第五章　不定积分

5.1　不定积分的概念与性质

5.1.1　原函数与不定积分的概念

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=e^x$
- $(?)'=\sin x$
- $(?)'=\ln x$

定义**.** 若定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 及可导函数 $F(x)$ 满足关系: 对任一 $x\in I$, 都有

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例 **1.** 因 $(\sin x)'=\cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

例 **2.** $(x^2)'=2x$, 而且 $(x^2+2)'=2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

注记**.** 关于原函数，需要注意以下两点：

1. 原函数不止一个

$$F'(x)=f(x)\Longrightarrow(F(x)+C)'=f(x)$$

2. 同一个函数的任意两个原函数之间最多相差一个常数 C.

$$F'(x)=G'(x)=f(x)\Longrightarrow G(x)=F(x)+C$$

定理 (原函数存在定理)**.** 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x)$$

简单地说, 连续函数一定有原函数.

注记. 初等函数的原函数不一定还是初等函数.

定义. 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数, 称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

在上面定义中, 我们称 $\int$ 为积分号, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式, x 为积分变量.

$$\boxed{F'(x) = f(x) \iff \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C}$$

例 3. 求函数 $f(x) = 3x^2$ 的不定积分. .... $x^3 + C$.

例 4. 求函数 $f(x) = \sin x$ 的不定积分. .... $-\cos x + C$.

练习 1. 求不定积分.

(1) $\int x\,\mathrm{d}x$

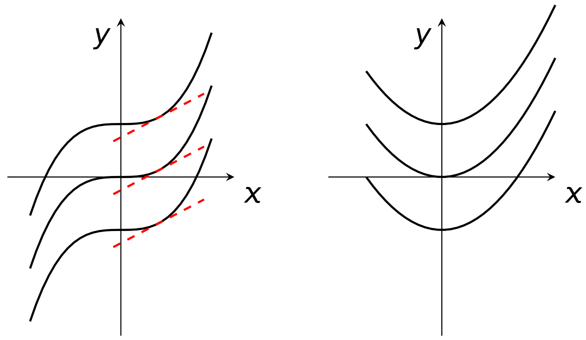
(2) $\int x^2\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

例 5. 求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的不定积分. .... $\ln|x| + C$.

例 6. 求过点 $(1, 3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

答案. $y = x^2 + 2$.



(a) $y=x^3+C$ (b) $y=x^2+C$

5.1.2 不定积分的几何意义

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线. 显然，求不定积分得到族积分曲线 (称为曲线族), 在同一横坐标 $x=x_0$ 处, 任一曲线的切线有相同的斜率.

5.1.3 不定积分的性质

性质 **1.** 导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$
2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(x)+C$

性质 **2.** 非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 **3.** 两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

注：上述法则可以推广至有限多个函数的线性组合.

5.1.4　基本积分表

积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式.

例如，由

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}$$

可得

$$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C.$$

类似地，我们有如下基本积分公式.

1. $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
2. $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
3. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

例 **7.** 求不定积分

(1) $\int (2x + 5x^2 + 7x^3)\,\mathrm{d}x$ .... $x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C$

(2) $\int (2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ .... $2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(3) $\int (2x+1)^2\,\mathrm{d}x$ .... $\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

练习 **2.** 求不定积分

(1) $\int (1 - 2x^2)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int (\frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})\,dx$

(3) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

练习 **3.** 求不定积分

(1) $\int \sqrt{x}(x-3)\,dx$

(2) $\int \frac{(x+1)^2}{x}\,dx$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C$

5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

例 **8.** 求不定积分：

(1) $\int (4e^x - x^e)\,dx$ .... $4e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

(2) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,dx$ .... $e^x + x + C.$

练习 **4.** 求不定积分：

(1) $\int (x^2 + 2^x)\,dx$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

9. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

例 **9.** 求不定积分

(1) $\int (\sin x + 2\cos x) \, dx$ .... $-\sin x + 2\sin x + C.$

(2) $\int \tan^2 x \, dx$ .... $= \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + C.$

练习 **5.** 求不定积分

(1) $\int \cot^2 x \, dx$

(2) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} \, dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

例 **10.** 求不定积分：

(1) $\int \frac{x^4}{x^2+1} \, dx$ .... $\frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$

(2) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} \, dx$ .... $-\frac{1}{x} - \arctan x + C.$

练习 **6.** 求不定积分：

(1) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$

12. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

13. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

5.1.5 小结

本节主要内容：

1. 原函数的概念：$F'(X)=f(x)$;
2. 不定积分的概念：$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$;
3. 求微分与求不定积分的互逆关系
4. 基本积分公式

复习 **1.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int(\sin x-2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int\frac{(2x+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

5.2 换元积分法

5.2.1 第一类换元法

例 **1.** 求不定积分 $\displaystyle\int(2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x$.

解法**.** 设置中间变量，并利用复合函数求导法则**.**

一般地，设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, 即

$$F'(u)=f(u),\ \int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C.$$

如果 $u=\phi(x)$ 可微, 则由链式法则，有

$$\mathrm{d}F(\phi(x))=F'(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x=f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\phi(x)) + C = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}.$$

定理 (第一类换元法). 设 $f(u)$ 具有原函数, $\phi(x)$ 可导，则有

$$\begin{aligned}\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) \\ &= \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}\end{aligned}$$

注记. 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 化为 } \int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

第一类换元法也称为凑微分法.

1. $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)\,(a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}\,\mathrm{d}\left(a^x\right)(a>0 \text{ 且 } a \neq 1);$
6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$
7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$
8. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$

9. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$

10. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x) = -\mathrm{d}(\arccos x)$

11. $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x) = -\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)$

例 **2.** 求不定积分 $\displaystyle\int \sin 2x \,\mathrm{d}x$.

....

注记**.** 观察点不同，所得结论不同.

例 **3.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$ .... $\dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{1}{3}\cos(3x+4) + C$

练习 **1.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x+2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$

例 **4.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ .... $-\mathrm{e}^{1/x} + C$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,\mathrm{d}x$ ………… $\dfrac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}}+C$

练习 **2.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

例 **5.** 求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ ………… $\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,\mathrm{d}x$ ………… $\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ ………… $\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+C$

练习 **3.** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$（$a>0$）

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}$

例 **6.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^5 x\,\mathrm{d}x$ ………… $\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{2}{5}\sin^5 x+\dfrac{1}{7}\sin^7 x+C$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ ………… $\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

> 形如 $\int \sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$ 的解题思路：m,n 有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分.

练习 **4.** 求不定积分

(1) $\int \cos^6 x \sin x \,dx$

(2) $\int \cos^5 x \,dx$

例 **7.** 求不定积分

(1) $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)} \,dx$ .... $\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\int \tan x \,dx$ .... $-\ln|\cos x|+C$

(3) $\int \csc x \,dx$ .... $\ln|\csc x-\cot x|+C$

练习 **5.** 求不定积分

(1) $\int \cot x \,dx$

(2) $\int \sec x \,dx$

例 **8.** 求不定积分 $\int \sin^2 x \,dx$ .... $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \,dx$ 的解题思路：m, n 都是偶数时，使用 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 降幂.

练习 **6.** 求不定积分 $\int \cos^2 2x \,dx$.

例 **9.** 求 $\int \cos 3x \cos 2x \,dx$

形如 $\int \cos mx \cos nx \,\mathrm{d}x$ 的求解思路：使用积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

例 **10.** 求 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$

形如 $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{A\sin x + B\cos x}\,\mathrm{d}x$ 的解题思路: 令 $a\sin x + b\cos x = m(A\sin x + B\cos x) + n(A\sin x + B\cos x)'$ 拆项.

5.2.2 第二类换元法

问题. $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

解决方法： 改变中间变量的设置方法.

过程： 令 $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int (\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int \sin^5 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \cdots\cdots\end{aligned}$$

(应用“凑微分”即可求出结果)

定理 **1** (第二类换元法)**.** 若 $x=\phi(t)$ 是单调、可导的函数，而且 $\phi'(t)\neq 0$，则有

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t)) \\ &= \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}\end{aligned}$$

例 **11.** 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ .... $x-\ln(e^x+1)+C$

练习 **7.** 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$

常用的变量代换

1. 三角代换
2. 倒代换
3. 简单无理函数代换

三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$ 令$x = a \sin t$, $\sqrt{a^2 - x^2} \Longrightarrow a \cos t$
2. $\sqrt{a^2 + x^2}$ 令$x = a \tan t$, $\sqrt{a^2 + x^2} \Longrightarrow a \sec t$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$ 令$x = a \sec t$, $\sqrt{x^2 - a^2} \Longrightarrow a \tan t$

例 **12.** 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$.

例 **13.** 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx$

例 **14.** 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx$

练习 **8.** 求不定积分

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

(2) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$

注记**.** 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的, 需要根据被积函数的情况决定.

例 **15.** 求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$ （三角代换很繁琐）

解. 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2=t^2-1,\ x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t,$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t=\int\left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C\\&=\frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C\end{aligned}$$

当分母的阶较高时，可以采用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

例 **16.** 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x\,(x^7+2)}\,\mathrm{d}x$

例 **17.** 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. *(分母的阶较高)*

当被积函数含有两种或两种以上的根式时 $\sqrt[k]{x},\ldots,\sqrt[l]{x}$ 时，可令 $x=t^n$（n 为各根指数的最小公倍数）

例 **18.** 求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

例 **19.** 求积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

练习 **9.** 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\ldots\ldots,$ 可将无法处理的部分设为 t

例 **20.** 求积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x.$

例 **21.** 求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x.$

当被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$, 可以使用根号内配方法

例 **22.** 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

练习 **10.** 求不定积分

(1) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$

5.2.3 小结

两类积分换元法：

1. 第一类换元（凑微分）
$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$
2. 第二类换元
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t)) = \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$
   (a) 三角代换
   (b) 倒代换
   (c) 根式代换

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C \tag{5.2.1}$$

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \tag{5.2.2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \tag{5.2.3}$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{5.2.4}$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C \tag{5.2.5}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \tag{5.2.6}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \tag{5.2.7}$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \tag{5.2.8}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \tag{5.2.9}$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{5.2.10}$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{5.2.11}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \tag{5.2.12}$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \tag{5.2.13}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \tag{5.2.14}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C \tag{5.2.15}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \tag{5.2.16}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \tag{5.2.17}$$

5.3　分部积分法

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 具有连续导数，则

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

证明. 由 $(uv)' = u'v + uv'$ 可得

$$uv' = (uv)' - u'v$$

故结论成立.

例 **1.** 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ .... $x\sin x + \cos x + C.$

例 **2.** 求不定积分 $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ .... $x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) + C.$

注记**.** 若被积函数是幂函数和正 *(余)* 弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 就考虑设幂函数为 u, 使其降幂一次 *(假定幂指数是正整数)*

练习 **1.** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

例 **3.** 求不定积分 $\int \ln x\,\mathrm{d}x$ .... $x\ln x - x + C.$

例 **4.** 求不定积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

.... $\dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$

注记**.** 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

练习 **2.** 求不定积分：

(1) $\int x \ln x \, dx$

(2) $\int \arcsin x \, dx$

例 **5.** 求积分 $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx.$

例 **6.** 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int x f'(x) dx.$

例 **7.** 求不定积分 $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx.$

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 dv：

- $\displaystyle\int x e^x \, dx = \int x \, d(e^x)$
- $\displaystyle\int x \cos x \, dx = \int x \, d(\sin x)$
- $\displaystyle\int x \ln x \, dx = \int \ln x \, d\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$
- $\displaystyle\int x \arctan x \, dx = \int \arctan x \, d\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$

5.4 有理分式的积分

定义 **1.** 如果 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理函数 *(分式)*.

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式；
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq$ $Q(x)$ 次数，则称它为假分式.

定理 **1.** 假分式 = 多项式 + 真分式

理论上，任何一个有理分式 (真分式) 都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} \qquad = \ln|x+a| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} \qquad = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \qquad = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

理论上，任何一个有有理分式 (真分式) 的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

4. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \qquad = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \qquad = \frac{1}{2(1-n)\,(x^2+a^2)^{n-1}} + C(n \geq 2)$

6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}(n \geq 2)$ 可以用递推法求出

定理 **2.** 设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1}Q_2(x)^{m_2}\cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 **3.** 假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}} \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式.

1. 分母中若有因式 $(x-a)^k$ 时，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x+a)^k} + \frac{A_2}{(x+a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{x+a}$$

   其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

   特别地: $k=1$, 时，分解后为 $\dfrac{A}{x+a}$.

2. 分母中若有因式 $\left(x^2+px+q\right)^k$, 其中 $p^2-4q<0$, 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

   其中 M_i, N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

   特别地: $k=1$, 分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

于是，将有理函数转化为部分分式之和后，只会出现三种情况：

1. 多项式
2. $\dfrac{A}{(x+a)^n}$
3. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

前两种情况的不定积分都比较容易求出，因此只讨论最后一种情况.

讨论不定积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

易知 $x^2+px+q=(x+\dfrac{p}{2})^2+q-\dfrac{p^2}{4}$, 令 $x+\dfrac{p}{2}=t$,

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\ Mx+N=Mt+b,$$

其中 $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$, $b=N-\dfrac{Mp}{2}$.

于是

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

注记. 有理函数都可积，且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合.

例 **1.** 求 $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

例 **2.** 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$.

例 **3.** 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+2x} - \frac{2}{5}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{5}\arctan x + C.
\end{aligned}$$

练习 **1.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

注记**.** 初等函数的原函数未必都是初等函数．可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”，比如

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$