

第三章 导数、微分、边际与弹性

一、选择题（选择正确的选项）

1. 已知生产某商品 Q 单位, 需求函数为 $Q = 16 - \frac{P}{3}$, 当 $P = 8$ 时, 若价格上涨 1%, 则需求将 ().
(A) 减少 0.8% (B) 增加 0.8% (C) 减少 0.2% (D) 增加 0.2%
2. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的第一类间断点的个数为 ().
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
3. 设 $Q = f(p)$ 为需求函数, 其中 p 为价格 (单位: 元 / 吨), Q 为需求量 (单位: 吨). 若价格为 100 元 / 吨时的需求弹性为 $\eta(100) = -\frac{100}{f(100)}$, $f'(100) = 0.25$, 则当价格调整为 101 元 / 吨时, 需求量将约 ().
(A) 增加 25% (B) 增加 0.25% (C) 减少 25% (D) 减少 0.25%
4. 函数 $y = |\sin x|$ 在 $x = 0$ 处是 ().
(A) 无定义 (B) 有定义, 但不连续
(C) 连续但不可导 (D) 连续且可导
5. 设 $y = x + \sin x$, dy 是 y 在 $x = 0$ 点的微分, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 有 ().
(A) dy 与 Δx 相比是等价无穷小
(B) dy 与 Δx 相比是同阶 (非等价) 无穷小
(C) dy 是比 Δx 高阶的无穷小
(D) dy 是比 Δx 低阶的无穷小
6. 设函数 $y = (1 + \cos x)^{\arcsin x}$, 则微分 $dy|_{x=0} = ()$.
(A) $-2dx$ (B) $-\ln 2 dx$ (C) $2dx$ (D) $\ln 2 dx$

7. 设需求函数 $Q = 3000e^{-0.125p}$, 则当价格 $p = 10$, 且上涨 1% 时, 需求量 Q 约 ().
 (A) 减少 1.25% (B) 增加 1.25% (C) 减少 125% (D) 增加 125%
8. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则函数 $f\left(x + \frac{1}{4}\right) + f\left(x - \frac{1}{4}\right)$ 的定义域为 ().
 (A) $[0, 1]$ (B) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$ (C) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ (D) $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$
9. 设函数 $f(x) = \sin 2x + 3^x$, 则导数值 $f'(0) = ()$.
 (A) $\ln 3 - 2$ (B) $\ln 3 + 2$ (C) 1 (D) $\ln 3 + 1$
10. 设 $f(x) = 3^x + x^2 + \ln 3$, 则 $f'(1)$ 等于 ().
 (A) $3 \ln 3$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{\ln 3} + 2$ (D) $3 \ln 3 + 2$
11. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - f(1-x)}{x} = ()$
 (A) $f'(1)$ (B) $2f'(1)$ (C) 0 (D) $f'(2)$
12. 某需求函数为 $Q = -100P + 3000$, 那么当 $P = 20$ 时需求的价格弹性 $E_d = ()$
 (A) 2 (B) 1000 (C) -100 (D) -2
13. 设 $f(x) = 2^x + \ln 2$, 则 $f'(1)$ 等于 ().
 (A) $2 \ln 2$; (B) $2 \ln 2 + \frac{1}{2}$; (C) $\frac{2}{\ln 2}$; (D) $\frac{2}{2 \ln 2} + \frac{1}{2}$.

二、填空题 (请将答案写在横线上)

1. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, 1)$ 处的切线方程为 _____.
2. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3x+2}$, 对正整数 n , 则 $f^{(n)}(0) =$ _____.
3. 设产量为 Q , 单价为 P , 厂商成本函数为 $C(Q) = 100 + 13Q$, 需求函数为 $Q(P) = \frac{800}{P+3} - 2$, 则厂商取得最大利润时的产量为 _____.
4. 设函数 $f(x) = (1 + \cos x)^{\frac{1}{x}}$, $dy|_{x=\frac{\pi}{2}} =$ _____.

5. 设 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = t f'(t) - f(t) \end{cases}$, 其中 $f(t)$ 具有二阶导数, 且 $f''(t) \neq 0$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

6. 设函数 $f(x) = x(\sin x)^{\cos x}$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ _____.

7. 设商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$, 其中 Q, P 分别表示需求量和价格. 如果商品需求弹性的绝对值大于 1, 则商品的价格的取值范围是 _____.

8. 设曲线 $f(x) = x^n, n \in N$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴相交于 $(\xi_n, 0)$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) =$ _____.

9. 由参数方程 $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$ 所确定的曲线在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程是 _____.

10. 设 $y = f(\sqrt{x})f^2(x) + f(e)$, 其中 $f(x)$ 在 R 上可导, 则 $y' =$ _____.

11. 设函数 $y = xe^x$, 对正整数 n , n 阶导数 $y^{(n)} =$ _____.

12. 某商品的需求函数为 $Q = 400 - 100P$, 则 $P = 2$ 时的需求弹性为 _____.

13. 设函数 $y = \frac{x}{\ln x}$, 则导数 $y' =$ _____.

14. 曲线 $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 在 $t = 1$ 的对应点处的切线方程是 _____.

15. 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $y'|_{x=\pi} =$ _____.

16. 已知某商品的需求函数为 $Q = 16 - \frac{P}{3}$ (P 为价格, Q 为需求量), 当价格 $P = 8$ 时, 若价格上涨 1%, 则需求量将下降约 _____.

17. 曲线 $y + xe^y = 1$ 在点 $P(0, 1)$ 处的切线方程是 _____.

18. 已知某商品的需求函数为 $Q = 3000 - 100P$, (P 为价格, Q 为需求量), 当价格 $P = 20$ 时, 若价格上涨 1%, 则需求量将下降 _____.

19. 设函数 $f(x) = xe^x$, 对正整数 n , 则 $f^{(n)}(0) =$ _____.

20. 设函数 $y = \frac{x \sin x}{1+x}$, 则微分 $dy =$ _____.

21. 曲线 $y = xe^x$ 在点 $(0,0)$ 处切线的方程是 _____.

22. 设某种商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为 $R(Q) = 104Q - 0.4Q^2$, 则销售量 Q 为 50 个单位时总收益的边际收入是 _____.

23. 设生产某产品 Q 单位的总成本为 $C(Q) = 1100 + \frac{Q^2}{1200}$, 则生产 1800 个单位产品时的边际成本是 _____.

24. 曲线 $y = xe^x$ 在拐点处切线的斜率是 _____.

25. 设某种商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为 $R(Q) = 104Q - 0.4Q^2$, 则销售量 Q 为 50 个单位时总收益的边际收入是 _____.

三、计算题 (请给出必要的步骤)

1. 设 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)e^{-f(x)}$, 其中 $f(x)$ 可导, 求 dy .

2. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(t+1) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 设 $f(x)$ 是可导函数, 求函数 $y = f(\tan x) \cdot \arcsin[f(x)] + e^2$ 的导数.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $\varphi(t)$ 具有连续的二阶导数, 且 $\varphi(0) = 1$.

(1) 确定 a 的值, 使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(x)$;

(2) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0; \\ k^2, & x = 0; \\ kxe^x + 1, & x > 0. \end{cases}$ 试分析在点 $x=0$ 处,

(1) k 为何值时, $f(x)$ 有极限;

(2) k 为何值时, $f(x)$ 连续;

(3) k 为何值时, $f(x)$ 可导.

6. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$, 所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

7. 求由方程 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 所确定的隐函数 y 在 $x=0$ 处的导数 $y'(0)$.

8. 已知 $y = x \ln x$, 求 $y^{(n)}$.

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2), & x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x}, & x > 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} b(1+\sin x) + a + 2, & x > 0 \\ e^{ax} - 1, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 求 a, b 及 $f'(x)$.

11. 已知函数 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$, 求 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{6}}$.

12. 设 $y = \cos(f^2(x)) + f(\sin 1)$, 其中 $f(x)$ 可微, 求 dy .

13. 设函数 $y = f\left(\arcsin \frac{1}{x}\right) + (f(\sin x))^3$, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有一阶导数, 求 dy .

14. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy - e^x = 0$ 确定, 试求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $y''(0)$.

15. 设函数 $y = f(\sin x) + \cos(f(x))$, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有一阶导数与二阶导数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

16. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ 所确定, 试求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

17. 设 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$, 确定 a, b 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

18. 已知函数 $y = x [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$, 试求 dy .

19. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 y - e^{2x} = \sin y$ 所确定, 试求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

20. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ 所确定, 试求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

21. 设函数 $y = (x^2 + 1)^3 (x + 2)^2 x^6$, 试求 y' .

22. 已知函数 $y = \arctan e^{\sqrt{x}}$, 试求 dy

23. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\cos(x + y) = y$ 所确定, 试求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

24. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1 + t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定, 试求 $\frac{dy}{dx}$

25. 确定 a, b 的值, 使得函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ ax + b, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导。

26. 已知函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 试求 dy .

27. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$ 所确定, 试求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

28. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \arctan t, \end{cases}$ 所确定, 试求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

29. 设函数 $y = \frac{(2x+1)^2 \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$, 试求 $\frac{dy}{dx}$.

四、证明题 (请给出必要的步骤)

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 对任意的实数 x_1, x_2 , 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$, 且 $f(0) \neq 0$, $f'(0) = 1$, 证明: $f'(x) = f(x)$.