第四章　随机变量的数字特征

4.1　数学期望

定义 **1.** 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \qquad k=1,2,\cdots.$$

若级数

$$\sum_k x_k p_k$$

绝对收敛，则称其和为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$, 即

$$E(X)=\sum_k x_k p_k.$$

注记**.** 数学期望简称期望，又称均值

例 **1.** $X\sim b(1,p)$, 求 $E(X)$.

解**.** 易知 X 的分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

因此 X 的数学期望为

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p.$$

例 **2.** 设 $X \sim \pi(\lambda)$, 求 $E(X)$

解**.** 易知泊松分布的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$$

因此 X 的数学期望为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

例 **3.** 甲、乙两工人每天生产出相同数量同种类型的产品, 用 X_1,X_2 分别表示甲、乙两人某天生产的次品数, 经统计得以下数据:

次品数 X_1	*0*	*1*	*2*	*3*
p_k	0.3	0.3	0.2	0.2
次品数 X_2	*0*	*1*	*2*	*3*
p_k	0.2	0.5	0.3	*0*

试比较他们的技术水平的高低.

解**.** 根据定义, X_1 和 X_2 的数学期望分别为

$$E(X_1)=0\times 0.3+1\times 0.3+2\times 0.2+3\times 0.2=1.3,$$

$$E(X_2)=0\times 0.2+1\times 0.5+2\times 0.3+3\times 0=1.1,$$

显然甲的技术水平比乙低.

例子**.** 美国波士顿的“*Cash WinFall*”彩票，每注价格为 *2* 美元，从 *1 – 46* 中选择 *6* 个不重复号码．在连续多期无人中头奖时的派奖规则如下：

- 2 个号码和开奖号码相同，奖金 2 美元.
- 3 个号码和开奖号码相同，奖金 50 美元.
- 4 个号码和开奖号码相同，奖金 1500 美元.
- 5 个号码和开奖号码相同，奖金 40000 美元.
- 6 个号码和开奖号码相同，奖金 200 万美元.

求购买每注彩票所得奖金 X 的数学期望 $E(X)$.

彩票号码与开奖号码相同的个数为 k 的概率等于

$$p_k = \frac{C_6^k C_{40}^{6-k}}{C_{46}^6}, \quad k = 0, 1, \cdots, 6.$$

k	X	P
0 or 1	0	0.831
2	2	0.146
3	50	0.0211
4	1500	0.001249
5	40000	0.00002562
6	2000000	0.0000001068

k	X	P
0 or 1	0	0.831
2	2	0.146
3	50	0.0211
4	1500	0.001249
5	40000	0.00002562
6	2000000	0.0000001068

每注彩票所得奖金 X 的数学期望

$$\begin{aligned} E(X) &= 2p_2 + 50p_3 + 1500p_4 + 40000p_5 + 2000000p_6 \\ &= 0.292 + 1.055 + 1.8735 + 1.0248 + 0.2134 \\ &= 4.4587. \end{aligned}$$

定义 **2.** 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

绝对收敛，则称此积分为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

例 **4.** 设随机变量 X 在区间 (a,b) 内服从均匀分布, 求 $E(X)$.

解**.** 由题意知, X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

于是有

$$E(X)=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\ .$$

例 **5.** 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布, 求 $E(X)$.

解**.** 由题意知, X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\\ &=-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

例 **6.** 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\qquad x\in\mathbb{R},$$

求 X 的数学期望 $E(X)$.

解**.** 因为 $xf(x)$ 是奇函数，所以 $E(X)=0$.

例 **7.** 设随机变量 X 服从柯西 *(Cauchy)* 分布, 其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)},\quad -\infty<x<+\infty\ ,$$

求 $E(X)$.

解. 因为反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{(x^2+1)} \, \mathrm{d}x$ 不收敛, 所以 $E(X)$ 不存在.

对二维随机变量 (X, Y), 定义它们的数学期望为

$$E(X, Y) = (E(X), E(Y))$$

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P(X = x, Y = y) = p_{ij}, \; i, j = 1, 2, \ldots,$$

则

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_{i\cdot} = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} x_i p_{ij},$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{+\infty} y_j p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} y_j p_{ij}.$$

设二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

例 **8.** 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y)$.

解. 由条件易得

$$E(X) = \iint_D x f(x, y) \, \mathrm{d}\sigma = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \int_0^x 12y^2 \, \mathrm{d}y = \frac{4}{5}.$$

$$E(Y) = \iint_D y \cdot 12y^2 \, \mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x 12y^3 \, \mathrm{d}y = \frac{3}{5}.$$

问题：设随机变量 X 的分布已知，在实际问题中有时需要计算的量并非 X 的期望，而是 X 的某个函数 $Y = g(X)$ 的期望．如何根据 X 的分布计算 $E(Y)$？

直观思路：根据 X 的分布算出 Y 的分布，然后利用定义计算 $E(Y)$. 但求 Y 的分布的计算一般很麻烦.

定理. 设 X 为随机变量，$Y = g(X)$，则

1. 若 X 为离散型随机变量，分布律为
$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$
则
$$E(Y) = \sum_k g(x_k) p_k.$$
2. 若 X 为连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$，则
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 **9.** 设随机变量 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	0.2	0.1	0.7

求随机变量函数 $Y = X^2$ 的期望.

例 **10.** 设随机变量 X 在区间 $[0, \pi]$ 上服从均匀分布，求随机变量函数 $Y = \sin X$ 的数学期望.

例 **11.** 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	2	3
p_k	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.10

求随机变量函数 $Y = X^2$ 的数学期望.

解 (方法 1). 先求 Y 的分布律

Y	0	1	4	9
p_k	0.25	0.40	0.25	0.10

因此 $E(Y) = 0 \times 0.25 + 1 \times 0.40 + 4 \times 0.25 + 9 \times 0.10 = 2.30.$

解 (方法 2)**.** 由条件易得,

$$\begin{aligned}E(Y)&=(-2)^2\times 0.10+(-1)^2\times 0.20+0^2\times 0.25+1^2\times 0.20\\&\quad+2^2\times 0.15+3^2\times 0.10\\&\quad=2.30\end{aligned}$$

例 **12.** 设随机变量 X 在区间 $(0,\pi)$ 内服从均匀分布, 求随机变量函数 $Y=\sin X$ 的数学期望.

解 (方法 1)**.** 先利用分布函数法求得 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$E(Y)=\int_0^1 y\cdot\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}.$$

解 (方法 2)**.** 由题意知, X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & 0<x<\pi\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$E(Y)=\int_0^{\pi}\sin x\cdot\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

例 **13.** 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 求 $E(X)$ 和 $E(X^2)$.

解**.** X 为连续型随机变量, 其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2},\quad -\infty<x<+\infty$$

所以

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x=0,$$

解 (续).

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = 1.
\end{aligned}
$$

例 **14.** 按季节出售的某种应时商品, 每售出 1 kg 获利润 6 元, 如到季末尚有剩余商品, 则每千克净亏损 2 元, 设某商店在季节内这种商品的销售量 X *(*以 kg 计*)* 是一随机变量, X 在区间 $(8,16)$ 内服从均匀分布, 为使商店所获得利润最大, 问商店应进多少货*?*

解**.** 设 t 表示进货量, 易知应取 $8<t<16$, 进货 t 所得利润记为 $W_1(X)$, 且有

$$
W_t(X) = \begin{cases} 6X-2(t-X), & 8<X<t(\text{ 有积压}) \\ 6t, & t<X<16(\text{ 无积压}) \end{cases}
$$

利润 $W_t(X)$ 是随机变量, 如何获得最大利润*?* 自然是取“平均利润”的最大值, 即求 t 使 $E[W_t(X)]$ 最大. X 的概率密度为

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & 8<x<16 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

解**.** 因此

$$
\begin{aligned}
E[W_t(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_t(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_8^{16} W_t(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int_8^t [6x-2(t-x)]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int_t^{16} 6t\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\left[\int_8^t (8x-2t)\,\mathrm{d}x + 6t(16-t)\right] = 14t - \frac{t^2}{2} - 32.
\end{aligned}
$$

令

$$
\frac{\mathrm{d}E[W_t(X)]}{\mathrm{d}t} = 14 - t = 0
$$

得 $t=14$. 而

$$\frac{\mathrm{d}^2E[W_t(X)]}{\mathrm{d}t^2}=-1<0$$

故知当 $t=14$ 时, $E[W_t(X)]$ 取极大值, 且可知这也是最大值.

定理**.** 设 (X,Y) 为二维随变量，$Z=g(X,Y)$，则

1. 若 (X,Y) 为二维离散型随机变量，概率分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

 则

$$E(Z)=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

2. 若 (X,Y) 为二维连续型随机变量，概率密度为 $f(x,y)$，则

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

例 **15.** 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 概率密度分别是

$$f_x(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

求随机变量函数 $Z=X+Y$ 的数学期望.

解 (方法 1)**.** 首先求出 Z 的概率密度为

$$f_z(z)=\begin{cases}z\mathrm{e}^{-z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$E(Z)=\int_0^{+\infty}z\cdot z\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z=2.$$

解 (方法 2)**.** 因为随机变量 X 与 Y 是相互独立的, 所以二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x-y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}E(Z)=E(X+Y)&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(x+y)\mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\\&=1+1=2.\end{aligned}$$

设 $X,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为随机变量，c,k 为常数，则有

1. $E(c)=c$；
2. $E(kX)=kE(X)$；
3. $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$；

推论：$E\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}E(X_k)$.

4. 若 X_1,X_2 相互独立，则有

$$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2).$$

推论：若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则有

$$E\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)=\prod_{k=1}^{n}E(X_k)$$

注：如果没有相互独立这一条件，上式一般不成立！

例 **16.** 设随机变量 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 求 $E(X)$.

解**.** 令 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, 则 $Y\sim N(0,1)$，于是

$$E(Y)=0$$

而

$$X=\sigma Y+\mu$$

所以

$$E(X)=E(\sigma Y+\mu)=\sigma E(Y)+E(\mu)=\mu$$

例 **17.** 设随机变量 $X \sim b(n,p)$, 求 $E(X)$.

解**.** 引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & 第i\ 次试验中事件A\ 发生, \\ 0, & 第i\ 次试验中事件A\ 不发生, \end{cases}, i = 1,2,\cdots,n, ,$$

其中, $P(A) = p$, 则 X_i 服从 $(0-1)$ 分布, 于是 $E(X_i) = p$, 又 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, 所以

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \\ &= p + p + \cdots + p = np \end{aligned}$$

即 X 的数学期望为 np.

例 **18.** 一民航公司的客车载有 *20* 位旅客自机场开出, 旅客有 *10* 个车站可以下车, 若到达一个车站没有旅客下车就不停车, 以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$. *(*设每位旅客在各个车站下车是等可能的, 并设各旅客是否下车相互独立.*)*

解**.** 引随机变量 $X_i = \begin{cases} 0, & 在第i\ 站没有人下车, \\ 1, & 在第i\ 站有人下车 \end{cases}$, $i = 1,2,\cdots,10$. 易知 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$, 现求 $E(X)$. 依题意

$$P\{X_i = 0\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, P\{X_i = 1\} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, i = 1,2,\cdots,10.$$

因此

$$E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, i = 1,2,\cdots,10,$$

从而

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{10}) \\ &= 10\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right] = 8.784(\text{ 次}). \end{aligned}$$

练习 **1.** 将 n 个球放入 M 个盒子中，设每个球落入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数 X 的期望.

均匀分布	$X \sim U[a,b]$	$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
指数分布	$X \sim EP(\lambda)$	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
正态分布	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$E(X) = \mu$

两点分布	$X \sim B(1,p)$	$E(X) = p$
二项分布	$X \sim B(n,p)$	$E(X) = np$
泊松分布	$X \sim \pi(\lambda)$	$E(X) = \lambda$

4.2 方差

在实际问题中，仅靠期望值不能完善地说明随机变量的分布特征．我们常常需要知道分布相对于期望值的离散程度．

定义 **1.** 设 X 是一随机变量，若 $[X-E(X)]^2$ 的期望存在，则称该期望为 X 的方差*(Variance)*，记为 $Var(X)$（或 $D(X)$），即

$$D(X) := E[X-E(X)]^2.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差*(Standard deviation)*，记为 $\sigma(X)$.

方差刻划了随机变量的取值相对于其数学期望的偏离程度．

1. 若 X 的取值比较分散，则方差较大；
2. 若 X 的取值比较集中，则方差较小；

特别地，$D(X) = 0$ 当且仅当 X 取某个常数的概率为 1．

方差的常用计算公式：$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

证明. 由期望的性质易得

$$\begin{aligned}D(X)&=E[X-E(X)]^2=E\left\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\right\}\\&=E\left(X^2\right)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\&=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2\end{aligned}$$

例 **1.** 设随机变量 $X\sim(0-1)$ 分布, 求 $D(X)$.

解**.** X 的分布律为

$$P\{X=0\}=1-p,P\{X=1\}=p\ .$$

显然

$$E(X)=p,$$

又 $E\left(X^2\right)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p$, 故

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$$

例 **2.** 设随机变量 $X\sim\pi(\lambda),\lambda>0$, 求 $D(X)$.

解**.** X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

于是 $E(X)=\lambda$, 且

$$\begin{aligned}E\left(X^2\right)&=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}+\lambda=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda\\&=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda,\end{aligned}$$

所以, $D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\lambda$.

例 **3.** 设随机变量 $X\sim U(a,b)$, 求 $D(X)$.

解**.** X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, 而

$$E\left(X^2\right)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right),$$

所以

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

例 **4.** 设随机变量 $X\sim E(\lambda),\lambda>0$, 求 $D(X)$.

解**.** 由条件，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x},x>0\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$$

则 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, 而

$$\begin{aligned}E\left(X^2\right)&=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^2\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\\&=-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

所以, $D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$.

设 X、Y 为随机变量，a、b、c 为常数，则有

1. $D(c)=0$
2. $D(aX+b)=a^2D(X)$
3. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\quad\pm2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 特别地，若 X 和 Y 相互独立，则有

   $$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

4. $D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 c, 即

   $$P\{X=c\}=1.$$

例 **5.** 设随机变量 $X\sim b(n,p)$, 求 $D(X)$.

解. 设 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 且在每次试验中 A 发生的概率为 p. 设 X_i 表示第 i 次试验中事件 A 发生的次数, 则 X_i 服从 $(0-1)$ 分布, 于是

$$E(X_i)=p, D(X_i)=p(1-p), i=1,2,\cdots,n,$$

而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n,$$

所以

$$\begin{aligned}D(X)&=D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)\\&=p(1-p)+p(1-p)+\cdots+p(1-p)=np(1-p).\end{aligned}$$

例 **6.** 设随机变量 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 求 $D(X)$.

解. 由于 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, 令 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, 则有

$$Y\sim N(0,1)\ .$$

易知 (前面结论) $E(Y)=0, E\left(Y^2\right)=1$, 由方差的性质可得

$$D(X)=D(\sigma Y+\mu)=\sigma^2 D(Y)=\sigma^2.$$

.

注记. 正态分布的概率密度中的两个参数 μ 和 σ 分别就是该分布的数学期望和均方差, 因而正态分布完全可由它的数学期望和方差确定.

若 $X_i\sim N\left(\mu_i,\sigma_i^2\right), i=1,2,\cdots,n$, 且它们相互独立, 则它们的线性组合: $c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n$ ($c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是不全为 0 的常数) 仍然服从正态分布, 于是由数学期望和方差的性质知道:

$$c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}c_i^2\sigma_i^2\right)$$

例 **7.** 设活塞的直径 (以 cm 计) $X\sim N\left(22.40,0.03^2\right)$, 汽缸的直径 $Y\sim N\left(22.50,0.04^2\right)$, X 与 Y 相互独立, 任取一只活塞, 任取一只汽缸, 求活塞能装入汽缸的概率.

解. 由题意，只要求 $P\{X<Y\}=P\{X-Y<0\}$ 即可. 由于

$$X-Y\sim N(-0.10,0.0025),$$

故有

$$\begin{aligned}P\{X<Y\}&=P\{X-Y<0\}\\&=P\left\{\frac{(X-Y)-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}<\frac{0-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}\right\}\\&=\Phi\left(\frac{0.1}{0.05}\right)=\Phi(2)=0.9772.\end{aligned}$$

例 **8.** 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且具有相同的数学期望 μ 和方差 σ^2, 令

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2.$$

求 $E(\overline{X})$, $D(\overline{X})$, $E\left(S^2\right)$.

解**.** 由条件易知 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2,i=1,2,\cdots,n,$

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu$$

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

由于

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2&=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}(n\overline{X})+n\overline{X}^2\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\end{aligned}$$

而

$$E\left(X_i^2\right)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2+\mu^2,$$

$$E\left(\overline{X}^2\right)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$$

所以

$$E\left(S^2\right)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$$
$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)-nE\left(\overline{X}^2\right)\right]$$
$$=\frac{1}{n-1}\left[n\left(\sigma^2+\mu^2\right)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]=\sigma^2$$

随机变量	X	$E(X)$	$D(X)$
两点分布	$b(1,p)$	p	$p(1-p)$
二项分布	$b(n,p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\pi(\lambda)$	λ	λ
均匀分布	$U(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$E(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

练习 **1.** 一台设备由三个部件构成,在设备运转中各部件需要调整的概率分别为 0.01, 0.02, 0.03. 设各部件的状态相互独立，用 X 表示同时需要调整的部件数，求 X 的期望和方差.

定理. 设随机变量 X 有期望和方差，则对于任给的 $\varepsilon>0$，有

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

即

$$P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

证明. 设 X 是一个连续随机变量, 其概率密度函数为 $f(x)$，则

$$P(|X-\mu|\geqslant\varepsilon)=\int_{|x-\mu|\geq\epsilon}f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{|x-\mu|>\varepsilon}\frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2}f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

例 **9.** 设电站供电网有 *10000* 盏电灯, 夜晚每一盏灯开灯的概率都是 0.7, 假定开、关时间彼此独立, 估计夜间同时使用的灯的盏数在 *6800* 与 *7200* 之间的概率.

解. 令 X 表示在夜间同时使用的灯的盏数, 它服从参数 $n=10000$, $p=0.7$ 的二项分布, 若要准确计算, 应该用如下公式来计算:

$$P\{6800<X<7200\}=\sum_{k=6801}^{7199} \mathrm{C}_{10000}^{k}\times 0.7^{k}\times 0.3^{10000-k},$$

显然这是比较困难的.

解. 利用切比雪夫不等式估计:

$$E(X)=np=10000\times 0.7=7000,$$

$$D(X)=np(1-p)=10000\times 0.7\times 0.3=2100,$$

$$\begin{aligned}P\{6800<X<7200\}&=P\{1X-7000\,|<200\}\\&\geqslant 1-\frac{2100}{200^2}\approx 0.95.\end{aligned}$$

4.3 协方差与相关系数

对于二维随机向量 (X,Y)，除了其分量 X 和 Y 的期望与方差外，还有一些数字特征，用以刻画 X 与 Y 之间的相关程度，其中最主要的就是下面要讨论的协方差和相关系数.

定义 **1.** 对于二维随机向量 (X,Y)，称

$$\mathrm{Cov}(X,Y):=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

为 X 与 Y 的协方差*(Covariance)*.

由定义可得：对任意两个随机变量 X 和 Y, 有

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y).$$

推论. 两随机变量相互独立，则协方差等于零；反之未必成立.

设 X,Y,Z 为随机变量，a,b,c,d 为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$;
2. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$；
3. $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$；
4. $\mathrm{Cov}(X,C)=0$, C 为任意常数；
5. $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$；
6. 如果 X 和 Y 相互独立，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$;
7. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

性质. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

证明*.* 等式右边各项为

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$$

$$2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=2E(XY)-2E(X)\cdot E(Y)$$

而等式左边为

$$\begin{aligned}
&D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-E(X+Y)^2\\
&=E(X^2+2XY+Y^2)-[E(X)+E(Y)]^2\\
&=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-E(X)^2-2E(X)E(Y)-E(Y)^2
\end{aligned}$$

比较等式两边可知等式成立.

练习 **1.** 假设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

定义. 对于二维随机变量 (X,Y)，如果两个变量的方差都不为零，称
$$\rho_{XY} := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$$
为 X 与 Y 的相关系数*(Correlation)*，也可以记为 $\rho(X,Y)$.

令
$$X^* = \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}},\ Y^* = \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}},$$
称 X^*, Y^* 分别为 X, Y 的标准化随机变量，易知
$$E(X^*)=0,\ D(X^*)=1,\ E(Y^*)=0,\ D(Y^*)=1,$$
$$\rho_{XY} = \mathrm{Cov}(X^*,Y^*) = E(X^*Y^*)$$

性质. 相关系数表示随机变量之间的线性相关程度：

1. $|\rho_{XY}| \le 1$.
2. $|\rho_{XY}| = 1$ 当且仅当存在常数 a,b，使得 $P\{Y=aX+b\}=1$.

定义 2. 当 $\rho_{XY}=0$ 时，称 X 与 Y 不相关；当 $|\rho_{XY}|=1$ 时, 称称 X 与 Y 完全相关

性质. 相互独立 $\Longrightarrow$ 不相关；反之未必成立.

例 1. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率分布如右表所示，证明*: X 与 Y 不相关, 但不相互独立.*

Y \ X	−1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

证明. 易知 X 与 Y 的边缘概率分布分别是

X	−1	0	1
$p_{i\cdot}$	1/3	1/3	1/3

Y	0	1
$p_{\cdot j}$,	1/3	2/3

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) =&(-1)\times 1\times\frac{1}{3}+0\times 0\times\frac{1}{3}+1\times 1\times\frac{1}{3}\\ &-\left[(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}\right]\left[0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}\right]=0\end{aligned}$$
所以 X 与 Y 不相关. 由 $p_{00}=\frac{1}{3}\neq p_{0\cdot}p_{\cdot 0}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ 知 X 与 Y 不是相互独立的

例 **2.** 设 X 服从 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布 ,$X_1=\sin X, X_2=\cos X$, 求 $\rho_{X_1X_2}$.

解**.** 随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & x\in(-\pi,\pi),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 因此

$$E(X_1)=E(\sin X)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0,$$

$$E(X_2)=E(\cos X)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=0,$$

$$E(X_1X_2)=E(\sin X\cos X)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\,dx=0.$$

所以 $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=0$, 故 $\rho_{X_1X_2}=0$.

注记**.** X_1,X_2 不相关, 但 $X_1^2+X_2^2=1$.

由协方差的性质及相关系数与协方差的关系可得：

$$\begin{aligned}&D(X\pm Y)\\ =&D(X)+D(Y)\pm 2\rho_{X,Y}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}.\end{aligned}$$

例子**.** 已知随机变量 X 和 Y 的方差分别为 1 和 4，相关系数为 -0.5. 求 $D(X+Y)$ 和 $D(X-Y)$.

解**.** $D(X+Y)=3$, $D(X-Y)=7$.

例子 (投资风险组合)**.** 设有 1 百万用于投资甲、乙两种证券：若将资金 t 投资于甲证券，将资金 $1-t$ 投资于乙证券，则称 $(t,1-t)$ 为一个投资组合.

用随机变量 X 和 Y 分别表示投资甲、乙证券的收益率. 已知 X 和 Y 的期望（代表平均收益）分别为 μ_1 和 μ_2，方差（代表风险）分别为 σ_1^2 和 σ_2^2，相关系数为 ρ.

1. 求投资组合的平均收益和风险.

2. 求投资风险最小的投资组合.

在第二问中假设 $\sigma_1^2=0.25$、$\sigma_2^2=0.49$、$\rho=0.6$.

投资组合的收益 $Z=tX+(1-t)Y$，则平均收益为

$$E(Z)=t\mu_1+(1-t)\mu_2,$$

投资风险为

$$\begin{aligned}D(Z)&=D(tX+(1-t)Y)\\&=t^2D(X)+(1-t)^2D(Y)+2t(1-t)\operatorname{Cov}(X,Y)\\&=t^2\sigma_1^2+(1-t)^2\sigma_2^2+2t(1-t)\rho\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

当 $t=87.5\%$ 时，函数有最小值，此时风险最小.

4.4　矩　协方差矩阵

定义：设 X 和 Y 是随机变量, k,l 为正整数

1. 称 $E(X^k)$ 为 X 的 k 阶原点矩,
2. 称 $E[(X-EX)^k]$ 为 X 的 k 阶中心矩,
3. 称 $E\left(X^kY^l\right)$ 为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩,
4. 称 $E\left\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\right\}$ 为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

例：

1. 期望 $E(X)$ 为 X 的一阶原点矩,
2. 方差 $D(X)$ 为 X 的二阶中心矩.

定义：对二维随机变量量 (X,Y)，称矩阵

$$B=\begin{pmatrix}\operatorname{Cov}(X,X) & \operatorname{Cov}(X,Y)\\ \operatorname{Cov}(Y,X) & \operatorname{Cov}(Y,Y)\end{pmatrix}$$

为 (X,Y) 的协方差矩阵.

例：设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 (X,Y) 的协方差矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

定义：设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 n 维随机向量，称矩阵

$$B=\left(\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\right)_{n\times n}$$

为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的协方差矩阵.

性质：协方差阵为对称的半正定矩阵.

4.5 二维正态分布

定义**.** 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right. \\ \left.\left.-2\rho\cdot\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \end{aligned}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 都是常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,-\infty<\mu_1,\mu_2<+\infty,-1<\rho<1$, 我们称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布，记为：

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$

可以证明：参数 μ_1,μ_2 是随机变量 X 和 Y 的数学期望，参数 σ_1,σ_2 分别是它们的标准差，ρ 是它们的相关系数.

证明. 首先计算随机变量 X 的边缘概率密度：

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u(x,y)}\,\mathrm{d}y$$

其中

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right] \\ &=\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]^2 \end{aligned}$$

置换积分变量 $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]=t$ 得到

$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$

由对称性得 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{\frac{-(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

故二维正态分布的两个边缘分布都是正态分布，且有

$\mu_1=E(X),\mu_2=E(Y),\sigma_1=\sqrt{D(X)},\sigma_2=\sqrt{D(Y)}.$

可以证明, 参数 ρ 是随机变量 X 与 Y 的相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}e^{-u(x,y)}\,dx\,dy$$

化为二次积分，得

$$\rho_{XY}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_1^2}}I(x)\,dx$$

其中

$$I(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\frac{\rho\left(x-\mu_1\right)}{\sigma_1}\right]^2}\,dy$$

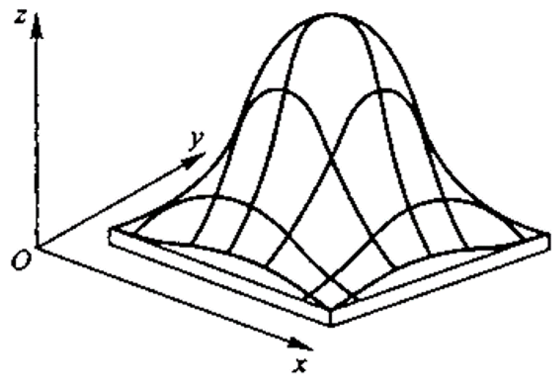
设 $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{y-\mu^2}{\sigma_2}-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]=t$, 则得

$$\begin{aligned}I(x)&=\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[t\sqrt{1-\rho^2}+\frac{\rho\,(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\\&=\sigma_2\left(1-\rho^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt+\frac{\rho\sigma_2\,(x-\mu_1)}{\sigma_1}\sqrt{1-\rho^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\\&=\frac{\rho\sigma_2\,(x-\mu_1)}{\sigma_1}\sqrt{2\pi\,(1-\rho^2)}\end{aligned}$$

$\rho_{XY}=\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,dx$

设 $\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}=t$, 则得 $\rho_{XY}=\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\rho$

二维正态分布曲面图所示



当相关系数 $\rho = 0$ 时

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]_1^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} = f_X(x) f_Y(y)
\end{aligned}
$$

注记**.** 对于二维正态随机向量 (X,Y)，X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho_{X,Y} = 0$.

定义：以以下函数为密度的分布称为 n 元正态分布，简记为 $N(\vec{\mu},B)$

$$
\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T B^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right\},
$$

其中 B 为 n 阶正定矩阵，

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.
$$

n 元正态分布的性质：若 $\vec{X} \sim N(\vec{\mu},B)$，则

- $\vec{X}$ 的各分量的边缘分布为

$$
X_i \sim N(\mu_i, b_{ii}),\ i = 1,2,\cdots,n
$$

  其中 b_{ii} 为 B 的第 i 行第 i 列的元素；

- $\vec{X}$ 的协方差矩阵为 B.