微积分习题汇编

目录

第一章　函数　1

第二章　极限与连续　3

第三章　导数、微分、边际与弹性　7

第四章　中值定理及导数的应用　13

第五章　不定积分　19

第一章　函数

1. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 则函数 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 的定义域为 (　　).

(A) $[0,1]$　　**(B)** $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$　　**(C)** $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$　　**(D)** $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

2. 下列两对函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同的是 (　　).

(A) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$

(B) $f(x)=x$, $g(x)=\sin(\arcsin x)$

(C) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$, $g(x)=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

(D) $f(x)=x$, $g(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$

3. 函数 $f(x)=\arcsin\left(x^2-x-1\right)$ 的定义域 $D=$ ________.

4. 设 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 则 $f(\ln x)$ 的定义域为 ________.

5. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有定义, 且 $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\geq 10 \\ f\left[f(x+5)\right], & x<10 \end{cases}$, 则 $f(5)=$ ________(填实数).

第二章　极限与连续

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的第一类间断点的个数为（　）.

(A) 0　　**(B)** 1　　**(C)** 2　　**(D)** 3

2. 下列极限中，极限不为0 的是（　）.

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$　　**(B)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x+3\cos x}{x}$

(C) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$　　**(D)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^5+x^3}$

3. 下列运算正确的是（　）.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0$

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$

(D) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{x\ln x^2}{|x-1|}$，则 $f(x)$ 有（　）.

(A) 两个可去间断点　　**(B)** 一个可去间断点，一个跳跃间断

(C) 两个无穷间断点　　**(D)** 一个可去间断点，一个无穷间断点

5. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}$ 与 x^2 比较是（　）.

(A) 高阶无穷小量　**(B)** 等价无穷小量　**(C)** 低阶无穷小量　**(D)** 同阶无穷小量

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x+1)}{x^2-3x-4}$，下列说法错误的是（　）.

(A) 有渐近线 $y=0, x=4$

(B) $x=4$ 为无穷间断点

(C) 在区间 $(1,4)$ 上有界

(D) 若补充定义 $f(-1)=-\dfrac{1}{5}$，则 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处连续

7. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ 的第二类间断点是（　）.

(A) $x=1$　　**(B)** $x=-1$　　**(C)** $\dfrac{1}{2}$　　**(D)** $-\dfrac{1}{2}$

8. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$ 的第一类间断点个数是（　）.

(A) 0　　**(B) 1**　　**(C) 2**　　**(D) 3**

9. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的（　）.

(A) 必要条件　　**(B)** 充分条件　　**(C)** 充要条件　　**(D)** 无关条件

10. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$ 的第一类间断点是（　）.

(A) $x=2\pi$　　**(B)** $x=-\pi$　　**(C)** $x=0$　　**(D)** $x=\pi$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x^2)}{x-1}=$（　）.

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　**(B)** 2　　**(C)** -2　　**(D)** $\dfrac{1}{2}$

12. 下列函数在其定义域内连续的是（　）.

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$　　**(B)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　　**(D)** $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\neq 0\\ \cos x, & x=0\end{cases}$

13. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，则必有（　）.

(A) $f(x)$ 在点 x_0 的某一个去心领域内有定义；

(B) $f(x)$ 仕点 x_0 处有定义；

(C) $f(x)$ 在点 x_0 的任意一个去心领域内有定义；

(D) $a=f(x_0)$.

14. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ 的第一类间断点是 (　　) .

(A) $x=\dfrac{\pi}{2}$;　　(B) $x=-\pi$;　　(C) $x=0$;　　(D) $x=\pi$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$ ____________.

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-\dfrac{3x}{2})^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $A=$ ____________.

17. 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos kx$ 与 x^2 是等价无穷小量, 则 $k=$ ____________.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$ ____________.

19. 设 $f(x)=x\sin\dfrac{3}{x}+\dfrac{\sin x}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$ ____________.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}=$ ____________.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$ ____________.

22. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{kx}=9$，则 $k=$ ____________.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 等于____________.

24. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^{\sqrt{n}}$.

第三章　导数、微分、边际与弹性

1. 设 $Q=f(p)$ 为需求函数, 其中 p 为价格 (单位: 元 / 吨), Q 为需求量 (单位: 吨). 若价格为 100 元 / 吨时的需求弹性为 $\eta(100)=-\dfrac{100}{f(100)}$, $f'(100)=0.25$, 则当价格调整为 101 元 / 吨时, 需求量将约 (　) .

(A) 增加 25%　**(B)** 增加 0.25%　**(C)** 减少 25%　**(D)** 减少 0.25%

2. 函数 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处是 (　) .

(A) 无定义　**(B)** 有定义，但不连续
(C) 连续但不可导　**(D)** 连续且可导

3. 设 $y=x+\sin x$, $\mathrm{d}y$ 是 y 在 $x=0$ 点的微分，则当 $\Delta x\to 0$ 时，有 (　) .

(A) $\mathrm{d}y$ 与 Δx 相比是等价无穷小
(B) $\mathrm{d}y$ 与 Δx 相比是同阶 (非等价) 无穷小
(C) $\mathrm{d}y$ 是比 Δx 高阶的无穷小
(D) $\mathrm{d}y$ 是比 Δx 低阶的无穷小

4. 设函数 $y=(1+\cos x)^{\arcsin x}$, 则微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ (　) .

(A) $-2\,\mathrm{d}x$　**(B)** $-\ln 2\,\mathrm{d}x$　**(C)** $2\,\mathrm{d}x$　**(D)** $\ln 2\,\mathrm{d}x$

5. 设需求函数 $Q=3000\mathrm{e}^{-0.125p}$, 则当价格 $p=10$, 且上涨 1% 时，需求量 Q 约 (　) .

(A) 减少 1.25%　**(B)** 增加 1.25%　**(C)** 减少 125%　**(D)** 增加 125%

6. 设函数 $f(x)=\sin 2x+3^x$, 则导数值 $f'(0)=$ (　) .

(A) $\ln 3-2$　**(B)** $\ln 3+2$　**(C)** **1**　**(D)** $\ln 3+1$

7. 设 $f(x)=3^x+x^2+\ln 3$, 则 $f'(1)$ 等于 (　) .

(A) $3\ln 3$　**(B)** $\dfrac{1}{3}$　**(C)** $\dfrac{3}{\ln 3}+2$　**(D)** $3\ln 3+2$

8. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)-f(1-x)}{x}=$ ( ).

(A) $f'(1)$　　(B) $2f'(1)$　　(C) $\mathbf{0}$　　(D) $f'(2)$

9. 某需求函数为 $Q=-100P+3000$，那么当 $P=20$ 时需求的价格弹性 $E_d=$ ( ).

(A) 2　　(B) 1000　　(C) -100　　(D) -2

10. 设 $f(x)=2^x+\ln 2$, 则 $f'(1)$ 等于 ( ).

(A) $2\ln 2$;　　(B) $2\ln 2+\dfrac{1}{2}$;　　(C) $\dfrac{2}{\ln 2}$;　　(D) $\dfrac{2}{2\ln 2}+\dfrac{1}{2}$.

11. 设函数 $f(x)=(1+\cos x)^{\frac{1}{x}}$, $\mathrm{d}y|_{x=\frac{\pi}{2}}=$ ____________.

12. 设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$,其中 $f(t)$ 具有二阶导数,且 $f''(t)\neq 0$,则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=$ ____________.

13. 设函数 $f(x)=x(\sin x)^{\cos x}$, 则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$ ____________.

14. 设商品的需求函数为 $Q=100-5P$, 其中 Q,P 分别表示需求量和价格. 如果商品需求弹性的绝对值大于 1 , 则商品的价格的取值范围是____________.

15. 设曲线 $f(x)=x^n, n\in N$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴相交于 $(\xi_n,0)$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)$ $=$ ____________.

16. 由参数方程 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ 所确定的曲线在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程是____________.

17. 设 $y=f(\sqrt{x})f^2(x)+f(\mathrm{e})$, 其中 $f(x)$ 在 R 上可导，则 $y'=$ ____________.

18. 设函数 $y=x\mathrm{e}^x$, 对正整数 n, n 阶导数 $y^{(n)}=$ ____________.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{2}{x}}{\arcsin x}=$ ____________.

20. 某商品的需求函数为 $Q=400-100P$, 则 $P=2$ 时的需求弹性为 ____________.

21. 为使函数 $f(x)=(1-x)^{\frac{2}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续, 应定义 $f(0)=$ ____________.

22. 设函数 $y=\dfrac{x}{\ln x}$, 则导数 $y'=$____________.

23. 曲线 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 在 $t=1$ 的对应点处的切线方程是____________.

24. 设 $y=(1+\sin x)^x$, 则 $y'\big|_{x=\pi}=$____________.

25. 已知某商品的需求函数为 $Q=16-\frac{P}{3}$(P 为价格, Q 为需求量), 当价格 $P=8$ 时, 若价格上涨 1%, 则需求量将下降约____________.

26. 曲线 $y+xe^y=1$ 在点 $P(0,1)$ 处的切线方程是____________.

27. 已知某商品的需求函数为 $Q=3000-100P$,（P 为价格,Q 为需求量）, 当价格 $P=20$ 时, 若价格上涨 1%, 则需求量将下降____________.

28. 设函数 $f(x)=xe^x$, 对正整数 n, 则 $f^{(n)}(0)=$____________.

29. 设函数 $y=\dfrac{x\sin x}{1+x}$, 则微分 $\mathrm{d}y=$____________.

30. 曲线 $y=xe^x$ 在点 $(0,0)$ 处切线的方程是____________.

31. 设某种商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为 $R(Q)=104Q-0.4Q^2$, 则销售量 Q 为 50 个单位时总收益的边际收入是____________.

32. 设生产某产品 Q 单位的总成本为 $C(Q)=1100+\dfrac{Q^2}{1200}$, 则生产 1800 个单位产品时的边际成本是____________.

33. 曲线 $y=xe^x$ 在拐点处切线的斜率是____________.

34. 设某种商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为 $R(Q)=104Q-0.4Q^2$, 则销售量 Q 为 50 个单位时总收益的边际收入是____________.

35. 设 $f(x)$ 是可导函数, 求函数 $y=f(\tan x)\cdot\arcsin[f(x)]+e^2$ 的导数.

36. 求由方程 $y^5+2y=x+3x^7$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程并求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

37. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$,其中 $\varphi(t)$ 具有连续的二阶导数,且 $\varphi(0)=1$.

(1) 确定 a 的值,使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,并求 $f'(x)$;

(2) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

38. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0;\\ k^2, & x=0;\\ kxe^x+1, & x>0.\end{cases}$ 试分析在点 $x=0$ 处,

(1) k 为何值时,$f(x)$ 有极限;

(2) k 为何值时,$f(x)$ 连续;

(3) k 为何值时,$f(x)$ 可导.

39. 求由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$,所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

40. 求由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 所确定的隐函数 y 在 $x=0$ 处的导数 $y'(0)$.

41. 已知 $y=x\ln x$, 求 $y^{(n)}$.

42. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^2\right), & x\leq 0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}, & x>0\end{cases}$,求 $f'(x)$.

43. 设 $f(x)=\begin{cases}b(1+\sin x)+a+2, & x>0\\ e^{ax}-1, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,求 a,b 及 $f'(x)$.

44. 已知函数 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$,求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}$.

45. 设 $y=\cos\left(f^2(x)\right)+f(\sin 1)$, 其中 $f(x)$ 可微,求 dy.

46. 求曲线 $y^3=(x^2+1)^{\sin x}$ 上 $x=0$ 处的切线方程.

47. 设函数 $y=f\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)+\big(f(\sin x)\big)^3$，其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有一阶导数，求 $\mathrm{d}y$．

48. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}^x=0$ 确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $y''(0)$．

49. 设函数 $y=f(\sin x)+\cos\big(f(x)\big)$，其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有一阶导数与二阶导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

50. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

51. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<0 \\ \mathrm{e}^x, & x\geq 0 \end{cases}$，确定 a,b 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

52. 已知函数 $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$，试求 $\mathrm{d}y$.

53. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2y-\mathrm{e}^{2x}=\sin y$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

54. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

55. 设函数 $y=(x^2+1)^3(x+2)^2x^6$，试求 y'.

56. 已知函数 $y=\arctan \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$，试求 $\mathrm{d}y$.

57. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(x+y)=y$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

58. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

59. 确定 a,b 的值，使得函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\geq 0 \\ ax+b, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

60. 已知函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, 试求 $\mathrm{d}y$.

61. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定, 计求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

62. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-\arctan t, \end{cases}$ 所确定, 试求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

63. 设函数 $y=\frac{(2x+1)^2\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$, 试求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

64. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 对任意的实数 x_1, x_2, 有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2),$$

且 $f(0)\neq 0$, $f'(0)=1$, 证明: $f'(x)=f(x)$.

第四章　中值定理及导数的应用

1. 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小量

① $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$　② $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$　③ $x-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos x\right)\sin x$

④ $e^{x^4-x}-1$ 从低阶到高阶排列顺序为 (　).

(A) ①②③④　**(B)** ③①②④　**(C)** ④③②①　**(D)** ④②①③

2. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 (　).

(A) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & 0<x\le 2 \\ e, & x=0 \end{cases}$, $[0,2]$　**(B)** $f(x)=x^2-2x-3$, $[-1,3]$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^4}$, $[0,2]$　**(D)** $f(x)=|x|$, $[-1,1]$

3. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=-e^x$, 且 $f'(0)=0$, 则 (　).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

4. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 δ 邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$ 内三阶导数 $f'''(x)>0$, 且二阶导数值 $f''(x_0)=0$, 则曲线 $y=f(x)$ (　).

(A) 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内是凹弧, 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内是凸弧

(B) 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内是凸弧

(C) 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内是凸弧, 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内是凹弧

(D) 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内是凹弧

5. 函数 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x=$ (　).

(A) 0　**(B)** $2x$　**(C)** $\dfrac{\pi}{2}$　**(D)** π

6. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$，则下列说法正确的是（　）.

(A) 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 内单调减少　　(B) 没有极值

(C) 在 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 内图形是下凹的　　(D) 没有拐点

7. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续且取得极小值，则 $f(x)$ 在 x_0 处必有（　）.

(A) $f'(x_0)=0$　　(B) $f''(x_0)>0$

(C) $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$　　(D) $f'(x_0)=0$ 或不存在

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则（　）.

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$

(B) 对任何 $x_0\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

(D) 存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$

9. 函数 $y=x^3+12x+1$ 在定义域内（　）.

(A) 图形是凸的　　(B) 图形是凹的　　(C) 单调减少　　(D) 单调增加

10. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理条件的是（　）.

(A) $f(x)=x^2-5x+6,\ [2,3]$　　(B) $f(x)=\sin x,\ \left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$

(C) $f(x)=\sqrt{x^2}\mathrm{e}^{x^2},\ [-1,1]$　　(D) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<5, \\ 1, & x\geq 5., \end{cases}\ [0,5]$

11. 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是比 x^2 的（　）.

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

12. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是（　）.

(A) $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{x-1}, & 0<x\leq 2 \\ \mathrm{e}, & x=0 \end{cases}$　　(B) $f(x)=|x|$，$[-1,1]$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^4}$，$[0,2]$　　(D) $f(x)=x^2-2x-3$，$[-1,3]$

13. 若 $(0,1)$ 是曲线 $y=x^3+(b-1)x^2+c$ 的拐点，则有（　）.

(A) $b=1,c=1$　　(B) $b=-1,c=-1$　　(C) $b=1,c=-1$　　(D) $b=-1,c=1$

14. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理的是（ ）.

(A) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, $[0,2]$

(B) $f(x)=\sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$

(C) $f(x)=xe^x$ $[0,1]$

(D) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<5 \\ 1, & x\geq 5, \end{cases}$, $[0,5]$

15. 设 $f'(0)=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}x\right)}{x}=$____________.

16. 函数 $y=x-\ln(1+x)$ 在区间 ____________ 内单调减少.

17. 已知点 $(1,1)$ 是曲线 $y=x^2+a\ln x$ 的拐点，则 $a=$____________.

18. 设 $f'(0)=1$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-h)}{h}=$ ____________.

19. 设 $f(x)=\ln\sin x, x\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$, 则满足罗尔中值定理中的数值 $\xi=$ ____________.

20. 函数 $y=x^2-\dfrac{16}{x}(x<0)$ 的最小值是 ____________.

21. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的单调递减区间是____________.

22. 函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在区间 $[-10,10]$ 上的最大值为 ____________.

23. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x$ 的极大值是 ____________.

24. 函数 $y=x^2-\dfrac{54}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的最小值是 ____________.

25. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)$，则方程 $f'(x)=0$ 的实根个数为 ____________.

26. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值是____________.

27. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(3e^{\frac{x}{x-1}}-2\right)^{\frac{1}{x}}$.

28. 求函数 $f(x)=xe^x-e^x+1$ 的单调区间与极值及凹凸区间与拐点.

29. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

30. 把一根长度为 a 的铁丝截成两段, 其中一段折成正方形框架, 另一段弯成圆周问当如何截取时，可使围成的正方形和圆的面积之和达到最小?

31. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2+xy+x^2+x=0$ 所确定的满足 $y(-1)=1$ 的隐函数，求 $y'(-1)$ 及 $y''(-1)$, 并计算极限 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{y(x)-1}{(x+1)^2}$.

32. (A 班) 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x+x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$.

33. 求 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}+\arctan x}$ 的单调区间和极值.

34. 求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

35. 一房地产公司有 50 套公寓要出租, 当月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去, 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 问房租金定为多少时可获得最大收入?

(A 班) 需求函数为 $p=10-\dfrac{Q}{5}$,
(1) 求当 $Q=20$ 时的边际收益, 并说明其经济意义;
(2) 求当 $p=6$ 时的收益弹性, 并说明其经济意义.

36. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{3x}}$.

37. 求曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的凹凸区间与拐点.

38. (1) 求函数 $y=f(x)=2x^3-9x^2+12x$ 的单调区间与极值;
(2) 设 a 为实数, 试讨论方程 $f(x)=a$ 的不同实数解的个数.

39. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{\ln(1+3x)}}$.

40. 求曲线 $y=x^4-2x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

41. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

42. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

43. 问 a,b 为何值时,点 $A(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+1$ 的拐点?

44. 某商场每年销售商品 a 件,分为 x 批采购进货. 已知每批采购费用为 b 元,而未销售商品的库存费用为 c 元/件 · 年. 设销售商品是均匀的,问分多少批进货时,才能使以上两种费用的总和为最省?

45. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2 \arcsin x}$.

46. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

47. 某企业生产某种产品，固定成本 20000 元，每生产一单位产品，成本增加 100 元. 已知总收益 R 是年产量 Q 的函数，即

$$R=R(Q)=\begin{cases} 400Q-\dfrac{1}{2}Q^2, & 0\le Q\le 400 \\ 80000, & Q>400 \end{cases}$$

问每年生产多少产品时，总利润最大？最大利润是多少？

48. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x})^{\sin x}$.

49. 求曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的出凸区间及拐点.

50. 某企业生产产品 x 件时,总成本函数为 $C(x)=ax^2+bx+c$,总收益函数为 $R(x)=px^2+qx$,其中 $a,b,c,p,q>0, a>p, b<q$. 当企业按最大利润投产时,对每件产品征收税额为多少才能使总税额最大?

51. 若 $0<a<1$,则对于 $x>0$,证明 $x^a-ax\le 1-a$.

52. 当 $0<a<b<1$ 时,证明不等式 $\dfrac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\dfrac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$.

53. (A 班) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,在 $(0,\pi)$ 内可导,且 $f(0)=f(\pi)=0$. 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=-f(\xi)$.

54. 证明：当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^3$.

(A 班) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,且 $f(a)=f(b)=0$, 试证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=3f(\xi)$.

55. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明在区间 $(0,1)$ 内至少有一点 c, 使得 $f'(c)=-\frac{f(c)}{c}$.

56. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=1$, 则 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

57. 证明：当 $x>0$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

58. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导, 且 $f(2)=4$. 试证存在一点 $\xi\in(0.2)$, 使得 $2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=8$.

第五章　不定积分

1. 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数 (　).

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数
(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数
(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数
(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必为单调增函数

2. 已知 $f'(\cos x)=\sin x$, 则 $f(\cos x)=$ (　).

(A) $-\cos x+C$　　**(B)** $\cos x+C$
(C) $\frac{1}{2}(\sin x\cos x-x)+C$　　**(D)** $\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C$

3. 若 $\int f(x)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^2}+C$, 则 $f(x)=$ (　).

(A) 1　　**(B)** e^{x^2}　　**(C)** x^2　　**(D)** $2x$

4. 下列各式中, 与 $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$ 不相等的是 (　).

(A) $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$　　**(B)** $\sin^2 x+C$　　**(C)** $-\cos^2 x+C$　　**(D)** $\frac{1}{2}\cos 2x+C$

5. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内, 如果 $f'(x)=g'(x)$, 则下列各式中一定成立的是 (　).

(A) $f(x)=g(x)$　　**(B)** $f(x)=g(x)+1$
(C) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int g'(x)\,\mathrm{d}x$　　**(D)** $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=\left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)'$

6. 函数 $2(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x})$ 的原函数有 (　).

(A) $(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2$　　**(B)** $2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2$　　**(C)** $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$　　**(D)** $4(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})$

7. 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x+C$, 则 $f(x)$ 等于 (　).

(A) $\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$　　**(B)** $\sqrt{2}\mathrm{e}^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$
(C) $\sqrt{2}\mathrm{e}^x\cos(x+\frac{\pi}{4})$　　**(D)** $\mathrm{e}^x\cos(x-\frac{\pi}{4})$

8. 设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\displaystyle\int xf(x)\mathrm{d}x=$ (　　)．

(A) $e^{-x}(1-x)+C$　**(B)** $e^{-x}(1+x)+C$　**(C)** $e^{-x}(x-1)+C$　**(D)** $-e^{-x}(x+1)+C$

9. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2e^{2x}+C$, 则 $f(x)$ 等于 (　　)．

(A) $2xe^{2x}$　**(B)** $2x^2e^{2x}$　**(C)** xe^{2x}　**(D)** $2x(1+x)e^{2x}$

10. 不定积分 $\displaystyle\int\frac{3x^4+3x^2+2}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ ____________.

11. 不定积分 $\displaystyle\int\frac{1+xe^{5x}}{x}\mathrm{d}x=$ ____________.

12. 不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$ ____________.

13. 不定积分 $\displaystyle\int 5^xe^x\mathrm{d}x=$ ____________.

14. 不定积分 $\displaystyle\int x\ln x\mathrm{d}x=$ ____________.

15. 不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=$ ____________.

16. 不定积分 $\displaystyle\int 5^xe^x\mathrm{d}x$ 等于____________.

17. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$.

18. 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, 求不定积分 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$.

19. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1+\ln x}{2+(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

20. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\displaystyle\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

21. 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

22. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $x^2\sin x$, 计算不定积分 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

23. 求 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

24. 设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int xf(x)\mathrm{d}x$.

(A 班) 求 $\int xf''(2x)\mathrm{d}x$.

25. 求不定积分 $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

26. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求不定积分 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

27. 求不定积分 $\int \frac{2}{x(3+2\ln x)}\mathrm{d}x$.

28. 求不定积分 $\int (\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})\mathrm{d}x$.

29. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, 试求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

30. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\mathrm{d}x$.

31. 求不定积分 $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x$.

32. 求不定积分 $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$.

33. 求 $\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

34. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$, 试求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.