. \quad dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$$

$$2. \quad x^{n-1} dx = \frac{1}{n} d(x^n)$$

$$3. \quad \frac{dx}{x} = d(\ln |x|) = \ln a d(\log_a |x|) \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$4. \quad e^x dx = d(e^x)$$

$$5. \quad a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x) \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$6. \cos x dx = d(\sin x)$$

$$7. \sin x dx = -d(\cos x)$$

$$8. \frac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x dx = d(\tan x)$$

$$9. \frac{dx}{\sin^2 x} = \csc^2 x dx = -d(\cot x)$$

$$10. \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$$

$$11. \frac{dx}{1+x^2} = d(\arctan x) = -d(\operatorname{arccot} x)$$

例 2. 求不定积分 $\int \sin 2x dx$.

解 (解法 1). $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x)$

令 $u = 2x$, 则上式等于

$$\frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

解 (解法 2). $\int \sin 2x dx = 2 \int \sin x \cos x dx = 2 \int \sin x d \sin x$

令 $u = \sin x$, 则上式等于

$$2 \int u du = u^2 + C = (\sin x)^2 + C.$$

解 (解法 3). 由二倍角公式易知

$$\int \sin 2x dx = 2 \int \sin x \cos x dx = -2 \int \cos x d \cos x$$

令 $u = \cos x$, 则上式等于

$$-2 \int u du = -u^2 + C = -(\cos x)^2 + C$$

.....

注记. 观察点不同, 所得结论不同.

例 3. 求不定积分

$$(1) \int \frac{dx}{2x+1} \dots\dots\dots \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

$$(2) \int \sin(3x+4) dx \dots\dots\dots -\frac{1}{3} \cos(3x+4) + C$$

练习 1. 求不定积分

$$(1) \int \frac{dx}{(4x+5)^2} \dots\dots\dots -\frac{1}{4}(4x+5)^{-1} + C$$

$$(2) \int e^{-3x+2} dx \dots\dots\dots -\frac{1}{3} e^{-3x+2} + C$$

$$(3) \int \sqrt{3x-1} dx \dots\dots\dots \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

例 4. 求不定积分

$$(1) \int x e^{x^2} dx \dots\dots\dots \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$(2) \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \dots\dots\dots -e^{1/x} + C$$

$$(3) \int x \sqrt{x^2-3} dx \dots\dots\dots \frac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}} + C$$

练习 2. 求不定积分

$$(1) \int x^2(x^3+1)^9 dx \dots\dots\dots \frac{1}{30}(x^3+1)^{10} + C$$

$$(2) \int \frac{x}{x^2+3} dx \dots\dots\dots \frac{1}{2} \ln(x^2+3) + C$$

例 5. 求不定积分 (其中 $a > 0$):

$$(1) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx \dots\dots\dots \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$(2) \int \frac{1}{x^2 - 8x + 25} dx \dots\dots\dots \frac{1}{3} \arctan \frac{x-4}{3} + C$$

$$(3) \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx \dots\dots\dots \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

练习 3. 求不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0) \dots\dots\dots \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$(2) \int \frac{dx}{(x+1)(x-2)} \dots\dots\dots \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$$

例 6. 求不定积分

$$(1) \int \sin^2 x \cos^5 x dx \dots\dots\dots \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C$$

$$(2) \int \sin^3 x dx \dots\dots\dots \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

形如 $\int \sin^m x \cos^n x dx$ 的解题思路: m, n 有一个为奇数时, 将单个的提出来凑微分.

练习 4. 求不定积分

$$(1) \int \cos^6 x \sin x dx \dots\dots\dots -\frac{1}{7} \cos^7 x + C$$

$$(2) \int \cos^5 x dx \dots\dots\dots \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

例 7. 求不定积分

$$(1) \int \frac{1}{x(1+2\ln x)} dx \dots\dots\dots \frac{1}{2} \ln |1+2\ln x| + C$$

$$(2) \int \tan x \, dx \dots\dots\dots -\ln|\cos x| + C$$

$$(3) \int \csc x \, dx \dots\dots\dots \ln|\csc x - \cot x| + C$$

练习 5. 求不定积分

$$(1) \int \cot x \, dx \dots\dots\dots \ln|\sin x| + C$$

$$(2) \int \sec x \, dx \dots\dots\dots \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\text{例 8. 求不定积分 } \int \sin^2 x \, dx \dots\dots\dots \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路: m, n 都是偶数时, 使用 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 降幂.

$$\text{练习 6. 求不定积分 } \int \cos^2 2x \, dx. \dots\dots\dots \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{x}{2} + C.$$

$$\text{例 9. 求 } \int \cos 3x \cos 2x \, dx$$

解. 易知 $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)$, 于是

$$\begin{aligned} \int \cos 3x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 5x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C \end{aligned}$$

形如 $\int \cos mx \cos nx \, dx$ 的求解思路: 使用积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

例 10. 求 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

解. 由条件可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x + \cos x - (\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (x - \ln |\sin x + \cos x|) + C\end{aligned}$$

形如 $\int \frac{a \sin x + b \cos x}{A \sin x + B \cos x} dx$ 的解题思路: 令 $a \sin x + b \cos x = m(A \sin x + B \cos x) + n(A \sin x + B \cos x)'$ 拆项.

5.2.2 第二类换元法

问题. $\int x^5 \sqrt{1-x^2} dx = ?$

解决方法: 改变中间变量的设置方法.

过程: 令 $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$, 于是

$$\begin{aligned}\int x^5 \sqrt{1-x^2} dx &= \int (\sin t)^5 \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \\ &= \int \sin^5 t \cos^2 t dt = \dots\dots\end{aligned}$$

(应用“凑微分”即可求出结果)

定理 1 (第二类换元法). 若 $x = \phi(t)$ 是单调、可导的函数, 而且 $\phi'(t) \neq 0$, 则有

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int f(\phi(t)) d(\phi(t)) \\ &= \left[\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt \right]_{t=\phi^{-1}(x)}\end{aligned}$$

例 11. 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x + 1} dx \dots\dots\dots x - \ln(e^x + 1) + C$

练习 7. 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \dots\dots\dots \arctan(e^x) + C$

常用的变量代换

1. 三角代换
2. 倒代换
3. 简单无理函数代换

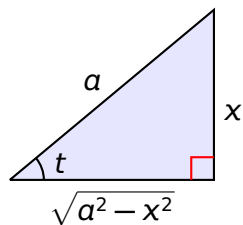
三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$: 令 $x = a \sin t$, $\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow a \cos t$
2. $\sqrt{a^2 + x^2}$: 令 $x = a \tan t$, $\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow a \sec t$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$: 令 $x = a \sec t$, $\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow a \tan t$

例 12. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$.

解. 令 $x = a \sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则

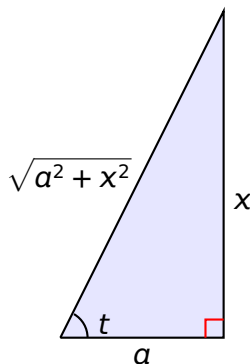
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{1}{a \cos t} \cdot a \cos t dt \\ &= \int 1 dt = t + C \\ &= \arcsin \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$



例 13. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$

解. 设 $x = a \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$, 则

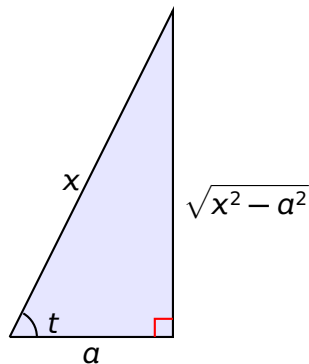
$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + x^2} &= a \sec t, \quad dx = a \sec^2 t dt \\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} &= \int \frac{a \sec^2 t}{a \sec t} dt = \int \sec t dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t| + C_1 \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C_1 \\ &= \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) - \ln a + C_1 \\ &= \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C\end{aligned}$$



例 14. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$

解. 当 $x > 0$ 时, 设 $x = a \sec t \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$, 则

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= a \tan t, \quad dx = a \sec t \tan t dt \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sec t \tan t dt}{a \tan t} = \int \sec t dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t| + C_1 \\ &= \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C_1 \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln a + C_1 \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C\end{aligned}$$



当 $x < 0$ 时, 设 $x = -u$, 那么 $u > 0$, 利用上段结果,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= - \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} \\
 &= -\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C_2 \\
 &= -\ln(-x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C_2 \\
 &= \ln \frac{-x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a^2} + C_2 \\
 &= \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2}) + C_2 - \ln a^2 \\
 &= \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C
 \end{aligned}$$

从而

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

练习 8. 求不定积分

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \dots\dots\dots \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} \dots\dots\dots \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$

注记. 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的, 需要根据被积函数的情况决定.

例 15. 求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx$ (三角代换很繁琐)

解. 令 $t = \sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2 = t^2 - 1$, $x dx = t dt$,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{(t^2-1)^2}{t} t dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt \\
 &= \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C \\
 &= \frac{1}{15}(8 - 4x^2 + 3x^4)\sqrt{1+x^2} + C
 \end{aligned}$$

当分母的阶较高时, 可以采用倒代换 $x = \frac{1}{t}$.

例 16. 求 $\int \frac{1}{x(x^7+2)} dx$

解. 令 $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^7+2)} dx &= \int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7 + 2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{t^6}{1+2t^7} dt \\ &= -\frac{1}{14} \ln |1+2t^7| + C \\ &= -\frac{1}{14} \ln |2+x^7| + \frac{1}{2} \ln |x| + C\end{aligned}$$

例 17. 求 $\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2+1}} dx$. (分母的阶较高)

解. 令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= -\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt^2 \\ &\stackrel{u=t^2}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{u}{\sqrt{1+u}} du = \frac{1}{2} \int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}} du \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}} - \sqrt{1+u} \right) d(1+u) \\ &= -\frac{1}{3} (\sqrt{1+u})^3 + \sqrt{1+u} + C \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C\end{aligned}$$

当被积函数含有两种或两种以上的根式时 $\sqrt[n_1]{x}, \dots, \sqrt[n_k]{x}$ 时, 可令 $x = t^n$ (n 为各根指数的最小公倍数)

例 18. 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx$

解. 令 $x = t^6$ 则 $dx = 6t^5 dt$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx &= \int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)} dt \\ &= \int \frac{6t^2}{1+t^2} dt = 6 \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt \\ &= 6 \left(\int dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt \right) = 6(t - \arctan t) + C \\ &= 6(\sqrt[6]{x} - \arctan(\sqrt[6]{x})) + C\end{aligned}$$

例 19. 求积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$.

解. 令 $t^6 = x+1$, 则 $6t^5 dt = dx$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx &= \int \frac{1}{t^3 + t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + C \\ &= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} \\ &\quad - 6 \ln(\sqrt[6]{x+1} + 1) + C\end{aligned}$$

练习 9. 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}$

答案. $6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + C$

当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, \dots , 可将无法处理的部分设为 t

例 20. 求积分 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$.

解. 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, 则 $\frac{1+x}{x} = t^2$, $x = \frac{1}{t^2-1}$, $dx = -\frac{2t dt}{(t^2-1)^2}$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= -\int (t^2-1) t \frac{2t}{(t^2-1)^2} dt \\ &= -2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-1} \\ &= -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt = -2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln \left| x \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1 \right)^2 \right| + C\end{aligned}$$

例 21. 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$.

解. 令 $t = \sqrt{1+e^x}$, 则 $e^x = t^2 - 1$, $x = \ln(t^2 - 1)$, $dx = \frac{2t}{t^2-1} dt$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx &= \int \frac{2}{t^2-1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2 \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - x + C\end{aligned}$$

当被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$, 可以使用根号内配方法

例 22. 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

解. 易知

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}} dx.$$

令 $x + 1 = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$. 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{1 + \sec t} \sec^2 t dt = \int \frac{1}{\cos t(1 + \cos t)} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1 + \cos t} \right) dt = \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} \right) dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t| - \tan \frac{t}{2} + c \\ &= \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \right| - \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

练习 10. 求不定积分

$$(1) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx \dots\dots\dots 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$$

$$(2) \int \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx \dots\dots\dots \frac{2\sqrt{x-3}(x+6)}{3} + C$$

5.2.3 小结

两类积分换元法:

1. 第一类换元 (凑微分)

$$\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(\phi(x)) d(\phi(x)) = \left[\int f(u) du \right]_{u=\phi(x)}$$

2. 第二类换元

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) d(\phi(t)) = \left[\int f(\phi(t))\phi'(t) dt \right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

(a) 三角代换

(b) 倒代换

(c) 根式代换

$$\int 1 \, dx = x + C \quad (5.2.1)$$

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (5.2.2)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \quad (5.2.3)$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (5.2.4)$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \quad (5.2.5)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad (5.2.6)$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad (5.2.7)$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C \quad (5.2.8)$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C \quad (5.2.9)$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C \quad (5.2.10)$$

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (5.2.11)$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \quad (5.2.12)$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \quad (5.2.13)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (5.2.14)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (5.2.15)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (5.2.16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (5.2.17)$$

5.3 分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

设 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 具有连续导数, 则

$$\int uv' dx = \int u dv = uv - \int v u' dx = uv - \int v du$$

证明. 由 $(uv)' = u'v + uv'$ 可得

$$uv' = (uv)' - u'v$$

故结论成立.

例 1. 求不定积分 $\int x \cos x dx \dots\dots\dots x \sin x + \cos x + C.$

例 2. 求不定积分 $\int x^2 e^x dx \dots\dots\dots x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$

注记. 若被积函数是幂函数和正 (余) 弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 就考虑设幂函数为 u , 使其降幂一次 (假定幂指数是正整数)

练习 1. 求不定积分:

$$(1) \int x^2 \cos x \, dx \dots\dots\dots (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x) + C$$

$$(2) \int x e^{2x} \, dx \dots\dots\dots \frac{e^{2x}(2x - 1)}{4} + C.$$

$$\text{例 3. 求不定积分 } \int \ln x \, dx \dots\dots\dots x \ln x - x + C.$$

$$\text{例 4. 求不定积分 } \int x \arctan x \, dx$$

$$\dots\dots\dots \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

注记. 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积, 就考虑设对数函数或反三角函数为 u .

练习 2. 求不定积分:

$$(1) \int x \ln x \, dx \dots\dots\dots \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$(2) \int \arcsin x \, dx \dots\dots\dots x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\text{例 5. 求积分 } \int e^x \sin x \, dx.$$

解. 由分部积分可得

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= \int \sin x \, d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x \, d(\sin x) \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ &= e^x \sin x - \int \cos x \, d(e^x) \\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \, d \cos x \right) \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

$$\text{例 6. 已知 } f(x) \text{ 的一个原函数是 } e^{-x^2}, \text{ 求 } \int x f'(x) \, dx.$$

解. 由分部积分得

$$\int x f'(x) dx = \int x d[f(x)] = x f(x) - \int f(x) dx.$$

因为 $(\int f(x) dx)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x) dx = e^{-x^2} + C$$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2}$, 所以

$$\int x f'(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx = -2x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

例 7. 求不定积分 $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$.

解. 由分部积分得

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x d\left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\right) \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1} \end{aligned}$$

于是 $I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$, 即

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} I_{n-1}.$$

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 dv :

- $\int x e^x dx = \int x d(e^x)$
- $\int x \cos x dx = \int x d(\sin x)$
- $\int x \ln x dx = \int \ln x d(\frac{1}{2}x^2)$

$$\bullet \int x \arctan x \, dx = \int \arctan x \, d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

5.4 有理分式的积分

定义 1. 如果 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式, 则称 $f(x)$ 为有理函数 (分式).

- 如果 $P(x)$ 次数 $< Q(x)$ 次数, 则称它为真分式;
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq Q(x)$ 次数, 则称它为假分式.

定理 1. 假分式 = 多项式 + 真分式

理论上, 任何一个有理分式 (真分式) 都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{dx}{x+a} &= \ln|x+a| + C \\ 2. \int \frac{dx}{(x+a)^n} &= \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C \\ 3. \int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

理论上, 任何一个有有理分式 (真分式) 的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

$$\begin{aligned} 4. \int \frac{x \, dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C \\ 5. \int \frac{x \, dx}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + C (n \geq 2) \\ 6. \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} (n \geq 2) &\text{ 可以用递推法求出} \end{aligned}$$

定理 2. 设多项式 $Q(x)$ 不为常数, 则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 3. 假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式, 则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}} + \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式, 等式右边也可以都取为真分式.

1. 分母中若有因式 $(x+a)^k$ 时, 则分解后为

$$\frac{A_1}{(x+a)^k} + \frac{A_2}{(x+a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{x+a}$$

其中 A_1, A_2, \dots, A_k 都是常数.

特别地: $k=1$ 时, 分解后为 $\frac{A}{x+a}$.

2. 分母中若有因式 $(x^2+px+q)^k$, 其中 $p^2-4q < 0$, 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \cdots + \frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中 M_i, N_i 都是常数 ($i=1, 2, \dots, k$).

特别地: $k=1$ 时, 分解后为 $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

于是, 将有理函数转化为部分分式之和后, 只会出现三种情况:

1. 多项式

2. $\frac{A}{(x+a)^n}$

3. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

前两种情况的不定积分都比较容易求出, 因此只讨论最后一种情况.

讨论不定积分 $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$

易知 $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$, 令 $x+\frac{p}{2} = t$,

$$x^2+px+q = t^2 + a^2, \quad Mx+N = Mt+b,$$

其中 $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, $b = N - \frac{Mp}{2}$.

于是

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{Mt}{(t^2 + a^2)^n} dt + \int \frac{b}{(t^2 + a^2)^n} dt.$$

注记. 有理函数都可积, 且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合.

例 1. 求 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx$.

解. 令 $\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$. 而

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B=3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-5, \\ b=6, \end{cases} \quad \text{于是}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx &= \int \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3} \right) dx \\ &= -5 \ln|x-2| + 6 \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

例 2. 求 $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

解. 令 $\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$. 右端通分得

$$\frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2A-B+C=0, \\ A=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=1 \end{cases} \quad \text{故}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x-1)^2} &= \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.\end{aligned}$$

例 3. 求 $\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$

解. 令 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$. 右边通分得

$$\frac{(A+2B)x^2 + (B+2C)x + (A+C)}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

比较分子系数得

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{4}{5}, \\ B=-\frac{2}{5}, \\ C=\frac{1}{5}, \end{cases} \quad \text{故}$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{4}{5} \int \frac{dx}{1+2x} - \frac{2}{5} \int \frac{x dx}{1+x^2} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln(1+x^2) + \frac{1}{5} \arctan x + C.\end{aligned}$$

练习 1. 求不定积分

(1) $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5} dx$

(2) $\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)} dx$

答案. (1) $2 \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ (2) $\ln|x+1| + 2 \arctan x + C$

注记. 初等函数的原函数未必都是初等函数. 可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”, 比如

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \sqrt{1+x^4} dx.$$