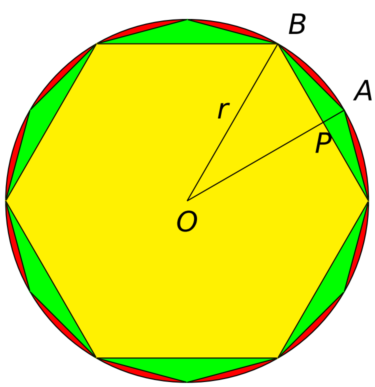
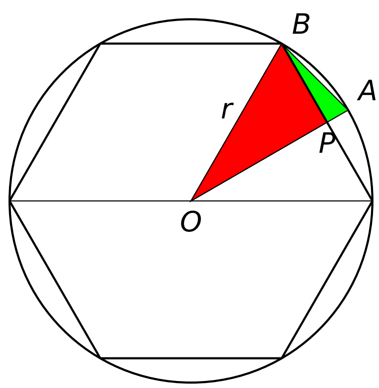
# 第二章　极限与连续

## 2.1　数列的极限

### 2.1.1　引例




记内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边型的面积为 $A_n$, 则 $n\to\infty$ 时，正多边形的面积和圆的面积之差可以任意小.

"一尺之棰，日取其半，万世不竭."　　　　---《庄子 · 天下篇》

第一天截下的木棒长为 $X_1=\dfrac{1}{2}$; 第二天截下的木棒长总和为 $X_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}$;

$$\cdots$$

第 $n$ 天截下的木棒长总和为 $X_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$;

$$X_n=1-\frac{1}{2^n}\to 1.$$

### 2.1.2 数列的有关概念

**定义 1.** 以正整数集 $N^{+}$ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$ 排列的一列数称为数列, 通常用 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示，其中 $x_n = f(n)$, $x_n$ 称为通项或一般项.

**例子.** $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\quad \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots$

**例子.** $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots$

**例子.** $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\quad -\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$

**定义 2.** 对数列 $x_n$, 若存在正数 $M$, 使得一切正整数 $n$, 恒有 $|x_n| \le M$ 成立, 则称数列 $x_n$ 有界, 否则，称为无界.

**例子.** $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ........................................................ 有界.

**例子.** $x_n = 2^n$ ........................................................ 无界.

**注记.** 数轴上对应于有界数列的点 $x_n$ 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

若存在实数 $A$, 对一切 $n$ 都满足 $x_n \ge A$, 称 $\{x_n\}$ 为下有界，$A$ 是 $\{x_n\}$ 的下界;

同样, 若存在 $B$, 对一切 $n$ 都满足 $x_n \le B$, 称 $\{x_n\}$ 为上有界，$B$ 是 $\{x_n\}$ 的上界.

若数列 $\{x_n\}$ 满足：

1. $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, 称数列 $\{x_n\}$ 为单调增数列;
2. $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为 单调减数列.

单调增数列和单调减数列统称为单调数列.

**定义 3.** 将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下，任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列.

**例子.** $x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}, \ldots$

**例子.** $x_2, x_4, x_6 \ldots, x_{2n}, \ldots$

**例子.** $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}, \ldots$

**注记.** *在子数列* $\left\{x_{n_k}\right\}$ *中，一般项* $x_{n_k}$ *是第* $k$ *项, 而* $x_{n_k}$ *在原数列* $\{x_n\}$ *中却是第* $n_k$ *项，显然,* $n_k \geq k$.

### 2.1.3 数列极限的定义

**问题.** 随着 $n$ 的增大，$x_n$ 也跟着变化．当 $n$ 趋于无穷大时，$x_n$ 是否会无限接近一个确定的数？

1. $x_n = 3$ $\quad$ 3，3，3，3，$\cdots \longrightarrow 3$
2. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{16}$，$\cdots \longrightarrow 0$
3. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\quad$ $-1$，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\cdots \longrightarrow 0$
4. $x_n = 2^n$ $\quad$ 2，4，8，16，$\cdots \times$
5. $x_n = (-1)^n$ $\quad$ $-1$，1，$-1$，1，$\cdots \times$

**定义 4.** 设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 $A$，对任何 $\epsilon > 0$，总存在正整数 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 $A$，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $A$，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A\ (n \to \infty).$$

如果这样的常数 $A$ 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

**注记.** *1. 不等式* $|x_n - A| < \epsilon$ *刻划了* $x_n$ *与* $A$ *的无限接近;*

*2. 一般情况下，*$N$ *与任意给定的正数* $\epsilon$ *有关.*

为了表达方便，引入符号

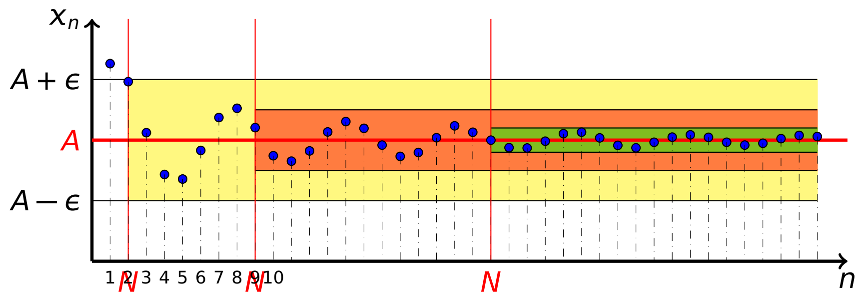
- $\forall$ ······································································ 任意 (给定) 的.

- $\exists$ ...................................................... 至少有一个或存在.

使用 $\epsilon - N$ 语言，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 可以表示为：

$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 $N$, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$.

注记**.** 数列极限的定义未给出求极限的方法.




当 $n > N$ 时, 所有的点 $x_n$ 都落在 $(A-\epsilon, A+\epsilon)$ 内，只有有限个 (至多只有 $N$ 个) 落在其外.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，（$|q| < 1$）

例 **1.** 设 $x_n = C$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

例 **2.** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

例 **3.** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

例 **4.** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

例 **5.** 设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

发散的数列至少有这两种可能：

1. 无界型的：比如 $x_n = 2^n$；

2. 摆动型的：比如 $x_n = (-1)^n$.

### 2.1.4 收敛数列的性质

性质 **1** (极限的唯一性)**.** 收敛数列的极限必唯一.

性质 **2** (有界性)**.** 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leq M$.

推论**.** 无界数列必定发散*.*

性质 **3** (保号性)**.** 设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

注记**.** 这个定理表明*,* 若数列的极限为正（或负），则该数列从某一项开始以后所有项都为正（或负）*.*

推论 (保号性)**.** 设数列 $x_n \geq 0$（或 $x_n \leq 0$），且 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，则有 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）.

推论**.** 如果 $x_n \geq y_n$，而且 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim_{n\to\infty} y_n = B$，则有 $A \geq B$.

思考**.** 若将上面的等号去掉，结论如何？

性质 **4** (收敛数列与其子列件的关系)**.** 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $A$ ，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 $A$*.*

注记**.** 这个定理表明*:* 若数列有两个不同的子数列收敛于不同的极限，则该数列是发散的*.*

例子**.** 数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ 是发散的

- 数列*:* 研究其变化规律*;*

- 数列极限: 极限思想、精确定义、几何意义;
- 收敛数列的性质: 唯一性、有界性、保号性、子数列的收签性.

选择. 已知数列 $\{x_n\}$ 的通项为 $x_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$，则该数列

*(A)* 收敛且有界 *(B)* 收敛且无界

*(C)* 发散且有界 *(D)* 发散且无界

# 2.2 函数的极限

## 2.2.1 函数极限的定义

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的数叫做自变量在这一变化过程中函数的极限. 我们主要研究以下两种情形:

1. 自变量 $x$ 任意接近于有限值 $x_0(x\to x_0)$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;
2. 自变量 $x$ 的绝对值 $|x|$ 无限增大 $(x\to\infty)$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;

函数 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的过程中, 对应函的数值 $f(x)$ 无限接近于确定值 $A$.

问题. 如何用数学的语言刻画" 无限接近"?

- 用 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示 $|f(x)-A|$ 任意小;
- 用 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示 $x\to x_0$ 的过程.

定义 **1.** 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 $A$，对于任何 $\epsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有

$$|f(x)-A|<\epsilon$$

则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 $A$ 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.\ 或\ f(x)\to A\ (当\ x\to x_0)$$

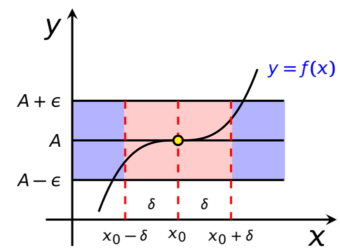
“$\epsilon-\delta$” 定义： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists\,\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$时，恒有

$$|f(x)-A|<\epsilon.$$

当 $x$ 在 $x_0$ 的去心 $\delta$ 邻域时，函数 $y=f(x)$ 图形完全落在以直线

$$y=A$$

为中心线，宽为 $2\epsilon$ 的带形区域内.




注记. *1.* 一般情况下，$\delta$ 与 $\epsilon$ 有关.

*2.* 函数极限是否存在与 $f(x)$ 在 $x_0$ 点是否有定义无关.

1. $y=C$

   当 $x\to x_0$ 时，$y\to C$

2. $y=x$

   当 $x\to x_0$ 时，$y\to x_0$

3. $y=2x+1$

   当 $x\to x_0$ 时，$y\to 2x_0+1$

4. $y=\sqrt{x}$

   当 $x\to x_0$ 时，$y\to\sqrt{x_0}$

例 **1.** 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$,($C$ 为常数 ).

例 **2.** 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

例 **3.** 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$（$x_0>0$）.

注记. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 **4.** 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1; \\ 3, & x=1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

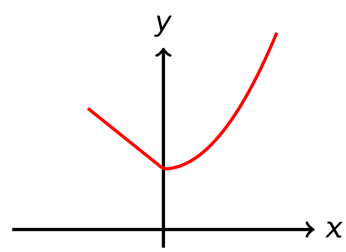
注记. 即使 $f(x)$ 在 $x_0$ 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 **5.** 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

例 **6.** 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0; \\ x^2+1, & x\ge 0;\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.




定义. 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时有

$$|f(x)-A|<\epsilon,$$

则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 $A$ 为左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^-)=A.$$

---

定义. 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 右邻域有定义，如果对任何 $\epsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时有

$$|f(x)-A|<\epsilon,$$

则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 $A$ 为右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^+)=A.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\{x|0<|x-x_0|<\delta\}\\ =&\{x|0<x-x_0<\delta\}\cup\{x|-\delta<x-x_0<0\}\end{aligned}$$

于是我们有

**定理.** 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

例 **7.** 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

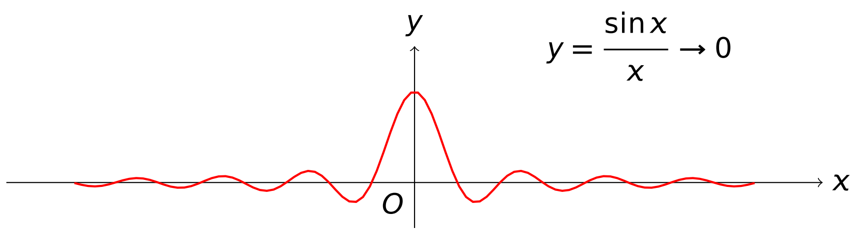
例 **8.** 设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

例 **9.** 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-x+2, & x>1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

**注记.** 研究当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限，不必要求 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有定义.

**练习.** 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ e^x, & 0<x<1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$；判断极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在，若存在求出该极限.

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的变化趋势.




函数 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 $A$.

通过上面演示实验的观察：当 $x$ 无限增大时, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

**问题.** 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

- 用 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示 $|f(x)-A|$ 任意小;
- 用 $|x|>X$ 表示 $x\to\infty$ 的过程.

**定义 2.** 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 $A$，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $X > 0$，使得当 $|x| > X$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 $A$ 为极限，记为

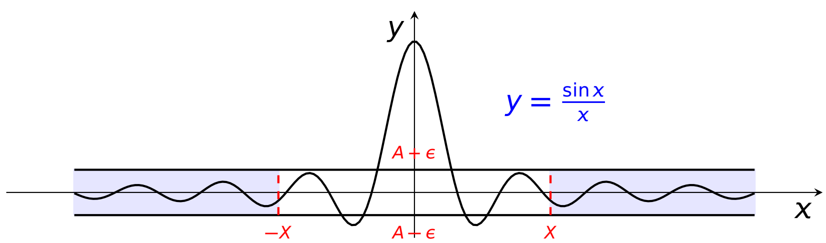
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

**思考.** $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 的 $\epsilon$ 语言定义.

"$\epsilon - X$" 定义: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \forall\epsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

**注记.** $x \to \infty$ 有两种方向，即 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$. 类似地可以定义 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$.

**定理.** $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$.




当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线，宽为 $2\epsilon$ 的带形区域内.

**例 10.** 证明 $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

**例 11.** 证明 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} C = C \tag{2.2.1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k > 0) \tag{2.2.2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \tag{2.2.3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \quad (b > 1) \tag{2.2.4}$$

### 2.2.2 函数极限的性质

**性质 1** (唯一性)**.** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.

**性质 2** (局部有界性)**.** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则存在 $\delta>0$ 和 $M>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|\le M$.

例子**.** 设 $f(x)=1/x$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$，此时当 $0<|x-1|<1/2$ 时有 $|f(x)|\le 2$.

**性质 3** (局部保号性)**.** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>\frac{A}{2}>0$（或 $f(x)<\frac{A}{2}<0$）.

例 **12.** 设 $f(x)=2x-1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1>0$，此时当 $0<|x-1|<1/4$ 时，有 $f(x)>1/2>0$.

推论 (保号性)**.** 设 $f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\ge 0$（或 $A\le 0$）.

推论**.** 如果函数 $g(x)\ge h(x)$，而且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=B$，则有 $A\ge B$.

极限的性质，对于其它形式 ($x\to\infty$、单侧极限) 的极限也成立.

### 2.2.3 小结

- 极限的定义：定义、几何意义；
- 极限的性质：唯一性、局部保号性、局部有界性.

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在$x=0$ 处 的左、右极限是否存在？当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

## 2.3 无穷小与无穷大

### 2.3.1 无穷小

**定义 1.** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

**注记.** $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小 $\Longleftrightarrow$ $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<\epsilon$.

**注记.** 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$、$x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$ 时的无穷小.

**例子.** $0$、$x$、$x^2$、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 $e^x-1$ 都是 $x\to 0$ 时的无穷小.

**例子.** 函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x\to\infty$ 时的无穷小.

**注记.** *1.* 无穷小是变量，不能与很小的数混淆. *2.* 零是可以作为无穷小的唯一的数.

**定理 1.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

定理的意义：

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近的近似表达式 $f(x)\approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

**定理 2.** 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.

**问题.** 无穷多个无穷小的和是不是无穷小？

**定理 3.** 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

**推论 1.** 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

**推论 2.** 常数与无穷小的积是无穷小. $x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}$ $(x\to 0)$

**推论 3.** 有限个无穷小的积是无穷小.

注意：两个无穷小的商不一定是无穷小.

问题**.** 无穷多个无穷小的积是不是无穷小？

例 **1.** 求函数极限 $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$.

练习**.** 求下列函数极限：

*(1)* $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$;

### **2.3.2** 无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义**.** 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个去心邻域有定义．如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

注记**.** *1.* 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 时的无穷大. *2.* 特殊情况：正无穷大 *(*$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$*)*，负无穷大 *(*$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$*.)*

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例：$\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$).

例 **2.** 证明 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

定义 **2.** 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

练习**.** $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{x+1}{x^2}$ 是 $x\to 0$ 时的无穷大.

练习**.** $\frac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x\to 1$ 时的无穷大.

定理 **4.** 无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大.

注记**.** 关于无穷大的讨论, 都可归结为关于无穷小的讨论.

例 **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x^2+1}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x+1}=\infty.$

### 2.3.3 小结

主要内容: 两个定义; 四个定理; 三个推论.

几点注意:

1. 无穷小（大）是变量, 不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;
2. 无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;
3. 无界变量未必是无穷大.

在自变量的同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小：反之，无穷小的倒数是否一定为无穷大?

答案**.** 不一定. *0* 是无穷小，但其倒数不存在. 所以课本上表示为“非零的无穷小的倒数是无穷大”.

## 2.4 极限运算法则

### 2.4.1 极限运算法则

定理 **1.** 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

1. $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$
2. $\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$
3. $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

推论 **1.** 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 $c$ 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论 **2.** 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 $n$ 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

### 2.4.2 求极限方法举例

1. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a_0\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n + a_1\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{n-1} + \cdots + a_n$$
$$= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0)$$

2. 设 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

注意：若 $Q(x_0) = 0$，则商的法则不能应用.

3. 如果基本初等函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个邻域有定义，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例 **1.** 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$.

例 **2.** 求 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5}$

例子**.** 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$.

例子. 求函数极限 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

例子. 设 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 $a$、$b$.

例 **3.** 求函数极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

例 **4.** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$$

---

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

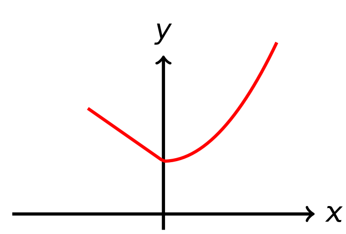
例 **5.** 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x+1}+ax+b\right)=2$, 求 $ab$.

例 **6.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

例 **7.** 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ x^2+1, & x\geq0;\end{cases}$$

求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.




练习. 求下列函数极限:

*(1)* $\lim\limits_{x\to0}(x+2\ln(1+x)+e^x+2)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$.

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \not\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

---

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "\times\ f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & \neq & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
 & & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \overset{\boxed{\begin{array}{c} x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0) \\ g(x)\neq u_0 \end{array}}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

---

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "\surd\ f\circ g"] \\
\mathring{U}(u_0,\eta) & = & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
 & & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

$$
\begin{array}{c}
\mathring{U}(x_0,\delta) \\
\downarrow g \\
U(u_0,\eta)
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c}
U(u_0,\eta) \\
\downarrow f \\
U(A,\epsilon)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathring{U}(x_0,\delta) \\
\big\downarrow \checkmark\ f\circ g \\
U(A,\epsilon)
\end{array}
$$

**定理 2.** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，并且存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x) \neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A.$$

**定理.** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right] = f(u_0).$$

**例子.** $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}} \overset{\boxed{\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)}}{=} \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}.$

### 2.4.3 小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

**问题.** 在某个过程中，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，那么 $f(x)+g(x)$ 是否有极限？为什么？

## 2.5 极限存在准则、两个重要极限

| 极限存在准则 I | 极限存在准则 II |
| --- | --- |
| $\Downarrow$ | $\Downarrow$ |
| 重要极限 I | 重要极限 II |
| $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ |

### 2.5.1 夹逼准则

**定理** (极限存在准则 I)**.** 如果数列 $x_n\le y_n\le z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

**例子.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

**注记.** 在上述定理中，如果不等式 $x_n\le y_n\le z_n$ 仅在 $n>N$ 时成立，结论不变.

定理 (极限存在准则 I′)**.** 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

注记**.** 若将 $x\to x_0$ 全部改为 $x\to\infty$，定理仍成立.

注记**.** 在上述定理中，如果不等式 $f(x)\le g(x)\le h(x)$ 仅在 $x_0$ 的某个去心邻域上成立，结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 $y_n$ $(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$, 并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

一般地，如果当 $x\to 0$ 时，$\phi(x)\to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin[\phi(x)]}{\phi(x)}=1}$$

例 **1.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

例 **2.** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

例 **3.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

例 **4.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

练习**.** 求下列函数极限:

*(1)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$

*(2)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

*(3)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x^2}$

*(4)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$

*(5)* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}}{x}$

例 **5.** 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

解**.** 令 $t=x-\pi$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}&=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1\end{aligned}$$

例 **6.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

例 **7.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

例 **8.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$.

### **2.5.2** 重要极限 **II**

定理 (极限存在准则 II)**.** 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记**.** 若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

例子**.** 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$*(*$n$ 重根式*)* 的极限存在, 并求出极限.

| $n$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 2.250 |
| 3 | 2.370 |
| 4 | 2.441 |
| 5 | 2.488 |
| 10 | 2.594 |
| 100 | 2.705 |
| 1000 | 2.717 |
| 10000 | 2.718 |

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}}$$

可以证明

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \xRightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \mathrm{e}}$$

一般地，如果当 $x\to a$ 时，$\psi(x)\to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(1+\psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}} = \mathrm{e}}$$

例 **9.** 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

例 **10.** 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^x$

练习 **1.** 求函数极限：

*(1)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x$

*(2)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{3x}}$

定理**.** 若 $\lim\limits_{x\to\square}u(x)=A>0$，$\lim\limits_{x\to\square}v(x)=B$，则有

$$\lim_{x\to\square}u(x)^{v(x)} = A^B.$$

例 **11.** 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

练习 **2.** 求函数极限：

*(1)* $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4x}}$

*(2)* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}$

*(3)* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x-3}$

例 **12.** 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

例 **13.** 求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

### **2.5.3** 连续复利

例子**.** 复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 $M$ 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%)=M\times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\frac{0.5\%}{4}\right)^4=M\times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\frac{0.5\%}{360}\right)^{360}=M\times 1.00501249$

事实**.** 常数 e 反映了连续增长的规律.

设一笔贷款 $A_0$ (称为本金)，年利率为 $r$, 则

- 一年后本利和 $A_1=A_0(1+r)$

- 两年后本利和 $A_2 = A_1(1+r) = A_0(1+r)^2$
- $k$ 年后本利和 $A_k = A_0(1+r)^k$

如果一年分 $n$ 期计息，年利率仍为 $r$ ，则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

$k$ 年后本利和 $A_k = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk}$

如果计息期数 $n \to \infty$ ，即每时每刻计算复利 (称为连续复利)，则 $k$ 年后的本利和

$$A_k = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk} = \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rk}$$

$$= A_0 e^{rk}$$

1. 两个准则
   - 两面夹 (夹逼) 准则
   - 单调有界准则
2. 两个重要极限
   - $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$
   - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e.$

复习 **1.** 求函数极限：

*(1)* $\lim\limits_{x\to0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$

*(2)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x\sin x}$

*(3)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1}$

**例子.** 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

**例子.** 设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

**例子.** 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，且当 $n \geq 1$ 时有 $x_{n+1} = \dfrac{1+x_n^2}{2}$. 研究数列的极限.

# 2.6 无穷小的比较

## 2.6.1 无穷小的阶

**例子.** 比较 $x \to 0$ 时的三个无穷小 $x$，$2x$，$x^2$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 0.1 | 0.01 | 0.001 | $\cdots$ | $\to$ | 0 |
| $2x$ | 2 | 0.2 | 0.02 | 0.002 | $\cdots$ | $\to$ | 0 |
| $x^2$ | 1 | 0.01 | 0.0001 | 0.000001 | $\cdots$ | $\to$ | 0 |

**定义.** 设 $\alpha$、$\beta$ 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 $\beta$ 是比 $\alpha$ 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 $\beta$ 是比 $\alpha$ 低阶的无穷小.
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 $\beta$ 和 $\alpha$ 是同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 $\beta$ 和 $\alpha$ 是等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$.

4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$, $k > 0$, 则 $\beta$ 是 $\alpha$ 的 $k$ 阶无穷小.

例 **1.** 在 $x \to 0$ 时，无穷小 $x^2$ 比 $x$ 高阶.

例 **2.** 在 $x \to 0$ 时，无穷小 $x^2$ 比 $x^3$ 低阶.

例 **3.** 在 $x \to 0$ 时，无穷小 $x^2$ 和 $5x^2$ 同阶.

例 **4.** 在 $x \to 0$ 时，无穷小 $x^2$ 和 $x^2+2x^3$ 等价.

例 **5.** 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 为 $x$ 的三阶无穷小.

练习 **1.** 已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 和 $g(x)=x^2$ 均为 $x \to 0$ 时的无穷小.

*(1)* 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶?

*(2)* 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶?

*(3)* 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶?

*(4)* 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价?

当 $x \to 0$ 时，有如下这些常用的等价无穷小：

| | |
|---|---|
| (1) $\sin x \sim x$ | (5) $\ln(1+x) \sim x$ |
| (2) $\tan x \sim x$ | (6) $e^x - 1 \sim x$ |
| (3) $\arcsin x \sim x$ | (7) $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$ |
| (4) $\arctan x \sim x$ | (8) $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{x}{n}$ |

意义：用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

定理**.** *$\beta$ 与 $\alpha$ 是等价无穷小的的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$. 称 $\alpha$ 是 $\beta$ 的主要部分.*

### 2.6.2 等价无穷小代换

定理**.** 设 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则有 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

例 **6.** 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

例 **7.** 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

若分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

**例子.** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

**解.** 当 $x\to 0$，$\tan x\sim x$， $\sin x\sim x$.

$$\text{原式} = \neq \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$

**注记.** 只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

**注记.** 当 $\alpha_1\sim\beta_1$、$\alpha_2\sim\beta_2$ 时，下列等式总是成立：

$$\alpha_1\cdot\alpha_2 \overset{\checkmark}{\sim} \beta_1\cdot\beta_2$$

但下列等式未必成立：

$$\alpha_1\pm\alpha_2 \overset{\times}{\sim} \beta_1\pm\beta_2$$

---

**例子.** 当 $x\to 0$ 时，有

$$\boxed{\begin{array}{c} x+x^2\sim x+x^3 \\ x\sim x \end{array}} \xrightarrow{\text{两边同时相减}} \boxed{x^2 \overset{\times}{\sim} x^3}$$

练习 **2.** 求下列函数极限：

*(1)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$;

*(2)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{(e^{2x}-1)\ln(1-2x)}$.

### 2.6.3 小结与思考

1. 无穷小的比较：反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较.

- 高 (低) 阶无穷小;
- 等价无穷小;
- 无穷小的阶.

2. 等价无穷小的代换：求极限的又一种方法, 注意适用条件.

**思考.** 任何两个无穷小都可以比较吗？

# 2.7 函数的连续性

## 2.7.1 函数的连续性的概念

**例子.** 自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.
2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小.

对于 $y=f(x)$ 定义域中的一点 $x_0$，如果 $x$ 从 $x_0$ 作微小改变 $\Delta x$ 后，$y$ 的相应改变量 $\Delta y$ 也很微小，则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续.

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义, 当 $x$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内由 $x_0$ 变到 $x_0+\Delta x$ 时, 称 $\Delta x$ 为自变量 $x$ 在点 $x_0$ 的增量; 相应地, 函数 $y$ 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$,

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

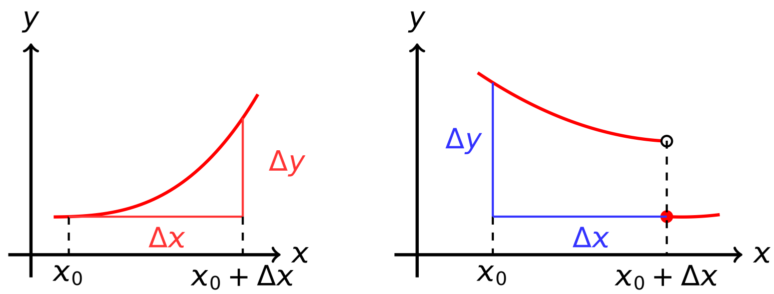
称为函数 $f(x)$ 相应于 $\Delta x$ 的增量.

**定义 1.** 设 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续.

$$\Updownarrow$$




定义 **2.** 设 $y = f(x)$ 在 $x_0$ 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续.

$\varepsilon - \delta$ 定义 : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义
2. 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 即
$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续 $\Longleftrightarrow$ 函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$（极限存在）:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$（连续）：

$$\forall \epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x\in U(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0),\epsilon)$$

例 **1.** 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在$x=0$ 处连续.

例 **2.** 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

定义**.** 若函数 $f(x)$ 在 $(a,x_0]$ 内有定义, 且 $f(x_0^-)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b)$ 内有定义, 且 $f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处右连续.

定理**.**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow f\left(x_0^-\right)=f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$$

例 **3.** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0,\\ x-2, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

练习 **1.** 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$，判断它在 $x=0$ 处的连续性.

定义**.** 如果 $f(x)$ 在区间 $I$ 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续:

- 函数在开区间 $(a,b)$ 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

注记**.** 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

### 2.7.2 函数的间断点

**定义.** 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 不连续，则称它在点 $x_0$ 间断，或者称点 $x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

$x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点, 有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 $x_0$ 处没有定义;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

**定义 3.** 如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$, 或 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处无定义则称点 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

**例子.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处有可去间断点.

**例子.** $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ ............................................ 可去间断点

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 即可使其变为连续点.

**定义.** 如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处左, 右极限都存在, 但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, 则称点 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

**例子.** $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ ............................................ 跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点;

2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

**定义.** 如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

**例子.** $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处 ........ 无穷间断点

**例子.** $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处 ........ 振荡间断点

**注记.** 间断点常见位置：(*1*) 分母为零；(*2*) 分段点.

---

**例子.** 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点，并判断类型.

**例子.** 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\le 1, x\ne 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\ne 2\end{cases}$ 的间断点，并判断其类型.

函数的间断点可能不只是个别的几个点.

**例子.** 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{当}x \text{ 是有理数时},\\ 0, \text{当}x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

在定义域 $R$ 内每一点处都间断, 且都是第二类间断点.

**例子.** $f(x)=\begin{cases}x, \text{当}x \text{ 是有理数时},\\ -x, \text{当}x \text{ 是无理数时}\end{cases}$ 仅在 $x=0$ 处连续, 其余各点处处间断.

例 **4.** 求 $a$ 的值, 使函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\ge 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

### 2.7.3 初等函数的连续性

定理 **1.** 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 $x_0$ 处连续则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0)\ne 0)$ 在点 $x_0$ 处也连续.

**例子.** $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 故 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 在其定义域内连续.

**定理 2.** 严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

**例子.** $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续故

$$y=\arcsin x$$

在 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上单调减少且连续;

$y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

**定理 3.** 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

**例子.** 因为 $u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续, $y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,

故 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续**.**

**定理 4.** 初等函数在其定义区间内都是连续函数**.**

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

**例子.** $y=\sqrt{\cos x-1}$, $\quad D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义, 故不连续.

初等函数在连续点求极限可用代入法.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad (x_0\in \text{ 定义区间})$$

**例 5.** 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin\sqrt{e^x-1}$

## 2.7.4 小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.

2. 区间上的连续函数

3. 间断点的分类

- 第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
  - 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
  - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
- 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
  - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
  - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大

4. 初等函数的连续性

- 初等函数在其定义区间上连续;
- 初等函数的连续性在求极限时的应用: 代入法.

**思考.** 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续, 则 $|f(x)|$ 、$f^2(x)$ 在 $x_0$ 是否连续? 又若 $|f(x)|$ 、$f^2(x)$ 在 $x_0$ 连续, $f(x)$ 在 $x_0$ 是否连续?

# 2.8 闭区间上连续函数的性质

## 2.8.1 最大值和最小值定理

**定义.** 对于在区间 $I$ 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0\in I$, 使得对于任一 $x\in I$ 都有

$$f(x)\leq f(x_0)\quad (f(x)\geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的最大 (小) 值.

**例子.** $y=1+\sin x$, 在 $[0,2\pi]$ 上, $y_{\max}=2$, $y_{\min}=0$;

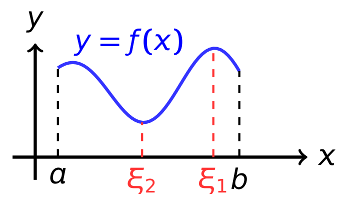
**例子.** $y=\operatorname{sgn}x$, 在 $(-\infty,+\infty)$ 上, $y_{\max}=1$, $y_{\min}=-1$;

**例子.** $y=\operatorname{sgn}x$, 在 $(0,+\infty)$ 上, $y_{\max}=y_{\min}=1$

**定理 1** (最值定理)**.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 $M$ 和最小值 $m$**.**

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\exists\xi_1,\xi_2\in[a,b]$, 使得 $\forall x\in[a,b]$ 时, 有

$$f(\xi_1)\geq f(x),\ f(\xi_2)\leq f(x).$$




1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

**例 1.** 函数 $y=\tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是连续的，但在这个开区间上它是无界的，而且也没有最大值和最小值**.**

**例 2.** 函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leq x<1\\ 1, & x=1\\ -x+3, & 1<x\leq 2\end{cases}$

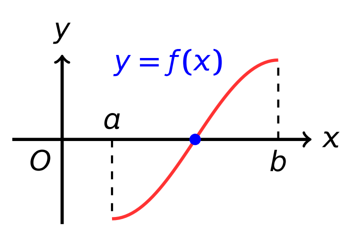
在区间 $[0,2]$ 虽然有界，但既无最大值也无最小值**.**

### 2.8.2 零点定理与介值定理

**定义.** 如果 $x_0$ 使 $f(x_0)=0$, 则 $x_0$ 称为函数 $f(x)$ 的零点.

**定理 2** (零点定理)**.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f(\xi)=0$.

几何解释: 连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 $x$ 轴的不同侧, 则曲线弧与 $x$ 轴至少有一个交点.

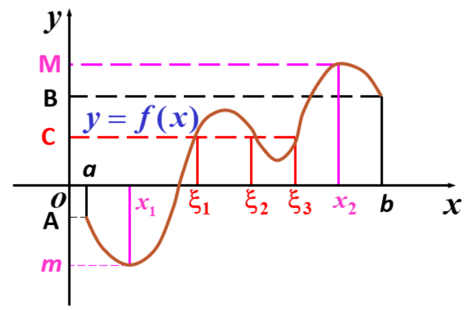



**例 3.** 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根**.**

例 **4.** 证明方程 $2\sin x = x+1$ 有实数解.

定理 **3** (介值定理)**.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 $A$ 与 $B$ 之间的任何数 $C$，在开区间 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f(\xi)=C$.

几何意义：在 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ ($C$ 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间) 至少相交一点.




推论**.** 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 $M$ 与最小值 $m$ 之间的任何值.

例 **5.** 证明方程 $x^5-3x+1=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

例 **6.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $[a,b]$ 上的 $n$ 个点，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 $\xi$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

例 **7.** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对于任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $a\le f(x)\le b$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有不动点，即存在 $x^*\in[a,b]$, 使 $f(x^*)=x^*$.

例 **8.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$, $f(b)>b$. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$

### **2.8.3** 均衡价格的存在性

假设需求函数 $D=D(P)$ 和供给函数 $S=S(P)$ 都是连续函数. 如果生产某种商品的资源十分昂贵，则价格为零时供给必为零，即 $S(0)=0$; 再假定 $D(0)>0$, 即消费者有消费欲望**.** 令

$$Z(P)=D(P)-S(P);\ \text{于是}\ Z(0)=D(0)-S(0)>0.$$

另外，当价格涨到某个充分大的值 $P = P^*$ 时，公司会发现生产该产品利润丰厚，而顾客会感到价格过高，这样必然导致供过于求，即 $D(P^*) < S(P^*)$, 从而

$$Z(P^*) = D(P^*) - S(P^*) < 0.$$

又 $D = D(P)$ 和 $S = S(P)$ 都是区间 $[0, P^*]$ 上的连续函数，所以 $Z(P) = D(P) - S(P)$ 也是区间 $[0, P^*]$ 上的连续函数，于是由零点定理，存在 $P_e \in (0, P^*)$, 使得

$$Z(P_e) = D(P_e) - S(P_e) = 0,$$

即

$$D(P_e) = S(P_e), \text{ 且 } P_e > 0.$$

**定理.** 假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数，且满足:

1. 价格为零时，需求超过供给，即 $D(0) > S(0)$;
2. 存在某个价格 $P = P^* > 0$, 使得在此价格下，供给超过需求，即 $S(P^*) > D(P^*)$.

则市场上一定存在一个正的均衡价格，即存在 $P_e > 0$, 使得 $D(P_e) = S(P_e)$.

### 2.8.4 小结

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

  注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路

1. 直接法: 先利用最值定理, 再利用介值定理;
2. 辅助函数法: 先作辅助函数 $F(x)$, 再利用零点定理;

**思考.** 假设有一个登山者头天上午 *8* 点从山脚开始上山，晚上 *6* 点到达山顶，第二天上午 *8* 点从山顶沿原路下山，下午 *6* 点到达山脚. 问该登山者在上、下山过程中，会同时经过同一地点吗？为什么？

**问题.** 证明方程 $x = a\sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$.

**问题.** 若 $f(x)$ 在 $[\,a, b\,]$ 上连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有 $\xi$, 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n)}{n}$$