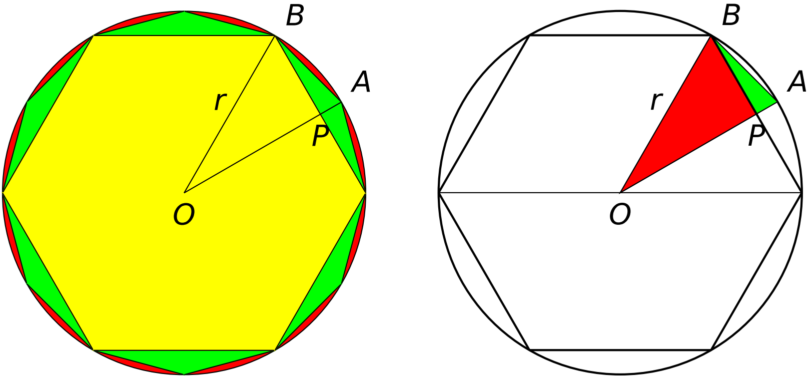
高等数学 B--微积分 (一)

第二章 · 极限与连续

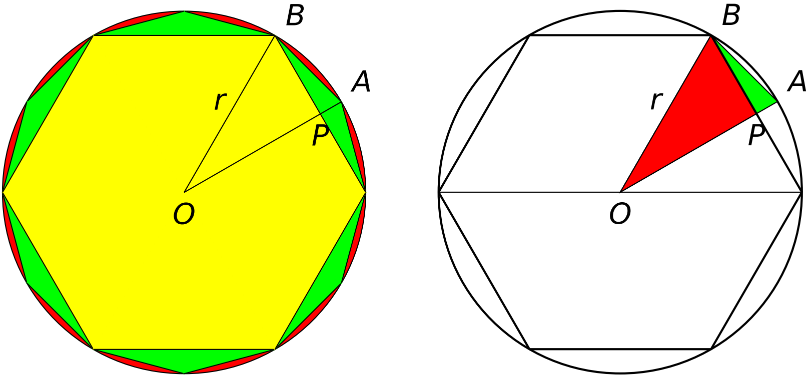
2021 年 9 月 16 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

刘辉割圆术



记内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边型的面积为 A_n, 则 $n\to\infty$ 时，正多边形的面积和圆的面积之差可以任意小.



记内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边型的面积为 A_n, 则 $n \to \infty$ 时，正多边形的面积和圆的面积之差可以任意小.

截杖问题

“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”

---《庄子 · 天下篇》

第一天截下的木棒长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的木棒长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

$$\cdots$$

第 n 天截下的木棒长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1.$$

"一尺之棰，日取其半，万世不竭."

---《庄子 · 天下篇》

第一天截下的木棒长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的木棒长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

$$\cdots$$

第 n 天截下的木棒长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1.$$

"一尺之棰，日取其半，万世不竭."

---《庄子·天下篇》

第一天截下的木棒长为 $X_1 = \dfrac{1}{2}$;

第二天截下的木棒长总和为 $X_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2}$;

$$\cdots$$

第 n 天截下的木棒长总和为 $X_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1.$$

"一尺之棰，日取其半，万世不竭."

---《庄子 · 天下篇》

第一天截下的木棒长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的木棒长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

$$\cdots$$

第 n 天截下的木棒长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1.$$

截杖问题

“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”

---《庄子 · 天下篇》

第一天截下的木棒长为 $X_1 = \dfrac{1}{2}$;

第二天截下的木棒长总和为 $X_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2}$;

$$\cdots$$

第 n 天截下的木棒长总和为 $X_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1.$$

定义 1　以正整数集 N^+ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \cdots,$ $f(n), \cdots$ 排列的一列数称为**数列**, 通常用 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示, 其中 $x_n = f(n)$, x_n 称为**通项**或**一般项**.

例子　$x_n = \dfrac{1}{2^n}$　　$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots$

例子　$x_n = \dfrac{n}{n+1}$　　$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots$

例子　$x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$　　$-\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$

定义 1 以正整数集 N^+ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$ 排列的一列数称为**数列**, 通常用 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示, 其中 $x_n = f(n)$, x_n 称为**通项**或**一般项**.

例子 $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\qquad \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots$

例子 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots$

例子 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$

定义 1 以正整数集 N^+ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \cdots,$ $f(n), \cdots$ 排列的一列数称为**数列**, 通常用 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示, 其中 $x_n = f(n)$, x_n 称为**通项**或**一般项**.

例子 $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\qquad \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots$

例子 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots$

例子 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$

定义 1 以正整数集 N^+ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$ 排列的一列数称为**数列**, 通常用 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示, 其中 $x_n = f(n)$, x_n 称为**通项**或**一般项**.

例子 $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\qquad \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots$

例子 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots$

例子 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$

定义 2 对数列 x_n, 若存在正数 M, 使得一切正整数 n, 恒有 $|x_n| \le M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则，称为无界.

例子 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ································ 有界.

例子 $x_n = 2^n$ ································ 无界.

注记 数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

定义 2 对数列 x_n, 若存在正数 M, 使得一切正整数 n, 恒有 $|x_n| \le M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则，称为无界.

例子 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 有界.

例子 $x_n = 2^n$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 无界.

注记 数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

定义 2 对数列 x_n, 若存在正数 M, 使得一切正整数 n, 恒有 $|x_n| \leq M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则，称为无界.

例子 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ……………………………… 有界.

例子 $x_n = 2^n$ ……………………………… 无界.

注记 数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

定义 2　对数列 x_n, 若存在正数 M, 使得一切正整数 n, 恒有 $|x_n| \le M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则，称为无界.

例子　$x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ································有界.

例子　$x_n = 2^n$ ································无界.

注记　数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

定义 2　对数列 x_n, 若存在正数 M, 使得一切正整数 n, 恒有 $|x_n| \le M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则，称为无界.

例子　$x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ………………………………有界.

例子　$x_n = 2^n$ ………………………………无界.

注记　数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

定义 2 对数列 x_n, 若存在正数 M, 使得一切正整数 n, 恒有 $|x_n| \leq M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则，称为无界.

例子 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ································ 有界.

例子 $x_n = 2^n$ ································ 无界.

注记 数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

有界性

若存在实数 A, 对一切 n 都满足 $x_n \geq A$, 称 $\{x_n\}$ 为下有界，A 是 $\{x_n\}$ 的下界;

同样, 若存在 B, 对一切 n 都满足 $x_n \leq B$, 称 $\{x_n\}$ 为上有界，B 是 $\{x_n\}$ 的上界.

单调性

若数列 $\{x_n\}$ 满足:

1. $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, 称数列 $\{x_n\}$ 为单调增数列;
2. $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为 单调减数列.

单调增数列和单调减数列统称为单调数列.

定义 3　将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下，任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列.

例子　$x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}, \ldots$

例子　$x_2, x_4, x_6 \ldots, x_{2n}, \ldots$

例子　$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}, \ldots$

注记　在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项，而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项，显然，$n_k \geq k$.

定义 3　将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下，任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列.

例子　$x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}, \ldots$

例子　$x_2, x_4, x_6 \ldots, x_{2n}, \ldots$

例子　$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}, \ldots$

注记　在子数列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项，而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项，显然，$n_k \geq k$.

子数列

定义 3 将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下，任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列.

例子 $x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}, \ldots$

例子 $x_2, x_4, x_6 \ldots, x_{2n}, \ldots$

例子 $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}, \ldots$

注记 在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项，而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项，显然，$n_k \geq k$.

定义 3　将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下，任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列.

例子　$x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}, \ldots$

例子　$x_2, x_4, x_6 \ldots, x_{2n}, \ldots$

例子　$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}, \ldots$

注记　在子数列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项, 而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项，显然, $n_k \geq k$.

问题 随着 n 的增大，x_n 也跟着变化．当 n 趋于无穷大时，x_n 是否会无限接近一个确定的数？

1. $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \longrightarrow 3$
2. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\qquad \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$
3. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$
4. $x_n = 2^n$ $\qquad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots \times$
5. $x_n = (-1)^n$ $\qquad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots \times$

问题　随着 n 的增大，x_n 也跟着变化．当 n 趋于无穷大时，x_n 是否会无限接近一个确定的数？

1. $x_n = 3$　　$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \longrightarrow 3$
2. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$　　$\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$
3. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$　　$-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$
4. $x_n = 2^n$　　$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$ ×
5. $x_n = (-1)^n$　　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$ ×

问题　随着 n 的增大，x_n 也跟着变化．当 n 趋于无穷大时，x_n 是否会无限接近一个确定的数？

1. $x_n = 3$　　$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \longrightarrow 3$
2. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$　　$\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$
3. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$　　$-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$
4. $x_n = 2^n$　　$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots \times$
5. $x_n = (-1)^n$　　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots \times$

问题　随着 n 的增大，x_n 也跟着变化．当 n 趋于无穷大时，x_n 是否会无限接近一个确定的数？

1. $x_n = 3$　　$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \longrightarrow 3$
2. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$　　$\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$
3. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$　　$-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$
4. $x_n = 2^n$　　$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots \times$
5. $x_n = (-1)^n$　　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots \times$

问题　随着 n 的增大，x_n 也跟着变化．当 n 趋于无穷大时，x_n 是否会无限接近一个确定的数？

1. $x_n = 3$　　$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \longrightarrow 3$
2. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$　　$\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$
3. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$　　$-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$
4. $x_n = 2^n$　　$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$ ×
5. $x_n = (-1)^n$　　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$ ×

定义 4 设 $\{x_n\}$ 为一个数列, 如果存在常数 A, 对任何 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的**极限**等于 A，或者称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A \ (n \to \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

注记 1. 不等式 $|x_n - A| < \epsilon$ 刻划了 x_n 与 A 的无限接近;

2. 一般情况下，N 与任意给定的正数 ϵ 有关.

定义 4 设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在正整数 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的**极限**等于 A，或者称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A\ (n \to \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

注记 1. 不等式 $|x_n - A| < \epsilon$ 刻划了 x_n 与 A 的无限接近;

2. 一般情况下，N 与任意给定的正数 ϵ 有关.

定义 4 设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在正整数 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的**极限**等于 A，或者称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A \ (n \to \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

注记 1. 不等式 $|x_n - A| < \epsilon$ 刻划了 x_n 与 A 的无限接近;

2. 一般情况下，N 与任意给定的正数 ϵ 有关.

定义 4　设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在正整数 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A\ (n \to \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

注记　1. 不等式 $|x_n - A| < \epsilon$ 刻划了 x_n 与 A 的无限接近;

2. 一般情况下，N 与任意给定的正数 ϵ 有关.

为了表达方便，引入符号

- $\forall$ ································ 任意 (给定) 的.
- $\exists$ ································ 至少有一个或存在.

使用 $\epsilon - N$ 语言，$\lim_{n\to\infty} x_n = A$ 可以表示为：

$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$.

注记 数列极限的定义未给出求极限的方法.

为了表达方便，引入符号

- $\forall$ ································· 任意 (给定) 的.
- $\exists$ ································· 至少有一个或存在.

使用 $\epsilon - N$ 语言，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 可以表示为:

$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$.

注记　数列极限的定义未给出求极限的方法.

为了表达方便，引入符号

- $\forall$ ....任意 (给定) 的.
- $\exists$ ....至少有一个或存在.

使用 $\epsilon - N$ 语言，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 可以表示为：

$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$.

注记　数列极限的定义未给出求极限的方法.

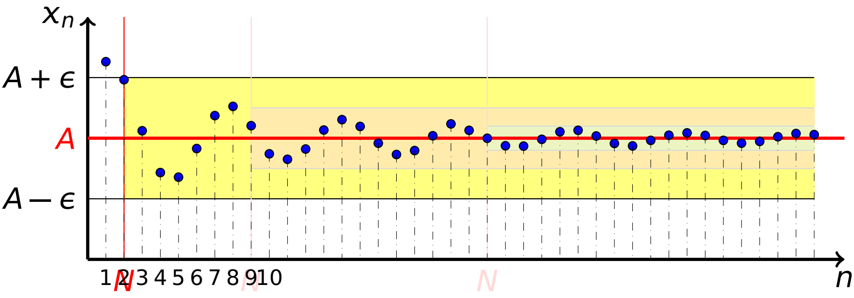
为了表达方便，引入符号

- $\forall$ ································· 任意 (给定) 的.
- $\exists$ ································· 至少有一个或存在.

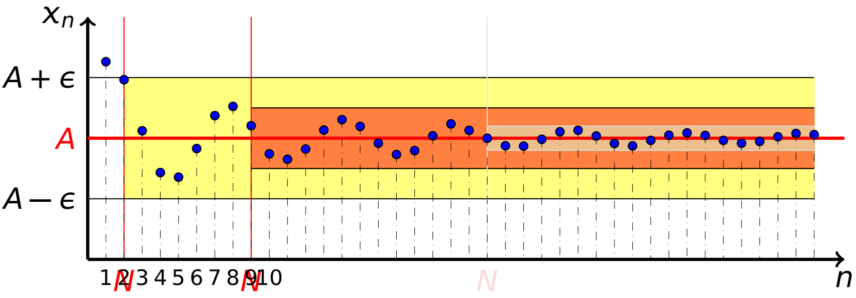
使用 $\epsilon - N$ 语言，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 可以表示为：

$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$.

注记　数列极限的定义未给出求极限的方法.

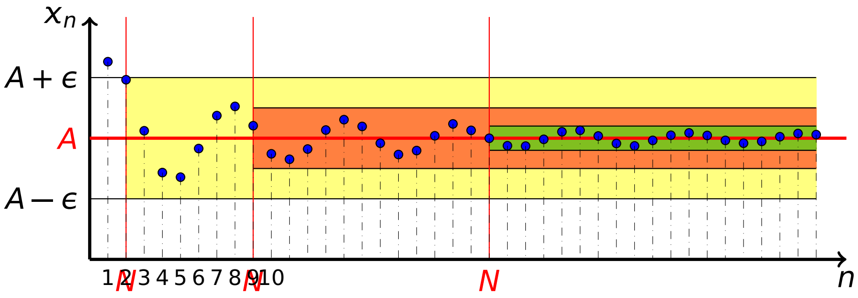


当 $n > N$ 时，所有的点 x_n 都落在 $(A-\epsilon, A+\epsilon)$ 内，只有有限个 (至多只有 N 个) 落在其外.



当 $n>N$ 时，所有的点 x_n 都落在 $(A-\epsilon, A+\epsilon)$ 内，只有有限个 (至多只有 N 个) 落在其外.

数列极限的几何解释



当 $n > N$ 时，所有的点 x_n 都落在 $(A-\epsilon, A+\epsilon)$ 内，只有有限个 (至多只有 N 个) 落在其外.

数列极限的基本公式

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$,（$k>0$）
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^k} = 0$,（$k>0$）
4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,（$|q|<1$）

数列极限的基本公式

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$,（$k > 0$）
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^k} = 0$,（$k > 0$）
4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,（$|q| < 1$）

数列极限的基本公式

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，（$|q| < 1$）

数列极限的基本公式

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，（$|q| < 1$）

例 1 设 $x_n = C$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证明 $\forall \epsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例 1　设 $x_n = C$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证明　$\forall \epsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例 2　证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

证明　$\forall \epsilon > 0$，取 $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

证明 $\forall \epsilon > 0$，取 $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例 3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0.$

证明　$\forall\epsilon>0$，取 $N=[\dfrac{1}{\epsilon}]$，则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon.$$

例 3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

证明　$\forall\epsilon>0$，取 $N=[\dfrac{1}{\epsilon}]$，则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon.$$

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证明 任给 $\epsilon > 0$,

1. 若 $q = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.
2. 若 $0 < |q| < 1$, 则 $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$, 要使 $n \ln|q| < \ln\epsilon$, 只需要 $n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}$,取 $N = \left[\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}\right]$, 则当 $n > N$ 时，就有

$$\left|q^n - 0\right| < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

例 4　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证明　任给 $\epsilon > 0$,

1. 若 $q = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.
2. 若 $0 < |q| < 1$, 则 $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$, 要使 $n \ln|q| < \ln\epsilon$, 只需要 $n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}$,取 $N = \left[\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}\right]$, 则当 $n > N$ 时，就有

$$\left|q^n - 0\right| < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

例 4　证明 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证明　任给 $\epsilon > 0$,

1. 若 $q = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.
2. 若 $0 < |q| < 1$, 则 $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$, 要使 $n \ln |q| < \ln \epsilon$, 只需要 $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$, 取 $N = \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}\right]$, 则当 $n > N$ 时，就有

$$\left|q^n - 0\right| < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

例 4　证明 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证明　任给 $\epsilon > 0$,

1. 若 $q = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.
2. 若 $0 < |q| < 1$, 则 $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$, 要使 $n \ln|q| < \ln\epsilon$, 只需要 $n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}$,取 $N = \left[\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}\right]$, 则当 $n > N$ 时，就有

$$\left|q^n - 0\right| < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

例 4　证明 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证明　任给 $\epsilon > 0$,

1. 若 $q = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.
2. 若 $0 < |q| < 1$, 则 $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$, 要使 $n \ln|q| < \ln\epsilon$, 只需要 $n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}$,取 $N = \left[\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}\right]$, 则当 $n > N$ 时，就有

$$\left|q^n - 0\right| < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

例 5 设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证明 任给 $\epsilon > 0$, 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，故 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

例 5 设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证明 任给 $\epsilon > 0$, 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，故 $\exists\, N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

例 5　设 $x_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证明　任给 $\epsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，故 $\exists\, N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

例 5　设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证明　任给 $\epsilon > 0$, 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，故 $\exists\, N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

例 5　设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证明　任给 $\epsilon > 0$, 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，故 $\exists\, N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

发散数列

发散的数列至少有这两种可能：

1. 无界型的：比如 $x_n = 2^n$；
2. 摆动型的：比如 $x_n = (-1)^n$.

发散的数列至少有这两种可能：

1. 无界型的：比如 $x_n = 2^n$；
2. 摆动型的：比如 $x_n = (-1)^n$.

性质 1 (极限的唯一性)　收敛数列的极限必唯一.

证明　设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$. 由定义可知：$\forall \epsilon > 0, \exists\, N_1, N_2$, 使得:

1. 当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon$;
2. 当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \epsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$, 则当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} |a-b| &= |(x_n - b) - (x_n - a)| \\ &\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b-a|. \end{aligned}$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

性质 1 (极限的唯一性)　收敛数列的极限必唯一.

证明　设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$. 由定义可知：$\forall \epsilon > 0, \exists\, N_1, N_2$, 使得:

1. 当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon$;
2. 当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \epsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$, 则当 $n > N$ 时有

$$
\begin{aligned}
|a-b| &= |(x_n - b) - (x_n - a)| \\
&\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b-a|.
\end{aligned}
$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

性质 1 (极限的唯一性) 收敛数列的极限必唯一.

证明 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$. 由定义可知：$\forall \epsilon > 0, \exists\, N_1, N_2$, 使得:

1. 当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon$;
2. 当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \epsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$, 则当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} |a-b| &= |(x_n - b) - (x_n - a)| \\ &\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b-a|. \end{aligned}$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

性质 1 (极限的唯一性) 收敛数列的极限必唯一.

证明 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$. 由定义可知：$\forall \epsilon > 0, \exists\, N_1, N_2$, 使得:

1. 当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon$;
2. 当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \epsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$，则当 $n > N$ 时有

$$
\begin{aligned}
|a-b| &= |(x_n - b) - (x_n - a)| \\
&\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b-a|.
\end{aligned}
$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

性质 2 (有界性) 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \le M$.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\epsilon = 1$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \le |x_n - A| + |A| < 1 + |A|,$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1+|A|\}$,则对任何 n 都有 $|x_n| \le M$.

推论 无界数列必定发散.

性质 2 (有界性) 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leq M$.

证明 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\epsilon = 1$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leq |x_n - A| + |A| < 1 + |A|,$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1+|A|\}$,则对任何 n 都有 $|x_n| \leq M$.

推论 无界数列必定发散.

收敛数列的性质

性质 2 (有界性)　设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M>0$ 使得 $|x_n|\le M$.

证明　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\epsilon=1$，则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-A|<\epsilon=1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n-A)+A| \le |x_n-A|+|A| < 1+|A|,$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|A|\}$,则对任何 n 都有 $|x_n|\le M$.

推论　无界数列必定发散.

性质 3 (保号性) 设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

证明 取 $\epsilon = A/2$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = A/2$．此时 $x_n > A/2 > 0$.

注记 这个定理表明，若数列的极限为正（或负），则该数列从某一项开始以后所有项都为正（或负）.

性质 3 (保号性)　设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

证明　取 $\epsilon = A/2$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = A/2$．此时 $x_n > A/2 > 0$.

注记　这个定理表明，若数列的极限为正（或负），则该数列从某一项开始以后所有项都为正（或负）.

性质 3 (保号性) 设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

证明 取 $\epsilon = A/2$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = A/2$．此时 $x_n > A/2 > 0$.

注记 这个定理表明，若数列的极限为正（或负），则该数列从某一项开始以后所有项都为正（或负）.

推论 (保号性)　设数列 $x_n \geq 0$（或 $x_n \leq 0$），且 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，则有 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）.

推论　如果 $x_n \geq y_n$，而且 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim_{n\to\infty} y_n = B$，则有 $A \geq B$.

思考　若将上面的等号去掉，结论如何？

推论 (保号性) 设数列 $x_n \geq 0$（或 $x_n \leq 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则有 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）.

推论 如果 $x_n \geq y_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则有 $A \geq B$.

思考 若将上面的等号去掉，结论如何？

推论 (保号性)　设数列 $x_n \geq 0$（或 $x_n \leq 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则有 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）.

推论　如果 $x_n \geq y_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则有 $A \geq B$.

思考　若将上面的等号去掉，结论如何？

性质 4 (收敛数列与其子列件的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 A.

注记 这个定理表明：若数列有两个不同的子数列收敛于不同的极限，则该数列是发散的.

例子 数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ 是发散的

性质 4 (收敛数列与其子列件的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 A.

注记 这个定理表明: 若数列有两个不同的子数列收敛于不同的极限，则该数列是发散的.

例子 数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ 是发散的

性质 4 (收敛数列与其子列件的关系)　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 A.

注记　这个定理表明: 若数列有两个不同的子数列收敛于不同的极限，则该数列是发散的.

例子　数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ 是发散的

小结

- 数列: 研究其变化规律;
- 数列极限: 极限思想、精确定义、几何意义;
- 收敛数列的性质: 唯一性、有界性、保号性、子数列的收敛性.

小结

- 数列: 研究其变化规律;
- 数列极限: 极限思想、精确定义、几何意义;
- 收敛数列的性质: 唯一性、有界性、保号性、子数列的收敛性.

小结

- 数列: 研究其变化规律;
- 数列极限: 极限思想、精确定义、几何意义;
- 收敛数列的性质: 唯一性、有界性、保号性、子数列的收敛性.

选择 已知数列 $\{x_n\}$ 的通项为 $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$，则该数列(　)

(A) 收敛且有界　　(B) 收敛且无界

(C) 发散且有界　　(D) 发散且无界

选择　已知数列 $\{x_n\}$ 的通项为 $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$，则该数列(C)

(A) 收敛且有界　　(B) 收敛且无界

(C) 发散且有界　　(D) 发散且无界

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的数叫做自变量在这一变化过程中函数的极限. 我们主要研究以下两种情形:

1. 自变量 x 任意接近于有限值 $x_0(x \to x_0)$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;
2. 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大 $(x \to \infty)$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的数叫做自变量在这一变化过程中函数的极限．我们主要研究以下两种情形:

1. 自变量 x 任意接近于有限值 $x_0(x \to x_0)$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;
2. 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大 $(x \to \infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中, 对应函的数值 $f(x)$ 无限接近于确定值 A.

问题 如何用数学的语言刻画" 无限接近"?

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.

函数的极限 ($x \to x_0$)

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中, 对应函的数值 $f(x)$ 无限接近于确定值 A.

问题　如何用数学的语言刻画" 无限接近"?

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中, 对应函的数值 $f(x)$ 无限接近于确定值 A.

问题　如何用数学的语言刻画" 无限接近"?

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中, 对应函的数值 $f(x)$ 无限接近于确定值 A.

问题　如何用数学的语言刻画" 无限接近"?

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.

定义 1 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \to A \ (\text{当 } x \to x_0)$$

"$\epsilon - \delta$" 定义： $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

定义 1 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \to A \ (\text{当 } x \to x_0)$$

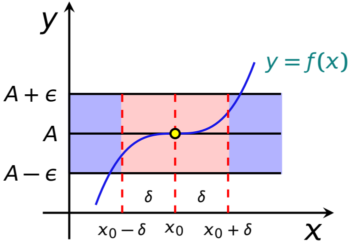
"$\epsilon - \delta$" 定义： $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时，函数 $y=f(x)$ 图形完全落在以直线

$$y = A$$

为中心线，宽为 2ϵ 的带形区域内.



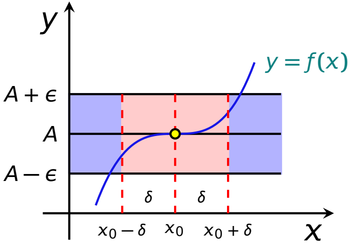
注记　1. 一般情况下，δ 与 ϵ 有关.

2. 函数极限是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时，函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线

$$y = A$$

为中心线，宽为 2ϵ 的带形区域内.



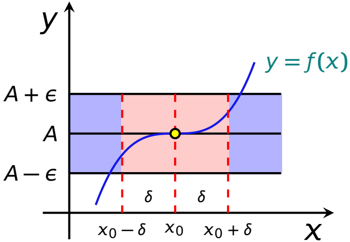
注记 1. 一般情况下，δ 与 ϵ 有关.

2. 函数极限是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时，函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线

$$y = A$$

为中心线，宽为 2ϵ 的带形区域内.



注记　1. 一般情况下，δ 与 ϵ 有关.

2. 函数极限是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

函数极限的例子

1. $y = C$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to C$

2. $y = x$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

3. $y = 2x + 1$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to 2x_0 + 1$

4. $y = \sqrt{x}$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

函数极限的例子

1. $y = C$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to C$

2. $y = x$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

3. $y = 2x + 1$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to 2x_0 + 1$

4. $y = \sqrt{x}$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

函数极限的例子

1. $y = C$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to C$

2. $y = x$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

3. $y = 2x + 1$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to 2x_0 + 1$

4. $y = \sqrt{x}$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

函数极限的例子

1. $y = C$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to C$

2. $y = x$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

3. $y = 2x + 1$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to 2x_0 + 1$

4. $y = \sqrt{x}$

   当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C, (C$ 为常数 $).$

证明 任给 $\epsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| <$ 时, 有

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{x\to x_0} C = C.$$

例 1 证明 $\lim_{x \to x_0} C = C$,(C 为常数).

证明 任给 $\epsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| <$ 时, 有

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{x \to x_0} C = C.$$

例 2　证明 $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

证明　$\forall \epsilon > 0$，取 $\delta = \epsilon$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon$$

所以 $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证明 $\forall \epsilon > 0$，取 $\delta = \epsilon$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$（$x_0>0$）.

证明 $\forall \epsilon>0$，取 $\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\,\epsilon\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|$$

$$\le\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\frac{\sqrt{x_0}\,\epsilon}{\sqrt{x_0}}=\epsilon$$

函数极限的例子

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$（$x_0>0$）.

证明 $\forall\epsilon>0$，取 $\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\,\epsilon\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|$$

$$\le\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\frac{\sqrt{x_0}\,\epsilon}{\sqrt{x_0}}=\epsilon$$

例 3　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$（$x_0>0$）.

证明　$\forall\epsilon>0$，取 $\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\,\epsilon\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|$$

$$\leq\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\frac{\sqrt{x_0}\,\epsilon}{\sqrt{x_0}}=\epsilon$$

注记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

注记 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 5 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

注记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2.$

注记 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 5 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2.$

注记 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

注记 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 5 函数极限 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

注记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

注记 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 5 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

注记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

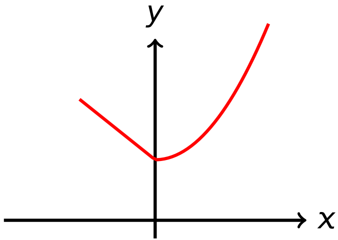
注记 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 5 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

例 6 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ x^2+1, & x\geq 0;\end{cases}$$

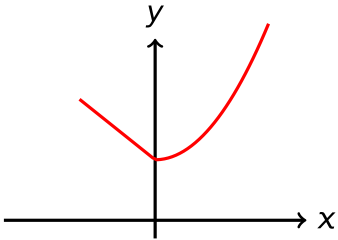
证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.



例 6 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ x^2+1, & x\geq 0;\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.



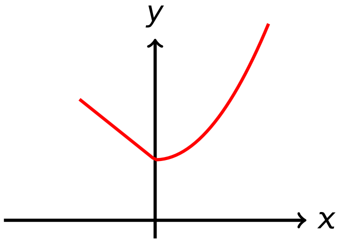
分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论:

1. x 从左侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^-$;

例 6 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ x^2+1, & x\geq 0;\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论:

1. x 从左侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^-$;
2. x 从右侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^+$;

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A.$$

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^+) = A.$$

左极限和右极限

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A.$$

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^+) = A.$$

注意到

$$\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$$

$$=\{x|0<x-x_0<\delta\}\cup\{x|-\delta<x-x_0<0\}$$

于是我们有

定理 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

单侧极限与极限的关系

注意到

$$\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$$

$$=\{x|0<x-x_0<\delta\}\cup\{x|-\delta<x-x_0<0\}$$

于是我们有

定理 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\iff\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$，则 $\lim_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

注意到

$$\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$$

$$=\{x|0<x-x_0<\delta\}\cup\{x|-\delta<x-x_0<0\}$$

于是我们有

定理 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 8　设 $f(x) = |x|$，研究函数极限 $\lim_{x \to 0} f(x)$.

例 9　设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-x+2, & x>1 \end{cases}$，求 $\lim_{x \to 1} f(x)$.

注记　研究当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限，不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

例 8　设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

例 9　设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-x+2, & x>1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

注记　研究当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限，不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

例 8　设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim_{x\to 0} f(x)$.

例 9　设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-x+2, & x>1 \end{cases}$，求 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

注记　研究当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限，不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

练习 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ e^x, & 0<x<1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$;判断极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在，若存在求出该极限.

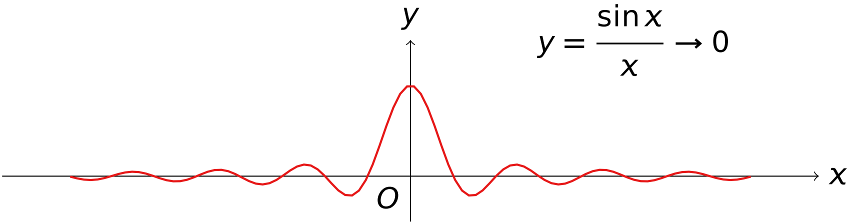
解 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

练习　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ e^x, & 0<x<1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$;判断极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在，若存在求出该极限.

解　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察：当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题　如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察：当 x 无限增大时，$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题　如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察：当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题　如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察：当 x 无限增大时，$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察：当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

定义 2 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $X > 0$，使得当 $|x| > X$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

思考 $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ 的 ϵ 语言定义.

"$\epsilon - X$" 定义: $\lim_{x \to \infty} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

定义 2 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $X > 0$，使得当 $|x| > X$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

思考 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的 ϵ 语言定义.

"$\epsilon - X$" 定义: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

定义 2 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $X > 0$，使得当 $|x| > X$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

思考 $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ 的 ϵ 语言定义.

"$\epsilon - X$" 定义: $\lim_{x \to \infty} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon.$

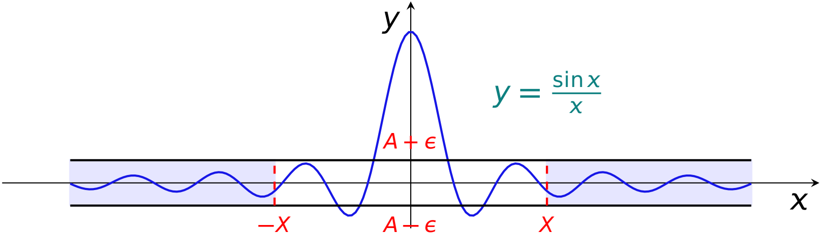
注记 $x \to \infty$ 有两种方向，即 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$. 类似地可以定义 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

定理 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \iff \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

注记 $x \to \infty$ 有两种方向，即 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$. 类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

定理 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \iff \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

极限的几何解释



当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时，函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线，宽为 2ϵ 的带形区域内.

例 10 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

证明 由条件可知：

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{|x|},$$

故对 $\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\epsilon}$, 则当 $|x| > X$ 时恒有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \epsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

例 10 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

证明 由条件可知:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{|x|},$$

故对 $\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\epsilon}$, 则当 $|x| > X$ 时恒有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \epsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

例 10 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

证明 由条件可知:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{|x|},$$

故对 $\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\epsilon}$, 则当 $|x| > X$ 时恒有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \epsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

例 11 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0$.

证明 $\forall \epsilon > 0$,由数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 知道,存在正整数 $N_1 > 0$,使得当 $n > N_1$ 时有 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$.取 $X = N_1 + 1$,则当 $x > X$ 时有 $[x] > N_1$,从而

$$\left|\frac{1}{2^x} - 0\right| = \frac{1}{2^x} \le \frac{1}{2^{[x]}} < \frac{1}{2^{N_1}} < \epsilon.$$

例 11 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0.$

证明 $\forall \epsilon > 0$,由数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ 知道,存在正整数 $N_1 > 0$,使得当 $n > N_1$ 时有 $\dfrac{1}{2^n} < \epsilon$.取 $X = N_1 + 1$,则当 $x > X$ 时有 $[x] > N_1$,从而

$$\left|\frac{1}{2^x} - 0\right| = \frac{1}{2^x} \le \frac{1}{2^{[x]}} < \frac{1}{2^{N_1}} < \epsilon.$$

例 11 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0.$

证明 $\forall \epsilon > 0$,由数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ 知道,存在正整数 $N_1 > 0$,使得当 $n > N_1$ 时有 $\dfrac{1}{2^n} < \epsilon$.取 $X = N_1 + 1$,则当 $x > X$ 时有 $[x] > N_1$,从而

$$\left|\frac{1}{2^x} - 0\right| = \frac{1}{2^x} \leq \frac{1}{2^{[x]}} < \frac{1}{2^{N_1}} < \epsilon.$$

$$\lim_{x\to\infty} C = C \tag{2.1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k > 0) \tag{2.2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \tag{2.3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \quad (b > 1) \tag{2.4}$$

性质 1 (唯一性) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.

证明 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 又 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$, 且 $A \neq B$ 由定义可知:

$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta_1, \delta_2$, 使得:

1. 当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;
2. 当 $x \in U(x_0, \delta_2)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|A-B|}{2}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有

$$|A - B| = |(f(x) - A) - (f(x) - B)|$$

$$\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |B - A|.$$

这是不可能的, 故收敛数列不可能有两个极限.

性质 1 (唯一性)　如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.

证明　设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 又 $\lim_{x\to x_0} f(x) = B$, 且 $A \neq B$ 由定义可知: $\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta_1, \delta_2$, 使得:

1. 当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;
2. 当 $x \in U(x_0, \delta_2)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|A-B|}{2}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有

$$|A - B| = |(f(x) - A) - (f(x) - B)|$$

$$\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |B - A|.$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

性质 1 (唯一性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.

证明 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, 且 $A \neq B$ 由定义可知: $\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta_1, \delta_2$, 使得:

1. 当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;
2. 当 $x \in U(x_0, \delta_2)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|A-B|}{2}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有

$$
\begin{aligned}
|A - B| &= |(f(x) - A) - (f(x) - B)| \\
&\le |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |B - A|.
\end{aligned}
$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

性质 1 (唯一性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.

证明 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, 且 $A \neq B$ 由定义可知:
$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta_1, \delta_2$, 使得:

1. 当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;
2. 当 $x \in U(x_0, \delta_2)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|A-B|}{2}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有

$$|A - B| = |(f(x) - A) - (f(x) - B)|$$

$$\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |B - A|.$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

性质 2 (局部有界性) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \le M$.

证明 取 $\epsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A|$$

$$\le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = 1 + |A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子 设 $f(x) = 1/x$, 则 $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, 此时当 $0 < |x-1| < 1/2$ 时有 $|f(x)| \le 2$.

性质 2 (局部有界性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \le M$.

证明 取 $\epsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |(f(x) - A) + A| \\
&\le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|
\end{aligned}
$$

取 $M = 1 + |A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子 设 $f(x) = 1/x$, 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, 此时当 $0 < |x - 1| < 1/2$ 时有 $|f(x)| \le 2$.

性质 2 (局部有界性) 如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \le M$.

证明 取 $\epsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f(x) - A) + A| \\ &\le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| \end{aligned}$$

取 $M = 1 + |A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子 设 $f(x) = 1/x$, 则 $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$, 此时当 $0 < |x - 1| < 1/2$ 时有 $|f(x)| \le 2$.

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \le M$.

证明　取 $\epsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |(f(x) - A) + A| \\
&\le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|
\end{aligned}
$$

取 $M = 1 + |A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子　设 $f(x) = 1/x$, 则 $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, 此时当 $0 < |x - 1| < 1/2$ 时有 $|f(x)| \le 2$.

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \le M$.

证明　取 $\epsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A|$$

$$\le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = 1 + |A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子　设 $f(x) = 1/x$, 则 $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, 此时当 $0 < |x-1| < 1/2$ 时有 $|f(x)| \le 2$.

性质 3 (局部保号性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

证明 取 $\epsilon = A/2$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$．此时 $f(x) > A/2 > 0$.

例 12 设 $f(x) = 2x - 1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 > 0$，此时当 $0 < |x - 1| < 1/4$ 时，有 $f(x) > 1/2 > 0$.

性质 3 (局部保号性) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>\frac{A}{2}>0$（或 $f(x)<\frac{A}{2}<0$）.

证明 取 $\epsilon=A/2$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon=A/2$. 此时 $f(x)>A/2>0$.

例 12 设 $f(x)=2x-1$，则 $\lim_{x\to 1} f(x)=1>0$，此时当 $0<|x-1|<1/4$ 时，有 $f(x)>1/2>0$.

性质 3 (局部保号性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

证明 取 $\epsilon = A/2$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $f(x) > A/2 > 0$.

例 12 设 $f(x) = 2x - 1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 > 0$，此时当 $0 < |x - 1| < 1/4$ 时，有 $f(x) > 1/2 > 0$.

性质 3 (局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

证明　取 $\epsilon = A/2$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $f(x) > A/2 > 0$.

例 12　设 $f(x) = 2x - 1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 > 0$，此时当 $0 < |x - 1| < 1/4$ 时，有 $f(x) > 1/2 > 0$.

推论 (保号性) 设 $f(x) \geq 0$（或 $f(x) \leq 0$），且 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）.

推论 如果函数 $g(x) \geq h(x)$，而且 $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim_{x \to x_0} h(x) = B$，则有 $A \geq B$.

极限的性质，对于其它形式 ($x \to \infty$、单侧极限) 的极限也成立.

推论 (保号性)　设 $f(x) \geq 0$（或 $f(x) \leq 0$），且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）.

推论　如果函数 $g(x) \geq h(x)$，而且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = B$，则有 $A \geq B$.

极限的性质，对于其它形式 ($x \to \infty$、单侧极限) 的极限也成立.

推论 (保号性) 设 $f(x) \geq 0$（或 $f(x) \leq 0$），且 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）.

推论 如果函数 $g(x) \geq h(x)$，而且 $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim_{x \to x_0} h(x) = B$，则有 $A \geq B$.

极限的性质，对于其它形式 ($x \to \infty$、单侧极限) 的极限也成立.

小结

- 极限的定义：定义、几何意义；
- 极限的性质：唯一性、局部保号性、局部有界性.

思考题

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在$x=0$ 处 的左、右极限是否存在? 当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 的极限是否存在?

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在$x=0$ 处 的左、右极限是否存在? 当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 的极限是否存在?

答案 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(5+x^2\right)=5$, 左极限存在,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\dfrac{1}{x}=0$, 右极限存在,

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

定义 1　如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$，就称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

注记　$f(x)$ 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小 $\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| < \epsilon$.

注记　类似地，可以定义 $x \to \infty$、$x \to -\infty$、$x \to +\infty$、$x \to x_0^-$ 和 $x \to x_0^+$ 时的无穷小.

定义 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

注记 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小 $\Longleftrightarrow$ $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<\epsilon$.

注记 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$、$x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$ 时的无穷小.

定义 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

注记 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小 $\Longleftrightarrow$ $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<\epsilon$.

注记 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$、$x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$ 时的无穷小.

例子 0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$ 时的无穷小.

例子 函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注记 1. 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.

2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

例子　0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x \to 0$ 时的无穷小.

例子　函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x \to \infty$ 时的无穷小.

注记　1. 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.

2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

例子 0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x \to 0$ 时的无穷小.

例子 函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x \to \infty$ 时的无穷小.

注记 1. 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.

2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

例子　0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$ 时的无穷小.

例子　函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注记　1. 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.

2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

定理的意义:

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

定理 1 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

定理的意义:

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

证明　必要性: 因 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 所以对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

令 $\alpha(x) = f(x) - A$, 则有 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小，且 $f(x) = A + \alpha(x)$.

充分性: 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|\alpha(x)| < \epsilon, \text{ 即 } |f(x) - A| < \epsilon,$$

也即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

证明 必要性: 因 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 所以对 $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-A|<\epsilon.$$

令 $\alpha(x)=f(x)-A$, 则有 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $f(x)=A+\alpha(x)$.

充分性: 设 $f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，则对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\alpha(x)|<\epsilon,\ 即\ |f(x)-A|<\epsilon,$$

也即 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$.

证明　必要性: 因 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 所以对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

令 $\alpha(x) = f(x) - A$, 则有 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小，且 $f(x) = A + \alpha(x)$.

充分性: 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|\alpha(x)| < \epsilon, \text{ 即 } |f(x) - A| < \epsilon,$$

也即 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

定理 2 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.

证明 设 α 及 β 是当 $x \to \infty$ 时的两个无穷小，则对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ X_1 > 0, X_2 > 0$，使得

1. 当 $|x| > X_1$ 时恒有
$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$

2. 当 $|x| > X_2$ 时恒有
$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$，当 $|x| > X$ 时，恒有
$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\alpha \pm \beta \to 0 (x \to \infty)$.

定理 2 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.

证明 设 α 及 β 是当 $x \to \infty$ 时的两个无穷小，则对 $\forall \epsilon > 0$，$\exists\, X_1 > 0, X_2 > 0$，使得

1. 当 $|x| > X_1$ 时恒有
$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$

2. 当 $|x| > X_2$ 时恒有
$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$，当 $|x| > X$ 时，恒有

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\alpha \pm \beta \to 0 (x \to \infty)$.

无穷小的运算

定理 2　两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.

证明　设 α 及 β 是当 $x \to \infty$ 时的两个无穷小，则对 $\forall \epsilon > 0$，$\exists\, X_1 > 0, X_2 > 0$，使得

1. 当 $|x| > X_1$ 时恒有
$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$

2. 当 $|x| > X_2$ 时恒有
$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$，当 $|x| > X$ 时，恒有
$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\alpha \pm \beta \to 0 (x \to \infty)$.

无穷小的运算

定理 2 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.

证明 设 α 及 β 是当 $x \to \infty$ 时的两个无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ X_1 > 0, X_2 > 0$, 使得

1. 当 $|x| > X_1$ 时恒有
$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$

2. 当 $|x| > X_2$ 时恒有
$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有
$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\alpha \pm \beta \to 0 (x \to \infty)$.

定理 2 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.

证明 设 α 及 β 是当 $x \to \infty$ 时的两个无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists X_1 > 0, X_2 > 0$, 使得

1. 当 $|x| > X_1$ 时恒有
$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$
2. 当 $|x| > X_2$ 时恒有
$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有
$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$
故 $\alpha \pm \beta \to 0 (x \to \infty)$.

无穷小的运算

问题　无穷多个无穷小的和是不是无穷小？

问题 无穷多个无穷小的和是不是无穷小？

答案 不是，例如

$$
\begin{array}{cccccccl}
1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & & \to 0(n\to\infty) \\
0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & & \to 0(n\to\infty) \\
0 & 0 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & & \to 0(n\to\infty) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & & \to 0(n\to\infty) \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & & \to 1(n\to\infty)
\end{array}
$$

定理 3 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明 设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内有界, 则 $\exists\ M>0,\delta_1>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时恒有 $|u|\le M$.

又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta_2>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时恒有

$$|\alpha|<\frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\epsilon.$$

所以当 $x\to x_0$ 时, $u\cdot\alpha$ 为无穷小.

定理 3 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明 设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内有界, 则 $\exists\ M>0,\delta_1>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时恒有 $|u|\le M$.

又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta_2>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时恒有

$$|\alpha|<\frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\epsilon.$$

所以当 $x\to x_0$ 时, $u\cdot\alpha$ 为无穷小.

定理 3 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明 设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 内有界, 则 $\exists\ M > 0, \delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时恒有 $|u| \leq M$.

又设 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|u \cdot \alpha| = |u| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \epsilon.$$

所以当 $x \to x_0$ 时, $u \cdot \alpha$ 为无穷小.

定理 3 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明 设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内有界, 则 $\exists\ M>0,\delta_1>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时恒有 $|u|\le M$.

又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta_2>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时恒有

$$|\alpha|<\frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\epsilon.$$

所以当 $x\to x_0$ 时, $u\cdot\alpha$ 为无穷小.

定理 3 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明 设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 内有界, 则 $\exists\ M > 0, \delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时恒有 $|u| \leq M$.

又设 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|u \cdot \alpha| = |u| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \epsilon.$$

所以当 $x \to x_0$ 时, $u \cdot \alpha$ 为无穷小.

推论 1 在自变量的同一变化过程中，有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小. $x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}\ (x\to 0)$

推论 2 常数与无穷小的积是无穷小.

推论 3 有限个无穷小的积是无穷小.

注意：两个无穷小的商不一定是无穷小.

推论 1 在自变量的同一变化过程中，有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小. $x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}\ (x\to 0)$

推论 2 常数与无穷小的积是无穷小.

推论 3 有限个无穷小的积是无穷小.

注意：两个无穷小的商不一定是无穷小.

推论 1 在自变量的同一变化过程中，有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小. $x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}\ (x\to 0)$

推论 2 常数与无穷小的积是无穷小.

推论 3 有限个无穷小的积是无穷小.

注意：两个无穷小的商不一定是无穷小.

推论 1 在自变量的同一变化过程中，有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小. $x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}\ (x\to 0)$

推论 2 常数与无穷小的积是无穷小.

推论 3 有限个无穷小的积是无穷小.

注意：两个无穷小的商不一定是无穷小.

推论 1 在自变量的同一变化过程中，有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小. $x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}\ (x\to 0)$

推论 2 常数与无穷小的积是无穷小.

推论 3 有限个无穷小的积是无穷小.

注意：两个无穷小的商不一定是无穷小.

无穷小的运算

问题　无穷多个无穷小的积是不是无穷小？

问题 无穷多个无穷小的积是不是无穷小？

答案 不是，例如：

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
1 & 2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
1 & 1 & 3^2 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \to 1(n\to\infty)
\end{array}
$$

例 1 求函数极限 $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$. ························· 0

练习 求下列函数极限:

(1) $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$;

例 1 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 0

练习 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$;

例 1 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0$

练习 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$;

例 1　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 0

练习　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$; $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 0

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

注记 1. 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 时的无穷大.

2. 特殊情况:正无穷大 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$),负无穷大 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.)

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义．如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

注记　1. 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 时的无穷大.

2. 特殊情况:正无穷大 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$),负无穷大 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.)

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

注记 1. 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 时的无穷大.

2. 特殊情况:正无穷大 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$),负无穷大 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.)

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

注记　1. 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 时的无穷大.

2. 特殊情况:正无穷大 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$),负无穷大 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.)

1. 无穷大是变量，不能与很大的数混淆；
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
3. 无穷大是一种特殊的无界变量，但是无界变量未必是无穷大（例：$\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$）.

无穷大

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例: $\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$).

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例: $\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$).

无穷大

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例: $\dfrac{1}{x}\sin(\dfrac{1}{x})$).

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

证明 $\forall M>0$, 要使 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$, 只需要 $|x-1|<\frac{1}{M}$. 取 $\delta=\frac{1}{M}$, 当 $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{M}$ 时, 就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义 2 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

证明 $\forall M>0$, 要使 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$, 只需要 $|x-1|<\frac{1}{M}$. 取 $\delta=\frac{1}{M}$, 当 $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{M}$ 时, 就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义 2 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

例 2　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

证明　$\forall M>0$, 要使 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$, 只需要 $|x-1|<\frac{1}{M}$. 取 $\delta=\frac{1}{M}$, 当 $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{M}$ 时, 就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义 2　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

证明 $\forall M>0$, 要使 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$, 只需要 $|x-1|<\frac{1}{M}$. 取 $\delta=\frac{1}{M}$, 当 $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{M}$ 时, 就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

所以

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义 2 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

练习 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{x+1}{x^2}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大.

练习 $\frac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x \to 1$ 时的无穷大.

定理 4 无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 则对 $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$, 即 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \epsilon$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小

反之, 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$. 则 $\forall M > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| < \frac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

定理 4 无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则对 $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)|>\dfrac{1}{\epsilon}$，即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\epsilon$. 所以当 $x\to x_0$ 时，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小

反之，设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$. 则 $\forall M>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)|<\dfrac{1}{M}$，由于 $f(x)\neq 0$，从而 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M$. 所以当 $x\to x_0$ 时，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

定理 4 无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$, 即 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \epsilon$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小

反之, 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$. 则 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| < \frac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

定理 4 无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$, 即 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \epsilon$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小

反之, 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$. 则 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| < \frac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

注记 关于无穷大的讨论, 都可归结为关于无穷小的讨论.

例 3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x^2+1}=0 \implies \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x+1}=\infty.$

注记 关于无穷大的讨论, 都可归结为关于无穷小的讨论.

例 3 $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x^2+1}=0 \implies \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty.$$

主要内容: 两个定义; 四个定理; 三个推论.

几点注意:

1. 无穷小（大）是变量，不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;
2. 无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;
3. 无界变量未必是无穷大.

小结

主要内容: 两个定义; 四个定理; 三个推论.

几点注意:

1. 无穷小（大）是变量, 不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;
2. 无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;
3. 无界变量未必是无穷大.

小结

主要内容: 两个定义; 四个定理; 三个推论.

几点注意:

1. 无穷小（大）是变量, 不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;
2. 无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;
3. 无界变量未必是无穷大.

小结

主要内容: 两个定义; 四个定理; 三个推论.

几点注意:

1. 无穷小（大）是变量, 不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;
2. 无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;
3. 无界变量未必是无穷大.

思考

在自变量的同一过程中，无穷大的倒数为无穷小：反之，无穷小的倒数是否一定为无穷大?

在自变量的同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；反之，无穷小的倒数是否一定为无穷大？

答案　不一定．

思考

在自变量的同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；反之，无穷小的倒数是否一定为无穷大?

答案　不一定.

0 是无穷小，但其倒数不存在.

思考

在自变量的同一过程中，无穷大的倒数为无穷小：反之，无穷小的倒数是否一定为无穷大?

答案　不一定.

0 是无穷小，但其倒数不存在.

所以课本上表示为“非零的无穷小的倒数是无穷大”.

定理 1 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

1. $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$
2. $\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$
3. $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

定理 1 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

1. $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$
2. $\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$
3. $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

四则运算法则

定理 1 如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$
3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

证明 因为 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$ 所以

$$f(x) = A + \alpha,\ g(x) = B + \beta.\ \text{其中}\ \alpha \to 0, \beta \to 0.$$

由无穷小运算法则, 得

$$[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) = \alpha \pm \beta \to 0.$$

$$\begin{aligned}[f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) &= (A + \alpha)(B + \beta) - AB \\ &= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \to 0.\end{aligned}$$

证明 因为 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$ 所以

$$f(x) = A + \alpha,\ g(x) = B + \beta.\ \text{其中}\ \alpha \to 0, \beta \to 0.$$

由无穷小运算法则, 得

$$[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) = \alpha \pm \beta \to 0.$$

$$[f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) = (A + \alpha)(B + \beta) - AB$$

$$= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \to 0.$$

证明　因为 $\lim f(x) = A,\ \lim g(x) = B$ 所以

$$f(x) = A + \alpha,\ g(x) = B + \beta.\ \text{其中}\ \alpha \to 0, \beta \to 0.$$

由无穷小运算法则, 得

$$[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) = \alpha \pm \beta \to 0.$$

$$\begin{aligned}[f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) &= (A + \alpha)(B + \beta) - AB \\ &= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \to 0.\end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)},$$

因为 $B\alpha-A\beta\to 0$，又因为 $\beta\to 0, B\neq 0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|\beta|<\frac{|B|}{2}$,所以

$$|B+\beta|\geq|B|-|\beta|>|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|.$$

于是

$$|B(B+\beta)|>\frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|<\frac{2}{B^2}$, 有界, 故 (3) 成立.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B+\beta)},$$

因为 $B\alpha - A\beta \to 0$, 又因为 $\beta \to 0, B \neq 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|\beta| < \frac{|B|}{2}$,所以

$$|B+\beta| \geq |B| - |\beta| > |B| - \frac{1}{2}|B| = \frac{1}{2}|B|.$$

于是

$$|B(B+\beta)| > \frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right| < \frac{2}{B^2}$, 有界, 故 (3) 成立.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)},$$

因为 $B\alpha-A\beta\to 0$, 又因为 $\beta\to 0, B\neq 0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|\beta|<\frac{|B|}{2}$,所以

$$|B+\beta|\geq|B|-|\beta|>|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|.$$

于是

$$|B(B+\beta)|>\frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|<\frac{2}{B^2}$, 有界, 故 (3) 成立.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)},$$

因为 $B\alpha-A\beta\to 0$，又因为 $\beta\to 0, B\neq 0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|\beta|<\frac{|B|}{2}$，所以

$$|B+\beta|\geq|B|-|\beta|>|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|.$$

于是

$$|B(B+\beta)|>\frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|<\frac{2}{B^2}$，有界，故 (3) 成立.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)},$$

因为 $B\alpha-A\beta\to 0$, 又因为 $\beta\to 0, B\neq 0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|\beta|<\frac{|B|}{2}$,所以

$$|B+\beta|\geq|B|-|\beta|>|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|.$$

于是

$$|B(B+\beta)|>\frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|<\frac{2}{B^2}$, 有界, 故 (3) 成立.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)},$$

因为 $B\alpha-A\beta\to 0$，又因为 $\beta\to 0, B\neq 0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|\beta|<\frac{|B|}{2}$,所以

$$|B+\beta|\geq|B|-|\beta|>|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|.$$

于是

$$|B(B+\beta)|>\frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|<\frac{2}{B^2}$, 有界, 故 (3) 成立.

推论 1　如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论 2　如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

推论 1　如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论 2　如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

函数极限的基本公式

1 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n+a_1\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0)$$

2 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

注意：若 $Q(x_0)=0$，则商的法则不能应用.

1 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n+a_1\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0)$$

2 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

注意：若 $Q(x_0)=0$，则商的法则不能应用.

1 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n+a_1\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{n-1}+\cdots+a_n$$
$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0)$$

2 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

注意：若 $Q(x_0)=0$，则商的法则不能应用.

3 如果基本初等函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有定义，则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例 1　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$.

解　原式 $= 3\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 2\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1$

$$= 3\times 1^2 - 2\times 1 + 1 = 2$$

例 1 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+1)$.

解 原式 $=3\lim\limits_{x\to 1}x^2-2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1$

$$=3\times 1^2-2\times 1+1=2$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$

解 因为

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)=\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0.$$

所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$

解 因为

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)=\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0.$$

所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$

解 因为

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)=\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0.$$

所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$

解　因为

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)=\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0.$$

所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$

解　因为

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)=\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0.$$

所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}$$

例子 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3+1}{3+3}=\dfrac{2}{3}$

例子 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x+3}$

$$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{3+1}{3+3}=\frac{2}{3}$$

例子　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x+3}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3+1}{3+3}=\frac{2}{3}$$

例子　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x+3}$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{3+1}{3+3} = \frac{2}{3}$$

例子　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

例子 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

例子　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

例子　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

求极限方法举例 ($\frac{0}{0}$ 型)

例子 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 a、b.

解 $x\to 1$ 时, 分母的极限是零, 而商的极限存在, 故

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b=0.$$

于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x+3}=\frac{2+a}{4}=2.$$

故 $a=6, b=-7$.

例子 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 a、b.

解 $x\to 1$ 时, 分母的极限是零, 而商的极限存在, 故

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b=0.$$

于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x+3}=\frac{2+a}{4}=2.$$

故 $a=6, b=-7$.

例子 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 a、b.

解 $x\to 1$ 时, 分母的极限是零, 而商的极限存在, 故

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b=0.$$

于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x+3}=\frac{2+a}{4}=2.$$

故 $a=6, b=-7$.

例子 设 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 a、b.

解 $x\to 1$ 时, 分母的极限是零, 而商的极限存在, 故

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b=0.$$

于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x+3}=\frac{2+a}{4}=2.$$

故 $a=6, b=-7$.

例子　设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 a、b.

解　$x\to 1$ 时, 分母的极限是零, 而商的极限存在, 故

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b=0.$$

于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x+3}=\frac{2+a}{4}=2.$$

故 $a=6, b=-7$.

例子 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 a、b.

解 $x\to 1$ 时, 分母的极限是零, 而商的极限存在, 故

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b=0.$$

于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x+3}=\frac{2+a}{4}=2.$$

故 $a=6, b=-7$.

例 3 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{1-x^2}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

例 3 求函数极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{1-x^2}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

例 3 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{1-x^2}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

例 3 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{1-x^2}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

例 3　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{1-x^2}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$

$$= -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解　先用 x^3 去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}} = \frac{2}{7}$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解　先用 x^3 去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}$$

求极限方法举例 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

求极限方法举例 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

例 5 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x+1}+ax+b\right)=2$, 求 ab.

解

$$\text{左边}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2+ax(x+1)+b(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2+(a+b)x+2+b}{x+1}$$

若商的极限存在，则必须 $1+a=0$, $a+b=2$, 解得

$$a=-1,\ b=3.$$

例 5 设 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x+1}+ax+b\right)=2$, 求 ab.

解

$$\text{左边}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2+ax(x+1)+b(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2+(a+b)x+2+b}{x+1}$$

若商的极限存在，则必须 $1+a=0$, $a+b=2$, 解得

$$a=-1,\ b=3.$$

例 5 设 $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x+1}+ax+b\right)=2$, 求 ab.

解

$$\text{左边}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2+ax(x+1)+b(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2+(a+b)x+2+b}{x+1}$$

若商的极限存在，则必须 $1+a=0$, $a+b=2$, 解得

$$a=-1,\ b=3.$$

例 5 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x+1}+ax+b\right)=2$, 求 ab.

解

$$
\text{左边}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2+ax(x+1)+b(x+1)}{x+1}
$$

$$
=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2+(a+b)x+2+b}{x+1}
$$

若商的极限存在，则必须 $1+a=0$, $a+b=2$, 解得

$$
a=-1,\ b=3.
$$

例 6　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

解　$n\to\infty$ 时, 是无限多个无穷小之和, 先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

例 6 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

解 $n\to\infty$ 时, 是无限多个无穷小之和, 先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

例 6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

解 $n\to\infty$ 时, 是无限多个无穷小之和, 先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

例 6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

解 $n\to\infty$ 时, 是无限多个无穷小之和, 先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

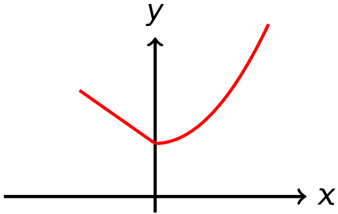
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

例 7　设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ x^2+1, & x\geq 0;\end{cases}$$

求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



解　易知

$$\lim_{x\to 0^-} = 1-0=1,$$

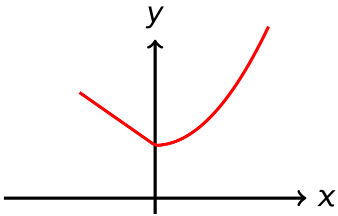
$$\lim_{x\to 0^+} = 1+0=1,$$

左右极限相等，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

例 7　设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ x^2+1, & x\geq 0;\end{cases}$$

求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



解　易知

$$\lim_{x\to 0^-} = 1-0=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} = 1+0=1,$$

左右极限相等，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

练习 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2\ln(1+x)+e^x+2)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$.

练习 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2\ln(1+x)+e^x+2)$； $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1}$； $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4$

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \dfrac{5}{4}$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & \neq & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g", "\times" description] \\
U(u_0,\eta) & \neq & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \xRightarrow[g(x)\neq u_0]{x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)} \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd} \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] \\ \mathring{U}(u_0,\eta) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] \\ U(A,\epsilon) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "f\circ g"] \\ U(A,\epsilon) \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x \in \mathring{U}(x_0,\delta_0) \\ g(x) \neq u_0 \end{array}}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{array}{ccc} \mathring{U}(x_0,\delta) & & \mathring{U}(x_0,\delta) \\ \Big\downarrow g & & \Big\downarrow f\circ g \\ \mathring{U}(u_0,\eta) & \mathring{U}(u_0,\eta) & \\ & \Big\downarrow f & \\ & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0) \\ g(x) \neq u_0 \end{array}}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0, \ \lim_{u \to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathring{U}(x_0, \delta) & & & & \mathring{U}(x_0, \delta) \\ \downarrow g & & & & \\ \mathring{U}(u_0, \eta) & = & \mathring{U}(u_0, \eta) & & \downarrow f \circ g \\ & & \downarrow f & & \\ & & U(A, \epsilon) & & U(A, \epsilon) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0) \\ g(x) \neq u_0 \end{array}}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0, \ \lim_{u \to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0, \delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0, \delta) \arrow[dd, "\checkmark\ f \circ g"] \\
\mathring{U}(u_0, \eta) \arrow[r, phantom, "="] & \mathring{U}(u_0, \eta) \arrow[d, "f"] & & \\
& U(A, \epsilon) & & U(A, \epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$\boxed{\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \implies \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & U(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & U(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & = & U(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g", "\checkmark"'] \\
U(u_0,\eta) & = & U(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

定理 2　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，并且存在 $\delta_0>0$ 使得 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x)\neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A.$$

定理　若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 且 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]=f(u_0).$$

例子　$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}.$

定理 2 如果 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim_{u\to u_0} f(u) = A$，并且存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x) \neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A.$$

定理 若 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right] = f(u_0).$$

例子 $\lim_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}.$

定理 2　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，并且存在 $\delta_0>0$ 使得 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x)\neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A.$$

定理　若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 且 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]=f(u_0).$$

例子　$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}.$

小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

思考题

问题 在某个过程中，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，那么 $f(x)+g(x)$ 是否有极限？为什么？

问题　在某个过程中，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，那么 $f(x)+g(x)$ 是否有极限？为什么？

答案　没有极限，使用反证法易证.

本节基本内容

极限存在准则 I	极限存在准则 II
$\Downarrow$	$\Downarrow$
重要极限 I	重要极限 II
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

定理 (极限存在准则 I) 如果数列 $x_n \leq y_n \leq z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

例子 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

注记 在上述定理中，如果不等式 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立，结论不变.

定理 (极限存在准则 I) 如果数列 $x_n \le y_n \le z_n$,而且 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim_{n\to\infty} z_n = A$,则有 $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

例子 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

注记 在上述定理中,如果不等式 $x_n \le y_n \le z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立,结论不变.

定理 (极限存在准则 I) 如果数列 $x_n \le y_n \le z_n$，而且 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

例子 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

注记 在上述定理中，如果不等式 $x_n \le y_n \le z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立，结论不变.

证明 $\because y_n \to a, \quad z_n \to a,$

$\therefore$ 对$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 > 0,\ N_2 > 0,$ 使得

1. 当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \epsilon,$
2. 当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \epsilon.$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$， 上两式同时成立, 即

$$a - \epsilon < y_n < a + \epsilon,\ a - \epsilon < z_n < a + \epsilon$$

当 $n > N$ 时， 恒有

$$a - \epsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \epsilon$$

即 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立， $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

证明 $\because y_n \to a, \quad z_n \to a,$

$\therefore$ 对$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0,$ 使得

1 当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \epsilon,$

2 当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \epsilon.$

取 $N = \max\{N_1, N_2\},$ 上两式同时成立, 即

$$a - \epsilon < y_n < a + \epsilon, \; a - \epsilon < z_n < a + \epsilon$$

当 $n > N$ 时，恒有

$$a - \epsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \epsilon$$

即 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立， $\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = a.$

证明 $\because y_n \to a, \quad z_n \to a,$

$\therefore$ 对$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0,$ 使得

1. 当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \epsilon,$
2. 当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \epsilon.$

取 $N = \max\{N_1, N_2\},$ 上两式同时成立, 即

$$a - \epsilon < y_n < a + \epsilon, \; a - \epsilon < z_n < a + \epsilon$$

当 $n > N$ 时，恒有

$$a - \epsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \epsilon$$

即 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立, $\quad \therefore \lim_{n\to\infty} x_n = a.$

证明 $\because y_n \to a, \quad z_n \to a,$

$\therefore$ 对$\forall\epsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0,$ 使得

1. 当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \epsilon,$
2. 当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \epsilon.$

取 $N = \max\{N_1, N_2\},$ 上两式同时成立, 即

$$a - \epsilon < y_n < a + \epsilon, \; a - \epsilon < z_n < a + \epsilon$$

当 $n > N$ 时，恒有

$$a - \epsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \epsilon$$

即 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立, $\quad \therefore \lim_{n\to\infty} x_n = a.$

定理 (极限存在准则 I′) 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记 若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$，定理仍成立.

注记 在上述定理中，如果不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立，结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 y_n $(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$，并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

定理 (极限存在准则 I′) 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$, 且 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$.

注记 若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$, 定理仍成立.

注记 在上述定理中, 如果不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立, 结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 y_n $(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$, 并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

定理 (极限存在准则 I′) 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记 若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$, 定理仍成立.

注记 在上述定理中, 如果不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立, 结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 y_n ($f(x)$) 与 $z_n(h(x))$, 并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

定理 (极限存在准则 I′) 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记 若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$, 定理仍成立.

注记 在上述定理中, 如果不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立, 结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 y_n ($f(x)$) 与 $z_n(h(x))$, 并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

定理 (极限存在准则 I′) 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$, 且 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记 若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$, 定理仍成立.

注记 在上述定理中, 如果不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立, 结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 y_n $(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$, 并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

一般地，如果当 $x \to 0$ 时，$\phi(x) \to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin[\phi(x)]}{\phi(x)}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

一般地，如果当 $x \to 0$ 时，$\phi(x) \to 0$，则有

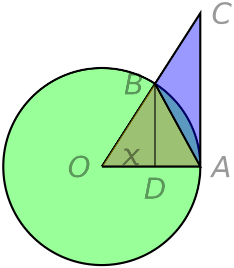
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin[\phi(x)]}{\phi(x)}=1$$

证明 如图所示，设单位圆 O，圆心角 $\angle AOB = x\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 作单位圆的切线，得 ΔACO. 设扇形 OAB 的圆心角为 x, ΔOAB 的高为 BD, 则有 $\sin x = BD$, $x =$ 弧 $\overset{\frown}{AB}$, $\tan x = AC$, 所以

$$\sin x < x < \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



重要极限 I

上式对于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\cos x = 1,$$

又因为

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

由两面夹准则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

上式对于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \cos x = 1,$$

又因为

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

由两面夹准则可得

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

上式对于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\cos x = 1,$$

又因为

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

由两面夹准则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\times\frac{1}{1} = 1$$

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1\times\dfrac{1}{1} = 1$

例 1　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解 易得

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot1^2$$

$$=\frac{1}{2}$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解　易得

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解 易得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2$$

$$=\frac{1}{2}$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解　易得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2$$

$$=\frac{1}{2}$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解　易得

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\times 1 = 3$$

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

解　原式

$$= \lim_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\times 1 = 3$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\right)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$= \frac{1}{4}\times 1\times 1 = \frac{1}{4}$$

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\right)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$= \frac{1}{4}\times 1\times 1 = \frac{1}{4}$$

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\right)$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$=\frac{1}{4}\times 1\times 1=\frac{1}{4}$$

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\right)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$= \frac{1}{4}\times 1\times 1 = \frac{1}{4}$$

练习　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x^2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}}{x}$

练习　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}\cdots\cdots\dfrac{5}{4}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\cdots\cdots\dfrac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x^2}\cdots\cdots\dfrac{2}{3}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}\cdots\cdots\dfrac{3}{5}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}}{x}\cdots\cdots 1$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

解　令 $t = x - \pi$, 则

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

解 令 $t=x-\pi$, 则

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1$$

例 5　求 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi}$.

解　令 $t = x - \pi$, 则

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

解　令 $t=x-\pi$, 则

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1$$

例 6 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. .... 1.

例 7 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$. .... 1.

例 8 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$. .... 1.

例 6　求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$. ....1.

例 7　求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$. ....1.

例 8　求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$. ....1.

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. ....1.

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$. ....1.

例 8　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$. ....1.

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. ....1.

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$. ....1.

例 8　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$. ....1.

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. ....1.

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$. ....1.

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$. ....1.

例 6 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$. ....1.

例 7 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$. ....1.

例 8 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2}$. ....1.

定理 (极限存在准则 II) 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记 若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记　若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

定理 (极限存在准则 II) 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记 若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

定理 (极限存在准则 II) 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记 若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

例子　证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$($n$ 重根式) 的极限存在, 并求出极限.

证明　显然 $x_{n+1} > x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的; 又 $x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3,$$

即 $\{x_n\}$ 是有界的; 故 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.又由 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$ 可得

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3+x_n}$$

设 $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = A$, 则有

$$A = \sqrt{3+A} \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, A = \frac{1-\sqrt{13}}{2}(\text{舍去})$$

例子 证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$($n$ 重根式) 的极限存在, 并求出极限.

证明 显然 $x_{n+1} > x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的; 又 $x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3,$$

即 $\{x_n\}$ 是有界的; 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.又由 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$ 可得

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3+x_n}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$, 则有

$$A = \sqrt{3+A} \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, A = \frac{1-\sqrt{13}}{2}(\text{舍去})$$

例子　证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$($n$ 重根式) 的极限存在, 并求出极限.

证明　显然 $x_{n+1} > x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的; 又 $x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3,$$

即 $\{x_n\}$ 是有界的; 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.又由 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$ 可得

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3+x_n}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$, 则有

$$A = \sqrt{3+A} \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, A = \frac{1-\sqrt{13}}{2}(\text{舍去})$$

例子　证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$($n$ 重根式) 的极限存在, 并求出极限.

证明　显然 $x_{n+1}>x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的; 又 $x_1=\sqrt{3}<3$, 假定 $x_k<3$, 则

$$x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3,$$

即 $\{x_n\}$ 是有界的; 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.又由 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3+x_n}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=A$, 则有

$$A=\sqrt{3+A}\Longrightarrow A=\frac{1+\sqrt{13}}{2},A=\frac{1-\sqrt{13}}{2}(\text{舍去})$$

例子　证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$($n$ 重根式) 的极限存在, 并求出极限.

证明　显然 $x_{n+1} > x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的; 又 $x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3,$$

即 $\{x_n\}$ 是有界的; 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.又由 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$ 可得

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3+x_n}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$, 则有

$$A = \sqrt{3+A} \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, A = \frac{1-\sqrt{13}}{2}(\text{舍去})$$

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

重要极限 II

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

证明　设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 则

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots \\
+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

显然 $x_{n+1}>x_n$,　$\therefore \{x_n\}$ 是单调递增的;

证明 又因为

$$\begin{aligned} x_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 是有界的由单调收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 记为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \quad (\mathrm{e}=2.71828\cdots)$$

可以证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xRightarrow{u=1/x} \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

一般地，如果当 $x \to a$ 时，$\psi(x) \to 0$，则有

$$\lim_{x\to a}\left(1+\psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}} = e$$

可以证明

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \xrightarrow{u=1/x} \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e}$$

一般地，如果当 $x\to a$ 时，$\psi(x)\to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(1+\psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}} = e}$$

可以证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e} \xRightarrow{u=1/x} \lim_{u\to 0}\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$$

一般地，如果当 $x\to a$ 时，$\psi(x)\to 0$，则有

$$\lim_{x\to a}\left(1+\psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}}=\mathrm{e}$$

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}$$

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}$$

例 9　求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

解　原式 $=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}$$

例 10 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}} = e^{-1/3}$$

例 10 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}}=e^{-1/3}$

例 10　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}}=e^{-1/3}$$

练习 1　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{3x}}$

练习 1 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x}$ ………………………… e^{-4}

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{3x}}$ ………………………… $e^{-\frac{2}{3}}$

定理　若 $\lim_{x\to\square} u(x) = A > 0$，$\lim_{x\to\square} v(x) = B$，则有

$$\lim_{x\to\square} u(x)^{v(x)} = A^B.$$

例 11 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{x-1}}=e^{2}.$$

例 11　求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

解　原式 $= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^2.$$

例 11 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{x-1}}=e^{2}.$$

例 11　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{x-1}}=e^{2}.$$

练习 2　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{x+1}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x-3}$

练习 2　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4x}}$ ······························ $e^{\frac{1}{4}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{x+1}$ ······························ e^{-1}

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x-3}$ ······························ e^{4}

例 12 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 由条件知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\ln e=1$$

例 12　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　由条件知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\ln e=1$$

例 12 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 由条件知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

例 12 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 由条件知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

例 13 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

解 令 $e^x-1=u$, 即 $x=\ln(1+u)$. 则当 $x\to 0$ 时, 有 $u\to 0$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}}=1$$

例 13 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

解 令 $e^x-1=u$, 即 $x=\ln(1+u)$. 则当 $x\to 0$ 时, 有 $u\to 0$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}}=1$$

例 13　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$

解　令 $e^x-1=u$, 即 $x=\ln(1+u)$. 则当 $x\to0$ 时, 有 $u\to0$, 于是

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}}=1$$

例 13 求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

解 令 $e^x-1=u$, 即 $x=\ln(1+u)$. 则当 $x\to 0$ 时, 有 $u\to 0$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}}=1$$

例子 复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4 = M \times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实 常数 e 反映了连续增长的规律.

例子 复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4 = M \times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实 常数 e 反映了连续增长的规律.

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4 = M \times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实　常数 e 反映了连续增长的规律.

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4 = M \times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实　常数 e 反映了连续增长的规律.

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4 = M \times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实　常数 e 反映了连续增长的规律.

设一笔贷款 A_0 (称为本金)，年利率为 r, 则

- 一年后本利和

  $A_1 = A_0(1+r)$

- 两年后本利和

  $A_2 = A_1(1+r) = A_0(1+r)^2$

- k 年后本利和

  $A_k = A_0(1+r)^k$

如果一年分 n 期计息，年利率仍为 r ，则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

设一笔贷款 A_0 (称为本金)，年利率为 r, 则

- 一年后本利和

  $A_1 = A_0(1 + r)$

- 两年后本利和

  $A_2 = A_1(1 + r) = A_0(1 + r)^2$

- k 年后本利和

  $A_k = A_0(1 + r)^k$

如果一年分 n 期计息，年利率仍为 r ，则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

连续复利

设一笔贷款 A_0 (称为本金)，年利率为 r, 则

- 一年后本利和

  $A_1 = A_0(1+r)$

- 两年后本利和

  $A_2 = A_1(1+r) = A_0(1+r)^2$

- k 年后本利和

  $A_k = A_0(1+r)^k$

如果一年分 n 期计息，年利率仍为 r ，则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

设一笔贷款 A_0 (称为本金)，年利率为 r, 则

- 一年后本利和

  $A_1 = A_0(1+r)$

- 两年后本利和

  $A_2 = A_1(1+r) = A_0(1+r)^2$

- k 年后本利和

  $A_k = A_0(1+r)^k$

如果一年分 n 期计息，年利率仍为 r，则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

设一笔贷款 A_0 (称为本金)，年利率为 r, 则

- 一年后本利和

  $A_1 = A_0(1 + r)$

- 两年后本利和

  $A_2 = A_1(1 + r) = A_0(1 + r)^2$

- k 年后本利和

  $A_k = A_0(1 + r)^k$

如果一年分 n 期计息，年利率仍为 r ，则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

k 年后本利和 $A_k = A_0\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nk}$

如果计息期数 $n \to \infty$ ，即每时每刻计算复利 (称为连续复利)，则 k 年后的本利和

$$A_k = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk} = \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rk}$$

$$= A_0 e^{rk}$$

连续复利

k 年后本利和 $A_k = A_0\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nk}$

如果计息期数 $n \to \infty$ ，即每时每刻计算复利 (称为连续复利)，则 k 年后的本利和

$$A_k = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk} = \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rk}$$

$$= A_0 e^{rk}$$

小结

1 两个准则

- 两面夹 (夹逼) 准则
- 单调有界准则

2 两个重要极限

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e.$

小结

1 两个准则

- 两面夹 (夹逼) 准则
- 单调有界准则

2 两个重要极限

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$

小结

1. 两个准则
   - 两面夹 (夹逼) 准则
   - 单调有界准则
2. 两个重要极限
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$
   - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e.$

小结

1. 两个准则
   - 两面夹 (夹逼) 准则
   - 单调有界准则
2. 两个重要极限
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$
   - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e.$

小结

1. 两个准则
   - 两面夹 (夹逼) 准则
   - 单调有界准则
2. 两个重要极限
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$
   - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e.$

小结

1. 两个准则
   - 两面夹 (夹逼) 准则
   - 单调有界准则
2. 两个重要极限
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$
   - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}.$

复习 1 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1}$

复习 1　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $e^{-\frac{2}{3}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x\sin x}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ e^{-3}

例子　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解　因为当 $x\to 0$ 时，$\cos x$ 不是无穷小，所以不能用重要极限 II 公式来计算.

实际上，这个函数是初等函数，且在 0 的邻域有定义，所以其极限为 $(1+1)^1=2$.

例子　求函数极限 $\lim_{x \to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解　因为当 $x \to 0$ 时，$\cos x$ 不是无穷小，所以不能用重要极限 II 公式来计算.

实际上，这个函数是初等函数，且在 0 的邻域有定义，所以其极限为 $(1+1)^1 = 2$.

例子　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解　因为当 $x\to 0$ 时，$\cos x$ 不是无穷小，所以不能用重要极限 II 公式来计算.

实际上，这个函数是初等函数，且在 0 的邻域有定义，所以其极限为 $(1+1)^1=2$.

例子 设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

例子 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，且当 $n \geq 1$ 时有 $x_{n+1} = \dfrac{1+x_n^2}{2}$. 研究数列的极限.

解 先说明数列收敛，再根据数列的递归关系求出其极限.

例子　设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

例子　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，且当 $n \geq 1$ 时有 $x_{n+1} = \dfrac{1+x_n^2}{2}$. 研究数列的极限.

解　先说明数列收敛，再根据数列的递归关系求出其极限.

例子 设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

例子 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，且当 $n \geq 1$ 时有 $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n^2}{2}$. 研究数列的极限.

解 先说明数列收敛，再根据数列的递归关系求出其极限.

例子 比较 $x \to 0$ 时的三个无穷小 x，$2x$，x^2.

x	1	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	$\to$	0
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	$\cdots$	$\to$	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	$\cdots$	$\to$	0

例子 比较 $x \to 0$ 时的三个无穷小 x，$2x$，x^2.

x	1	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	$\to$	0
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	$\cdots$	$\to$	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	$\cdots$	$\to$	0

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是 同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 和 α 是 等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$.

4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 和 α 是等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$.

4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 和 α 是等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$.

4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$, $k > 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 和 α 是等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$.

4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$, $k > 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$.
2. 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.
3. 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$, 则称 β 和 α 是同阶的无穷小.

★ 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 和 α 是等价无穷小，记为 $\beta\sim\alpha$.

4. 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0, k>0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x^3 低阶.

例 3　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例 4　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x^3 低阶.

例 3　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例 4　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

无穷小的阶

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x^3 低阶.

例 3　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例 4　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x^3 低阶.

例 3　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例 4　在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

例 5 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

证明 易知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

故 $\tan x - \sin x$ 为x 的三阶无穷小.

例 5 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

证明 易知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

故 $\tan x - \sin x$ 为x 的三阶无穷小.

例 5　证明: 当 $x \to 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

证明　易知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

故 $\tan x - \sin x$ 为x 的三阶无穷小.

例 5 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

证明 易知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

故 $\tan x - \sin x$ 为x 的三阶无穷小.

练习 1 已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 和 $g(x) = x^2$ 均为 $x \to 0$ 时的无穷小.

(1) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶?

(2) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶?

(3) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶?

(4) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价?

当 $x \to 0$ 时，有如下这些常用的等价无穷小：

(1) $\sin x \sim x$

(2) $\tan x \sim x$

(3) $\arcsin x \sim x$

(4) $\arctan x \sim x$

(5) $\ln(1+x) \sim x$

(6) $e^x - 1 \sim x$

(7) $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

(8) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$

意义：用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

定理 β 与 α 是等价无穷小的的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$. 称 α 是 β 的主要部分.

证明 $(\Longrightarrow)$ 设 $\alpha \sim \beta$, 则有

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \beta - \alpha = o(\alpha), \qquad \text{即} \beta = \alpha + o(\alpha)$$

$(\Longleftarrow)$ 设 $\beta = \alpha + o(\alpha)$, 则有

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) = 1$$

$$\therefore \quad \alpha \sim \beta$$

定理 β 与 α 是等价无穷小的的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$. 称 α 是 β 的主要部分.

证明 $(\Longrightarrow)$ 设 $\alpha \sim \beta$, 则有

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \beta - \alpha = o(\alpha), \qquad 即 \beta = \alpha + o(\alpha)$$

$(\Longleftarrow)$ 设 $\beta = \alpha + o(\alpha)$, 则有

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) = 1$$

$$\therefore \quad \alpha \sim \beta$$

定理 β 与 α 是等价无穷小的的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$. 称 α 是 β 的主要部分.

证明 $(\Longrightarrow)$ 设 $\alpha\sim\beta$, 则有

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=0$$

$$\therefore\quad \beta-\alpha=o(\alpha),\qquad \text{即}\beta=\alpha+o(\alpha)$$

$(\Longleftarrow)$ 设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$, 则有

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1$$

$$\therefore\quad \alpha\sim\beta$$

定理 设 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则有 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证明 易知

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

等价无穷小代换

定理　设 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则有 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证明　易知

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

定理 设 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则有 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证明 易知

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$$
$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解　当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x\sim 2x$,因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}=8.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$, 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}=8.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x\sim 2x$,因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}=8.$$

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解　当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x\sim 2x$,因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}=8.$$

例 7　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解　当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$,　$\arcsin x \sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

例 7　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解　当 $x \to 0$ 时 ,$\sin x \sim x$,　$\arcsin x \sim x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)x}{x} = \lim_{x \to 0}(x+1) = 1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积, 则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$, $\arcsin x\sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\sin x \sim x$， $\arcsin x \sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

例 7　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解　当 $x\to 0$ 时 , $\sin x\sim x$,　$\arcsin x\sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积, 则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

例子　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解　当 $x\to 0$, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$.

$$\text{原式}\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$ ✗

解（正确解法）　当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x\sim 2x$, $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$ ✓

注记　只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

例子 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解 当 $x\to 0$, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$ ✗

解（正确解法） 当 $x\to 0$ 时, $\sin 2x\sim 2x$, $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$ ✓

注记 只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

等价无穷小代换

例子 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解 当 $x\to 0$, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0. \qquad ✗$$

解 (正确解法) 当 $x\to 0$ 时, $\sin 2x\sim 2x$, $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}. \qquad ✓$$

注记 只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

等价无穷小代换

例子 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解 当 $x\to 0$，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$.

$$\text{原式}\neq\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$ ✗

解（正确解法） 当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x\sim 2x$，$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$ ✓

注记 只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

例子　求 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解　当 $x\to 0$, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$.

$$原式 \neq \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$ ✗

解（正确解法）　当 $x\to 0$ 时, $\sin 2x\sim 2x$, $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$ ✓

注记　只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

例子 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解 当 $x\to 0$, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$.

$$\text{原式}\neq\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0. \qquad ✗$$

解 (正确解法) 当 $x\to 0$ 时, $\sin 2x\sim 2x$, $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}. \qquad ✓$$

注记 只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

注记 当 $\alpha_1 \sim \beta_1$、$\alpha_2 \sim \beta_2$ 时，下列等式总是成立：

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \overset{\checkmark}{\sim} \beta_1 \cdot \beta_2$$

但下列等式未必成立：

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 \overset{\times}{\sim} \beta_1 \pm \beta_2$$

例子 当 $x \to 0$ 时，有

$$\boxed{\begin{array}{c} x + x^2 \sim x + x^3 \\ x \sim x \end{array}} \xrightarrow{\text{两边同时相减}} \boxed{x^2 \overset{\times}{\sim} x^3}$$

注记 当 $\alpha_1 \sim \beta_1$、$\alpha_2 \sim \beta_2$ 时，下列等式总是成立：

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \overset{\checkmark}{\sim} \beta_1 \cdot \beta_2$$

但下列等式未必成立：

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 \overset{\times}{\sim} \beta_1 \pm \beta_2$$

例子 当 $x \to 0$ 时，有

$$\boxed{\begin{array}{c} x + x^2 \sim x + x^3 \\ x \sim x \end{array}} \xrightarrow{\text{两边同时相减}} \boxed{x^2 \overset{\times}{\sim} x^3}$$

练习 2　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{(e^{2x}-1)\ln(1-2x)}$.

练习 2　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$; ·································· $\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{(e^{2x}-1)\ln(1-2x)}$. ·································· $-\dfrac{9}{8}$

小结

1. 无穷小的比较：反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较.
   - 高 (低) 阶无穷小;
   - 等价无穷小;
   - 无穷小的阶.
2. 等价无穷小的代换：求极限的又一种方法，注意适用条件.

思考 任何两个无穷小都可以比较吗？

思考　任何两个无穷小都可以比较吗？

答案　不能.

思考　任何两个无穷小都可以比较吗?

答案　不能. 例如当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ 都是无穷小量, 但 $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \sin x$ 不存在且不为无穷大. 故当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不能比较.

第四节	极限运算法则
第五节	极限存在准则、两个重要极限
第六节	无穷小的比较
第七节	**函数的连续性**
第八节	闭区间上连续函数的性质

例子　自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.
2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小.

对于 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0，如果 x 从 x_0 作微小改变 Δx 后，y 的相应改变量 Δy 也很微小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

例子　自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.
2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小.

对于 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0，如果 x 从 x_0 作微小改变 Δx 后，y 的相应改变量 Δy 也很微小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

例子　自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

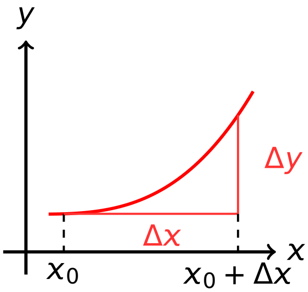
1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.
2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小.

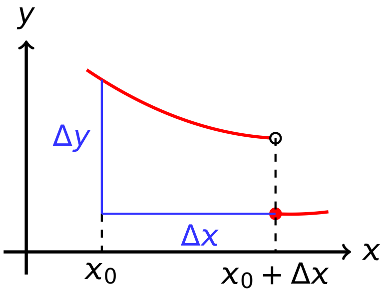
对于 $y=f(x)$ 定义域中的一点 x_0，如果 x 从 x_0 作微小改变 Δx 后，y 的相应改变量 Δy 也很微小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义, 当 x 在 $U(x_0,\delta)$ 内由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时, 称 Δx 为自变量 x 在点 x_0 的增量; 相应地, 函数 y 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$,

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量.





定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\Updownarrow$

定义 2　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\varepsilon-\delta$ 定义：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

定义 1 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$$\Updownarrow$$

定义 2 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\varepsilon-\delta$ 定义：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$$\Updownarrow$$

定义 2　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\varepsilon-\delta$ 定义：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使当 $|x-x_0|<\delta$ 恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续 $\Longleftrightarrow$ 函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件：

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，即
$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续 $\Longleftrightarrow$ 函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，即
$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续 $\Longleftrightarrow$ 函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续 $\Longleftrightarrow$ 函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$（极限存在）:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$（连续）:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$（极限存在）:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$（连续）:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in U(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)$$

例 1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在$x=0$ 处连续.

解 易知

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0,\ f(0)=0,\ \lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$$

由定义知, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 1　试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在$x=0$ 处连续.

解　易知

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0,\ f(0)=0,\ \lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$$

由定义知, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 2 证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明 任取 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1$, 故

$$|\Delta y| \leq 2 \left|\sin \frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的 α, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有 $|\sin \alpha| < \alpha$, 故

$$|\Delta y| \leq 2 \left|\sin \frac{\Delta x}{2}\right| < |\Delta x|,$$

所以当 $\Delta x \to 0$ 时 ,$\Delta y \to 0$. 即函数 $y = \sin x$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是连续的.

例 2 证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明 任取 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1$, 故

$$|\Delta y| \leq 2\left|\sin \frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的 α, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有 $|\sin \alpha| < \alpha$, 故

$$|\Delta y| \leq 2\left|\sin \frac{\Delta x}{2}\right| < |\Delta x|,$$

所以当 $\Delta x \to 0$ 时, $\Delta y \to 0$. 即函数 $y = \sin x$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是连续的.

例 2　证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明　任取 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1$, 故

$$|\Delta y| \leq 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的 α, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有 $|\sin\alpha| < \alpha$, 故

$$|\Delta y| \leq 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < |\Delta x|,$$

所以当 $\Delta x \to 0$ 时 ,$\Delta y \to 0$. 即函数 $y = \sin x$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是连续的.

例 2　证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明　任取 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1$, 故

$$|\Delta y| \leq 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的 α, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有 $|\sin\alpha| < \alpha$, 故

$$|\Delta y| \leq 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < |\Delta x|,$$

所以当 $\Delta x \to 0$ 时 ,$\Delta y \to 0$. 即函数 $y = \sin x$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是连续的.

例 2　证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明　任取 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, 故

$$|\Delta y| \le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的 α, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有 $|\sin\alpha| < \alpha$, 故

$$|\Delta y| \le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < |\Delta x|,$$

所以当 $\Delta x \to 0$ 时 ,$\Delta y \to 0$. 即函数 $y = \sin x$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是连续的.

定义 若函数 $f(x)$ 在 $(a,x_0]$ 内有定义，且 $f(x_0^-)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b)$ 内有定义，且 $f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow f\left(x_0^-\right)=f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$$

定义 若函数 $f(x)$ 在 $(a,x_0]$ 内有定义, 且 $f(x_0^-)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b)$ 内有定义, 且 $f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow f\left(x_0^-\right)=f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$$

定义 若函数 $f(x)$ 在 $(a, x_0]$ 内有定义，且 $f(x_0^-) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, b)$ 内有定义，且 $f\left(x_0^+\right) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**.

定理

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right) = f(x_0)$$

例 3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0)$

函数右连续但不左连续，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

例 3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0)$

函数右连续但不左连续，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

例 3　讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0)$

函数右连续但不左连续，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

练习 1　已知函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$，判断它在 $x = 0$ 处的连续性.

练习 1　已知函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$，判断它在 $x = 0$ 处的连续性.

答案　$f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

注记 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

定义　如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

注记　连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

注记 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

注记 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a, b) 内连续;
- 在左端点 $x = a$ 处右连续;
- 在右端点 $x = b$ 处左连续.

注记 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 **间断**，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的**间断点**.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点，有以下三种情形：

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义；
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 **间断**，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的**间断点**.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点，有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 间断，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点，有以下三种情形：

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义；
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义, 如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 **间断**，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的**间断点**.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

定义 3 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例子 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处有可去间断点.

例子 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ .... 可去间断点

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义，即可使其变为连续点.

定义 3　如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例子　$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处有可去间断点.

例子　$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ .... 可去间断点

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义，即可使其变为连续点.

可去间断点

定义 3　如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例子　$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处有可去间断点.

例子　$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ .... 可去间断点

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义，即可使其变为连续点.

定义 3 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例子 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处有可去间断点.

例子 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ .... 可去间断点

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义，即可使其变为连续点.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例子 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ ……………………跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点；
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左, 右极限都存在, 但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例子 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ .... 跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点;
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例子 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ ....跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点;
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例子 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ ....跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点；
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

跳跃间断点

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在，但 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例子 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ .... 跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点;
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例子 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处........................无穷间断点

例子 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处......................振荡间断点

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例子 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处 .... 无穷间断点

例子 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处 .... 振荡间断点

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例子 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处........................无穷间断点

例子 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处.......................振荡间断点

注记 间断点常见位置：（1）分母为零；（2）分段点.

例子 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点，并判断类型.

例子 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\le 1, x\neq 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$ 的间断点，并判断其类型.

注记 间断点常见位置：（1）分母为零；（2）分段点.

例子 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点，并判断类型.

例子 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\le 1, x\neq 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$ 的间断点，并判断其类型.

注记 间断点常见位置：（1）分母为零；（2）分段点.

例子 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点，并判断类型.

例子 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\le 1, x\ne 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\ne 2\end{cases}$ 的间断点，并判断其类型.

函数的间断点可能不只是个别的几个点.

例子　狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{当} x \text{ 是有理数时}, \\ 0, \text{当} x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

在定义域 R 内每一点处都间断, 且都是第二类间断点.

例子　$f(x) = \begin{cases} x, \text{当} x \text{ 是有理数时}, \\ -x, \text{当} x \text{ 是无理数时} \end{cases}$ 仅在 $x = 0$ 处连续, 其余各点处处间断.

函数的间断点可能不只是个别的几个点.

例子　狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{当} x \text{ 是有理数时,}\\ 0, \text{当} x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

在定义域 R 内每一点处都间断, 且都是第二类间断点.

例子　$f(x)=\begin{cases}x, \text{当} x \text{ 是有理数时,}\\ -x, \text{当} x \text{ 是无理数时}\end{cases}$　仅在 $x=0$ 处连续, 其余各点处处间断.

例 4　求 a 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

解　易知 $f(0)=a$，且

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

由 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，得 $a=1$.

例 4 求 a 的值, 使函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

解 易知 $f(0)=a$, 且

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

由 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$, 得 $a=1$.

定理 1 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

例子 $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 在其定义域内连续.

定理 1 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

例子 $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 在其定义域内连续.

定理 2 严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

例子 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续故

$$y = \arcsin x$$

在 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 2　严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

例子　$y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续故

$$y = \arcsin x$$

在 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 2 严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

例子 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续故

$$y=\arcsin x$$

在 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上单调减少且连续;

$y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 2 严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

例子 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续故

$$y = \arcsin x$$

在 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 3 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

例子 因为 $u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续，$y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，

故 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续.

定理 3 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

例子 因为 $u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续, $y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,

故 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续.

定理 4 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

例子 $y = \sqrt{\cos x - 1}$, $D: x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义, 故不连续.

定理 4 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

例子 $y=\sqrt{\cos x-1}$, $D: x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义, 故不连续.

定理 4 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

例子 $y=\sqrt{\cos x-1}$, $D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义, 故不连续.

初等函数在连续点求极限可用代入法.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in \text{ 定义区间})$$

例 5　求 $\lim_{x\to 1} \sin\sqrt{e^x - 1}$

解　原式 $= \sin\sqrt{e^1 - 1} = \sin\sqrt{e-1}$.

初等函数在连续点求极限可用代入法.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \left(x_0 \in \text{ 定义区间}\right)$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 1} \sin\sqrt{e^x - 1}$

解　原式 $= \sin\sqrt{e^1 - 1} = \sin\sqrt{e - 1}$.

初等函数在连续点求极限可用代入法.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \left(x_0 \in \text{ 定义区间}\right)$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 1} \sin\sqrt{e^x - 1}$

解　原式 $= \sin\sqrt{e^1 - 1} = \sin\sqrt{e - 1}$.

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用：代入法.

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
   - 第二类间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用: 代入法.

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用：代入法.

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用：代入法.

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用：代入法.

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用：代入法.

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用：代入法.

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用：代入法.

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用：代入法.

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用: 代入法.

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用: 代入法.

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
     - 可去间断点: $f(x_0^-) = f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点: $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
     - 无穷间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
     - 振荡间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大
4. 初等函数的连续性
   - 初等函数在其定义区间上连续;
   - 初等函数的连续性在求极限时的应用: 代入法.

思考

思考　若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 、$f^2(x)$ 在 x_0 是否连续? 又若 $|f(x)|$ 、$f^2(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)$ 在 x_0 是否连续?

思考　若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 、$f^2(x)$ 在 x_0 是否连续? 又若 $|f(x)|$ 、$f^2(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)$ 在 x_0 是否连续?

答案　因为 $f(x)$ 在 x_0 连续, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 且

$$0 \le \left||f(x)|-|f(x_0)|\right| \le |f(x)-f(x_0)|$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|.$$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] = f^2(x_0)$$

故 $|f(x)|, f^2(x)$ 在 x_0 都连续.

但反之不成立. 例 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x_0 = 0$ 不连续,

但 $|f(x)|, f^2(x)$ 在 $x_0 = 0$ 连续.

定义　对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

例子　$y = 1 + \sin x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

例子　$y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

例子　$y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(0, +\infty)$ 上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$

定义 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

例子 $y = 1 + \sin x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

例子 $y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

例子 $y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(0, +\infty)$ 上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$

定义　对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

例子　$y = 1 + \sin x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

例子　$y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

例子　$y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(0, +\infty)$ 上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$

定义 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

例子 $y = 1 + \sin x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

例子 $y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

例子 $y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(0, +\infty)$ 上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$

最值定理

定理 1 (最值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\exists \xi_1,\xi_2\in[a,b]$, 使得 $\forall x\in[a,b]$ 时, 有

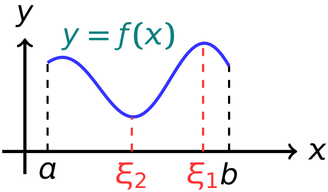
$$f(\xi_1)\geq f(x),\ f(\xi_2)\leq f(x).$$

1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

定理 1 (最值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\exists \xi_1,\xi_2\in[a,b]$, 使得 $\forall x\in[a,b]$ 时, 有

$$f(\xi_1)\geq f(x),\ f(\xi_2)\leq f(x).$$

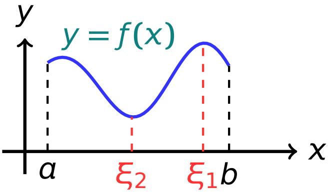


1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

定理 1 (最值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\exists \xi_1,\xi_2\in[a,b]$, 使得 $\forall x\in[a,b]$ 时, 有

$$f(\xi_1)\geq f(x),\ f(\xi_2)\leq f(x).$$



1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

例 1　函数 $y = \tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是连续的，但在这个开区间上它是无界的，而且也没有最大值和最小值.

例 2　函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

在区间 $[0, 2]$ 虽然有界，但既无最大值也无最小值.

例 1　函数 $y = \tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是连续的，但在这个开区间上它是无界的，而且也没有最大值和最小值.

例 2　函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

在区间 $[0, 2]$ 虽然有界，但既无最大值也无最小值.

定义 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 2 (零点定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

几何解释：连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.

零点定理

定义 如果 x_0 使 $f(x_0) = 0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

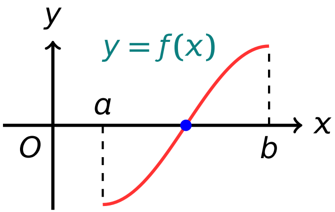
定理 2 (零点定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi) = 0$.

几何解释：连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.

定义　如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 2 (零点定理)　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

几何解释：连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



例 3　证明方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$，$(0, 1)$，$(1, 3)$ 内各有一个实根.

例 4　证明方程 $2\sin x = x + 1$ 有实数解.

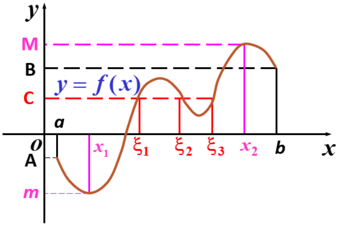
例 3 证明方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$，$(0, 1)$，$(1, 3)$ 内各有一个实根.

例 4 证明方程 $2\sin x = x + 1$ 有实数解.

定理 3 (介值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

证明　令 $g(x)=f(x)-C$. 则由零值定理可以得到结论.

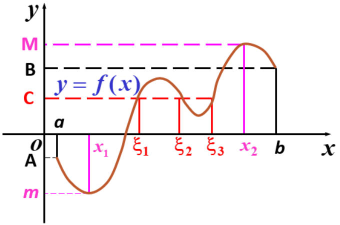
几何意义：在 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ (C 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间) 至少相交一点.



定理 3 (介值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

证明 令 $g(x)=f(x)-C$. 则由零值定理可以得到结论.

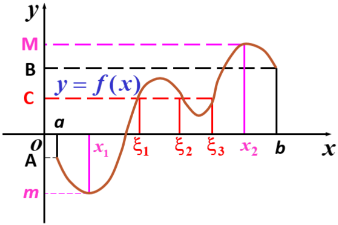
几何意义：在 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ (C 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间) 至少相交一点.



定理 3 (介值定理)　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

证明　令 $g(x)=f(x)-C$. 则由零值定理可以得到结论.

几何意义： 在 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ (C 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间) 至少相交一点.



推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

证明 设 $f(x_1) = M, f(x_2) = m$, 在区间 $[x_1, x_2]$(或者 $[x_2, x_1]$) 上运用介值定理可得结论

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

证明 设 $f(x_1)=M, f(x_2)=m$, 在区间 $[x_1,x_2]$(或者 $[x_2,x_1]$) 上运用介值定理可得结论

例 5　证明方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在开区间 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

证明　令 $f(x) = x^5 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，又

$$f(0) = 1 > 0,\ f(1) = -1 < 0,$$

由零点定理, $\exists \xi \in (a, b)$，使 $f(\xi) = 0$，即

$$\xi^5 - 3\xi + 1 = 0$$

$\therefore$ 方程$x^5 - 3x + 1 = 0$ 在$(0, 1)$ 上至少有一根ξ.

例 5 证明方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明 令 $f(x) = x^5 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 又

$$f(0) = 1 > 0,\ f(1) = -1 < 0,$$

由零点定理, $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^5 - 3\xi + 1 = 0$$

$\therefore$ 方程$x^5 - 3x + 1 = 0$ 在$(0,1)$ 上至少有一根ξ.

例 5 证明方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明 令 $f(x) = x^5 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$$f(0) = 1 > 0,\ f(1) = -1 < 0,$$

由零点定理, $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^5 - 3\xi + 1 = 0$$

$\therefore$ 方程$x^5 - 3x + 1 = 0$ 在$(0,1)$ 上至少有一根ξ.

例 5　证明方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明　令 $f(x) = x^5 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$$f(0) = 1 > 0,\ f(1) = -1 < 0,$$

由零点定理, $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^5 - 3\xi + 1 = 0$$

$\therefore$ 方程$x^5 - 3x + 1 = 0$ 在$(0,1)$ 上至少有一根ξ.

例 5 证明方程 $x^5-3x+1=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明 令 $f(x)=x^5-3x+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$$f(0)=1>0,\ f(1)=-1<0,$$

由零点定理, $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^5-3\xi+1=0$$

$\therefore$ 方程$x^5-3x+1=0$ 在$(0,1)$ 上至少有一根ξ.

例 5 证明方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明 令 $f(x) = x^5 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$$f(0) = 1 > 0,\ f(1) = -1 < 0,$$

由零点定理, $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^5 - 3\xi + 1 = 0$$

$\therefore$ 方程$x^5 - 3x + 1 = 0$ 在$(0,1)$ 上至少有一根ξ.

例 6　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $[a,b]$ 上的 n 个点，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

证明　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m.于是

$$m\le f(x_i)\le M,\quad i=1,2,\cdots n$$

从而

$$nm\le\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le nM\Longrightarrow m\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le M$$

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $[a,b]$ 上的 n 个点，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ ，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m. 于是

$$m\le f(x_i)\le M,\quad i=1,2,\cdots n$$

从而

$$nm\le\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le nM\Longrightarrow m\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le M$$

例 6　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 $[a,b]$ 上的 n 个点，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$$

证明　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m.于是

$$m \le f(x_i) \le M, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

从而

$$nm \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le nM \Longrightarrow m \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le M$$

例 6　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $[a,b]$ 上的 n 个点，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

证明　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m.于是

$$m\leq f(x_i)\leq M,\quad i=1,2,\cdots n$$

从而

$$nm\leq\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leq nM\Longrightarrow m\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leq M$$

1 若 $f(a)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ 或 $f(b)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$, 则可取 $\xi=a$ 或 $\xi=b$.

2 若 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ 与 $f(a)$, $f(b)$ 不同, 由介值定理可知, 在 (a,b) 至少存在一点 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

综上，命题得证.

例 7 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对于任意的 $x \in [a,b]$ 都有 $a \le f(x) \le b$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有不动点，即存在 $x^* \in [a,b]$, 使 $f(x^*) = x^*$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由于 $a \le f(x) \le b$, 故

$$g(a) \ge 0, \ g(b) \le 0.$$

1. 若 $g(a) = 0$, 可取 $x^* = a$.
2. 若 $g(b) = 0$, 可取 $x^* = b$.
3. 若 $g(a) > 0, g(b) < 0$, 则由介值定理知，存在 $x^* \in (a,b)$, 使 $g(x^*) = 0$, 即有 $f(x^*) = x^*$.

例 7　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对于任意的 $x \in [a,b]$ 都有 $a \le f(x) \le b$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有不动点，即存在 $x^* \in [a,b]$, 使 $f(x^*) = x^*$.

证明　令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由于 $a \le f(x) \le b$, 故

$$g(a) \ge 0,\ g(b) \le 0.$$

1. 若 $g(a) = 0$, 可取 $x^* = a$.
2. 若 $g(b) = 0$, 可取 $x^* = b$.
3. 若 $g(a) > 0, g(b) < 0$, 则由介值定理知，存在 $x^* \in (a,b)$, 使 $g(x^*) = 0$, 即有 $f(x^*) = x^*$.

例 7 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对于任意的 $x \in [a,b]$ 都有 $a \le f(x) \le b$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有不动点，即存在 $x^* \in [a,b]$, 使 $f(x^*) = x^*$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由于 $a \le f(x) \le b$, 故

$$g(a) \ge 0,\ g(b) \le 0.$$

1. 若 $g(a) = 0$, 可取 $x^* = a$.
2. 若 $g(b) = 0$, 可取 $x^* = b$.
3. 若 $g(a) > 0, g(b) < 0$, 则由介值定理知，存在 $x^* \in (a,b)$, 使 $g(x^*) = 0$, 即有 $f(x^*) = x^*$.

例 7　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对于任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $a\le f(x)\le b$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有不动点，即存在 $x^*\in[a,b]$，使 $f(x^*)=x^*$.

证明　令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由于 $a\le f(x)\le b$，故

$$g(a)\ge 0,\ g(b)\le 0.$$

1. 若 $g(a)=0$，可取 $x^*=a$.
2. 若 $g(b)=0$，可取 $x^*=b$.
3. 若 $g(a)>0, g(b)<0$，则由介值定理知，存在 $x^*\in(a,b)$，使 $g(x^*)=0$，即有 $f(x^*)=x^*$.

介值定理

例 8　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) < a, f(b) > b$. 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \xi$

例 8　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a, f(b)>b$. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$

证明　令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 而

$$F(a)=f(a)-a<0,\ F(b)=f(b)-b>0,$$

由零点定理, $\exists\xi\in(a,b)$, 使

$$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0,$$

即 $f(\xi)=\xi$

假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数. 如果生产某种商品的资源十分昂贵，则价格为零时供给必为零，即 $S(0) = 0$; 再假定 $D(0) > 0$, 即消费者有消费欲望. 令

$$Z(P) = D(P) - S(P); \text{ 于是 } Z(0) = D(0) - S(0) > 0.$$

另外，当价格涨到某个充分大的值 $P = P^*$ 时，公司会发现生产该产品利润丰厚, 而顾客会感到价格过高, 这样必然导致供过于求, 即 $D(P^*) < S(P^*)$, 从而

$$Z(P^*) = D(P^*) - S(P^*) < 0.$$

均衡价格的存在性

假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数. 如果生产某种商品的资源十分昂贵，则价格为零时供给必为零，即 $S(0) = 0$; 再假定 $D(0) > 0$, 即消费者有消费欲望. 令

$$Z(P) = D(P) - S(P); \text{ 于是 } Z(0) = D(0) - S(0) > 0.$$

另外，当价格涨到某个充分大的值 $P = P^*$ 时，公司会发现生产该产品利润丰厚, 而顾客会感到价格过高, 这样必然导致供过于求, 即 $D(P^*) < S(P^*)$, 从而

$$Z(P^*) = D(P^\star) - S(P^*) < 0.$$

又 $D = D(P)$ 和 $S = S(P)$ 都是区间 $[0, P^*]$ 上的连续函数，所以 $Z(P) = D(P) - S(P)$ 也是区间 $[0, P^*]$ 上的连续函数，于是由零点定理，存在 $P_e \in (0, P^*)$，使得

$$Z(P_e) = D(P_e) - S(P_e) = 0,$$

即

$$D(P_e) = S(P_e), \text{ 且 } P_e > 0.$$

定理 假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数，且满足:

1. 价格为零时，需求超过供给，即 $D(0) > S(0)$;
2. 存在某个价格 $P = P^* > 0$, 使得在此价格下，供给超过需求，即 $S(P^*) > D(P^*)$.

则市场上一定存在一个正的均衡价格,即存在 $P_e > 0$, 使得 $D(P_e) = S(P_e)$.

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法：先利用最值定理，再利用介值定理；
  2. 辅助函数法：先作辅助函数 $F(x)$，再利用零点定理。

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法：先利用最值定理，再利用介值定理；
  2. 辅助函数法：先作辅助函数 $F(x)$，再利用零点定理。

小结

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法：先利用最值定理，再利用介值定理；
  2. 辅助函数法：先作辅助函数 $F(x)$，再利用零点定理。

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法：先利用最值定理，再利用介值定理；
  2. 辅助函数法：先作辅助函数 $F(x)$，再利用零点定理.

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路

小结

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法: 先利用最值定理, 再利用介值定理;
  2. 辅助函数法: 先作辅助函数 $F(x)$, 再利用零点定理;

小结

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法: 先利用最值定理, 再利用介值定理;
  2. 辅助函数法: 先作辅助函数 $F(x)$, 再利用零点定理;

小结

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法: 先利用最值定理, 再利用介值定理;
  2. 辅助函数法: 先作辅助函数 $F(x)$, 再利用零点定理;

思考题

思考　假设有一个登山者头天上午 8 点从山脚开始上山, 晚上 6 点到达山顶，第二天上午 8 点从山顶沿原路下山，下午 6 点到达山脚．问该登山者在上、下山过程中，会同时经过同一地点吗？为什么？

答案　会.

不妨设山高为 h, 登山者头天登山的高度函数 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 在 $[8,18]$ 上连续，且

$$f_1(8)=0,\ f_1(18)=h;\ f_2(8)=h,\ f_2(18)=0$$

设

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x),$$

则 $f(x)$ 在 $[8,18]$ 上连续, 且

$$f(8)=-h<0,\ f(18)=h>0.$$

由零点定理知存在一点 $\xi\in(8,18)$, 使 $f(\xi)=0$.

练习题

问题 证明方程 $x = a\sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$.

问题 若 $f(x)$ 在 $[\ a, b\ ]$ 上连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有 ξ, 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n)}{n}$$