

第四章 中值定理及导数的应用

一、单项选择题

1. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加, 则必有 ().
(A) $f'(x) < 0$; (B) $f'(x) > 0$ (C) $f'(x) \geq 0$; (D) A, B, C 都不对.
2. 函数 $y = f(x)$ 满足条件: $f(0) = 1, f'(0) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) > 0, f''(x) \begin{cases} < 0, & x < 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases}$, 它的图形是 ().
3. 设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则使不等式 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$ 成立的条件是 ().
(A) $0 < a < b$; (B) $e < a < b$; (C) $0 < b < a$; (D) $e < b < a$.
4. 关于函数 $y = x - \ln x$ 的极值, 结论正确的是 ().
(A) 有极小值 1; (B) 有极大值 1; (C) 无极值 $e - 1$; (D) 有极小值 $e - 1$.
5. 关于函数 $y = 2x - \ln(4x)^2$ 的极值, 结论正确的是 ().
(A) 有极大值 $2 - 4\ln 2$; (B) 有极小值 $2 - 4\ln 2$;
(C) 无极值; (D) 有极小值 $\frac{1}{2}$.
6. 曲线 $y = 3x^2 - x^3$ 在 ().
(A) $(1, +\infty)$ 是凹的, $(-\infty, 1)$ 是凸的;
(B) $(1, +\infty)$ 是凸的, $(-\infty, 1)$ 是凹的;
(C) $(0, +\infty)$ 内是凸的, 在 $(-\infty, 0)$ 是上凹的;
(D) $(0, +\infty)$ 内是上凹的, $(-\infty, 0)$ 是上凸的;
7. 曲线 $y = x^2 \ln x$ 在点 $\left(\frac{1}{e^4}, \frac{1}{e^2}\right)$ 近邻是 ().
(A) 向上凸的; (B) 向上凹的;
(C) 左侧近邻向上凸, 右侧近邻向上凹; (D) 左侧近邻向上凹, 右侧的邻向上凸;

8. 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的拐点情况是 ().
 (A) 没有拐点; (B) 有一个拐点; (C) 有两个拐点; (D) 有三个拐点.
9. 若 $(x_0, f(x_0))$ 为连续曲线 $y = f(x)$ 上的凹弧与凸弧分界点, 则 ().
 (A) $(x_0, f(x_0))$ 必为曲线的拐点; (B) $(x_0, f(x_0))$ 必定为曲线的驻点;
 (C) x_0 为 $f(x)$ 的极值点; (D) x_0 必定不是 $f(x)$ 的极值点;
10. 曲线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a > 0)$ ().
 (A) 有无穷多个拐点; (B) 有两个拐点;
 (C) 无拐点; (D) 有一个拐点.
11. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2 + c$ 的拐点, 则必有 ().
 (A) $a = 1, b = -3, c = 1$; (B) a 任意, $b = 0, c = 1$;
 (C) $a = 1, b = 0, c$ 任意; (D) $b = -3a, a$ 任意, $c = 1$.
12. 关于曲线 $y = \ln x$ 的渐近线, 下述结论正确的是 ().
 (A) 只有水平渐近线;
 (B) 只有铅直渐近线;
 (C) 既有水平渐近线, 又有铅直渐近线;
 (D) 既没有水平渐近线, 也没有铅直渐近线.
13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right) =$ ().
 (A) $-5/3$; (B) -1 ; (C) 1 ; (D) $5/3$.
14. 在区间 $[0, 8]$ 内, 对函数 $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$, 罗尔定理 ().
 (A) 不成立; (B) 成立, 并且 $f'(2) = 0$;
 (C) 成立, 并且 $f'(4) = 0$; (D) 成立, 并且 $f'(8) = 0$.
15. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 记 (I) $f(a) = f(b)$; (II) 在 (a, b) 内至少存在 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$, 则 ().
 (A) (I) 是 (II) 的充分但非必要条件; (B) (I) 是 (II) 的必要但非充分条件;
 (C) (I) 是 (II) 的充要条件; (D) (I) 是 (II) 既非充分, 也非必要条件.

16. 设 $f(x) = \begin{cases} 3-x^2, & 0 \leq |x| \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$, 则在区间内 $(0, 2)$ 满足 $f(2) - f(0) = f'(\xi)(2-0)$ 的 ξ 值 ().

(A) 只有一个; (B) 不存在; (C) 有两个; (D) 有三个.

17. 设 $a < b, ab < 0, f(x) = \frac{1}{x}$, 则在 $a < x < b$ 内使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ 成立的点 ξ ().

(A) 只有一点;
(B) 有两点;
(C) 不存在;
(D) 是否存在, 与 a, b 的具体数值有关.

18. 设 $f(x)$ 有直至 $n+1$ 阶导数, 则 $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$ 式中拉格朗日型余项 $R_n(x) = ()$ (设 $0 < \theta < 1$)

(A) $\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$; (B) $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$;
(C) $\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} (\theta x)^{n+1}$; (D) $\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}$.

19. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在点 $x = 1$ 处取得极值 -2 , 则 ().

(A) $a = -3, b = 0$ 且点 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值;
(B) $a = 0, b = -3$ 且点 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值;
(C) $a = -3, b = 0$ 且点 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值;
(D) $a = 0, b = -3$ 且点 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.

20. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)}$ 的所有渐近线有 () 条

(A) 4; (B) 3; (C) 2; (D) 1.

二、填空题

1. 曲线 $y = 1 - \sqrt[3]{x-2}$ 的拐点是_____.

2. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导且满足 $f'(x) \equiv 0$, 则在 (a, b) 内 $f(x) =$ _____.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处具有二阶导数, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 3$, 则极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$, $(b \neq 0)$.

5. 设 $a > 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{ax}}$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. $f(x) = x^3$ 在 $[0, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 函数 $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上不具有罗尔定理的结论, 其原因是由于 $f(x)$ 不满足罗尔定理的一个条件 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3}$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$).

10. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 3x - \sin x}$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1 - x}{2x}$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan nx}{\tan mx}$ (其中 m, n 为正整数) 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - e^{-x}}$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^x}$ (其中 $k > 0$) 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) + \ln(x-h) - 2\ln x}{h^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. 曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

20. 曲线 $y = \frac{e^x}{x+1}$ 有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个拐点.

三、计算题

1. 判定函数 $f(x) = x + \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的单调性.

2. 求函数 $y = (x+1)^4 + e^x$ 的图形的拐点及凹凸区间.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{e^{\sin 4x} - e^{\sin 8x}}.$

4. 设 $f(x)$ 有一阶导数, $f(0) = f'(0) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{\ln f(x)}$

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 5^{-3x}}{2 \arcsin x - x}$

6. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \ln(3x-2)}{e^{x+1} - e^{x^2+1}}$$

7. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |\sin ax|}{\ln |\sin bx|}$ (a, b 都是不为 0 的常数).

8. 试决定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a, b, c, d , 使得 $x = -2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$ 为拐点, 且点 $(-2, 44)$ 在曲线上.

9. 求函数 $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值, 最小值.

10. 求曲线 $y = \frac{e^x}{1+x}$ 的渐近线

四、综合与应用题

1. 用长度为 l 米 ($l > 0$) 的篱笆在直的河岸边围成三面是篱笆一面是河的矩形场地, 求矩形场地的最大面积.

2. 要做一个圆锥形漏斗, 其母线长 20 cm, 要使其体积最大, 问其高应为多少?
3. 设有一块边长为 a 的正方形铁皮, 从四个角截去同样的小方块, 做成一个无盖的方盒子, 问小方块的边长为多少才使盒子的容积最大?
4. 设某产品的销售量 Q 与价格 P 之间有关系式为 $Q = \frac{1-P}{P}$
 - (1) 求需求弹性;
 - (2) 售价为 0.5 时的需求弹性. 并给出经济解释.
5. 某厂生产某种商品, 其年销售量为 100 万件, 每批生产需增加准备费 1000 元, 而每件的库存费为 0.05 元. 如果年销售是均匀的, 且上批销售完后, 立即再生产下一批 (此时商品库存量为批量的一半), 问分几批生产, 能使生产准备费及库存费之和最小?
6. 某商品的价格 P 与需求量 Q 的关系为 $P = 10 - \frac{Q}{5}$,
 - (1) 求需求量为 20 及 30 时的总收益 R 、平均收益 \bar{R} 及边际收益 R' ;
 - (2) Q 为多少时总收益最大?
7. 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 处有极值 -2 , 试确定系数 a, b , 并求出 $y = f(x)$ 的所有极值点及拐点.
8. 在半径为 R 的球内, 求体积最大的内接圆柱体的高.
9. 由三块同一宽度的板做成一个梯形的排水槽 (无上盖), 问侧面与底的倾角 α 为多大时, 才使水槽的横断面积最大?
10. 将半径为 r 的圆铁片, 剪去一个扇形, 问其中心角 α 为多大时, 才能使余下部分围成的圆锥形容器的容积最大?

五、证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上连续, 在 $(1, e)$ 内可导, 且 $f(1) = 0, f(e) = 1$, 证明方程 $xf'(x) = 1$ 在 $(1, e)$ 内至少有一实根.
2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} b^3 & a^3 \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi^2 [3f(\xi) + \xi f'(\xi)].$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, 且 $f(2)=0$, 证明至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$, 使

$$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi \ln(\xi)}.$$

4. 设 $b > a > 0$, 证明: $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$.

5. 证明当 $x \neq 0$ 时, 有不等式 $e^x > 1+x$.