

第十章 微分方与差分方程

1. 微分方程 $(x+y)dy = x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dx$ 是 ().
(A) 可分离变量微分方程 (B) 一阶线性非齐次方程
(C) 齐次方程 (D) 前面三种都不是
2. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的通解是 ().
(A) $\sin \frac{y}{x} = \frac{1}{Cx}$ (B) $\sin \frac{y}{x} = x + C$ (C) $\sin \frac{x}{y} = Cx$ (D) $\sin \frac{y}{x} = Cx$
3. 函数 $y = \cos x$ 是下列哪个微分方程的解 ().
(A) $y' + y = 0$ (B) $y' + 2y = 0$ (C) $y'' + y = 0$ (D) $y'' + y = \cos x$
4. 若函数 $y = e^{-x}$ 是方程 $y'' + ay' - 2y = 0$ 的一个解, 则 a 值等于 ().
(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2
5. 微分方程 $y'' + 4y = \cos 2x$ 的特解形式为 ().
(A) $y = A \cos 2x$ (B) $y = A \sin 2x$
(C) $y = A \sin 2x + B \cos 2x$ (D) $y = x(A \sin 2x + B \cos 2x)$
6. 若函数 $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个特解, 则 p, q 的值分别等于 ().
(A) -1, -2 (B) -1, 2 (C) 1, -2 (D) 1, 2
7. 微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的通解为 ().
(A) $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ (B) $y = e^x(C \cos x + \frac{1}{2}C \sin x)$
(C) $y = e^x(C \sin x + \cos x)$ (D) $y = e^x(C_1 \sin x - C_2 \cos x)$
8. 微分方程 $y'' + e^x(y')^2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的解是 ().
(A) $y = \frac{1}{2}(e^x + 1)$ (B) $y = \frac{1}{2}(e^{-x} + 1)$ (C) $y = 2 - e^{-x}$ (D) $y = 2e^{-x} - 1$

9. 若函数 $y = \cos \omega x$ 是方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 0$ 的解, 则 ω 的值等于 ().

- (A) ± 1 (B) ± 2 (C) ± 3 (D) ± 4

10. 微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的通解为 ().

- (A) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ (B) $y = C_1 e^{2x} - C_2 e^{3x}$
(C) $y = e^{2x} - e^{3x}$ (D) $y = e^{2x} + e^{3x}$

11. 微分方程 $y' \sin x = y \cos x \ln y$ 且满足 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 的解是 _____.

12. 微分方程 $y''' - x^2 y'' - x^5 = 1$ 的通解中应含有独立常数个数为 _____.

13. 方程 $y'' = \sin x$ 的通解为 _____.

14. 方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的特解形式为 _____.

15. 微分方程 $y' = x y''$ 的通解为 _____.

16. 方程 $y'' - 2y = e^x$ 的特解形式为 _____.

17. 求微分方程 $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = x y \frac{dy}{dx}$ 的通解.

参考答案: 微分方程通解为: $y = C e^{\frac{y}{x}}$.

18. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + x$ 的通解.

参考答案: $y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x-1)^n, \quad (-1 < x < 3).$

19. 求微分方程 $x y' - y = 1 + x^3$ 的通解.

参考答案: $-1 + \frac{1}{2} x^3 + C x.$

20. 求微分方程 $(y^2 - 2x^2) dx + 2x y dy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解.

参考答案: 所求特解为: $3x y^2 - 2x^3 = 1.$

21. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ 的通解.

参考答案: 微分方程通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x \left(\frac{1}{2} x - 1 \right) e^{2x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

22. 求微分方程 $xy \, dx + (x^2 + 1) \, dy = 0$ 满足初值条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

参考答案: 方程的特解为 $y(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1$, 即 $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

23. 求微分方程 $(x^2 + 3y^2) \, dx - 2xy \, dy = 0$ 的通解.

参考答案: $x^3 = C(x^2 + y^2)$.

24. 求微分方程 $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$ 的通解.

参考答案: $x = \frac{1}{2}y^2 + Cy^3$.

25. 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ 的通解.

参考答案: $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right) e^{2x}$.

26. 求方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ 的通解.

参考答案: $\frac{1}{x}(-\cos x + C)$.