# 第二章　极限与连续

## 一、单项选择

**1.** 设 $x_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (　　).

(A) $>0$　　(B) $\geq 0$　　(C) $=0$　　(D) $<0$

**2.** 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=$ (　　).

(A) $\infty$　　(B) 1　　(C) 不存在　　(D) 0

**3.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=$ (　　)

(A) e　　(B) $\mathrm{e}^{-1}$　　(C) $\mathrm{e}+1$　　(D) $\mathrm{e}^{-1}+1$

**4.** 下列运算过程正确的是 (　　)

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+n}=0+0+\cdots+0=0$

(B) 当 $x\to 0$ 时, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

(C) 当 $x\to 0$ 时, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$

(D) 当 $x\to 0$ 时, $\tan x\sim x$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})x}=1$

**5.** 设 $0<a<b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=$ (　　)

(A) 1　　(B) 0　　(C) $a$　　(D) $b$

**6.** 设 $f(x)$ 在 $(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$ 定义. 如果极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在, 则下列结论正确的是 (　　)

(A) $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 有界;
(B) 存在正数 $\delta$, $f(x)$ 在 $(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 有界;
(C) $f(x)$ 在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 有界;
(D) 存在正数 $\delta$, $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 有界.

**7.** 已知 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{f(3x)}=$ (　)

(A) $\frac{2}{3}$　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{4}{3}$

**8.** 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ 不存在, 则 (　).

(A) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}$ 一定都不存在;

(B) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}$ 一定都存在;

(C) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}$ 恰有一个存在, 而另一个不存在;

(D) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}$ 都不一定存在.

**9.** 当 $x\to 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个是比另三个更高阶的无穷小量 (　).

(A) $x^2$　　(B) $1-\cos x$　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　　(D) $x-\tan x$

**10.** 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos 2x$ 与 $x^2$ 相比是 (　).

(A) 高阶无穷小量　　(B) 同阶但不等价的无穷小量

(C) 低阶无穷小量　　(D) 等价无穷小量

**11.** 当 $x\to 0$ 时, $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是 (　)

(A) 无穷小量　　(B) 无穷大量

(C) 有界量非无穷小量　　(D) 无界但非无穷大量

**12.** 当 $x\to 0$ 时, 下列函数中比 $x$ 高阶的无穷小量是 (　).

(A) $x+\sin x$　　(B) $x-\sin x$　　(C) $\ln(1+x)$　　(D) $\ln(1-x)$

**13.** 设在某个极限过程中函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是无穷大量, 则下列函数中哪一个也必是无穷大量 (　).

(A) $f(x)+g(x)$　　(B) $f(x)-g(x)$　　(C) $f(x)\cdot g(x)$　　(D) $\frac{f(x)}{g(x)}$

**14.** $x\to 0$ 时, $1-\cos 3x$ 是 $x^2$ 的 (　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 同阶无穷小, 但不等价

(C) 等价无穷小　　(D) 低阶无穷小

**15.** $x=1$ 是 $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$ 的 (　　)

(A) 连续点　　(B) 跳跃间断点　　(C) 可去间断点　　(D) 无穷间断点

**16.** $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{(x+1)(x+2)}$ 的连续区间是 (　　)

(A) $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$　　(B) $[3,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

**17.** 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x-x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的间断点个数为 (　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

**18.** 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0 \\ k, & x=0 \end{cases}$ 为连续函数, 则 $k=$ (　　)

(A) 1　　(B) $-3$　　(C) 0　　(D) 3

**19.** 函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\leq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处是否连续? (　　)

(A) 连续　　(B) 不连续, 因为无定义

(C) 不连续, 因为极限不存在　　(D) 前面都不对

**20.** 要使 $f(x)=(1+x^2)^{-\frac{2}{x^2}}$ 在 $x=0$ 处连续, 应补充定义 $f(0)$ 的值为 (　　).

(A) 0　　(B) $e^{-2}$　　(C) $e^{-4}$　　(D) $e^{-1}$

## 二、填空题

**1.** 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(4x-1)^{\alpha}}=\beta$, 则 $\alpha,\beta$ 的值是____________.

**2.** 若 $a>0$, $b>0$ 均为常数, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ____________

**3.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}=$ ____________

4. 设 $P(x)$ 是 $x$ 的多项式, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)-6x^3}{x^2}=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x)}{x}=3$, 则 $P(x)=$____________.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=$____________.

6. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax-x+4}{x-1}=A$, 则有 $a=$____________, $A=$____________.

7. 设 $f(x)=x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sin x}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$____________.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin^3 x\cdot\sin\frac{1}{x}}{3x^2}=$____________.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)})=$____________.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x))=$____________.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{1+x^2}=$____________.

12. 当 $x\to 0$ 时, $2x^2+3x^{\frac{5}{2}}$ 是关于 $x$ 的____________阶无穷小.

13. 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt{1-3x}=1+ax+bx^2+o(x^2)$, 则 $a$ 和 $b$ 的值分别为____________.

14. 当 $x\to 0$ 时, $2\sin x-\sin 2x$ 与 $x^k$ 是等价无穷小量, 则 $k=$____________.

15. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{1+x}}{(x-1)(x+2)}$ 的间断点是____________.

16. 设函数 $y=\begin{cases}(1-x)^{\frac{3}{x}} & x\neq 0\\ K & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则参数 $K=$____________.

17. 函数 $f(x)=\begin{cases}x+a & x\le 0\\ \mathrm{e}^x+1 & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a=$____________

**18.** 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin 2x}{x} & x<0\\ a & x=0\\ \dfrac{\ln(1+4x)}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处间断, 则 $a$ __________.

**19.** 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ 的连续区间是__________.

**20.** $x=1$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{1-x}$ 的__________.

## 三、计算题

**1.** 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}$.

**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

**4.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2})$

**5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\arctan x\cdot\arcsin\frac{1}{x}\right)$

**6.** $x_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

**8.** 若 $x_1=a>0$, $y_1=b>0(a<b)$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$

**9.** 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在, 且 $f(x)=x^2(e^{-\frac{1}{x^2}}-1)+\dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^4}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, 求 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

**10.** 设 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} & x>0\\ a & x=0\\ \dfrac{\sin kx}{x} & x<0\end{cases}$ （其中 $k\neq 0$），

（1）求 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左、右极限；

（2）当 $a$ 和 $k$ 取何值时， $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续？

## 四、综合与应用题

**1.** 讨论极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

**2.** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, 且在 $x_0$ 的某去心邻域内 $g(x)\neq0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必等于 0, 为什么？

**3.** 设 $f(x)=\dfrac{x}{\tan\frac{x}{2}}$, 问: 当 $x$ 趋于何值时,$f(x)$ 为无穷小.

**4.** 确定 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x(x-1)}$ 的间断点, 并判定其类型.

**5.** 求 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点, 并判别间断点的类型.

**6.** 求函数 $y=6x+\dfrac{1}{x}$ 的连续区间, 若有间断点, 试指出间断点的类型.

**7.** 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$ 的连续性.

**8.** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x & x\geq0\\ x+1 & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

**9.** 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} & x<0\\ \dfrac{\cos x}{x+2} & x\geq0\end{cases}\quad(a>0)$

(1) 当 $a$ 取何值时, 点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点？是何种间断点？

(2) 当 $a$ 取何值时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty+\infty)$ 上连续？为什么？

**10.** 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}$ 的解析式, 并判断它的间断点及其类型.

## 五、分析与证明题

**1.** 用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

**2.** 设 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 且 $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) f(x) = A$. 证明 $\lim_{x \to x_0} \beta(x) f(x) = A$.

**3.** 设 $f(x)$, $g(x)$ 为连续函数, 试证明 $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 也是连续函数.

**4.** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且在点 $x = 0$ 处连续, 又对任意的 $x_1$ 和 $x_2$, 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. 证明:$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

**5.** 证明方程 $x = a \sin x + 2\ (a > 0)$ 至少有一个正根, 并且不超过 $a + 2$.