

第九章 二重积分

1. 设 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则极坐标系 (r, θ) 中的累次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$$

可化为直角坐标系 (x, y) 中的累次积分 ()

- (A) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (B) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$
(C) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (D) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$

2. 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 可以写成 () .

- (A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$
(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ (D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$

3. 设函数 $f(x, y)$ 为连续函数, 二次积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy$ 交换积分次序后等于 () .

- (A) $\int_0^2 dy \int_0^y f(x, y) dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$
(C) $\int_0^2 dx \int_y^2 f(x, y) dy$ (D) $\int_0^2 dy \int_0^2 f(x, y) dx$

4. 设函数 $f(x, y)$ 为连续函数, 二次积分 $\int_0^1 dy \int_{y^2}^y f(x, y) dx$ 交换积分次序后等于 () .

- (A) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$ (B) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$

$$(C) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^x f(x, y) dy$$

$$(D) \int_0^1 dx \int_x^{x^2} f(x, y) dy$$

5. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ 交换积分次序后等于 ()

$$(A) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^x f(x, y) dy$$

$$(B) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$$

$$(C) \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$$

$$(D) \int_0^1 dx \int_x^{x^2} f(x, y) dy$$

6. 交换二次积分 $\int_{-1}^0 dx \int_0^{1+x} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy =$ _____.

7. 设区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$, 则 $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy =$ _____.

8. 若 D 是由 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ 围成的正方形区域, 则 $\iint_D x^2 dx dy =$ _____.

9. 二重积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{x^2+y^2} dx dy =$ _____.

10. 已知 $f(x, y) = xy + 2 \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 且 $f(x, y)$ 连续, 则 $f(x, y) =$ _____.

11. 二重积分 $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(\arctan \frac{y}{x}) dy$ 在极坐标系中表示为 _____.

12. 已知 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$, 则 $\iint_D f(x)f(y) dx dy =$ _____, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

13. 计算二重积分 $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} d\sigma$, 其中 D 是由 $x = \sqrt{y}$, $x = 0$ 与 $y = 1$ 所围成的区域.

参考答案: $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$.

14. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

参考答案: $\frac{\pi}{3} - \frac{2}{9}$.

15. 计算二重积分 $\iint_D xy \, dx \, dy$, 其中 D 是由直线 $y=2, y=x, y=2x$ 所围成的面积.

参考答案: $\frac{3}{2}$.

16. 计算二重积分 $\iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$, 其中 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

参考答案: $\frac{\pi^2}{6}$.

17. 计算二重积分 $\iint_D ye^{\frac{x}{y}} \, dx \, dy$, 其中区域 D 由直线 $y=x, x=0, y=1$ 围成.

参考答案: $\frac{e-1}{3}$.

18. 计算二重积分 $\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, 其中 D 为环形域 $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$.

参考答案: 4π .

19. 计算二重积分 $\iint_D (x^2 + y) \, dx \, dy$, 其中 D 由曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 围成.

参考答案: $\frac{33}{140}$.

20. 计算二重积分 $\iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, 其中 D 为环形域 $1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$.

参考答案: $\frac{\pi}{2}(e^2 + 1)$.

21. 计算二重积分 $\iint_D \frac{y}{1+x^6} \, dx \, dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$.

参考答案: $\frac{\pi}{24}$.

22. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

参考答案: $\frac{\pi}{12}$.

23. 计算二重积分 $\iint_D \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 为环形域 $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$.

参考答案: $-6\pi^2$.