

2019 年全国硕士研究生入学统一考试 (数学 III)

一、选择题 (1-8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k = (\quad)$.
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
2. 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有三个不同的实根, 则 k 的取值范围是 (\quad) .
(A) $(-\infty, -4)$ (B) $(4, +\infty)$ (C) $(-4, 0)$ (D) $(-4, 4)$
3. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + e^x$, 则 a, b, c 依次为 (\quad) .
(A) 1, 0, 1 (B) 1, 0, 2 (C) 2, 1, 3 (D) 2, 1, 4
4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则 (\quad) .
(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 条件收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 绝对收敛
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 发散
5. 设 A 是四阶矩阵, A^* 为其伴随矩阵, 若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(A^*) = (\quad)$.
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
6. 设 A 是三阶实对称矩阵, E 是三阶单位矩阵, 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形是 (\quad) .
(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ (C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$
7. 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是 (\quad) .
(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (B) $P(AB) = P(A)P(B)$
(C) $P(\overline{AB}) = P(\overline{BA})$ (D) $P(AB) = P(\overline{AB})$
8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 则 $P\{|X - Y| < 1\}$ (\quad) .
(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关 (B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关
(C) 与 μ, σ^2 都有关 (D) 与 μ, σ^2 都无关

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分, 把答案填在题中横线上)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} \right)^n =$ _____.
2. 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \right)$ 的拐点坐标是_____.
3. 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x) dx =$ _____.
4. 以 P_A, P_B 分别表示 A, B 两个商品的价格. 设商品 A 的需求函数 $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$, 则当 $P_A = 10, P_B = 20$ 时, 商品 A 的需求量对自身价格弹性 $\eta_{AA} (\eta_{AA} > 0) =$ _____.
5. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. 若线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解, 则 $a =$ _____.
6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $F(x)$ 为其分布函数, $E(X)$ 其数学期望, 则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} =$ _____.

三、解答题 (1-5 题每题 10 分, 6-9 题每题 11 分, 共 94 分)

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求函数 $f(x)$ 的极值.
2. 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续的偏导数, 函数 $z = xy - f(x+y, x-y)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
于是
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1 - 3f''_{11} - f''_{22}.$$
3. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.
(1) 求 $y(x)$ 的表达式;
(2) 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.
4. 求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间形成图形的面积.

5. 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ ($n=0,1,2,\dots$)

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$ ($n=2,3,\dots$); (2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

6. 已知向量组 I: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$; 向量组 II: $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a+3 \end{pmatrix}, \beta_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$. 若向量组 I 和向量组 II 等价, 求常数 a 的值, 并将 β_3 用

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

7. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y 之值; (2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

8. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y 之值; (2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

9. 设随机变量 X, Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为: $P\{Y = -1\} = p, P\{Y = 1\} = 1-p, (0 < p < 1)$. 令 $Z = XY$.

(1) 求 Z 的概率密度; (2) p 为何值时, X, Z 不相关; (3) 此时, X, Z 是否相互独立.

10. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases}$, 其中 μ 是已知参数, σ 是

未知参数, A 是常数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求常数 A 的值;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.