

第一章 函数

1.1 集合

1.1.1 集合的概念

定义. • 集合是具有确定性质的对象的总体;

- 构成集合的每一个对象, 称为集合的元素.

例子. 1. 太阳系的九大行星.

2. 教室里的所有同学.

如果 a 是集合 A 中的元素, 记为 $a \in A$; 否则记为 $a \notin A$.

分类:

1. 由有限个元素组成的几何称为有限集.
2. 由无限个元素组成的几何称为无限集.

表示方法:

1. 列举法 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
2. 描述法 $B = \{x | x \text{ 所具有的特征}\}$

定义. 如果 $x \in A$, 必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

定义. 如果 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

例子. 若 $A = \{1, 2\}$, $C = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 则 $A = C$.

不含任何元素的集合称为空集, 记为 \emptyset .

例子. $\{x | x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$.

注记. 空集是任何集合的子集.

元素为数的集合称为数集, 人类对数的认识是逐步发展的:

- 自然数集 \mathbf{N}
- 整数集 \mathbf{Z}
- 有理数集 \mathbf{Q}
- 实数集 \mathbf{R} \longleftarrow 微积分的研究对象
- 复数集 \mathbf{C}

注记. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

1.1.2 集合的运算

1. 交集: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
2. 并集: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
3. 差集: $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
4. 补集 (余集): $A^c = I \setminus A = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$, 其中 I 为研究对象的全体 (全集).

1. 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2. 结合律

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3. 分配律

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

4. 对偶律

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

定义. 设有集合 A 和 B . 对任意的 $x \in A, y \in B$, 则称集合

$$\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

为 A 与 B 的笛卡尔乘积(或直积), 记为 $A \times B$.

例子. $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 即为 xOy 平面上全体点的集合, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记为 \mathbf{R}^2 .

1.1.3 区间和邻域

区间是指介于两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点. 区间可分为有限区间和无限区间.

有限区间:

$$(a, b) = \{x | a < x < b\} \quad \text{开区间}$$

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\} \quad \text{闭区间}$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\} \quad \text{左开右闭区间}$$

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\} \quad \text{左闭右开区间}$$

例 1. 用区间表示下列数集:

$$(1) \{x | 1 < x < 3\}$$

$$(2) \{x | -5 \leq x < 0\}$$

无限区间有如下五种:

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \quad (a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\} \quad [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$$

例 2. 用区间表示下列数集:

$$(1) \{x \mid x < 3\}$$

$$(2) \{x \mid x \geq 2\}$$

两端点间的距离 (线段的长度) 称为区间的长度.

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$,

- a 的 δ 邻域 $U(a, \delta)$:

$$\{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

其中 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

- a 的去心 δ 邻域 $\dot{U}(a, \delta)$:

$$\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

- a 的左 δ 邻域: $(a - \delta, a)$

- a 的右 δ 邻域: $(a, a + \delta)$

1.1.4 小结

1. 集合的有关概念: 集合、元素、子集、全集、空集、交集、并集、补集、直积、区间、邻域.
2. 集合的运算: 交集、并集、补集、直积的求法.
3. 区间和邻域: 连续的点组成的集合的表示方法.

思考. 经调查, 有彩电的家庭占 96%, 有冰箱的家庭占 87%, 有音响的家庭占 78%, 有空调的家庭占 69%, 试估计四种电器都有的家庭占多少?

1.2 映射与函数

1.2.1 映射的概念

设 X 与 Y 是两个非空集合, 若对 X 中的每一个元素 x , 均可以找到 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应, 则称这个对应是集合 X 到 Y 的一个映射, 记为 f , 或者更详细地写为:

$$f: X \rightarrow Y.$$

将 x 的对应元素 y 记为

$$f(x): x \mapsto y = f(x).$$

y 称为映射 f 下 x 的像, x 称为映射 f 下 y 的原像(或逆像). 集合 X 称为映射 f 的定义域, 记为 $D_f = X$; X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合

$$\{y | y \in Y, y = f(x), x \in X\}$$

称为映射 f 的值域, 记为 R_f (或 $f(X)$).

例 1. 设 $A = \{\text{商场中的所有商品}\}$, $B = \{\text{商场中商品九月份的销量}\}$, 则

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y \text{ (} y \text{ 是商品 } x \text{ 九月份的销量)}$$

是一个映射, $D_f = A$, $R_f = B$

例 2. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, 则

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$$

是一个映射, $D_f = A$, $R_f = \{4, 5, 6\} \subset B$

概括起来, 构成一个映射必须具备下列三个基本要素:

1. 集合 X , 即定义域 $D_f = X$.
2. 集合 Y , 即限制值域的范围 $R_f \subset Y$.
3. 对应法则 f , 使每个 $x \in X$, 有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

注记. 1. 映射要求元素的像必须是唯一的.

2. 映射并不要求元素的原像也是唯一的.

设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射, 若

1. 对任意的 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单射.

2. $R_f = Y$, 则称 f 为满射.

3. f 既是单射又是满射, 则称 f 为双射(或一一映射).

注记. 单射 \iff 原像唯一.

1.2.2 逆映射与复合映射

定义. 如果映射 f 是单射, 则对任一 $y \in R_f \subset Y$, 它的原像 $x \in X$ (即满足方程 $f(x) = y$ 的 x) 是唯一确定的, 于是, 对应关系

$$\begin{aligned} g: R_f &\rightarrow X \\ y &\mapsto x (f(x) = y) \end{aligned}$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射, 称之为 f 的逆映射, 记为 f^{-1} , 其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域为 $R_{f^{-1}} = X$

例 3. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 则

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto y = x + 3 \end{aligned}$$

既是单射, 又是满射, 存在逆映射

$$\begin{aligned} f^{-1}: B &\rightarrow A \\ x &\mapsto y = x - 3 \end{aligned}$$

例 4. 设 $A = [0, \pi]$, $B = [-1, 1]$, 则

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto y = \cos x \end{aligned}$$

既是单射，又是满射，存在逆映射

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

$$x \mapsto y = \arccos x$$

定义. 现设有如下两个映射

$$g : X \rightarrow U_1$$

$$x \mapsto u = g(x)$$

和

$$f : U_2 \rightarrow Y$$

$$u \mapsto y = f(u),$$

如果 $R_g \subset U_2 = D_f$, 那就可以构造出一个新的对应关系

$$f \circ g : X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y = f[g(x)]$$

也是一个映射, 称之为 f 和 g 的 **复合映射**.

例 5. 设映射 g 与 f 为

$$g : R \rightarrow R \quad f : R^+ \rightarrow R$$

$$x \mapsto u = 1 - x^2 \quad u \mapsto y = \sqrt{u}$$

则 $R_g = (-\infty, 1]$, 它不是 D_f 的子集, 因此不能构成复合映射 $f \circ g$. 但若将 g 的定义域缩小, 就有可能构成复合映射. 比如令

$$g^* : [-1, 1] \rightarrow R$$

$$x \mapsto u = 1 - x^2$$

则可以构成复合映射 $f \circ g^* : [-1, 1] \rightarrow R$

$$x \mapsto y = \sqrt{1 - x^2}$$

1.2.3 函数的概念

定义. 设非空数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**, 简记为

$$y = f(x), x \in D.$$

- x 称为自变量;
- y 称为因变量;
- D 称为定义域;
- 函数值的全体构成的数集 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为值域.

函数的两要素: 定义域与对应法则.

例 6. 研究 $y = x$ 和 $y = \frac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数.

例 7. 研究 $y = x$ 和 $y = \sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数.

注记. 两个函数相同, 当且仅当两者的定义域和对应法则都相同.

对未指明定义域的函数, 通常根据函数表达式确定它的自然定义域. 例如

- (1) $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $D = [0, +\infty)$,
- (2) $y = \log_a x$ 的定义域为 $D = (0, +\infty)$,
- (3) $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求:

- (1) 根号里面要求大于等于零;
- (2) 对数里面要求大于零;
- (3) 分母要求不能等于零.

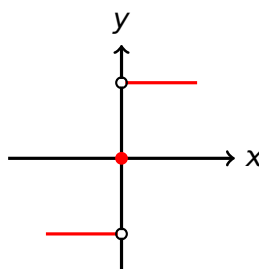
如果自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值总是只有一个, 这种函数叫做单值函数, 否则叫做多值函数.

例子. $x^2 + y^2 = a^2$ 是多值函数.

定义. 点集 $C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形.

(1) 符号函数:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ -1 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

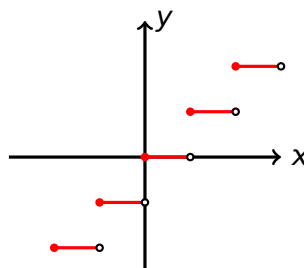


$$x = \operatorname{sgn} x |x|$$

(2) 取整函数: $y = [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

显然

$$x - 1 < [x] \leq x$$

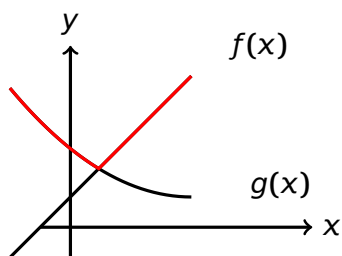


(3) 狄利克雷函数:

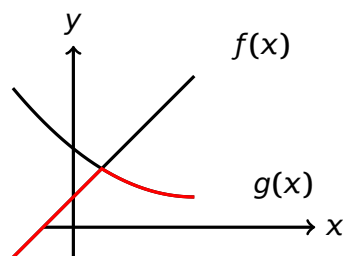
$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时.} \end{cases}$$

(4) 取最大值函数

$$y = \max\{f(x), g(x)\}$$



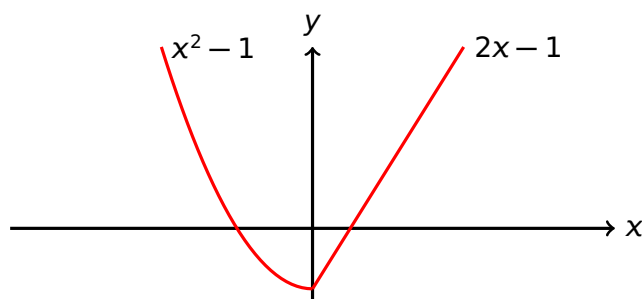
$$y = \min\{f(x), g(x)\}$$



如果一个函数在定义域的不同部分用不同的公式来表达, 则称该函数为分段函数.

例子.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0, \\ x^2 - 1, & x \leq 0. \end{cases}$$



例 8. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ e^x - 1, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$, 求 $f(0)$ 、 $f(1)$ 及 $f(x)$ 的定义域.

解. 易知

$$f(0) = 0 + 1 = 1,$$

$$f(1) = e^1 - 1 = e - 1,$$

$$f(x) \text{ 的定义域为: } [-1, 2].$$

1.2.4 函数的基本性态

给定函数 $y = f(x)$, 设其定义域 D 关于原点对称,

1. 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

2. 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例子. $x, x^3, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}, \sin x, \tan x$ 为奇函数.

例子. $x^2, x^4, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^4}, \cos x$ 为偶函数.

注记. 奇函数关于原点对称; 偶函数关于 y 轴对称.

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的常数 l , 使得对任意的 $x \in D$, 有 $(x \pm l) \in D$, 且

$$f(x + l) = f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数; l 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例子. $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 以 2π 为周期.

例子. $y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 以 π 为周期.

例 9. 设函数 $y = f(x), x \in R$ 的图形关于直线 $x = a$ 与 $x = b$ ($a < b$) 均对称, 证明 $y = f(x)$ 是周期函数, 并求周期.

证明. 由条件知:

$$f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x),$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a + (x - a)) = f(a - (x - a)) \\ &= f(2a - x) \\ &= f(b - (b + x - 2a)) = f(b + (b + x - 2a)) \\ &= f(x + 2(b - a)) \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数, 且 $2(b-a)$ 是它的一个周期.

定义. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, x_1, x_2 为区间 I 上的任意两个数,

(1) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加或递增;

(2) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少或递减;

例子. $y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子. $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子. $y = 1/x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调减少.

例子. $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少, 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

定义. 设函数 $y = f(x)$ 在数集 I 上有定义, 如果存在一个正数 M , 对于所有 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 是在 I 上的有界函数. 若不存在这样的 M , 则称 $f(x)$ 是在 I 上的无界函数.

例子. $y = \sin x, y = \cos x$ 是有界函数.

例子. $y = x^2, y = \tan x, y = x \cos x$ 是无界函数.

1.2.5 小结

1. 映射的有关概念: 映射、逆映射、复合映射.
2. 函数的有关概念: 函数、定义域、值域.
3. 函数的几种特性: 奇偶性、周期性、单调性、有界性.

思考. 已知 $f(x)$ 是一个偶函数, 且满足 $f(a+x) = f(a-x)$, 则 $f(x)$ 是不是一个周期函数? 若是, 请说明它的一个周期, 若不是, 请说明理由.

1.3 复合函数与反函数 初等函数

1.3.1 复合函数

定义. 设 f 和 g 为两个函数, 且 $D_f \cap R_g \neq \emptyset$, 则称定义在

$$\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

上的函数 $f \circ g$ 为 f 和 g 的复合函数, 其中

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

对于复合函数 $f \circ g$, 称 x 为自变量, u 为中间变量, y 为因变量.

例 1. 两个函数 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = 1 - x^2$ 的复合函数是 $y = \sqrt{1 - x^2}$.

注记. 1. 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

例子. $y = \arcsin u, u = 2 + x^2; y \neq \arcsin(2 + x^2)$.

2. 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例子. $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}, y = \sqrt{u}, u = \cot v, v = \frac{x}{2}$.

1.3.2 反函数

定义. 设函数 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射

$$f^{-1}: f(D) \rightarrow D,$$

称此映射 f^{-1} 为函数 f 的 **反函数**.

注记. 1. 反函数 f^{-1} 由函数 f 确定.

2. 函数与反函数的图像关于 $y = x$ 对称.

例 2. 求函数 $y = \sqrt{e^x + 1}$ 的反函数.

解. 由 $e^x = y^2 - 1$ 可得

$$x = \ln(y^2 - 1).$$

又 $y = \sqrt{e^x + 1} > 1$, 即原函数的值域为 $(1, +\infty)$, 因此反函数为

$$y = \ln(x^2 - 1),$$

反函数的定义域为:

$$D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$$

定理 (反函数存在定理). 单调函数 f 必存在单调的反函数, 且此反函数与 f 具有相同的单调性.

1.3.3 函数的运算

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域分别是 D_1, D_2 , $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, 则我们可以定义这两个函数的下列运算:

1. 函数的**和 (差)**:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D;$$

2. 函数的**积**:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D;$$

3. 函数的商:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}.$$

例 3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l, l)$, 证明必定存在 $(-l, l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$ 使得

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

证明. 假设存在 $g(x)$ 和 $h(x)$ 满足条件, 则有

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

故有

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{cases}$$

易知, $g(x), h(x)$ 满足条件.

1.3.4 初等函数

下面这五种函数, 统称为基本初等函数:

1. 幂函数 $y = x^\mu$;
2. 指数函数 $y = a^x$;
3. 对数函数 $y = \log_a x$;
4. 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x$, 等;
5. 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x$, 等.

由五种基本初等函数经过有限次四则运算和函数复合所得到的函数, 称为初等函数.

练习. 将下列初等函数分解为简单函数的复合

(1) $y = (1 + \ln x)^5$

(2) $y = \sin^2(3x + 1)$

1.3.5 小结

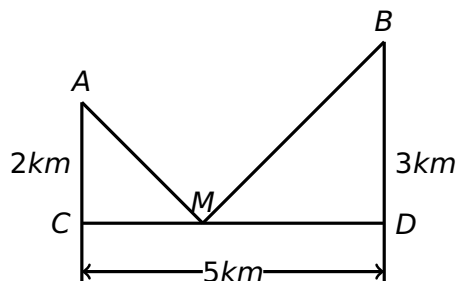
1. **复合函数**: 复合函数的形成与复合过程的分解.
2. **反函数**: 反函数的基本求法.
3. **函数的运算**: 简单函数的四则运算.
4. **基本初等函数** 幂函数、指数函数与对数函数、三角函数与反三角函数.
5. **初等函数**: 基本初等函数的复合.

思考. 已知 $f(\tan x) = \sec^2 x + 1$, 求 $f(x)$.

思考. 分段函数一定不是初等函数吗?

1.4 函数关系的建立

例 1. 在一条直线公路的一侧有 A 、 B 两村, 其位置如图所示, 公共汽车公司欲在公路上建立汽车站 M . A 、 B 两村各修一条直线大道通往汽车站, 设 $CM = x(\text{km})$, 试把 A 、 B 两村通往 M 的大道总长 $y(\text{km})$ 表示为 x 的函数.



解. 根据题意和图示知

$$CM = x, DM = 5 - x.$$

在直角三角形 ACM 中,

$$AM = \sqrt{x^2 + 4},$$

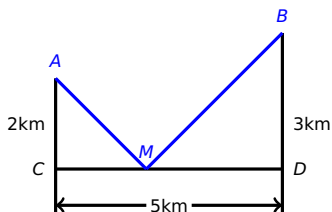
在直角三角形 BDM 中,

$$BM = \sqrt{(5-x)^2 + 9}.$$

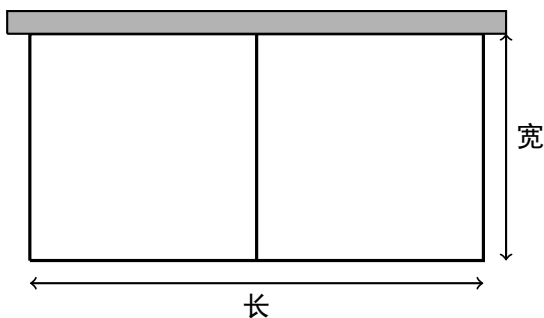
所以

$$\therefore y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(5-x)^2 + 9},$$

此函数的定义域为 $D = [0, 5]$.



例 2. 如图, 以墙为一边用篱笆围成长方形的场地, 并用平行于宽的篱笆隔开. 已知篱笆总长为 60 米. 把场地面积 $S(m^2)$ 表示为场地宽 $x(m)$ 的函数, 并指出函数的定义域.



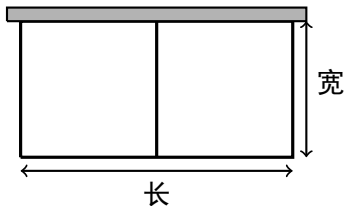
解. 设篱笆的宽为 x , 则

$$\text{长} = 60 - 3x$$

因此

$$S = x(60 - 3x) = -3x^2 + 60x,$$

其定义域为 $\{x | 0 < x < 20\}$.



例 3. 某工厂每年需某种原料 a 吨, 拟分若干批购进, 每批进货的费用为 b 元. 设该厂使用这种原料是均匀的, 即平均库存量为批量的一半. 每吨原料的库存费用每年为 c 元. 试求出一年中库存费用与进货费用之和与进货批量的函数关系.

解. 设进货批量为 x 吨, 进货费用与库存费用之和为 $p(x)$. 因年进货量为 a , 故每年进货批数

为 $\frac{a}{x}$, 则进货费用为

$$b \frac{a}{x}.$$

因为使用这种原料是均匀的, 即平均库存为 $\frac{x}{2}$, 故每年的库存费为 $c \cdot \frac{x}{2}$, 所以

$$p(x) = \frac{ab}{x} + \frac{c}{2} \cdot x,$$

其定义域为 $(0, a]$

例 4. 某人从美国到加拿大去度假, 已知把美元转换成加拿大元时, 币面数值增加 12%, 而把加拿大元转换成美元时, 币面数值减少 12%. 请证明经过这样一来一回的兑换后, 他亏损了多少钱.

解. 设 $f_1(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数, $f_2(x)$ 为将 x 加拿大元兑成的美元数, 则

$$f_1(x) = x + x \cdot 12\% = 1.12x, x \geq 0$$

$$f_2(x) = x - x \cdot 12\% = 0.88x, x \geq 0$$

$$f_2(f_1(x)) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x$$

故 $f_1(x), f_2(x)$ 不互为反函数, 经过一来一回的兑换后, x 美元变成 $0.9856x$ 美元, 即发生了亏损.

例如: 1000 美元经过这样的来回兑换, 将亏损 14.4 美元.

练习题:

- (1) 设生产与销售某种商品的总收入函数 R 是产量 x 的二次函数, 经统计得知当产量分别为 0, 2, 4 时, 总收入 R 为 0, 6, 8, 试确定 R 关于 x 的函数式.
- (2) 某商店年销售某种产品 800 件, 均匀销售, 分批进货. 若每批订货费为 60 元, 每件每月库存费 0.2 元. 试列出库存费与进货费之和 P 与批量 x 之间的函数关系.
- (3) 某企业对某产品制定如下销售策略: 购买 20 公斤以下 (包括 20 公斤) 部分, 每公斤价 10 元; 购买量小于等于 200 公斤时, 其中超出 20 公斤的部分, 每公斤 7 元; 购买超过 200 公斤的部分, 每公斤价 5 元, 试写出购买量 x 公斤的费用函数 $C(x)$.
- (4) 某车间设计最大生产能力为每月 100 台机床, 至少要完成 40 台方可保本, 当生产 x 台时的总成本函数为 $C(x) = x^2 + 10x$ (百元). 按市场规律, 价格为 $P = 250 - 5x$ (x 为需求量), 可以销售完, 试写出月利润函数.

1.5 经济学中的常用函数

1.5.1 需求函数

需求量: 某一商品关于一定的价格水平, 在一定的时间内, 消费者愿意而且有支付能力购买的商品量.

如果价格是决定需求量的最主要因素, 可以认为需求量 Q_d 是 P 的函数, 称为**需求函数**, 记作

$$Q_d = Q_d(P).$$

常见需求函数有:

1. 线性函数 $Q_d = -aP + b$, 其中 $a > 0$;
2. 幂函数 $Q_d = kP^{-a}$, 其中 $k > 0, a > 0$;
3. 指数函数 $Q_d = ae^{-bp}$, 其中 $a, b > 0$.

例 1. 设某商品的需求函数为

$$Q = -aP + b \quad (a, b > 0)$$

讨论 $P = 0$ 时的需求量和 $Q = 0$ 时的价格.

解. $P = 0$ 时 $Q = b$, 它表示价格为零时的需求量为 b , 称为**饱和需求量**;

$Q = 0$ 时 $P = \frac{b}{a}$, 它表示价格为 $\frac{b}{a}$ 时无人愿意购买此商品.

1.5.2 供给函数

供给量: 在一定的价格条件下, 在一定时期内生产者愿意并可供出售的商品量. 如果价格是决定供给量的最主要因素, 可以认为供给量 Q_s 是 P 的函数, 称为**供给函数**, 记作

$$Q_s = Q_s(P).$$

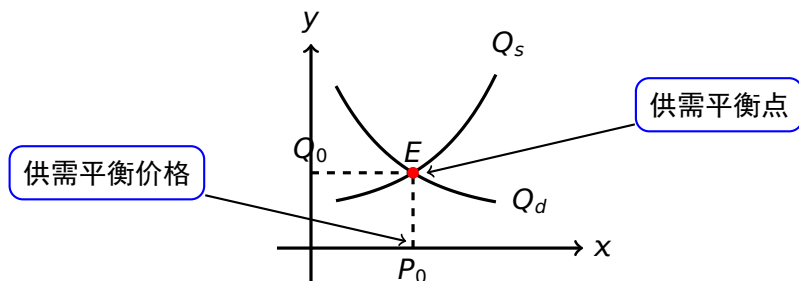
常见供给函数有:

1. 线性函数 $Q_s = aP + b$, 其中 $a > 0$;

2. 幂函数 $Q_s = kP^a$, 其中 $k > 0, a > 0$;

3. 指数函数 $Q_s = ae^{bP}$, 其中 $a, b > 0$.

在同一个坐标系中作出需求函数 Q_d 和供给函数 Q_s , 两条曲线的交点称为**供需平衡点**(E), 该点的横坐标称为**均衡价格**(P_0), 该点的纵坐标称为**均衡数量**(Q_0).



当 $P \neq P_0$ 时, 市场力量会推动 P 趋向 P_0 . 寻求 P_0 是金融经济学的主要问题之一.

例 2. 考虑下列线性需求函数和供给函数:

$$D(P) = a - bP, \quad b > 0; \quad S(P) = c + eP, \quad e > 0$$

试问 a, c 满足什么条件时, 存在正的均衡价格 (即 $P_e > 0$)?

解. 由 $D(P) = S(P)$ 得: $a - bP = c + eP$, 由此可得均衡价格为

$$P_e = \frac{a - c}{b + e}.$$

因此 $P_e > 0$ 的必要充分条件是 $a > c$.

1.5.3 总成本函数、总收益函数、总利润函数

总成本: 生产和经营一定数量产品所需要的总投入.

在不计市场的其他次要影响因素的情况下, 它可以简单地看成是产量 Q 的函数, 称为**总成本函数**, 记为 $C(Q)$.

通常总成本由**固定成本**和**可变成本**两部分组成.

$$C(Q) = C_{\text{固定}}(Q) + C_{\text{可变}}(Q).$$

称

$$\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_{\text{固定}}(Q)}{Q} + \frac{C_{\text{可变}}(Q)}{Q},$$

为平均成本.

例 3. 已知某种产品的总成本函数为 $C(Q) = 1000 + \frac{Q^2}{8}$ 求当生产 100 个该产品时的总成本 and 平均成本.

解. 由题意, 产量为 100 时的总成本为

$$C(100) = 1000 + \frac{100^2}{8} = 2250$$

$$\text{所以平均成本为 } \bar{C}(100) = \frac{2250}{100} = 22.5$$

总收益: 出售一定数量产品所得到的全部收入, 它可以简单地看成是销量 Q 的函数, 称为总收益函数, 记为 $R(Q)$. 称 $\bar{R}(Q) = \frac{R(Q)}{Q}$ 为平均收益. 如果产品价格 P 保持不变, 则

$$R(Q) = PQ, \quad \bar{R} = P.$$

例 4. 设某商品的需求关系是 $3Q + 4P = 100$, 求总收益和平均收益.

解. 由条件知, 价格函数为

$$P = \frac{100 - 3Q}{4},$$

所以总收益为

$$R(Q) = P \cdot Q = \frac{100Q - 3Q^2}{4},$$

平均收益为

$$\bar{R}(Q) = P(Q) = \frac{100 - 3Q}{4}.$$

总利润: 总收益减去总成本和上缴税金后的余额 (为简单起见, 一般不计上缴税金).

在不计市场的其他次要影响因素的情况下, 它可以简单地看 Q 的函数, 称为总利润函数, 记为

$$L(Q) = R(Q) - C(Q).$$

称 $\bar{L}(Q) = \frac{L(Q)}{Q}$ 为平均利润.

例 5. 设某种商品的总成本为 $C(Q) = 20 + 2Q + 0.5Q^2$ 若每售出一件该商品的收入是 20 万元, 求生产 10 件的总利润.

解. 由题意知 $P = 20$ (万元), 总收益为 $R(Q) = P \cdot Q = 20Q$. 所以

$$\begin{aligned} L(Q) &= R(Q) - C(Q) \\ &= 20Q - (20 + 2Q + 0.5Q^2) \\ &= -20 + 18Q - 0.5Q^2 \end{aligned}$$

因此 $L(10) = (-20 + 18 \times 10 - 0.5 \times 10^2) = 110$ (万元)

1.5.4 库存函数

设某企业在计划期 T 内, 对某种物品总需求量为 Q , 由于库存费用及资金占用等因素, 显然一次进货是不划算的, 考虑均匀的分 n 次进货, 每次进货批量为 $q = \frac{Q}{n}$, 进货周期为 $t = \frac{T}{n}$. 假定每件物品的贮存单位时间费用为 C_1 , 每次进货费用为 C_2 , 每次进货量相同, 进货间隔时间不变, 以匀速消耗贮存物品, 则平均库存为 $\frac{q}{2}$, 在时间 T 内的总费用 E 为

$$E = \frac{1}{2}C_1Tq + C_2\frac{Q}{q}$$

其中 $\frac{1}{2}C_1Tq$ 是贮存费, $C_2\frac{Q}{q}$ 是进货费用.

练习题:

1. 设需求函数由 $P + Q = 1$ 给出, (1) 求总收益函数; (2) 若售出 $1/3$ 单位, 求其总收益.
2. 某工厂对棉花的需求函数由 $PQ^{1.4} = 0.11$ 给出, (1) 求其总收益函数 R ; (2) $P(12), R(10), R(12), R(15), P(15), P(20)$.
3. 若工厂生产某种商品, 固定成本 200,000 元, 每生产一单位产品, 成本增加 1000 元, 求总成本函数.

4. 某厂生产一批元器件, 设计能力为日产 100 件, 每日的固定成本为 150 元, 每件的平均可变成本为 10 元, (1) 试求该厂此元器件的日总成本函数及平均成本函数; (2) 若每件售价 14 元, 试写出总收入函数; (3) 试写出总利润函数.
5. 某产品之需求函数为 $Q_d = 20 - 3P$, 供给函数为 $Q_s = 5P - 1$, 求该商品的均衡价格.