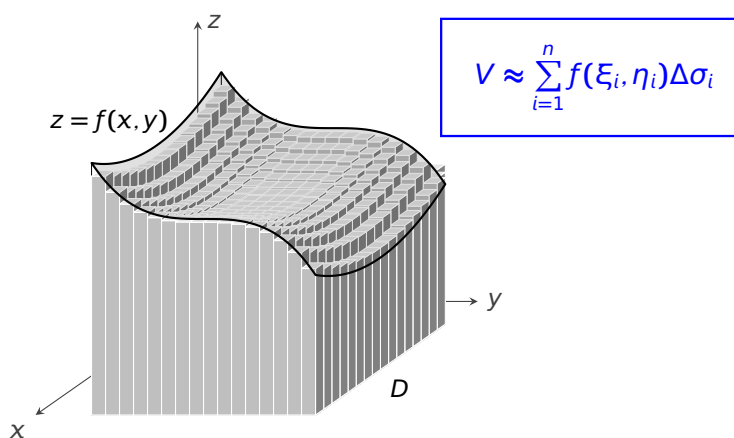
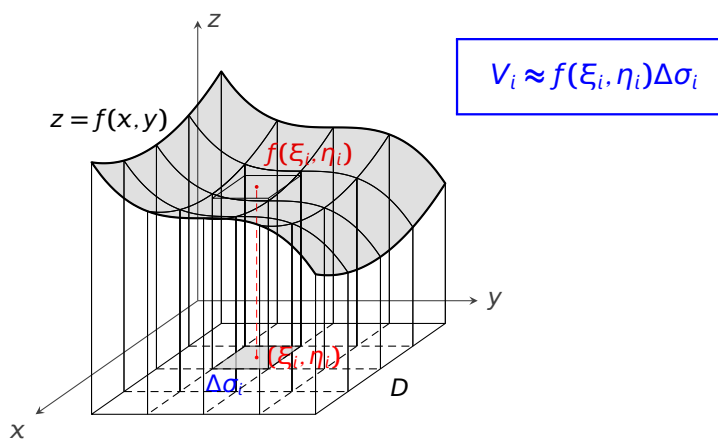


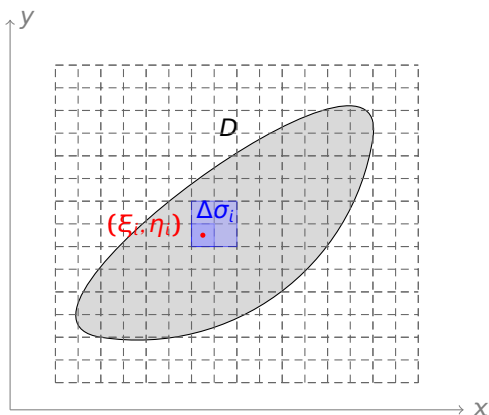
第九章 二重积分

9.1 二重积分

9.1.1 二重积分的概念和性质



定义二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$



- D 是有界闭区域
- $f(x, y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D = \bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$

定义二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$

定义 1. 设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数. 将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域, 也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$. 如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时, 和的极限总存在, 则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

在二重积分的记号 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 中:

- D 称为积分区域
- $f(x, y)$ 称为被积函数
- $d\sigma$ 称为面积元素

定理. 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 存在.

1. 对二重积分定义的说明:

- 在二重积分的定义中, 对闭区域的划分是任意的.
- 当 $f(x, y)$ 在闭区域上连续时, 定义中和式的极限必存在, 即二重积分必存在.

2. 二重积分的几何意义:

- 当被积函数大于零时, 二重积分是柱体的体积.
- 当被积函数小于零时, 二重积分是柱体的体积的负值.

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域 D , 则面积元素为

$$d\sigma = dx dy$$

故二重积分可写为 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy$

性质 1 (函数可加性).

$$\begin{aligned} \iint_D [af(x, y) + bg(x, y)] d\sigma \\ = a \iint_D f(x, y) d\sigma + b \iint_D g(x, y) d\sigma \end{aligned}$$

性质 2 (区域可加性). 设积分区域 D 可以划分为 D_1 和 D_2 , 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

性质 3. 如果在 D 上有 $f(x, y) \geq g(x, y)$, 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

性质 4. 如果在 D 上有 $f(x, y) \equiv 1$, D 的面积为 A , 则有

$$\iint_D 1 d\sigma = A$$

性质 5 (积分估值不等式). 设在 D 上 $m \leq f(x, y) \leq M$, D 的面积为 A , 则有

$$mA \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA$$

性质 6 (积分中值定理). 如果 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, D 的面积为 A , 则在 D 中至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) A$$

例 1. 不作计算, 估计 $I = \iint_D e^{(x^2+y^2)} d\sigma$ 的值, 其中 D 是椭圆圆闭区域: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($0 < b < a$).

解. 区域 D 的面积 $\sigma = ab\pi$, 在区域 D 上, $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$, 从而 $1 = e^0 \leq e^{x^2+y^2} \leq e^{a^2}$, 由积分估值不等式得

$$\sigma \leq \iint_D e^{(x^2+y^2)} d\sigma \leq \sigma \cdot e^{a^2},$$

即

$$ab\pi \leq \iint_D e^{(x^2+y^2)} d\sigma \leq ab\pi e^{a^2}$$

例 2. 估计 $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ 的值, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

解. 由条件易知, 区域面积 $\sigma = 2$,

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x+y)^2 + 16}},$$

, 在 D 上 $f(x, y)$ 的最大值和的最小值分别为:

$$M = \frac{1}{4} (x = y = 0), \quad m = \frac{1}{5} (x = 1, y = 2)$$

故

$$\frac{2}{5} \leq I \leq \frac{2}{4}.$$

例 3. 判断 $\iint_{r \leq |x| + |y| \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy$ 的符号.

解. 当 $r \leq |x| + |y| \leq 1$ 时,

$$0 < x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 \leq 1,$$

故

$$\ln(x^2 + y^2) \leq 0,$$

又当 $|x| + |y| < 1$ 时,

$$\ln(x^2 + y^2) < 0, \implies \iint_{r \leq |x| + |y| \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy < 0.$$

9.1.2 小结

1. 二重积分的定义 (和式的极限)
2. 二重积分的几何意义 (曲顶柱体的体积)
3. 二重积分的性质

9.2 二重积分的计算

二重积分的计算可以按照定义来进行, 同定积分按照定义进行计算一样, 能够按照定义进行计算的二重积分很少, 对少数特别简单的被积函数和积分区域来说是可行的, 但对于一般的函数和积分区域却不可行.

本节介绍一种计算二重积分的方法——把二重积分转化为两次定积分 (下称累次积分) 的计算.

9.2.1 用直角坐标计算二重积分

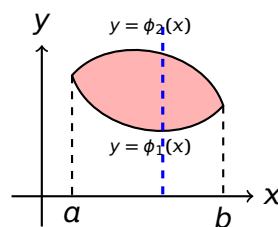
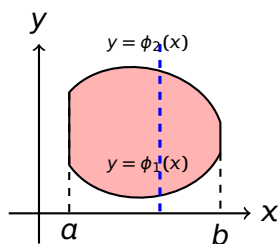
在直角坐标中, 我们有 $d\sigma = dx dy$, 从而有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy$$

如果区域 D 由直线 $x = a$ 和 $x = b$, 以及曲线 $y = \phi_1(x)$ 和 $y = \phi_2(x)$ 围成, 我们称 D 为 **X-型区域**, 其中 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 连续.

即 X-型区域可以表示为:

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$



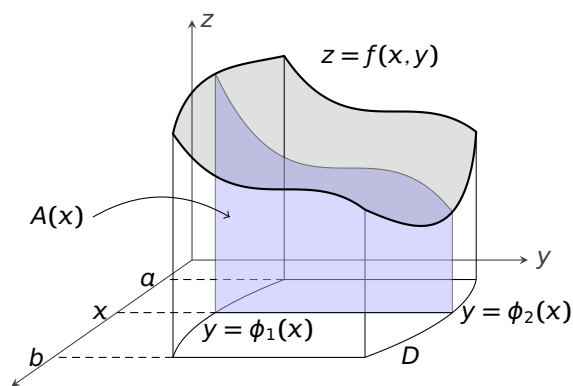
如果积分区域 D 为 X-型区域, 即有

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

二重积分可以用下面公式来计算:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \\ &:= \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

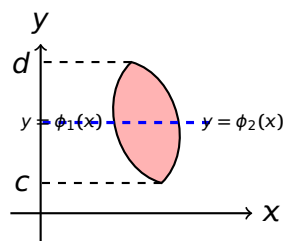
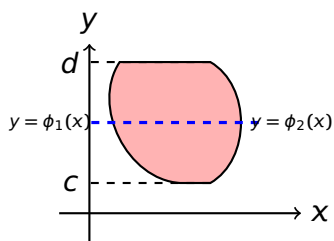
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



如果区域 D 由直线 $y = c$ 和 $y = d$, 以及曲线 $x = \phi_1(y)$ 和 $x = \phi_2(y)$ 围成, 我们称 D 为 **Y-型区域**, 其中 $\phi_1(y), \phi_2(y)$ 连续.

即 Y-型区域可以表示为:

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}$$



如果积分区域 D 为 Y-型区域, 即有

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}$$

二重积分可以用下面公式来计算:

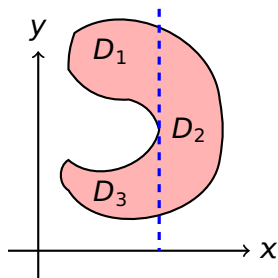
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \int_c^d \left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \\ &:= \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

X-型区域的特点: 穿过区域且平行于 y 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

Y-型区域的特点：穿过区域且平行于 x 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

若区域如图, 则必须分割. 在分割后的三个区域上分别使用积分公式

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$

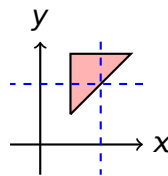


利用直角坐标系计算二重积分的步骤

1. 画出积分区域的图形, 求出边界曲线交点坐标;
2. 根据积分域类型, 确定积分次序; 分割区域: X-型区域, 先 y 后 x ; Y-型区域先 x 后 y ;
3. 确定积分限, 化为累次积分; 后积先定限, 域中穿根线, 先交是下限, 后交上限见
4. 计算两次定积分, 即可得出结果.

二重积分转化为二次定积分时, 关键在于正确确定积分限, 一定要做到熟练、准确.

例 1. 求 $I = \iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是 $x = 1$ 、 $y = x$ 及 $y = 2$ 所围成的闭区域.



解. 把区域看成 X-型区域, 则

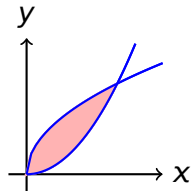
$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dx \int_x^2 xy dy = \int_1^2 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_x^2 dx \\ &= \int_1^2 \left(2x - \frac{x^3}{2} \right) dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{8} \right]_1^2 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

解. 把区域看成 Y-型区域, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dy \int_1^y xy dx = \int_1^2 \left[y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^y dy \\ &= \int_1^2 \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y}{2} \right) dy = \left[\frac{y^4}{8} - \frac{y^2}{4} \right]_1^2 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

注记. 如果积分区域既是 X -型又是 Y -型区域, 则两种方式计算结果一样, 但可以做出[适当选择](#)

例 2. 求 $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, 其中 D 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $x = y^2$ 所围平面闭区域.



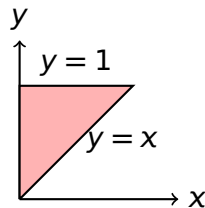
解. 先求两条曲线的交点,

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0), (1,1),$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy \\ &= \int_0^1 \left[x^2 (\sqrt{x} - x^2) + \frac{1}{2} (x - x^4) \right] dx = \frac{33}{140}. \end{aligned}$$

例 3. 求 $I = \iint_D e^{-y^2} d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1$ 及 y 轴所围成的闭区域.



解. 由于 $\int e^{-y^2} dy$ 不能用初等函数计算, 因此只能用 Y -型区域的求积公式进行计算.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_0^y e^{-y^2} dx \\ &= \int_0^1 y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

计算二重积分时, 恰当的选取积分次序十分重要, 它不但关系到计算的繁简, 而且关系到能否进行计算.

凡遇如下形式积分：

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int e^{-x^2} dx, \int e^{x^2} dx, \int e^{\frac{y}{x}} dx, \int \frac{dx}{\ln x},$$

等等，一定要放在后面进行和分。

交换积分次序的步骤：

1. 将已给的二次积分的积分限得出相应的二重积分的积分区域，并画出草图；
2. 按相反顺序写出相应的二次积分。

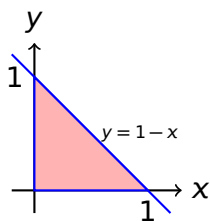
例 4. 改变积分 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$ 的次序。

解. 积分区域显然为

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1-x. \end{cases}$$

如图所示，可以看作是 Y-型区域

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1-y, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$



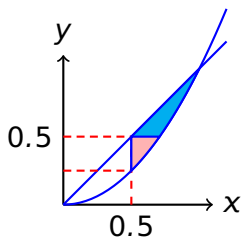
因而

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx.$$

例 5. 计算积分 $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$.

解. 因为 $\int e^{\frac{y}{x}} dx$ 不能用初等函数表示，因此先改变积分次序。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}} dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x(e - e^x) dx = \frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e}. \end{aligned}$$



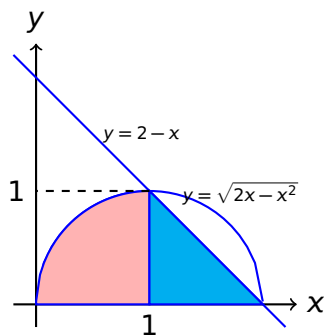
例 6. 改变积分

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y) dy$$

的次序.

解. 积分区域如图所示, 因而

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y) dx.$$

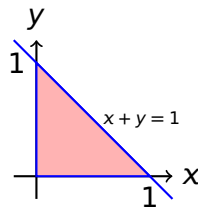


$$V = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)] dx dy$$

例 7. 求由下列曲面所围成的立体体积, $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

解. 立体在 xoy 平面上的投影为:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ x + y = 1, \end{cases}$$

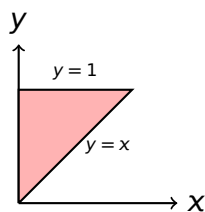


所围成的图形 (如图所示).

显然投影区域内 $x + y \geq xy$, 故所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x + y - xy) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y - xy) dy \\ &= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^3 \right] dx = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

思考. 求 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是以 $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形.



解. 因为 $\int e^{-y^2} dy$ 无法用初等函数表示, 因此转化为累次积分时必须考虑次序. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^3}{3} dy = \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^2}{6} dy^2 \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{2}{e} \right). \end{aligned}$$

9.2.2 用极坐标计算二重积分

从 这 里 向 南 走 2000 米！

请分析上面这句话，告诉了我们什么信息？

这里：出发点

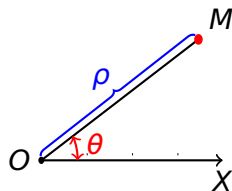
向南：方向

2000 米：距离

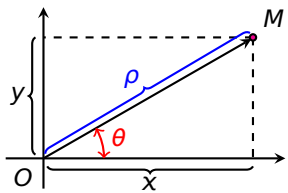
在生活中我们经常用距离和方向来表示一点的位置。用距离和方向表示平面上一点的位置，就是极坐标。

极坐标的建立

1. 在平面内取一个定点 O ，叫做极点。
2. 引一条射线 OX ，叫做极轴。
3. 再选定一个长度单位和角度正方向（通常取逆时针方向）。



对于平面上任意一点 M , 用 ρ 表示线段 OM 的长度, 用 θ 表示从 OX 到 OM 的角度, ρ 叫做 M 的极径, θ 叫做点 M 的极角, 有序数对 (ρ, θ) 就叫做 M 的极坐标.



直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

直角坐标曲线方程转化为极坐标曲线方程:

$$y = f(x) \implies \rho \sin \theta = f(\rho \cos \theta) \xrightarrow{\text{解出 } \rho} \rho = g(\theta)$$

例 8. 将直线 $y = 3x + 2$ 用极坐标下的方程表示.

$$\text{解. } \rho \sin \theta = 3\rho \cos \theta + 2 \implies \rho = \frac{2}{\sin \theta - 3 \cos \theta}$$

例 9. 将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 用极坐标系下的方程表示.

$$\text{解. } \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta = 1 \implies \rho = 1$$

练习 1. 将抛物线 $y = x^2$ 用极坐标系下的方程表示.

$$\text{答案. } \rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta \implies \rho = g(\theta) = \tan \theta \cdot \sec \theta$$

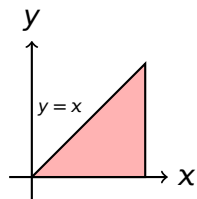
平面区域的极坐标表示形式:

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \phi_1(\theta) \leq \rho \leq \phi_2(\theta)\}$$

直角坐标区域表示形式转换为极坐标区域表示形式:

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\} \\ &\xrightarrow{\text{转换 } x, y} D = \{(\rho, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \phi_1(\theta) \leq \rho \leq \phi_2(\theta)\} \end{aligned}$$

例 10. D 为由 $y = 0, x = y$ 和 $x = 1$ 围成的区域, 使用极坐标表示该区域.



解. 显然区域 D 在直角坐标系下的表示为:

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

由 $x = 1$ 可得

$$\rho \cos \theta = 1 \implies \rho = \frac{1}{\cos \theta}$$

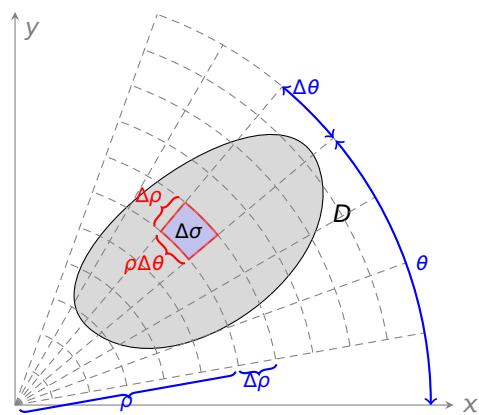
从而

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta} \right\}.$$

如果积分区域是圆盘或者圆盘的一部分, 用极坐标来计算更容易. 此时

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$



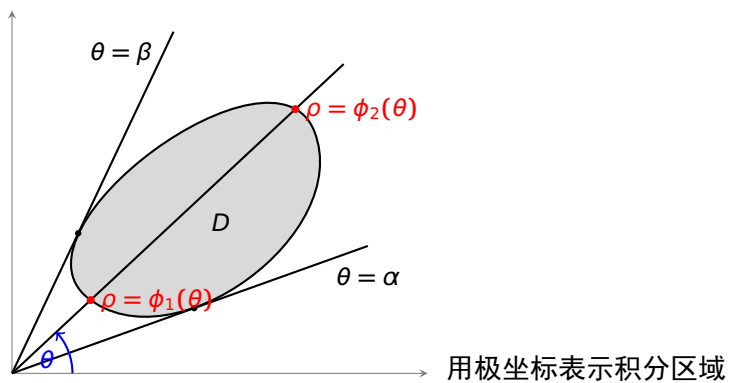
$$\Delta\sigma = ?? \approx \Delta\rho \cdot \rho\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\sigma \approx \rho \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\theta$$

$$\Rightarrow d\sigma = \rho d\rho d\theta$$

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = ??$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta$$



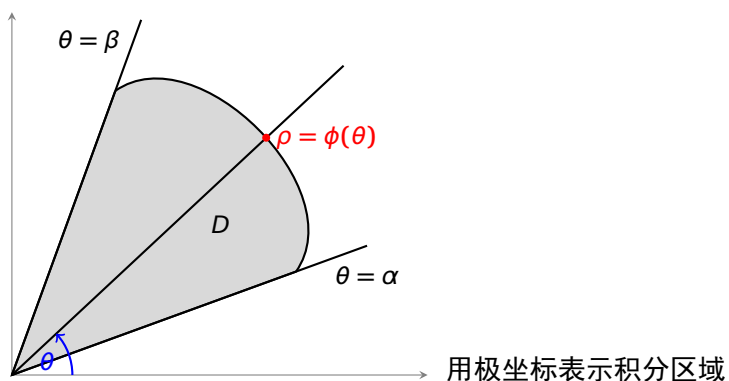
1. 先求 θ 的范围

2. 再求 ρ 的函数

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \phi_1(\theta) \leq \rho \leq \phi_2(\theta)\}$$

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = ??$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_0^{\phi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta$$



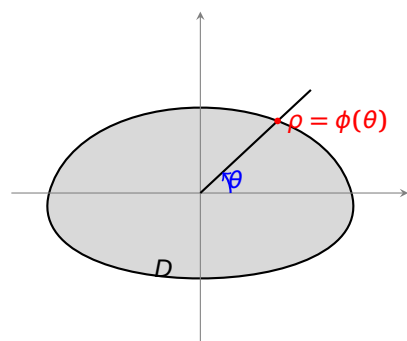
1. 先求 θ 的范围

2. 再求 ρ 的函数

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \phi(\theta)\}$$

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = ??$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\phi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right] d\theta$$



1. 先求 θ 的范围

2. 再求 ρ 的函数

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \phi(\theta)\}$$

什么时候用极坐标计算二重积分？

1. 当区域是圆或圆的一部分, 或者区域 D 的边界方程用极坐标表示较简单时.

2. 被积函数是 $f(x^2 + y^2)$, $f(\frac{x}{y})$ 或者 $f(\frac{y}{x})$ 等形式时.

1. 画出区域的草图;

2. 写出二重积分区域 D 在极坐标下的表示形式 (这是关键);

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \phi_1(\theta) \leq r \leq \phi_2(\theta)\}.$$

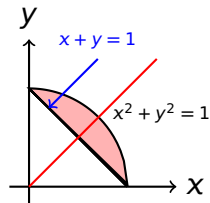
3. 把二重积分化为极坐标下的累次积分 (先积 ρ 后积 θ):

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

4. 计算累次积分.

例 11. 写出积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 的极坐标下的累次积分形式, 其中积分区域

$$D = \{(x, y) \mid 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$$



解. 在极坐标系下 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 所以圆的方程为 $\rho = 1$, 直线的方程为 $\rho = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$,

因此

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

例 12. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, 其中 D 是由中心在原点、半径为 a 的圆周围成的闭区域.

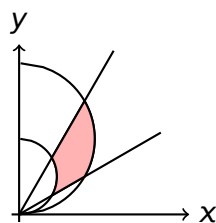
解. 在极坐标系中, 闭区域 D 可表示为

$$0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_D e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a e^{-r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^a d\theta = \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi (1 - e^{-a^2})\end{aligned}$$

例 13. 计算 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 为由圆 $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$ 及直线 $x - \sqrt{3}y = 0$, $y - \sqrt{3}x = 0$ 所围成的平面闭区域.



解. 由条件可得

$$\begin{aligned}y - \sqrt{3}x = 0 &\Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3}, & x^2 + y^2 = 4y &\Rightarrow \rho = 4 \sin \theta, \\ x - \sqrt{3}y = 0 &\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}, & x^2 + y^2 = 2y &\Rightarrow \rho = 2 \sin \theta.\end{aligned}$$

于是

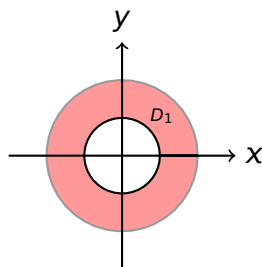
$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{2 \sin \theta}^{4 \sin \theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 15 \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} \right).$$

例 14. 计算二重积分

$$\iint_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy,$$

其中积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$



解. 由对称性, 可只考虑第一象限部分, $D = 4D_1$ (注意: 被积函数也要有对称性).

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy &= 4 \iint_{D_1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \frac{\sin \pi r}{r} \rho d\rho = -4.\end{aligned}$$

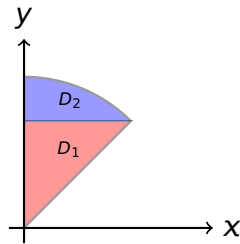
例 15. 将累次积分

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R e^{-y^2} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2} dx$$

化为极坐标下的累次积分, 并计算.

解. 很明显 $D = D_1 \cup D_2$, 因此

$$\begin{aligned}I &= \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} e^{\rho^2} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi}{8} (1 - e^{-R^2})\end{aligned}$$



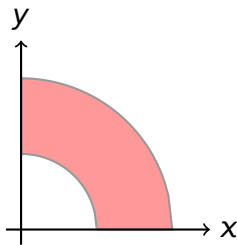
练习 2. 将直角坐标系下累次积分:

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy$$

化为极坐标系下的累次积分.

答案. 区域如图所示, 易得

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$



复习 1. 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由 $x=2$, $y=1$ 与 $y=x$ 所围成的图形.

复习 2. 计算二重积分 $\iint_D x\sqrt{y} d\sigma$, 其中 D 是由 $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{x}$ 所围成的图形.