目录

第五章　不定积分

5.1　不定积分的概念与性质

5.1.1　原函数与不定积分的概念

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=\mathrm{e}^x$
- $(?)'=\sin x$
- $(?)'=\ln x$

定义. 若定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 及可导函数 $F(x)$ 满足关系: 对任一 $x\in I$, 都有

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例 **1.** 因 $(\sin x)'=\cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

例 **2.** $(x^2)'=2x$, 而且 $(x^2+2)'=2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

注记**.** 关于原函数，需要注意以下两点：

1. 原函数不止一个

$$F'(x)=f(x)\Longrightarrow (F(x)+C)'=f(x)$$

2. 同一个函数的任意两个原函数之间最多相差一个常数 C.

$$F'(x)=G'(x)=f(x)\Longrightarrow G(x)=F(x)+C$$

定理 (原函数存在定理)**.** 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x\in I$, 都有

$$F'(x)=f(x)$$

简单地说, 连续函数一定有原函数.

注记. 初等函数的原函数不一定还是初等函数.

定义. 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数, 称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

在上面定义中, 我们称 $\int$ 为积分号, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式, x 为积分变量.

$$\boxed{F'(x)=f(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C}$$

例 **3.** 求函数 $f(x)=3x^2$ 的不定积分. .... x^3+C.

例 **4.** 求函数 $f(x)=\sin x$ 的不定积分. .... $-\cos x+C$.

练习 **1.** 求不定积分.

(1) $\int x\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{x^2}{2}+C$.

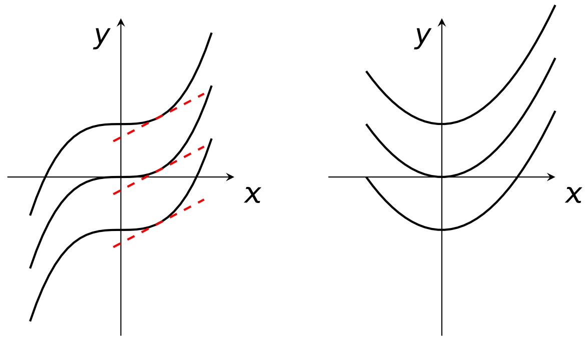
(2) $\int x^2\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{x^3}{3}+C$.

(3) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$.

例 **5.** 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分. .... $\ln|x|+C$.

例 **6.** 求过点 $(1,3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

答案. $y=x^2+2$.



(a) $y = x^3 + C$ (b) $y = x^2 + C$

5.1.2 不定积分的几何意义

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线. 显然，求不定积分得到族积分曲线 (称为曲线族), 在同一横坐标 $x = x_0$ 处, 任一曲线的切线有相同的斜率.

5.1.3 不定积分的性质

性质 **1.** 导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$
2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \mathrm{d}\left(F(x)\right) = F(x) + C$

性质 **2.** 非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 **3.** 两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

注：上述法则可以推广至有限多个函数的线性组合.

5.1.4 基本积分表

积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式.

例如，由

$$(x^{a+1})' = (a+1)x^a$$

可得

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C.$$

类似地，我们有如下基本积分公式.

1. $\int 1 \,\mathrm{d}x = x + C$
2. $\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
3. $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

例 **7.** 求不定积分

(1) $\int (2x + 5x^2 + 7x^3) \,\mathrm{d}x$ .... $x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C$

(2) $\int (2 - \sqrt{x}) \,\mathrm{d}x$ .... $2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(3) $\int (2x+1)^2 \,\mathrm{d}x$ .... $\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

练习 **2.** 求不定积分

(1) $\int (1 - 2x^2) \,\mathrm{d}x$ .... $x - \frac{2}{3}x^3 + C.$

(2) $\int (\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})\,\mathrm{d}x$ …… $\frac{1}{4}x^2+2\ln|x|-\frac{3}{x}+C.$

(3) $\int (\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$ …… $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+C.$

练习 **3.** 求不定积分

(1) $\int \sqrt{x}(x-3)\,\mathrm{d}x$ …… $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+C.$

(2) $\int \frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$ …… $\frac{1}{2}x^2+2x+\ln|x|+C.$

4. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

5. $\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$

例 **8.** 求不定积分：

(1) $\int (4\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}})\,\mathrm{d}x$ …… $4\mathrm{e}^x-\frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+C.$

(2) $\int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$ …… $\mathrm{e}^x+x+C.$

练习 **4.** 求不定积分：

(1) $\int (x^2+2^x)\,\mathrm{d}x$ …… $\frac{x^3}{3}+\frac{2^x}{\ln 2}+C.$

6. $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$

7. $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$

8. $\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x=\tan x+C$

9. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

例 **9.** 求不定积分

(1) $\int (\sin x + 2\cos x) \, dx$ .... $-\sin x + 2\sin x + C.$

(2) $\int \tan^2 x \, dx$ .... $= \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + C.$

练习 **5.** 求不定积分

(1) $\int \cot^2 x \, dx$ .... $-\cot x - x + C.$

(2) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} \, dx$ .... $\sin x + \cos x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

例 **10.** 求不定积分：

(1) $\int \frac{x^4}{x^2+1} \, dx$ .... $\frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$

(2) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} \, dx$ .... $-\frac{1}{x} - \arctan x + C.$

练习 **6.** 求不定积分：

(1) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$ .... $x - \arctan x + C.$

12. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

13. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

5.1.5　小结

本节主要内容：

1. 原函数的概念：$F'(X) = f(x)$;
2. 不定积分的概念：$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$;
3. 求微分与求不定积分的互逆关系
4. 基本积分公式

复习 **1.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int (\sin x - 2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ .... $-\cos x - 2\mathrm{e}^x + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{(2x+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$ .... $2x^2 + 12x + 9\ln|x| + C.$

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ .... $x - 2\arctan x + C.$

5.2　换元积分法

5.2.1　第一类换元法

例 **1.** 求不定积分 $\displaystyle\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x.$

解法**.** 设置中间变量，并利用复合函数求导法则.

解**.** 令 $u = 2x+1$, 则 $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}u$, 于是

$$\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x = \int u^{10}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{22}u^{11} + C = \frac{1}{22}(2x+1)^{11} + C.$$

一般地，设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, 即

$$F'(u) = f(u), \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C.$$

如果 $u = \phi(x)$ 可微, 则由链式法则，有

$$\mathrm{d}F(\phi(x)) = F'(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\phi(x)) + C = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}.$$

定理 (第一类换元法)**.** 设 $f(u)$ 具有原函数, $\phi(x)$ 可导，则有

$$\begin{aligned}\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) \\ &= \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}\end{aligned}$$

注记. 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 化为} \int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

第一类换元法也称为凑微分法.

1. $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}\mathrm{d}\left(a^x\right)(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1);$

6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$

7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$

8. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$

9. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$

10. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x) = -\mathrm{d}(\arccos x)$

11. $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x) = -\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x)$

例 **2.** 求不定积分 $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

解 (解法 1)**.** $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}(2x)$
令 $u = 2x$, 则上式等于

$$\frac{1}{2}\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

解 (解法 2)**.** $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = 2\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = 2\int \sin x\,\mathrm{d}\sin x$
令 $u = \sin x$, 则上式等于

$$2\int u\,\mathrm{d}u = u^2 + C = (\sin x)^2 + C.$$

解 (解法 3)**.** 由二倍角公式易知

$$\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = 2\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = -2\int \cos x\,\mathrm{d}\cos x$$

令 $u = \cos x$, 则上式等于

$$-2\int u\,\mathrm{d}u = -u^2 + C = -(\cos x)^2 + C$$

....

注记**.** 观察点不同，所得结论不同.

例 **3.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+1}$ …… $\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)\,dx$ …… $\dfrac{1}{3}\cos(3x+4)+C$

练习 **1.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$ …… $-\dfrac{1}{4}(4x+5)^{-1}+C$

(2) $\displaystyle\int e^{-3x+2}\,dx$ …… $-\dfrac{1}{3}e^{-3x+1}+C$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{3x-1}\,dx$ …… $\dfrac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$

例 **4.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ …… $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ …… $-e^{1/x}+C$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$ …… $\dfrac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}}+C$

练习 **2.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^9\,dx$ …… $\dfrac{1}{30}(x^3+1)^{10}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$ …… $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3)+C$

例 **5.** 求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$ ...... $\displaystyle\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,dx$ ...... $\displaystyle\frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx$ ...... $\displaystyle\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

练习 **3.** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$（$a>0$）...... $\displaystyle\arcsin\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$ ...... $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

例 **6.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx$ ...... $\displaystyle\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$ ...... $\displaystyle\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

形如 $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ 的解题思路：m,n 有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分.

练习 **4.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cos^6 x\sin x\,dx$ ...... $\displaystyle-\frac{1}{7}\cos^7 x+C$

(2) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ ...... $\displaystyle\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

例 **7.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,dx$ ...... $\displaystyle\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\int \tan x \, dx$ ……………… $-\ln|\cos x| + C$

(3) $\int \csc x \, dx$ ……………… $\ln|\csc x - \cot x| + C$

练习 **5.** 求不定积分

(1) $\int \cot x \, dx$ ……………… $\ln|\sin x| + C$

(2) $\int \sec x \, dx$ ……………… $\ln|\sec x + \tan x| + C$

例 **8.** 求不定积分 $\int \sin^2 x \, dx$ ……………… $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路：m, n 都是偶数时，使用 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 降幂.

练习 **6.** 求不定积分 $\int \cos^2 2x \, dx$. ……………… $-\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{x}{2} + C$.

例 **9.** 求 $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$

解. 易知 $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)$ 于是

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx \\ &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C\end{aligned}$$

形如 $\int \cos mx \cos nx \, dx$ 的求解思路：使用积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

例 **10.** 求 $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

解. 由条件可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x-\int \frac{(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C\end{aligned}$$

形如 $\int \frac{a\sin x+b\cos x}{A\sin x+B\cos x}\,\mathrm{d}x$ 的解题思路: 令 $a\sin x+b\cos x=m(A\sin x+B\cos x)+n(A\sin x+B\cos x)'$ 拆项.

5.2.2 第二类换元法

问题. $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=?$

解决方法： 改变中间变量的设置方法.

过程： 令 $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int (\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= \int \sin^5 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\cdots\cdots\end{aligned}$$

(应用“凑微分”即可求出结果)

定理 **1** (第二类换元法). 若 $x=\phi(t)$ 是单调、可导的函数，而且 $\phi'(t)\neq 0$，则有

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t))\\ &= \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}\end{aligned}$$

例 **11.** 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ .... $x-\ln(e^x+1)+C$

练习 **7.** 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ .... $\arctan(e^x) + C$

常用的变量代换

1. 三角代换
2. 倒代换
3. 简单无理函数代换

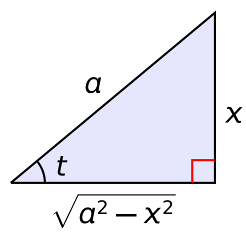
三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$　令 $x = a\sin t$, $\sqrt{a^2 - x^2} \Longrightarrow a\cos t$
2. $\sqrt{a^2 + x^2}$　令 $x = a\tan t$, $\sqrt{a^2 + x^2} \Longrightarrow a\sec t$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$　令 $x = a\sec t$, $\sqrt{x^2 - a^2} \Longrightarrow a\tan t$

例 **12.** 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$.

解**.** 令 $x = a\sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{1}{a\cos t} \cdot a\cos t\, dt \\ &= \int 1\, dt = t + C \\ &= \arcsin\frac{x}{a} + C\end{aligned}$$

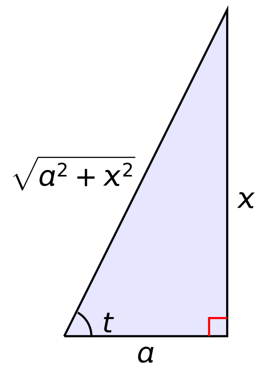


例 **13.** 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$

解. 设 $x = a\tan t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t,\ \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t\\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C_1\\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1\\ &= \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C_1\\ &= \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C\end{aligned}$$

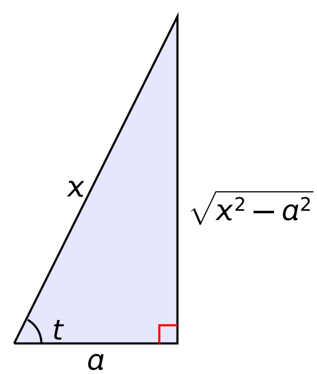


例 **14.** 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$

解. 当 $x > 0$ 时, 设 $x = a\sec t\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t,\quad \mathrm{d}x = a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \int \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\tan t} = \int \sec t\,\mathrm{d}t\\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C_1\\ &= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1\\ &= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C_1\\ &= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C_2\end{aligned}$$



当 $x<0$ 时, 设 $x=-u$, 那么 $u>0$, 利用上段结果,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}} \\ &= -\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)+C_2 \\ &= -\ln\left(-x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2 \\ &= \ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+C_2 \\ &= \ln\left(-x-\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2-\ln a^2 \\ &= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\end{aligned}$$

从而

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

练习 **8.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ ………………………………………… $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ ………………………………………… $\displaystyle\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

注记**.** 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的，需要根据被积函数的情况决定.

例 **15.** 求 $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ （三角代换很繁琐）

解**.** 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2=t^2-1$, $x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t = \int \left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C \\ &= \frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C\end{aligned}$$

当分母的阶较高时，可以采用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

例 **16.** 求 $\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x$

解. 令 $x=\frac{1}{t} \Longrightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int \frac{t^6}{1+2t^7}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^7\right|+C \\ &= -\frac{1}{14}\ln\left|2+x^7\right|+\frac{1}{2}\ln|x|+C\end{aligned}$$

例 **17.** 求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$. (分母的阶较高)

解. 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d} \\ &= -\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t^2 \\ &\xlongequal{u=t^2} -\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u) \\ &= -\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3+\sqrt{1+u}+C \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C\end{aligned}$$

当被积函数含有两种或两种以上的根式时 $\sqrt[k]{x},\ldots,\sqrt[l]{x}$ 时，可令 $x=t^n$（n 为各根指数的最小公倍数）

例 **18.** 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$

解. 令 $x=t^6$ 则 $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\&=\int\frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=6\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\&=6\left(\int\mathrm{d}t-\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)=6(t-\arctan t)+C\\&=6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan(\sqrt[6]{x})\right)+C\end{aligned}$$

例 **19.** 求积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

解. 令 $t^6=x+1$，则 $6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{t^3+t^2}\cdot6t^5\,\mathrm{d}t&=6\int\frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t\\&=2t^3-3t^2+6t+6\ln|t+1|+C\\&=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}\\&\quad+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C\end{aligned}$$

练习 **9.** 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

答案. $6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+C$

当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\ldots\ldots$, 可将无法处理的部分设为 t

例 **20.** 求积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解. 令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$, 则 $\dfrac{1+x}{x}=t^2$, $x=\dfrac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$. 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x &= -\int \left(t^2-1\right) t\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} \\
&= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = -2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C \\
&= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C
\end{aligned}
$$

例 **21.** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x.$

解. 令 $t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, 则 $\mathrm{e}^x=t^2-1$, $x=\ln\left(t^2-1\right)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$ 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = 2\ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1\right)-x+C
\end{aligned}
$$

当被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$, 可以使用根号内配方法

例 **22.** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

解. 易知

$$
\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x.
$$

令 $x+1=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$. 于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{1+\sec t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t(1+\cos t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t+\tan t| - \tan\frac{t}{2} + c \\
&= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| - \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} + C.
\end{aligned}
$$

练习 **10.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ .... $2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$ .... $\displaystyle\frac{2\sqrt{x-3}(x+6)}{3}+C$

5.2.3　小结

两类积分换元法：

1. 第一类换元（凑微分）
$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$
2. 第二类换元
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t)) = \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$
   (a) 三角代换
   (b) 倒代换
   (c) 根式代换

$$\int 1 \,\mathrm{d}x = x + C \tag{5.2.1}$$

$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \tag{5.2.2}$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \tag{5.2.3}$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{5.2.4}$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C \tag{5.2.5}$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C \tag{5.2.6}$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C \tag{5.2.7}$$

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C \tag{5.2.8}$$

$$\int \cot x \,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C \tag{5.2.9}$$

$$\int \sec x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{5.2.10}$$

$$\int \csc x \,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{5.2.11}$$

$$\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C \tag{5.2.12}$$

$$\int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C \tag{5.2.13}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \tag{5.2.14}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \tag{5.2.15}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \tag{5.2.16}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C \tag{5.2.17}$$

5.3　分部积分法

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 具有连续导数，则

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

证明. 由 $(uv)'=u'v+uv'$ 可得

$$uv' = (uv)' - u'v$$

故结论成立.

例 **1.** 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ .... $x\sin x+\cos x+C.$

例 **2.** 求不定积分 $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ .... $x^2\mathrm{e}^x-2(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)+C.$

注记**.** 若被积函数是幂函数和正 *(余)* 弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 就考虑设幂函数为 u, 使其降幂一次 *(假定幂指数是正整数)*

练习 **1.** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ .... $(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)+C$

(2) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{4}+C.$

例 **3.** 求不定积分 $\int \ln x\,\mathrm{d}x$ .... $x\ln x-x+C.$

例 **4.** 求不定积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

.... $\dfrac{x^2}{2}\arctan x-\dfrac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$

注记**.** 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

练习 **2.** 求不定积分：

(1) $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

(2) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$ .... $x\arcsin x+\sqrt{(1-x^2)}+C$

例 **5.** 求积分 $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x.$

解**.** 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x\sin x\ \mathrm{d}x &= \int \sin x\ \mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\sin x-\int \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}(\sin x)\\ &= \mathrm{e}^x\sin x-\int \mathrm{e}^x\cos x\ \mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^x\sin x-\int \cos x\ \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\\ &= \mathrm{e}^x\sin x-\left(\mathrm{e}^x\cos x-\int \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}\cos x\right)\\ &= \mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)-\int \mathrm{e}^x\sin x\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此 $\int \mathrm{e}^x\sin x\ \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$

例 **6.** 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x.$

解. 由分部积分得

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x = \int x\ \mathrm{d}[f(x)] = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x^2} + C$$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, 所以

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x = -2x^2\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

例 **7.** 求不定积分 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$.

解. 由分部积分得

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right) \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \end{aligned}$$

于是 $I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$，即

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}I_{n-1}.$$

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad = \int x\,\mathrm{d}\,(\mathrm{e}^x)$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x \quad = \int x\,\mathrm{d}\,(\sin x)$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x \quad = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

5.4 有理分式的积分

定义 **1.** 如果 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理函数 *(*分式*)*.

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式；
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq$ $Q(x)$ 次数，则称它为假分式.

定理 **1.** 假分式 = 多项式 + 真分式

理论上，任何一个有理分式 (真分式) 都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a|+C$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}}+C$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

理论上，任何一个有有理分式 (真分式) 的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

4. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$
5. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}}+C(n\geq 2)$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}(n\geq 2)$ 可以用递推法求出

定理 **2.** 设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x)=Q_1(x)^{m_1}Q_2(x)^{m_2}\cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 3. 假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}}\cdots+\frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式.

1. 分母中若有因式 $(x-a)^k$ 时，则分解后为
$$\frac{A_1}{(x+a)^k}+\frac{A_2}{(x+a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x+a}$$
其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都是常数.
特别地: $k=1$, 时，分解后为 $\dfrac{A}{x+a}$.
2. 分母中若有因式 $\left(x^2+px+q\right)^k$, 其中 $p^2-4q<0$, 则分解后为
$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$
其中 M_i,N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.
特别地: $k=1$, 分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

于是，将有理函数转化为部分分式之和后，只会出现三种情况：

1. 多项式
2. $\dfrac{A}{(x+a)^n}$
3. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

前两种情况的不定积分都比较容易求出，因此只讨论最后一种情况.

讨论不定积分 $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

易知 $x^2+px+q=(x+\dfrac{p}{2})^2+q-\dfrac{p^2}{4}$, 令 $x+\dfrac{p}{2}=t$,

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\ Mx+N=Mt+b,$$

其中 $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$, $b=N-\dfrac{Mp}{2}$.

于是

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=\int\frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t+\int\frac{b}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

注记**.** 有理函数都可积，且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合.

例 **1.** 求 $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

解**.** 令 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$. 而

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases}A+B=1,\\-3A-2B=3,\end{cases}\implies\begin{cases}A=-5,\\b=6,\end{cases}\quad\text{于是}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x\\&=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.\end{aligned}$$

例 **2.** 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$.

解**.** 令 $\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$. 右端通分得

$$\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases}A+B=0,\\-2A-B+C=0,\\A=1,\end{cases}\implies\begin{cases}A=1,\\B=-1,\\C=1\end{cases}\quad\text{故}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] \mathrm{d}x$$
$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

例 **3.** 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$

解**.** 令 $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \dfrac{A}{1+2x} + \dfrac{Bx+C}{1+x^2}$. 右边通分得

$$\frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+(A+C)}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

比较分子系数得

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \implies \begin{cases} A=\frac{4}{5}, \\ B=-\frac{2}{5}, \\ C=\frac{1}{5}, \end{cases} \quad \text{故}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+2x} - \frac{2}{5}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{5}\arctan x + C. \end{aligned}$$

练习 **1.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

答案**.** *(1)* $2\ln(x^2+2x+5) - \dfrac{1}{2}\arctan(\dfrac{x+1}{2}) + C$　　*(2)* $\ln|x+1| + 2\arctan x + C$

注记. 初等函数的原函数未必都是初等函数．可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”，比如

$$\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$