第六章　定积分及其应用

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且不恒等于零，则下列各式中不恒为常数的是（　）

(A) $f(b)-f(a)$　**(B)** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　**(C)** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$　**(D)** $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

2. 下列选项中是广义积分的是（　）.

(A) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　**(B)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$　**(C)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　**(D)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

3. 定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{1}{2}-\sin x\right|\mathrm{d}x=$（　）.

(A) $\sqrt{3}-1-\dfrac{\pi}{12}$　**(B)** $\dfrac{\pi}{4}-1$　**(C)** $1-\dfrac{\pi}{4}$　**(D)** 0

4. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $I(u)=\displaystyle\int_a^u f(x)\mathrm{d}x-\int_a^u f(t)\mathrm{d}t$, $a<u<b$, 则 $I(u)$（　）.

(A) 恒大于零　**(B)** 恒小于零　**(C)** 恒等于零　**(D)** 可正，可负

5. 下列不等式中,成立的是（　）.

(A) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 x\,\mathrm{d}x>\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$　**(B)** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \ln^2 x\,\mathrm{d}x>\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \ln x\,\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^3\,\mathrm{d}x>\int_1^{+\infty} x^2\,\mathrm{d}x$　**(D)** $\displaystyle\int_{-1}^{-2} x^4\,\mathrm{d}x>\int_{-1}^{-2} x^3\,\mathrm{d}x$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则对任意 $x\in[a,b]$,下列式子正确的是（　）.

(A) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　**(B)** $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(x)\mathrm{d}x=f(x)$

(C) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　**(D)** $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(t)$

7. 设 $I_1=\int_3^4 \ln x\mathrm{d}x$, $I_2=\int_3^4 (\ln x)^3\mathrm{d}x$, 则 I_1 与 I_2 的大小关系是 ( ).

(A) $I_1=I_2$ **(B)** 不能确定 **(C)** $I_1<I_2$ **(D)** $I_1>I_2$

8. 设函数 $f(x)$ 为连续偶函数, $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(-x)=$ ( ).

(A) 0 **(B)** $F(x)$ **(C)** $-F(x)$ **(D)** 非零常数

9. [另附] 设函数 $f(x)$ 为连续奇函数, $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(-x)=$ ( ).

(A) 0 **(B)** $F(x)$ **(C)** $-F(x)$ **(D)** 非零常数

10. 设 $I_1=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$, $I_2=\int_1^2 x^4\mathrm{d}x$, 则 I_1 与 I_2 的大小关系是 ( ).

(A) $I_1=I_2$ **(B)** 不能确定 **(C)** $I_1<I_2$ **(D)** $I_1>I_2$

11. $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$____________.

12. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}=$____________.

13. 由 $y=x^3$, $y=0$ 及 $x=1$ 所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积是____________.

14. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^3+\ln(x+1)$, 则 $f(x)=$____________.

15. $\int_{-1}^{1}\left(x^3\cos x+1\right)\mathrm{d}x=$____________.

16. 设 $F(x)=\int_{x^2}^{0} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=$____________.

17. $\int_{-1}^{1}\left(x^2\tan x-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=$____________.

18. 反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\mathrm{d}x=$____________.

19. 曲线 $y=2x^2$ 与直线 $y=4x$ 围成平面图形的面积为__________.

20. 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-5x}\,dx=$__________.

21. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt=x^4$，则 $f(x)=$__________.

22. 设 $y=\displaystyle\int_0^{x^3}\sqrt{1+t^2}\,dt$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________.

23. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^4\cos(\sqrt{x}-1)\,dx$.

参考答案： $4\sin 1$.

24. (A 班) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在区间 $(0,1)$ 上大于零，并满足 $xf'(x)-f(x)=\dfrac{3a}{2}x^2$ (a 为常数)，且假设 $y=f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围成的图形 S 的面积为 2. 求:

(1) $f(x)$;

(2) 当 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小？其最小体积为多少?

参考答案： $f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+(4-a)x$; 当 $a=-5$ 时，旋转体体积最小，此时最小体积为 $V(-5)=\dfrac{9}{2}\pi$.

25. (B 班) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续二阶导数且满足方程:

$$xf'(x)=f(x)+140x^6.$$

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 是否存在函数 $f(x)$，它在开区间 $(0,1)$ 上大于零，并满足上面的方程，且曲线 $y=f(x)\,(x\in[0,1])$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成的图形 D 的面积为 2？请说明理由.

参考答案： $f(x)=28x^6+Cx$; 不存在这样的函数.

26. 计算定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{2+\sin x}+x^3\cos x\right)dx$.

参考答案： $\ln 3$.

27. 计算定积分 $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

参考答案：$1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

28. 过点 $(1,2)$ 作抛物线 $y=x^2+1$ 的切线，设该切线与抛物线及 y 轴所围的平面区域为 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕 x 轴一周的旋转体体积 V_x.

参考答案：$S=\dfrac{1}{3}$, $V_x=\dfrac{8}{15}\pi$.

29. 计算定积分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

参考答案：$\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$.

30. 设函数曲线 $y=\ln x$, 试求:

(1) 曲线上 $x=\mathrm{e}$ 处的切线方程;

(2) 曲线与切线以及 x 轴所围成的图形的面积;

(3) 该图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

参考答案：切线方程为: $y-1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$, $S=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}-2)$, $V_x=\dfrac{6-2\mathrm{e}}{3}\pi$.

31. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

参考答案：$\dfrac{\pi}{16}$.

32. 计算定积分 $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

参考答案：$4-2\sqrt{\mathrm{e}}$.

33. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

参考答案：$\dfrac{\pi}{16}$.

34. 计算定积分 $\int_{-2}^{4}|x^2-2x-3|\mathrm{d}x$.

参考答案: $\dfrac{46}{3}$.

35. 计算定积分 $\int_{1}^{16}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (提示: 令 $t=\sqrt[4]{x}, x=t^4, \mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t$)

参考答案: $2+4\ln\dfrac{3}{2}$

36. 计算反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$.

参考答案: $\dfrac{\pi}{8}$.

37. 设平面图形由曲线 $y=\mathrm{e}^x$, 直线 $y=\mathrm{e}x, x=0$ 围成. 试求:

(1) 该图形的面积;

(2) 该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

参考答案: $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}-1$, $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^2-1\right)$.

38. 计算定积分 $\int_{1}^{\mathrm{e}^3}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

参考答案: 2.

39. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x$.

参考答案: $2\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

40. 求曲线 $y=\ln x$ 在区间 $(2,6)$ 内的一条切线, 使得该切线与直线 $x=2, x=6$ 和该曲线所围成的平面图形的面积最小.

参考答案: 切线方程为 $y=\frac{1}{4}x-1+\ln 4$.

41. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

参考答案: 略.

42. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-x)f(x)\mathrm{d}x$$

参考答案: 略

43. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)<0$, 证明函数

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 (a,b) 单调递减.

参考答案: 由 $F'(x)<0$ 易得.

44. 设函数 $f(x)$ 为连续函数, 验证: $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$. 并利用此结果计算积分 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

参考答案: $\frac{\pi^2}{4}$.

第八章　多元函数微分学

1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:
①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;
②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数都连续;
③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;
④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数都存在.
若用"$P \Longrightarrow Q$" 表示性质 P 推出性质 Q,则有 (　　)

(A) ③ $\Longrightarrow$ ② $\Longrightarrow$ ①　　**(B)** ③ $\Longrightarrow$ ④ $\Longrightarrow$ ①
(C) ③ $\Longrightarrow$ ① $\Longrightarrow$ ④　　**(D)** ② $\Longrightarrow$ ③ $\Longrightarrow$ ①

2. 二元函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极大值点是 (　　).

(A) $(1,0)$　　**(B)** $(-3,2)$　　**(C)** $(-3,0)$　　**(D)** $(1,2)$

3. 设 $z=\sin(xy)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ (　　).

(A) $y\sin(xy)$　　**(B)** $-y\sin(xy)$　　**(C)** $y\cos(xy)$　　**(D)** $-y\cos(xy)$

4. 如果 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$, 则二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处 (　　).

(A) 一定连续　　**(B)** 一定偏导数存在
(C) 一定可微　　**(D)** 一定有极值

5. 设 $z=xe^{xy}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　　).

(A) xye^{xy}　　**(B)** e^{xy}　　**(C)** x^2e^{xy}　　**(D)** $(1+xy)e^{xy}$

6. 设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　　).

(A) $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$　　**(B)** $\dfrac{y}{x^2+y^2}$　　**(C)** $\dfrac{x}{x^2+y^2}$　　**(D)** $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$

7. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在的 (　　).

(A) 充分条件　　**(B)** 必要条件　　**(C)** 充要条件　　**(D)** 无关条件

8. 函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在其定义域上 (　　).

(A) 有极大值无极小值　　(B) 无极大值有极小值

(C) 有极大值有极小值　　(D) 无极大值无极小值

9. [另附] 函数 $f(x,y)=xy$ 在其定义域上 (　　).

(A) 有极大值无极小值　　(B) 无极大值有极小值

(C) 有极大值有极小值　　(D) 无极大值无极小值

10. 设 $z=\sqrt{\ln(xy)}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　　).

(A) $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln(xy)}}$　　(B) $\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$　　(C) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$　　(D) $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}$

11. 设 $z=x^2\mathrm{e}^y+y^2\sin x$, 则 $\mathrm{d}z|_{(\pi,0)}=$____________.

12. 设二元函数 $z=\displaystyle\int_1^{xy}\ln t\,\mathrm{d}t$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

13. 设 $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$, 则 $\mathrm{d}f(x,y)|_{x=1,y=1}=$____________.

14. 设 $z=f(3x-2y,xy)$, 且 $f(u,v)$ 可微，则全微分 $\mathrm{d}z=$____________.

15. 设 $z=f(x\ln y,y-x)$, 且 f 具有一阶连续偏导数, 则全微分 $\mathrm{d}z=$____________.

16. 已知函数 $z=\ln\left(1+x^2-y^2\right)$, 则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$____________.

17. 函数 $z=x^2y+\dfrac{x}{y}$ 的全微分 $dz=$____________.

18. 设函数 $z=\mathrm{e}^x\sin y$, 则 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=$____________.

19. 函数 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ 的定义域是____________.

20. 求二元函数 $z=3x^2-4xy+5y^2-2x-6y+1$ 的极值.

参考答案： 函数 z 在点 $(1,1)$ 处取极小值 $z(1,1)=-3$.

21. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

参考答案：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy};\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$.

22. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $e^z=xyz$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

参考答案：$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{yz}{e^z-xy}=\frac{z}{x(z-1)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}=\frac{z}{y(z-1)},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-z}{xy(z-1)^3}$.

23. 求二元函数 $f(x,y)=xy$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

参考答案：$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

24. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $e^z=x^3y^2+z$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

参考答案：$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{6x^2y(e^z-1)^2-6x^5y^3e^z}{(e^z-1)^3}$.

25. 设二元函数 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$，试讨论参数 a,b 满足什么条件时，$f(x,y)$ 有唯一极大值，或有唯一极小值.

参考答案：当 $b^2<2a^2$ 且 $a>0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一极大值；当 $b^2<2a^2$ 且 $a<0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一极小值.

26. 已知 f 具有二阶连续偏导数，且 $z=f\left(x^2-y^2,xy\right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

参考答案：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_u+yf_v=2xf_1'+yf_2',\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+4x^2f_{11}''+4xyf_{12}''+y^2f_{22}''$.

27. 设 $x^3+y-xyz^5=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

参考答案：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2-yz^5}{5xyz^4};\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-xz^5}{5xyz^4}$.

28. 已知直角三角形斜边长为 l，试求两条直角边等于何值时，直角三角形的周长最大？

参考答案：$x=y=\frac{\sqrt{2}}{x}l$ 时，$(x+y+l)_{\max}=(\sqrt{2}+1)l$.

29. 已知 f 具有二阶连续偏导数，且 $z=f(xy,\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

参考答案： $f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^3}f_{22}''$.

30. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

参考答案： $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$.

31. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

参考答案： $\frac{7\sqrt{2}}{8}$.

32. 设 $z=\arctan(xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

参考答案： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$.

33. [另附] 设 $z=\arctan(\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

参考答案： $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

34. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{y}{z}=\ln\frac{z}{x}$ 所确定，求 $\mathrm{d}z$.

参考答案： $\mathrm{d}z=\frac{z^2}{y+z}\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}y\right)$.

35. 已知求函数 $z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

参考答案： $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$.

36. 设二元函数 $F(x,y)$ 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 某邻域内具有二阶连续的偏导数，且

$$F\left(x_0,y_0\right)=0,\ F_x\left(x_0,y_0\right)=0,\ F_{xx}\left(x_0,y_0\right)\cdot F_y\left(x_0,y_0\right)\neq 0.$$

证明：由方程 $F(x,y)=0$ 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 某邻域内确定的隐函数 $y=y(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极值.

参考答案： 略.

37. 设 $z=f[x+\varphi(y)]$, 其中 f 二次可导, φ 可导, 证明 $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

参考答案： 略.

38. 设 $y=f(x,t)$, 而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都具有一阶连续偏导数, 试证

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

参考答案： 略

第九章　二重积分

1. 设 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 则极坐标系 (r,θ) 中的累次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

可化为直角坐标系 (x,y) 中的累次积分 (　)

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　**(B)** $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　**(D)** $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y$

2. 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$ 可以写成 (　).

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　**(B)** $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　**(D)** $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

3. 设函数 $f(x,y)$ 为连续函数, 二次积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 交换积分次序后等于 (　).

(A) $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　**(B)** $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_y^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　**(D)** $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x$

4. 设函数 $f(x,y)$ 为连续函数, 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x$ 交换积分次序后等于 (　).

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$　　**(B)** $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x}^{\sqrt{x}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$

(C) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$ (D) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$

5. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，二次积分 $\int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$ 交换积分次序后等于 (　)

(A) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$ (B) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$ (D) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$

6. 交换二次积分 $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y =$ ________.

7. 设区域 $D = \left\{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\right\}$，则 $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ ________.

8. 若 D 是由 $|x| \le 1, |y| \le 1$ 围成的正方形区域，则 $\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ ________.

9. 二重积分 $\iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ ________.

10. 已知 $f(x,y) = xy + 2\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$，且 $f(x,y)$ 连续，则 $f(x,y) =$ ________.

11. 二重积分 $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(\arctan\frac{y}{x})\mathrm{d}y$ 在极坐标系中表示为________.

12. 已知 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$，则 $\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ ________，其中 $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

13. 计算二重积分 $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x = \sqrt{y}$, $x = 0$ 与 $y = 1$ 所围成的区域.

参考答案：$\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$.

14. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,x\le x^2+y^2\le 1, y\ge 0\right\}$.

参考答案： $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2}{9}$.

15. 计算二重积分 $\iint_D xy\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=2, y=x, y=2x$ 所围成的面积.

参考答案： $\dfrac{3}{2}$.

16. 计算二重积分 $\iint_D \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$, 其中 $D=\left\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\right\}$.

参考答案： $\dfrac{\pi^2}{6}$.

17. 计算二重积分 $\iint_D y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ，其中区域 D 由直线 $y=x, x=0, y=1$ 围成.

参考答案： $\dfrac{\mathrm{e}-1}{3}$.

18. 计算二重积分 $\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为环形域 $\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

参考答案： 4π.

19. 计算二重积分 $\iint_D \left(x^2+y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 围成.

参考答案： $\dfrac{33}{140}$.

20. 计算二重积分 $\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为环形域 $1\le x^2+y^2\le \mathrm{e}^2$.

参考答案： $\dfrac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$.

21. 计算二重积分 $\iint_D \dfrac{y}{1+x^6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$.

参考答案： $\dfrac{\pi}{24}$.

22. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, 0\le y\le x\}$.

参考答案：$\dfrac{\pi}{12}$.

23. 计算二重积分 $\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为环形域 $\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

参考答案：$-6\pi^2$.

第十章　微分方与差分方程

1. 微分方程 $(x+y)\mathrm{d}y = x\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x$ 是 (　　)

(A) 可分离变量微分方程　　**(B)** 一阶线性非齐次方程

(C) 齐次方程　　**(D)** 前面三种都不是

2. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$ 的通解是 (　　).

(A) $\sin\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{Cx}$　　**(B)** $\sin\dfrac{y}{x} = x + C$　　**(C)** $\sin\dfrac{x}{y} = Cx$　　**(D)** $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$

3. 函数 $y = \cos x$ 是下列哪个微分方程的解 (　　).

(A) $y' + y = 0$　　**(B)** $y' + 2y = 0$　　**(C)** $y'' + y = 0$　　**(D)** $y'' + y = \cos x$

4. 若函数 $y = \mathrm{e}^{-x}$ 是方程 $y'' + ay' - 2y = 0$ 的一个解, 则 a 值等于 (　　).

(A) 0　　**(B)** 1　　**(C)** -1　　**(D)** 2

5. 微分方程 $y'' + 4y = \cos 2x$ 的特解形式为 (　　).

(A) $y = A\cos 2x$　　**(B)** $y = A\sin 2x$

(C) $y = A\sin 2x + B\cos 2x$　　**(D)** $y = x(A\sin 2x + B\cos 2x)$

6. 若函数 $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{-x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个特解, 则 p, q 的值分别等于 (　　).

(A) $-1, -2$　　**(B)** $-1, 2$　　**(C)** $1, -2$　　**(D)** $1, 2$

7. 微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的通解为 (　　).

(A) $y = \mathrm{e}^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$　　**(B)** $y = \mathrm{e}^{x}(C\cos x + \frac{1}{2}C\sin x)$

(C) $y = \mathrm{e}^{x}(C\sin x + \cos x)$　　**(D)** $y = \mathrm{e}^{x}(C_1\sin x - C_2\cos x)$

8. 微分方程 $y'' + \mathrm{e}^{x}(y')^2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ 的解是 (　　).

(A) $y = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + 1)$　　**(B)** $y = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x} + 1)$　　**(C)** $y = 2 - \mathrm{e}^{-x}$　　**(D)** $y = 2\mathrm{e}^{-x} - 1$

9. 若函数 $y=\cos\omega x$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+9y=0$ 的解, 则 ω 的值等于 (　) .

(A) ±1　　**(B)** ±2　　**(C)** ±3　　**(D)** ±4

10. 微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的通解为 (　) .

(A) $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}$　　**(B)** $y=C_1\mathrm{e}^{2x}-C_2\mathrm{e}^{3x}$

(C) $y=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{3x}$　　**(D)** $y=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}$

11. 微分方程 $y'\sin x=y\cos x\ln y$ 且满足 $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$ 的解是____________.

12. 微分方程 $y'''-x^2y''-x^5=1$ 的通解中应含有独立常数个数为____________.

13. 方程 $y''=\sin x$ 的通解为____________.

14. 方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的特解形式为 ____________.

15. 微分方程 $y'=xy''$ 的通解为 ____________.

16. 方程 $y''-2y=\mathrm{e}^x$ 的特解形式为____________.

17. 求微分方程 $y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的通解.

参考答案： 微分方程通解为： $y=C\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$.

18. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=\mathrm{e}^x+x$ 的通解.

参考答案： $y=f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n,\quad (-1<x<3).$

19. 求微分方程 $xy'-y=1+x^3$ 的通解.

参考答案： $-1+\dfrac{1}{2}x^3+Cx.$

20. 求微分方程 $\left(y^2-2x^2\right)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解.

参考答案： 所求特解为: $3xy^2-2x^3=1$.

21. 求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

参考答案：微分方程通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x\left(\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x},$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

22. 求微分方程 $xy\,dx+\left(x^2+1\right)dy=0$ 满足初值条件 $y\big|_{x=0}=1$ 的特解.

参考答案：方程的特解为 $y(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1$, 即 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

23. 求微分方程 $(x^2+3y^2)dx-2xy\,dy=0$ 的通解.

参考答案：$x^3=C\left(x^2+y^2\right)$.

24. 求微分方程 $(y^2-6x)y'+2y=0$ 的通解.

参考答案：$x=\dfrac{1}{2}y^2+Cy^3$.

25. 求微分方程 $y''-4y'+4y=e^{2x}$ 的通解.

参考答案：$y=\left(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$.

26. 求方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$ 的通解.

参考答案：$\dfrac{1}{x}(-\cos x+C)$.

第十一章　无穷级数

1. 以下四个关于级数的结论中，正确的结论是 (　　)

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛.

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $u_n \geq \frac{1}{n}$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $u_n \geq v_n\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

2. 设 a 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin a}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ (　　).

(A) 绝对收敛　　(B) 发散

(C) 条件收敛　　(D) 收敛性取决于 a 的值

3. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足关系 $a_n \leq b_n$, 则 (　　).

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛　　(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛　　(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是正项级数, 且 $u_n > v_n (n = 1, 2, \cdots, 99)$, $u_n \leq v_n (n = 100, 101, \cdots)$, 则下列命题正确的是 (　　).

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛　　(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散　　(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛， 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

5. 设 $0 < u_n < \frac{1}{n} (n = 1, 2, \cdots)$, 则下列级数中一定收敛的是 (　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$　　(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n^2$

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数中必定发散是 (　) .

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$　　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$

7. 设 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (　) .

(A) 一定收敛, 其和为零　　(B) 一定收敛, 但和不一定为零

(C) 一定发散　　(D) 可能收敛, 也可能发散

8. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛域是 $(-4,2]$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-2)^n$ 的收敛区间是____________.

9. 设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{4}$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径 $R=$____________.

10. 实数 q 满足什么条件，几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ 收敛，即 q 满足 ____________.

11. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$, $|x|<2$ 的和函数是____________.

12. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}x^n$ 的收敛半径为____________.

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot n}(x-1)^n$ 的收敛域为 ____________.

14. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ 的和 $S=$____________.

15. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ 的收敛域为____________.

16. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$ 敛散性，若收敛，指出其是绝对收敛还是条件收敛.

参考答案：微分方程通解：$y = Ce^{\frac{y}{x}}$.

17. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n}$ 的收敛域及和函数.

参考答案： $S(x)=-\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$, $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

18. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$ 的和函数及收敛域.

参考答案： $S(x)=x\arctan x$, $x\in[-1,1]$.

19. 将函数 $f(x)=\frac{1}{5-x}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数，并求其收敛域.

参考答案： $f(x)=\frac{1}{5-x}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{4}\right)^n$, $x\in(-3,5)$.

20. (A 班) 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数，并求其收敛域.

参考答案： $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$, $(-1<x<3)$.

21. 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$ 是绝对收敛，条件收敛，还是发散？

参考答案： 级数条件收敛.

22. 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域.

参考答案： 幂级数的收敛域为 $(0,2]$.

23. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

参考答案： 条件收敛.

24. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

参考答案： $f(x)=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}(x-2)^{n+1}$, 其收敛域为 $0<x\le 4$.

25. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$ 的敛散性, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $(a>0, b>0)$.

参考答案: 当 $\frac{b}{a}<1$, 即 $b<a$ 时, 级数收敛; 当 $\frac{b}{a}>1$, 即 $b>a$ 时, 级数发散; 当 $\frac{b}{a}=1$, 即 $b=a$ 时, 敛散性不能确定.

26. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

参考答案: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+2}}-\dfrac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n$, $(-1<x<3)$.

27. 讨论级数 $\sum\limits_{n=}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{a^n}(a>0)$ 是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散.

参考答案: $a=1$ 时, 级数发散; $a>1$ 时, 级数绝对收敛; $a\le 1$ 时, 级数发散.

28. 试求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域 I 与和函数 $S(x)$, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}$ 的和.

参考答案: 3.

29. [另附] 试求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛域 I 与和函数 $S(x)$, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 的和.

参考答案: 2.

30. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ 绝对收敛和条件收敛性.

参考答案: 条件收敛.

31. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

参考答案: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$, 收敛域为 $(-6,-2)$.

32. (A 班) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

参考答案: 略.

33. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

参考答案: 由比较判别法易得.

34. [另附] 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$ 绝对收敛.

参考答案: 由比较判别法易得.