# 第五章　不定积分

## 一、选择题（选择正确的选项）

**1.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2\ln x + C$, 则 $f(x) =$ ( D ) .

(A) $2x\ln x$　　(B) $x$　　(C) $x\ln x$　　(D) $x(2\ln x + 1)$

**2.** 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数 ( A ) .

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数
(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数
(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数
(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必为单调增函数

**3.** 已知 $f'(\cos x) = \sin x$, 则 $f(\cos x) =$ ( C ) .

(A) $-\cos x + C$　　(B) $\cos x + C$
(C) $\frac{1}{2}(\sin x\cos x - x) + C$　　(D) $\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$

**4.** 若 $\int f(x)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2} + C$, 则 $f(x) =$ ( D ) .

(A) $1$　　(B) $\mathrm{e}^{x^2}$　　(C) $x^2$　　(D) $2x$

**5.** 下列各式中, 与 $\int \sin 2x\mathrm{d}x$ 不相等的是 ( D ) .

(A) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$　　(B) $\sin^2 x + C$　　(C) $-\cos^2 x + C$　　(D) $\frac{1}{2}\cos 2x + C$

**6.** 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 如果 $f'(x) = g'(x)$, 则下列各式中一定成立的是 ( C ) .

(A) $f(x) = g(x)$　　(B) $f(x) = g(x) + 1$
(C) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\,\mathrm{d}x$　　(D) $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)'$

**7.** 函数 $2(e^{2x}-e^{-2x})$ 的原函数有（ A ）.

(A) $(e^x+e^{-x})^2$　(B) $2(e^x-e^{-x})^2$　(C) $e^x+e^{-x}$　(D) $4(e^{2x}+e^{-2x})$

**8.** 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x\sin x+C$, 则 $f(x)$ 等于（ B ）.

(A) $e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$　(B) $\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$　(C) $\sqrt{2}e^x\cos(x+\frac{\pi}{4})$　(D) $e^x\cos(x-\frac{\pi}{4})$

**9.** 设 $e^{-x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\displaystyle\int xf(x)\mathrm{d}x=$（ B ）

(A) $e^{-x}(1-x)+C$　(B) $e^{-x}(1+x)+C$　(C) $e^{-x}(x-1)+C$　(D) $-e^{-x}(x+1)+C$

**10.** 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2e^{2x}+C$, 则 $f(x)$ 等于（ D ）.

(A) $2xe^{2x}$　(B) $2x^2e^{2x}$　(C) $xe^{2x}$　(D) $2x(1+x)e^{2x}$

## 二、填空题（请将答案写在横线上）

**1.** 不定积分 $\displaystyle\int\frac{3x^4+3x^2+2}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ $\underline{\ x^3+2\arctan x+C\ }$.

**2.** 不定积分 $\displaystyle\int\frac{1+xe^{5x}}{x}\mathrm{d}x=$ $\underline{\ \ln|x|+\frac{1}{5}e^{5x}+C\ }$.

**3.** 不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$ $\underline{\ \cos(\frac{1}{x})+C\ }$.

**4.** 不定积分 $\displaystyle\int 5^xe^x\mathrm{d}x=$ $\underline{\ \frac{5^xe^x}{\ln 5+1}+C\ }$.

**5.** 不定积分 $\displaystyle\int x\ln x\mathrm{d}x=$ $\underline{\ \frac{1}{2}x^2(\ln x-\frac{1}{2})+C\ }$.

**6.** 不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=$ $\underline{\ -\frac{1}{x}-\arctan x+C\ }$.

**7.** 不定积分 $\displaystyle\int 5^xe^x\mathrm{d}x$ 等于 $\underline{\ \frac{5^xe^x}{1+\ln 5}+C\ }$.

## 三、计算题（请给出必要的步骤）

**1.** 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

**解.** 令 $x=\sin t$, 则

$$原式=\int\frac{\cos t}{(\sin t)^4}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int\cot^2 t\cdot\csc^2 t\,\mathrm{d}t=-\int\cot^2 t\,\mathrm{d}\cot t$$

$$=-\frac{1}{3}\cot^3 t+C=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^3}+C$$

**2.** 求不定积分 $\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$.

**解.** 由条件易知

$$原式=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\,\mathrm{d}x$$

$$=x\arctan x-\int x\,\mathrm{d}(\arctan x)-\int\arctan x\,\mathrm{d}\arctan x$$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$$

**3.** 求不定积分 $\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$.

**解.** 令 $x=2\sin t$,

$$原式=\int\frac{(2\sin t)^2}{2\cos t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=2\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=2\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$$

**4.** 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, 求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

**解.** 令 $x=\ln t$, $t=\mathrm{e}^x$, $f(t)=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$

$$原式=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\ln(1+\mathrm{e}^x)+x+C$$

**5.** 求不定积分 $\int \frac{1+\ln x}{2+(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

**解.** $\int \frac{1+\ln x}{2+(x\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{2+(x\ln x)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x\ln x}{\sqrt{2}}+C$

**6.** 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\mathrm{e}^{-x^2}$, 求 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

**解.** 因为 $f(x)$ 的一个原函数是 $\mathrm{e}^{-x^2}$, 所以

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x^2}+C,\ f(x)=\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

$$\text{原式}=\int x\,\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=-2x^2\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}+C.$$

**7.** **(本题 10 分)** 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

**解.** 令 $x=\sin t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int \frac{\cos t}{\sin^4 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int \cot^2 t\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t}\\&=-\int \cot^2 t\,\mathrm{d}(\cot t)=-\frac{1}{3}\cot^3 t+C\\&=-\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C\end{aligned}$$

**8.** 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $x^2\sin x$, 计算不定积分 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

**解.** 由条件可知 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2\sin x+C$, 于是

$$f(x)=\left(x^2\sin x\right)'=2x\sin x+x^2\cos x$$

由分部积分得

$$\begin{aligned}\int x f'(x)\mathrm{d}x&=\int x\,\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x\\&=x\left(2x\sin x+x^2\cos x\right)-x^2\sin x+C\\&=x^2(\sin x+x\cos x)+C\end{aligned}$$

**9.** 求曲线 $y^3=(x^2+1)^{\sin x}$ 上 $x=0$ 处的切线方程.

**解.** 等式两边取对数得

$$3\ln y = \sin x \ln(x^2+1).$$

两边关于 $x$ 求导得

$$3\frac{y'}{y} = \cos x \ln(x^2+1) + \sin x \frac{2x}{x^2+1}.$$

于是

$$y' = 3y\left[\cos x \ln(x^2+1) + \sin x \frac{2x}{x^2+1}\right].$$

从而

$$x=0, y=1 \Longrightarrow k = y'(0,1) = 0.$$

所以所求切线为：$y=1$ .

**10.** 求 $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

**解.** 由第一类积分换元法可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &\xlongequal{t=\sqrt{x}} \int \frac{\arctan t}{t(1+t^2)} 2t\,\mathrm{d}t = \int 2\arctan t\,\mathrm{d}(\arctan t) \\ &= (\arctan t)^2 = (\arctan\sqrt{x})^2 + C\end{aligned}$$

**11.** 设 $\mathrm{e}^{-x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\displaystyle\int x f(x)\mathrm{d}x$.

**解.** 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}) = x\mathrm{e}^{-x} - \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= (x+1)\mathrm{e}^{-x} + C.\end{aligned}$$

(A 班) 求 $\displaystyle\int x f''(2x)\mathrm{d}x$.

**解.** 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}f'(2x) = \frac{x}{2}f'(2x) - \frac{1}{2}\int f'(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2}f'(2x) - \frac{1}{4}\int f'(2x)\,\mathrm{d}2x \\ &= \frac{x}{2}f'(2x) - \frac{1}{4}f(2x) + C\end{aligned}$$

**12.** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

**解.** 设 $x=\sec t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{\sec^4 t\tan t}{\tan t}\mathrm{d}t=\int\sec^4 t\,\mathrm{d}t\\&=\int\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}\tan t=\tan t+\frac{1}{3}\tan^3 t+C\\&=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3+C.\end{aligned}$$

**13.** 已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求不定积分 $\displaystyle\int xf'(x)\mathrm{d}x$ .

**解.** 因为

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},\quad 即\ \int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x}+C,$$

所以

$$\begin{aligned}\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x\\=\frac{x\cos x-\sin x}{x}-\frac{\sin x}{x}+C\\=\frac{x\cos x-2\sin x}{x}+C\end{aligned}$$

**14.** 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{2}{x(3+2\ln x)}\mathrm{d}x$.

**解.** 原式 $\displaystyle=\int\frac{\mathrm{d}(3+2\ln x)}{3+2\ln x}=\ln|3+2\ln x|+C$.

**15.** 求不定积分 $\displaystyle\int(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})\mathrm{d}x$.

**解.** 易知

$$\begin{aligned}\int(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})\mathrm{d}x&=\int(x^{\frac{5}{6}}-x^{-\frac{5}{6}})\mathrm{d}x\\&=\int x^{\frac{5}{6}}\mathrm{d}x-\int x^{-\frac{5}{6}}\mathrm{d}x\\&=\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}-6x^{\frac{1}{6}}+C.\end{aligned}$$

**16.** 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, 试求 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$.

**解.** 设 $\ln x=t$, 则 $x=\mathrm{e}^t$, $f(t)=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$. 所以

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = -\int \ln(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}\\ &= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C\\ &= x-(1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.\end{aligned}$$

**17.** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\mathrm{d}x$

**解.** 令 $x-2=2\sin t$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t\\ &= t+C = \arcsin\frac{x-2}{2}+C.\end{aligned}$$

**18.** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x$

**解.** 令 $\sqrt[3]{3x+1}=t$, 则 $x=\dfrac{t^3-1}{3}$, $\mathrm{d}x=t^2\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{t^4}{3}+\frac{2}{3}t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5}+t^2\right)+C\\ &= \frac{1}{5}(x+2)(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C.\end{aligned}$$

**19.** 求不定积分 $\displaystyle\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$

**解.** 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right)+C.\end{aligned}$$

**20.** 求 $\int \frac{x^3}{1+x^2} \mathrm{d}x$.

**解.** $\int \frac{x^3}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C$.

**21.** 设函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$, 试求 $\int x f'(x) \mathrm{d}x$.

**解.** $\int x f'(x) \mathrm{d}x = x f(x) - \int f(x) \mathrm{d}x = x\left(\frac{\sin x}{x}\right)' - \frac{\sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C$.