第四章　中值定理及导数的应用

一、选择题（选择正确的选项）

1. 设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x)>f(x)>0$, 则 (　　).

(A) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$　　(B) $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$　　(C) $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<\mathrm{e}^2$　　(D) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>\mathrm{e}^3$

2. 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小量

① $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$　　② $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$　　③ $x-\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos x\right)\sin x$

④ $\mathrm{e}^{x^4-x}-1$ 从低阶到高阶排列顺序为 (　　).

(A) ①②③④　　(B) ③①②④　　(C) ④③②①　　(D) ④②①③

3. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 (　　).

(A) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-1}, & 0<x\le 2\\ \mathrm{e}, & x=0\end{cases}$, $[0,2]$　　(B) $f(x)=x^2-2x-3$, $[-1,3]$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^4}$, $[0,2]$　　(D) $f(x)=|x|$, $[-1,1]$

4. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=-\mathrm{e}^x$, 且 $f'(0)=0$, 则 (　　).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 δ 邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$ 内三阶导数 $f'''(x)>0$, 且二阶导数值 $f''(x_0)=0$, 则曲线 $y=f(x)$ (　　).

(A) 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内是凹弧, 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内是凸弧

(B) 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内是凸弧

(C) 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内是凸弧, 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内是凹弧

(D) 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内是凹弧

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x+1)}{x^2-3x-4}$, 下列说法错误的是 (　　).

(A) 有渐近线 $y=0, x=4$

(B) $x=4$ 为无穷间断点

(C) 在区间 $(1,4)$ 上有界

(D) 若补充定义 $f(-1)=-\dfrac{1}{5}$, 则 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处连续

7. 函数 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x=$ (　　).

(A) 0　　(B) $2x$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) π

8. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, 则下列说法正确的是 (　　).

(A) 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 内单调减少　　(B) 没有极值

(C) 在 $(-\infty,\dfrac{1}{2})$ 内图形是下凹的　　(D) 没有拐点

9. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续且取得极小值, 则 $f(x)$ 在 x_0 处必有 (　　).

(A) $f'(x_0)=0$　　(B) $f''(x_0)>0$

(C) $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$　　(D) $f'(x_0)=0$ 或不存在

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 在开区间 (a,b) 内可导, 则 (　　).

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时, 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=0$

(B) 对任何 $x_0\in(a,b)$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时, 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f'(x_0)=0$

(D) 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$

11. 函数 $y=x^3+12x+1$ 在定义域内 (　　).

(A) 图形是凸的　　(B) 图形是凹的　　(C) 单调减少　　(D) 单调增加

12. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理条件的是 (　　).

(A) $f(x)=x^2-5x+6$, $[2,3]$　　(B) $f(x)=\sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$

(C) $f(x)=\sqrt{x^2}\mathrm{e}^{x^2}$, $[-1,1]$　　(D) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<5, \\ 1, & x\geq 5., \end{cases}$ $[0,5]$

13. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 (　　)

(A) $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{x-1}, & 0<x\leq 2 \\ \mathrm{e}, & x=0 \end{cases}$　　(B) $f(x)=|x|$，$[-1,1]$

(C) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^4}$，$[0,2]$　　(D) $f(x)=x^2-2x-3$，$[-1,3]$

14. 若 $(0,1)$ 是曲线 $y=x^3+(b-1)x^2+c$ 的拐点，则有 (　　)

(A) $b=1,c=1$　　(B) $b=-1,c=-1$　　(C) $b=1,c=-1$　　(D) $b=-1,c=1$

15. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理的是 (　　).

(A) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, $[0,2]$　　(B) $f(x)=\sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$

(C) $f(x)=xe^x$ $[0,1]$　　(D) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<5 \\ 1, & x\geq 5, \end{cases}$, $[0,5]$

二、填空题（请将答案写在横线上）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^x-2)+1}{x^2}=$____________.

2. 函数 $y=x^{2x}$ 在 $(0,1]$ 上的最小值 ____________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$____________.

4. 设 $f'(0)=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}x\right)}{x}=$____________.

5. 函数 $y=x-\ln(1+x)$ 在区间 ____________ 内单调减少.

6. 已知点 $(1,1)$ 是曲线 $y=x^2+a\ln x$ 的拐点，则 $a=$____________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{2}{x}}{\arcsin x}=$____________.

8. 设 $f'(0)=1$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-h)}{h}=$____________.

9. 设 $f(x)=\ln\sin x, x\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$, 则满足罗尔中值定理中的数值 $\xi=$____________

10. 为使函数 $f(x)=(1-x)^{\frac{2}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续, 应定义 $f(0)=$____________.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$____________.

12. 函数 $y=x^2-\dfrac{16}{x}(x<0)$ 的最小值是 ____________.

13. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的单调递减区间是____________.

14. 函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在区间 $[-10,10]$ 上的最大值为 ____________.

15. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x$ 的极大值是 ____________.

16. 函数 $y=x^2-\dfrac{54}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的最小值是 ____________.

17. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)$，则方程 $f'(x)=0$ 的实根个数为 ____________.

18. 函数 $y=2x^3-6x^2-18x$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值是____________.

三、计算题（请给出必要的步骤）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, 求:

(1) 函数 $f(x)$ 的增减区间及极值;

(2) 函数图形的凹凸区间及拐点;

(3) 函数图形的渐近线.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(3e^{\frac{x}{x-1}}-2\right)^{\frac{1}{x}}$.

4. 求由方程 $y^5+2y=x+3x^7$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程并求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5. 求函数 $f(x)=xe^x-e^x+1$ 的单调区间与极值及凹凸区间与拐点.

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

7. 把一根长度为 a 的铁丝截成两段, 其中一段折成正方形框架, 另一段弯成圆周问当如何截取时，可使围成的正方形和圆的面积之和达到最小?

8. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2+xy+x^2+x=0$ 所确定的满足 $y(-1)=1$ 的隐函数，求 $y'(-1)$ 及 $y''(-1)$, 并计算极限 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{y(x)-1}{(x+1)^2}$.

9. (A 班) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$.

10. **(本题 10 分)** 求 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}+\arctan x}$ 的单调区间和极值.

11. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

12. 一房地产公司有 50 套公寓要出租, 当月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去, 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 问房租金定为多少时可获得最大收入?

(A 班) 需求函数为 $p=10-\dfrac{Q}{5}$,
(1) 求当 $Q=20$ 时的边际收益, 并说明其经济意义;
(2) 求当 $p=6$ 时的收益弹性, 并说明其经济意义.

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{3x}}$.

14. 求曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的凹凸区间与拐点.

15. (1) 求函数 $y=f(x)=2x^3-9x^2+12x$ 的单调区间与极值;
(2) 设 a 为实数, 试讨论方程 $f(x)=a$ 的不同实数解的个数.

16. 求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{2}{\ln(1+3x)}}$.

17. 求曲线 $y=x^4-2x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

18. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

19. 问 a, b 为何值时, 点 $A(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+1$ 的拐点?

20. 某商场每年销售商品 a 件, 分为 x 批采购进货. 已知每批采购费用为 b 元, 而未销售商品的库存费用为 c 元/件 · 年. 设销售商品是均匀的, 问分多少批进货时, 才能使以上两种费用的总和为最省?

21. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\arcsin x}$.

22. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

23. 某企业生产某种产品，固定成本 20000 元，每生产一单位产品，成本增加 100 元。已知总收益 R 是年产量 Q 的函数，即

$$R=R(Q)=\begin{cases}400Q-\dfrac{1}{2}Q^2, & 0\le Q\le 400\\ 80000, & Q>400\end{cases}$$

问每年生产多少产品时，总利润最大？最大利润是多少？

24. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})^{\sin x}$.

25. 求曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的出凸区间及拐点.

26. 某企业生产产品 x 件时, 总成本函数为 $C(x)=ax^2+bx+c$, 总收益函数为 $R(x)=px^2+qx$, 其中 $a,b,c,p,q>0, a>p, b<q$. 当企业按最大利润投产时, 对每件产品征收税额为多少才能使总税额最大?

四、证明题（请给出必要的步骤）

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

2. 若 $0<a<1$, 则对于 $x>0$, 证明 $x^a-ax\le 1-a$.

3. 当 $0<a<b<1$ 时, 证明不等式 $\dfrac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\dfrac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$.

4. (A 班) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 在 $(0,\pi)$ 内可导, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 在 $(0,\pi)$ 内可导, 且 $f(0)=f(\pi)=0$. 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=-f(\xi)$.

5. 证明：当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^3$.

(A 班) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 试证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=3f(\xi)$.

6. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明在区间 $(0,1)$ 内至少有一点 c, 使得 $f'(c)=-\dfrac{f(c)}{c}$.

7. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=1$, 则 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

8. 证明：当 $x>0$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导, 且 $f(2)=4$. 试证存在一点 $\xi\in(0.2)$, 使得 $2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=8$.