

复习 I

1.1 集合与函数

函数的两要素：定义域与对应法则。

注记。两个函数相同，当且仅当两者的定义域和对应法则都相同。

求函数的定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；
2. 对数里面要求大于零；
3. 分母要求不能等于零。

【函数的奇偶性】给定函数 $y = f(x)$ ，设其定义域 D 关于原点对称，

1. 若 $\forall x \in D$ ，总有 $f(-x) = f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为偶函数。
2. 若 $\forall x \in D$ ，总有 $f(-x) = -f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为奇函数。

【函数的周期性】设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，如果存在一个不为零的常数 l ，使得对任意的 $x \in D$ ，有 $(x \pm l) \in D$ ，且

$$f(x + l) = f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数； l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期。

【函数的单调性】设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，区间 $I \subset D$ ， x_1, x_2 为区间 I 上的任意两个数，

(1) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上 **单调增加** 或 **递增**;

(2) 若当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上 **单调减少** 或 **递减**;

【函数的有界性】 设函数 $y = f(x)$ 在数集 I 上有定义, 如果存在一个正数 M , 对于所有 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 是在 I 上的 **有界函数**. 若不存在这样的 M , 则称 $f(x)$ 是在 I 上的 **无界函数**.

例 1. 将函数 $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ 分解为简单函数的复合.

- **简单函数**指的是由基本初等函数的四则运算得到的函数.
- **基本初等函数**指的是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五种.

1.2 极限与连续

【数列极限的定义】 设 $\{x_n\}$ 为一个数列, 如果存在常数 A , 对任何 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A , 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \rightarrow A \ (n \rightarrow \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

【数列极限的性质】

1. 极限的唯一性: 收敛数列的极限必唯一.
2. 有界性: 设 $\{x_n\}$ 收敛, 则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leq M$.
3. 保号性: 设数列收敛于 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).
4. 收敛数列与其子列件的关系: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 A .

【函数极限的定义 ($x \rightarrow x_0$)】 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对于任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为**极限**, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{)}$$

【函数极限的定义 ($x \rightarrow \infty$)】 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义, 如果存在常数 A , 对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为**极限**, 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

【左极限的定义】 设 $f(x)$ 在点 x_0 **左邻域**有定义, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为**左极限**, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A.$$

【右极限的定义】 设 $f(x)$ 在点 x_0 **右邻域**有定义, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为**右极限**, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A.$$

例 1. 设

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & x > 1 \end{cases}$$

判断该函数在 $x \rightarrow 0$ 及 $x \rightarrow 1$ 时的极限是否存在.

定理. 极限存在当且仅当左右极限都存在而且相等.

【函数极限的性质】

1. 唯一性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.
2. 局部有界性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leq M$.
3. 局部保号性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ (或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$).
 - 保号性: 设 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).
 - 如果函数 $g(x) \geq h(x)$, 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = B$, 则有 $A \geq B$.

【无穷小的定义】 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$), 就称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

1. 无穷小是变量, 不能与很小的数混淆.
2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

【无穷小与函数极限的关系】 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

【无穷小的运算】

1. 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.
2. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.
 - (a) 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

(b) 常数与无穷小的积是无穷小.

(c) 有限个无穷小的积是无穷小.

【注意】

1. 无穷多个无穷小的和不一定是无穷小;
2. 无穷多个无穷小的积不一定是无穷小;
3. 两个无穷小的商不一定是无穷小.

【无穷大】 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的 $M > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta$, 就有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时为**无穷大**, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例: $\frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})$).

【无穷小与无穷大的关系】 无穷大的倒数为无穷小, 而非零无穷小的倒数为无穷大.

【无穷小阶的比较】

定义. 设 α, β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α **高阶** 的无穷小, 记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α **低阶** 的无穷小.
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是 **同阶** 的无穷小.
- ★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 和 α 是 **等价** 无穷小, 记为 $\beta \sim \alpha$.
4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

【常用的等价无穷小】 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有如下这些常用的等价无穷小:

$$(1) \sin x \sim x$$

$$(5) \ln(1+x) \sim x$$

$$(2) \tan x \sim x$$

$$(6) e^x - 1 \sim x$$

$$(3) \arcsin x \sim x$$

$$(7) 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$(4) \arctan x \sim x$$

$$(8) \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$$

【四则运算法则】 如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 那么

$$1. \lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$2. \lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$3. \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{要求分母不为零})$$

【四则运算法则推论】

1. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c \lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

2. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

【复合函数求极限】

1. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 并且存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时 $g(x) \neq u_0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A.$$

2. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right] = f(u_0).$$

例 2. 对于 $x \rightarrow x_0$ 的函数极限, 如果 $f(x)$ 是初等函数, x_0 在 $f(x)$ 的定义区间中, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

【极限存在准则 I】

定理 (极限存在准则 I). 如果数列 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 而且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$.

例子. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$

注记. 在上述定理中, 如果不等式 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立, 结论不变.

定理 (极限存在准则 I'). 如果 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$.

注记. 若将 $x \rightarrow x_0$ 全部改为 $x \rightarrow \infty$, 定理仍成立.

注记. 在上述定理中, 如果不等式 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立, 结论不变.

准则 I 和准则 I' 称为**夹逼准则**或者**两面夹准则**

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 $y_n (f(x))$ 与 $z_n (h(x))$, 并且 $y_n (f(x))$ 与 $z_n (h(x))$ 的极限是容易求的.

【极限存在准则 II】

定理 (极限存在准则 II). 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调**增加**且有**上界**的数列必定收敛.

2. 单调**减少**且有**下界**的数列必定收敛.

注记. 若数列是某一项开始单调变化, 结论仍然成立.

【重要极限 I】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

一般地，如果当 $x \rightarrow 0$ 时， $\phi(x) \rightarrow 0$ ，则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin[\phi(x)]}{\phi(x)} = 1$$

【重要极限 II】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xrightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

一般地，如果当 $x \rightarrow \square$ 时， $\psi(x) \rightarrow 0$ ，则有

$$\lim_{x \rightarrow \square} \left(1 + \psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}} = e$$

【求极限的常用方法】

1. 多项式与分式函数代入法求极限;
2. 消去零因子法求极限;
3. 无穷小因子分出法求极限;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

4. 利用无穷小运算性质求极限;
5. 利用左右极限求分段函数极限;

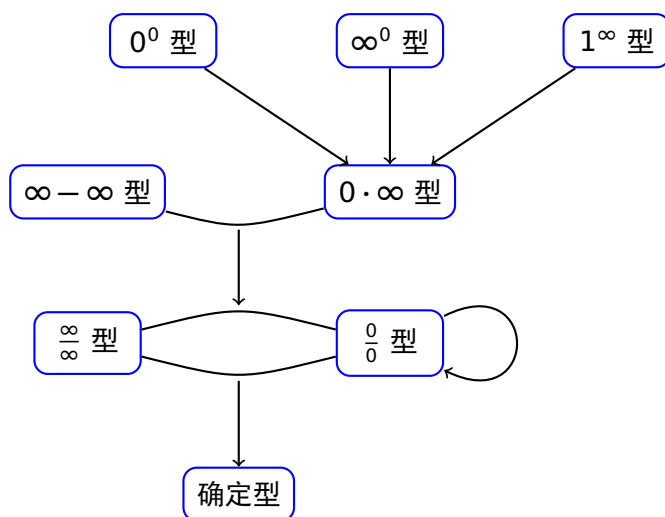
6. 等价无穷小代换：只能对乘除因子代换，不能对加减项代换.

7. 洛必达法则：在一定条件下, $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限.

【幂指函数极限的求法】

$$\lim_{x \rightarrow \square} u^{v(x)}(x) = e^{\lim_{x \rightarrow \square} v(x) \ln[u(x)]}$$



【连续的概念】

定义 1. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 2. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\varepsilon - \delta$ 定义: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

从定义我们可以看出, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续 \iff 函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (极限存在):

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)$$

.....

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (连续):

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$$

【单侧连续】

定义. 若函数 $f(x)$ 在 $(a, x_0]$ 内有定义, 且 $f(x_0^-) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, b)$ 内有定义, 且 $f(x_0^+) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

【连续函数】

定义. 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则:

- 函数在开区间 (a, b) 内连续;
- 在左端点 $x = a$ 处右连续;
- 在右端点 $x = b$ 处左连续.

注记. 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

【函数的间断点】

定义. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义, 如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则称它在点 x_0 间断, 或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

定义 3. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$, 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 即可使其变为连续点.

定义. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限都存在, 但 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点: 函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等, 则为可去间断点;
2. 左右极限不相等, 则为跳跃间断点.

定义. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例子. $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处.....无穷间断点

例子. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处.....振荡间断点

笔记. 间断点常见位置: (1) 分母为零; (2) 分段点.

【连续函数的运算】

定理 1. 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

定理 2. 严格单调递增(递减)的连续函数必有严格单调递增(递减)的连续反函数.

定理 3. 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 也连续.

定理 4. 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

$y = \sqrt{\cos x - 1}, D: x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义, 故不连续.

【闭区间上连续函数的性质】

定义. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

定理 5 (最值定理). 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m .

1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

定义. 如果 x_0 使 $f(x_0) = 0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 6 (零点定理). 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.

定理 7 (介值定理). 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等, 则对于 A 与 B 之间的任何数 C , 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

推论. 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

1.3 导数与微分

【导数的定义】

定义. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 (或微商). 记为 $f'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$, $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$, 或 $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$.

如果 $f(x)$ 在区间 I 内可导, 则每个 $x_0 \in I$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应, 从而得到一个函数 $f'(x)$:

$$f' : x_0 \mapsto f'(x_0)$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 I 内的**导函数** (简称**导数**), 记为 $f'(x)$, 或 y' , 或 $\frac{dy}{dx}$, 或 $\frac{df(x)}{dx}$. 此时有

$$f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

【单侧导数】

定义. 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 上有定义, 若左极限

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

存在, 则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的**左导数**, 记为 $f'_-(x_0)$.

定义. 设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上有定义, 若右极限

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

存在, 则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的**右导数**, 记为 $f'_+(x_0)$.

注记. 导数存在 \iff 左导数和右导数都存在且相等.

【可导与连续的关系】

定理. $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

注意: $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\nRightarrow f(x)$ 在 x_0 点可导.

【导数的四则运算】

定理 1. 如果函数 $u(x), v(x)$ 在点 x 处可导, 则它们的和、差、积、商 (除分母不为零外) 在点 x 处也可导, 并且

$$1. [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$$

$$2. [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

$$3. \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, (v(x) \neq 0).$$

【反函数的求导法则】

定理 2. 如果函数 $x = \varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导, 且有

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

注记. 上式也可以写成 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$

推论. 设 $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = h(x)$. 则复合函数 $y = f(g(h(x)))$ 的导数公式为:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

或者

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

【复合函数的求导法则】

定理 3. 设 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 则它们的复合函数 $y = f[g(x)]$ 的导数公式为:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

或者

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

或者

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

【隐函数求导】

- 显函数: 由 $y = f(x)$ 直接确定的函数关系.
- 隐函数: 由 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数.

$$F(x, y) = 0 \implies y = f(x) \quad \text{隐函数的显化}$$

问题. 隐函数不易显化或不能显化如何求导?

答案. 利用复合函数求导法则, 将 y 看成 x 的函数, 方程两边同时对 x 求导.

例 1. 对下面的方程求导数 y'_x :

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导, 要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$;
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y)y'_x$.

【对数求导法】

对于多个函数相乘除或者幂指数函数 $(u(x))^{v(x)}$ 的情形, 可以先在方程两边取对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数.

例 2. 设 $y = x^{\sin x} (x > 0)$, 求 y' .

【参数方程求导】已知参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, 求 y 关于 x 的一阶和二阶导数.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} / \frac{dx}{dt} = \left[\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \right]' / \phi'(t).$$

【常数和基本初等函数的导数公式】

$$(C)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

【高阶导数的定义】类似地，我们可以定义：

- 二阶导数的导数称为**三阶导数**, $f'''(x), y''', \frac{d^3 y}{dx^3}$.
- 三阶导数的导数称为**四阶导数**, $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{d^4 y}{dx^4}$.
- 一般地, 函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**. 相应地, $f(x)$ 称为零阶导数; $f'(x)$ 称为一阶导数.

【高阶导数的求法】高阶导数的求法主要有

1. 直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数.
2. 间接法：利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出 n 阶导数.

【高阶导数的运算法则】设函数 u 和 v 具有 n 阶导数, 则

$$1. (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$$

$$2. (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$$

$$\begin{aligned} 3. (u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' \\ &\quad + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} \\ &\quad + \cdots + uv^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} \end{aligned}$$

莱布尼茨公式

【函数的微分】

定义 1. 对于自变量在点 x_0 处的改变量 Δx , 如果函数 $y = f(x)$ 的相应改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

其中 A 与 Δx 无关, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 并称 $A\Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处 (相应于自变量增量 Δx) 的微分, 记为

$$dy|_{x=x_0} \text{ 或 } df(x_0),$$

即

$$dy|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

注记. 微分 dy 叫做函数增量 Δy 的线性主部.

由定义知:

1. dy 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;
2. $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小;
3. 当 $A \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \rightarrow 1 \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

即 dy 与 Δy 是等价无穷小;

4. A 是与 Δx 无关的常数, 但与 $f(x)$ 和 x_0 有关;

5. 当 $|\Delta x|$ 很小时, $\Delta y \approx dy$ (线性主部).

定理. $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\iff y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A = f'(x_0)$.

函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 的微分, 称为函数的微分, 记作 dy 或 $df(x)$, 即 $dy = f'(x) dx$.

【微分运算法则】

1. 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

2. 复合函数的微分法则

1. 若 $y = f(u)$, 则有 $dy = f'(u) du$;

2. 若 $y = f(u), u = g(x)$, 则仍有 $dy = f'(u) du$.

无论 u 是自变量还是中间变量, 函数 $y = f(u)$ 的微分形式总是 $dy = f'(u) du$, 称为一阶微分的形式不变性.

【边际与弹性】

定义 2. 设函数 $y = f(x)$ 在 x 处可导, 则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**边际函数**. $f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 为**边际函数值**.

当 $x = x_0$ 时, x 改变一个单位, y 改变 $f'(x_0)$ 个单位.

定义 (弹性函数的定义). 一般地, 若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 可导, 且 $f(x) \neq 0$, 则称

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = y' \cdot \frac{x}{y}$$

为函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内的点弹性函数, 简称**弹性函数**.

注意: 弹性的意义, 尤其是价格的需求函数的意义.

1.4 导数的应用

【微分中值定理】

定理 (罗尔定理). 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导,
- (3) $f(a) = f(b)$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

定理 (拉格朗日中值定理). 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导,

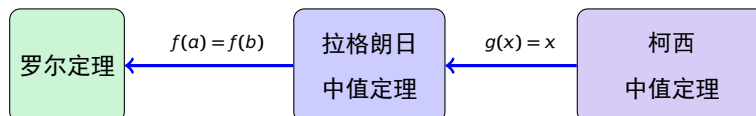
则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

定理 (柯西中值定理). 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上都连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 内都可导,
- (3) 在开区间 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系:



例 1. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$.
- (2) 存在两个不同的点 $\theta, \eta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\theta)f'(\eta) = 1$.

思路解析:

- (1) 第一问用零点定理 ($F(x) = f(x) - (1 - x)$).
- (2) 第二问利用第一问结论与拉格朗日中值定理.

$$f(\xi) - f(0) = f'(\theta)\xi, f(1) - f(\xi) = f'(\eta)(1 - \xi)$$

两式相乘, 并用第一问结论即可证明.

【函数的单调性】

定理 1. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导, 那么

1. 如果在 (a, b) 上恒有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加.
2. 如果在 (a, b) 上恒有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

若 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) 在 (a, b) 上成立, 且等号仅在个别点成立, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加 (减少)

定义. 若函数在其定义域的某个区间内是单调的, 则该区间称为函数的单调区间.

单调区间的求法:

利用导数等于零的点和不可导点, 划分出区间, 然后判断各区间内导数的符号.

【函数的极值】

定义 1. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义.

1. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x , 总有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点, $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

2. 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x , 总有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极小值点, $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

极大值点和极小值点统称为极值点, 极大值和极小值统称为极值.

定理 2 (极值的必要条件). 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 而且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$.

注记. 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点: 比如 $y = x^3$.
- 极值点未必都是驻点: 比如 $y = |x|$.
- 可导函数的极值点一定是驻点.
- 极大值不一定比极小值大.

定理 3 (极值的第一充分条件). 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 而且在它的某个去心邻域内可导.

1. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$, 在右邻域内 $f'(x) < 0$, 则 x_0 为极大值点.
2. 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) < 0$, 在右邻域内 $f'(x) > 0$, 则 x_0 为极小值点.
3. 若在 x_0 的左邻域内和右邻域内 $f'(x)$ 的符号不变, 则 x_0 不是极值点.

定理 4. 判别极值的第二充分条件 设 $f'(x_0) = 0$ 而且 $f''(x_0)$ 存在.

1. 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.
2. 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

注记 1. 当 $f''(x_0) = 0$ 时, 上面的定理无法判定. 例如 $f(x) = x^3$ 和 $f(x) = x^4$.

求函数极值的一般步骤:

1. 求导数 $f'(x)$;
2. 找出驻点 (即方程 $f'(x) = 0$ 的根) 和不可导点;

3. 判断:

- 驻点 $\begin{cases} f''(x_0) \neq 0 & \text{第一或第二充分条件} \\ f''(x_0) = 0 & \text{第一充分条件} \end{cases}$
- 不可导点: 第一充分条件;

4. 结论.

注意格式: 极大 (小) 值为 $f(x_0) = a$ 或极大 (小) 点为 $x = x_0$.

【函数的凹凸性】

定义. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 , 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (或凹弧); 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的 (或凸弧).

定理 5. 假设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上有二阶导数, 那么

- 如果 $x \in (a, b)$ 时, 恒有 $f''(x) > 0$, 则函数的曲线在 (a, b) 上是凹的.
- 如果 $x \in (a, b)$ 时, 恒有 $f''(x) < 0$, 则函数的曲线在 (a, b) 上是凸的.

【函数的拐点】

定义. 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

性质. 在拐点 (x_0, y_0) 处, 要么 $f''(x_0) = 0$, 要么 $f''(x_0)$ 不存在.

性质. 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

.....

例 2. 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 2. (x_0, y_0) 为拐点 $\nRightarrow f''(x_0) = 0$. (二阶导数不存在)

例 3. 求曲线 $y = x^4$ 的凹凸区间和拐点.

注记 3. $f''(x_0) = 0 \nRightarrow (x_0, y_0)$ 为拐点. (二阶导数除在 $x = 0$ 处均大于零)

$f(x)$ 在 x_0 的邻域内二阶可导, 且 $f''(x_0) = 0$,

1. 若 x_0 两边 $f''(x)$ 变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.
2. 若 $f'''(x_0) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

【函数的渐近线】

定义. 1. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, 称 $y = b$ 为其水平渐近线.

2. 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 称 $x = a$ 为其铅直渐近线.

注记. (1) $x \rightarrow \infty$ 可以改为 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$.

(2) $x \rightarrow a$ 可以改为 $x \rightarrow a^+$ 或 $x \rightarrow a^-$.

定义 2 (斜渐近线). 若直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 满足

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

定理 6. 直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线, 当且仅当

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{而且} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b.$$

注记. $x \rightarrow \infty$ 可以改为 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$.

【函数的最值】一般地, 对于函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最值, 我们只需考虑下述这些可疑点:

- 导数为零的点;
- 导数不存在的点;
- 区间的端点.

特殊地，若函数在区间（开或闭，有限或无限）上可导，且在区间内只有一个驻点，则有

- 如果该驻点为极大值，则它也是最大值；
- 如果该驻点为极小值，则它也是最小值。

1.5 不定积分

$$\int 1 \, dx = x + C \quad (1.5.1)$$

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (1.5.2)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \quad (1.5.3)$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (1.5.4)$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \quad (1.5.5)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad (1.5.6)$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad (1.5.7)$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C \quad (1.5.8)$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C \quad (1.5.9)$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C \quad (1.5.10)$$

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (1.5.11)$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \quad (1.5.12)$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \quad (1.5.13)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (1.5.14)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (1.5.15)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (1.5.16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (1.5.17)$$

$$\begin{aligned} \int f(\phi(x)) \phi'(x) \, dx &= \int f(\phi(x)) \, d(\phi(x)) \\ &= \left[\int f(u) \, du \right]_{u=\phi(x)} \end{aligned}$$

一般地, 如果 $\int f(x) \, dx = F(x) + C$, 则有

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到.

例 1. 求不定积分 $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$.

例 2. 求不定积分 $\int \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\begin{aligned}\int f(x) \, dx &= \int f(\psi(t)) \, d(\psi(t)) \\ &= \left[\int f(\psi(t)) \psi'(t) \, dt \right]_{t=\psi^{-1}(x)}\end{aligned}$$

例 3. 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x + 1} \, dx$.

例 4. 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}} \, dx$.

1. $\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) \, dx$, 令 $x = a \sin t$

2. $\int f(\sqrt{x^2 + a^2}) \, dx$, 令 $x = a \tan t$

3. $\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) \, dx$, 令 $x = a \sec t$

分部积分公式: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

例 5. 求下列不定积分

1. 求不定积分 $\int x \cos x \, dx$.

2. 求不定积分 $\int x e^x \, dx$.

3. 求不定积分 $\int x \ln x \, dx$.

4. 求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$.

5. 求不定积分 $\int e^x \sin x \, dx$.