

# 目录

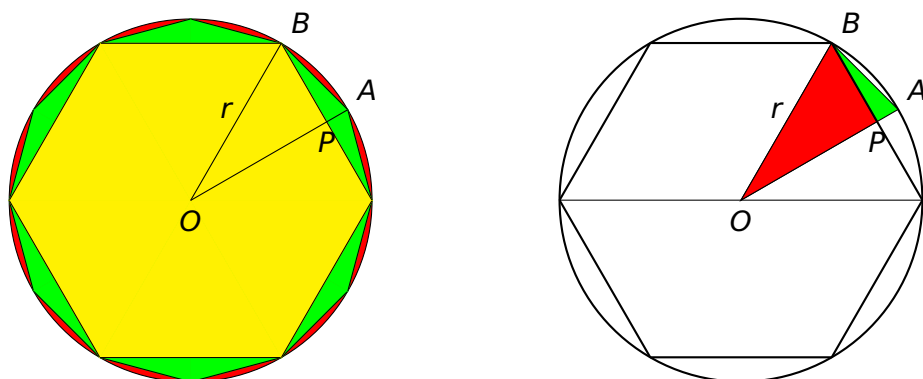
第二章 极限与连续	3
2.1 数列的极限	3
2.1.1 引例	3
2.1.2 数列的有关概念	4
2.1.3 数列极限的定义	5
2.1.4 收敛数列的性质	8
2.2 函数的极限	9
2.2.1 函数极限的定义	9
2.2.2 函数极限的性质	15
2.2.3 小结	17
2.3 无穷小与无穷大	17
2.3.1 无穷小	17
2.3.2 无穷大	20
2.3.3 小结	21
2.4 极限运算法则	22
2.4.1 极限运算法则	22
2.4.2 求极限方法举例	23

2.4.3 小结 . . . . .	29
2.5 极限存在准则、两个重要极限 . . . . .	29
2.5.1 夹逼准则 . . . . .	29
2.5.2 重要极限 II . . . . .	33
2.5.3 连续复利 . . . . .	37
2.6 无穷小的比较 . . . . .	39
2.6.1 无穷小的阶 . . . . .	39
2.6.2 等价无穷小代换 . . . . .	41
2.6.3 小结与思考 . . . . .	43
2.7 函数的连续性 . . . . .	43
2.7.1 函数的连续性的概念 . . . . .	43
2.7.2 函数的间断点 . . . . .	46
2.7.3 初等函数的连续性 . . . . .	48
2.7.4 小结 . . . . .	50
2.8 闭区间上连续函数的性质 . . . . .	51
2.8.1 最大值和最小值定理 . . . . .	51
2.8.2 零点定理与介值定理 . . . . .	52
2.8.3 均衡价格的存在性 . . . . .	54
2.8.4 小结 . . . . .	55

## 第二章 极限与连续

### 2.1 数列的极限

#### 2.1.1 引例



记内接正  $6 \times 2^{n-1}$  边型的面积为  $A_n$ , 则  $n \rightarrow \infty$  时, 正多边形的面积和圆的面积之差可以任意小.

“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”

--- 《庄子·天下篇》

第一天截下的木棒长为  $X_1 = \frac{1}{2}$ ; 第二天截下的木棒长总和为  $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ ;

...

第  $n$  天截下的木棒长总和为  $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ ;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1.$$

### 2.1.2 数列的有关概念

**定义 1.** 以正整数集  $N^+$  为定义域的函数  $f(n)$  按  $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$  排列的一列数称为**数列**, 通常用  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  表示, 其中  $x_n = f(n)$ ,  $x_n$  称为**通项**或**一般项**.

例子.  $x_n = \frac{1}{2^n}$   $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

例子.  $x_n = \frac{n}{n+1}$   $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

例子.  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$   $-\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

**定义 2.** 对数列  $x_n$ , 若存在正数  $M$ , 使得一切正整数  $n$ , 恒有  $|x_n| \leq M$  成立, 则称数列  $x_n$  **有界**, 否则, 称为**无界**.

例子.  $x_n = \frac{n}{n+1}$  ..... 有界.

例子.  $x_n = 2^n$  ..... 无界.

注记. 数轴上对应于有界数列的点  $x_n$  都落在闭区间  $[-M, M]$  上.

若存在实数  $A$ , 对一切  $n$  都满足  $x_n \geq A$ , 称  $\{x_n\}$  为**下有界**,  $A$  是  $\{x_n\}$  的**下界**;

同样, 若存在  $B$ , 对一切  $n$  都满足  $x_n \leq B$ , 称  $\{x_n\}$  为**上有界**,  $B$  是  $\{x_n\}$  的**上界**.

若数列  $\{x_n\}$  满足:

1.  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ , 则称数列  $\{x_n\}$  为**单调增数列**;

2.  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$ , 则称数列  $\{x_n\}$  为**单调减数列**.

单调增数列和单调减数列统称为**单调数列**.

**定义 3.** 将数列  $\{x_n\}$  在保持原有顺序情况下, 任取其中无穷多项构成的新数列称为  $\{x_n\}$  的**子数列**, 简称**子列**.

例子.  $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}, \dots$

例子.  $x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2n}, \dots$

例子.  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$

注记. 在子数列  $\{x_{n_k}\}$  中, 一般项  $x_{n_k}$  是第  $k$  项, 而  $x_{n_k}$  在原数列  $\{x_n\}$  中却是第  $n_k$  项, 显然,  $n_k \geq k$ .

### 2.1.3 数列极限的定义

问题. 随着  $n$  的增大,  $x_n$  也跟着变化. 当  $n$  趋于无穷大时,  $x_n$  是否会无限接近一个确定的数?

$$1. x_n = 3 \quad 3, 3, 3, 3, \dots \rightarrow 3$$

$$2. x_n = \frac{1}{2^n} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \rightarrow 0$$

$$3. x_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow 0$$

$$4. x_n = 2^n \quad 2, 4, 8, 16, \dots \times$$

$$5. x_n = (-1)^n \quad -1, 1, -1, 1, \dots \times$$

定义 4. 设  $\{x_n\}$  为一个数列, 如果存在常数  $A$ , 对任何  $\epsilon > 0$ , 总存在正整数  $N > 0$ , 使得当  $n > N$  时, 总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列  $\{x_n\}$  的极限等于  $A$ , 或者称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $A$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

如果这样的常数  $A$  不存在, 则称数列  $\{x_n\}$  发散.

注记. 1. 不等式  $|x_n - A| < \epsilon$  刻划了  $x_n$  与  $A$  的无限接近;

2. 一般情况下,  $N$  与任意给定的正数  $\epsilon$  有关.

为了表达方便, 引入符号

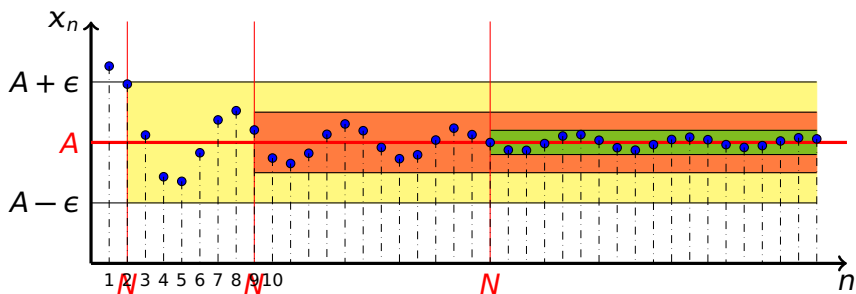
- $\forall \dots\dots\dots$  任意 (给定) 的.

- $\exists$  .....至少有一个或存在.

使用  $\epsilon - N$  语言,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  可以表示为:

$\forall \epsilon > 0, \exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有  $|x_n - A| < \epsilon$ .

注记. 数列极限的定义未给出求极限的方法.



当  $n > N$  时, 所有的点  $x_n$  都落在区间  $(A - \epsilon, A + \epsilon)$  内, 只有有限个 (至多只有  $N$  个) 落在其外.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, (k > 0)$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0, (k > 0)$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, (|q| < 1)$

例 1. 设  $x_n = C$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$ .

证明.  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $N = 1$ , 则当  $n > N$  时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例 2. 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

证明.  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $N = [\frac{1}{\epsilon}]$ , 则当  $n > N$  时就有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例 3. 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ .

证明.  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $N = [\frac{1}{\epsilon}]$ , 则当  $n > N$  时就有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例 4. 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , 其中  $|q| < 1$ .

证明. 任给  $\epsilon > 0$ ,

1. 若  $q = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ .

2. 若  $0 < |q| < 1$ , 则  $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$ , 要使  $n \ln |q| < \ln \epsilon$ , 只需要  $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$ . 取  $N = [\frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}]$ , 则当  $n > N$  时, 就有

$$|q^n - 0| < \epsilon.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

例 5. 设  $x_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$ , 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证明. 任给  $\epsilon > 0$ , 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 故  $\exists N$  使得当  $n > N$  有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有

$$\left| \sqrt{x_n} - \sqrt{a} \right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$ .

发散的数列至少有这两种可能:

1. 无界型的: 比如  $x_n = 2^n$ ;
2. 摆动型的: 比如  $x_n = (-1)^n$ .

#### 2.1.4 收敛数列的性质

性质 1 (极限的唯一性). 收敛数列的极限必唯一.

证明. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , 且  $a \neq b$ . 由定义可知:  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, N_2$ , 使得:

1. 当  $n > N_1$  时恒有  $|x_n - a| < \epsilon$ ;
2. 当  $n > N_2$  时恒有  $|x_n - b| < \epsilon$ .

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 并令  $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$ , 则当  $n > N$  时有

$$\begin{aligned} |a - b| &= |(x_n - b) - (x_n - a)| \\ &\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b - a|. \end{aligned}$$

这是不可能的, 故收敛数列不可能有两个极限.

性质 2 (有界性). 设  $\{x_n\}$  收敛, 则存在  $M > 0$  使得  $|x_n| \leq M$ .

证明. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ . 取  $\epsilon = 1$ , 则存在  $N > 0$ , 使得当  $n > N$  时有  $|x_n - A| < \epsilon = 1$ . 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leq |x_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

取  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |A|\}$ , 则对任何  $n$  都有  $|x_n| \leq M$ .

推论. 无界数列必定发散.



**性质 3 (保号性).** 设数列收敛于  $A > 0$  (或  $A < 0$ )，则存在  $N > 0$ ，使得当  $n > N$  时有  $x_n > 0$  (或  $x_n < 0$ )。

证明. 取  $\epsilon = A/2$ , 则存在  $N > 0$ , 使得当  $n > N$  时有  $|x_n - A| < \epsilon = A/2$ . 此时  $x_n > A/2 > 0$ .

注记. 这个定理表明, 若数列的极限为正 (或负), 则该数列从某一项开始以后所有项都为正 (或负).

推论 (保号性). 设数列  $x_n \geq 0$  (或  $x_n \leq 0$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则有  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

推论. 如果  $x_n \geq y_n$ , 而且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ , 则有  $A \geq B$ .

思考. 若将上面的等号去掉, 结论如何?

**性质 4** (收敛数列与其子列件的关系). 如果数列  $\{x_n\}$  收敛于  $A$ , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是  $A$ .

注记. 这个定理表明: 若数列有两个不同的子数列收敛于不同的极限, 则该数列是发散的.

例子. 数列  $x_n = (-1)^{n+1}$  是发散的

- **数列**: 研究其变化规律;
- **数列极限**: 极限思想、精确定义、几何意义;
- **收敛数列的性质**: 唯一性、有界性、保号性、子数列的收敛性.

选择. 已知数列  $\{x_n\}$  的通项为  $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ , 则该数列..... (C)

- (A) 收敛且有界 (B) 收敛且无界  
(C) 发散且有界 (D) 发散且无界

## 2.2 函数的极限

### 2.2.1 函数极限的定义

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的数叫做自变量在这一变化过程中**函数的极限**．我们主要研究以下两种情形：

1. 自变量  $x$  任意接近于有限值  $x_0 (x \rightarrow x_0)$  时, 对应的函数值  $f(x)$  的变化情形;
2. 自变量  $x$  的绝对值  $|x|$  无限增大 ( $x \rightarrow \infty$ ) 时, 对应的函数值  $f(x)$  的变化情形;

函数  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  的过程中, 对应函数的数值  $f(x)$  无限接近于确定值  $A$ .

问题. 如何用数学的语言刻画"无限接近"?

- 用  $|f(x) - A| < \varepsilon$  表示  $|f(x) - A|$  任意小;
- 用  $0 < |x - x_0| < \delta$  表示  $x \rightarrow x_0$  的过程.

定义 1. 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数  $A$ , 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称当  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  以  $A$  为极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{)}$$

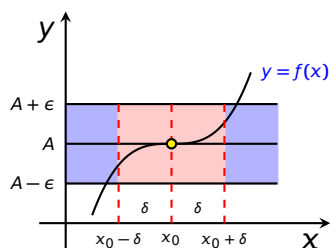
“ $\varepsilon - \delta$ ” 定义:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

当  $x$  在  $x_0$  的去心  $\delta$  邻域时, 函数  $y = f(x)$  图形完全落在以直线

$$y = A$$

为中心线, 宽为  $2\varepsilon$  的带形区域内.



注记. 1. 一般情况下,  $\delta$  与  $\varepsilon$  有关.

2. 函数极限是否存在与  $f(x)$  在  $x_0$  点是否有定义无关.

1.  $y = C$

当  $x \rightarrow x_0$  时,  $y \rightarrow C$ 

2.  $y = x$

当  $x \rightarrow x_0$  时,  $y \rightarrow x_0$ 

3.  $y = 2x + 1$

当  $x \rightarrow x_0$  时,  $y \rightarrow 2x_0 + 1$ 

4.  $y = \sqrt{x}$

当  $x \rightarrow x_0$  时,  $y \rightarrow \sqrt{x_0}$ 例 1. 证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$  ( $C$  为常数).证明. 任给  $\epsilon > 0$ , 任取  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C.$$

例 2. 证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .证明.  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta = \epsilon$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon,$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .例 3. 证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$  ( $x_0 > 0$ ).证明.  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\epsilon\}$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \right| &= \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\sqrt{x_0}\epsilon}{\sqrt{x_0}} = \epsilon \end{aligned}$$

注记.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $f(x_0)$  未必总是相等.

例 4. 设  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$  则  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ .

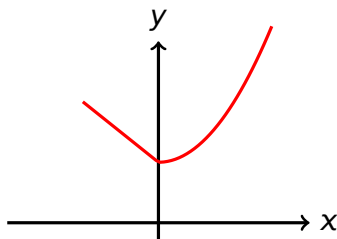
注记. 即使  $f(x)$  在  $x_0$  处无定义, 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  仍可能存在.

例 5. 函数极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ .

例 6. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0; \\ x^2 + 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .



分  $x > 0$  和  $x < 0$  两种情况分别讨论:

1.  $x$  从左侧无限趋近  $x_0$ , 记作  $x \rightarrow x_0^-$ ;
2.  $x$  从右侧无限趋近  $x_0$ , 记作  $x \rightarrow x_0^+$ ;

定义. 设  $f(x)$  在点  $x_0$  左邻域有定义, 如果对任何  $\epsilon > 0$ , 总存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  以  $A$  为左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

定义. 设  $f(x)$  在点  $x_0$  右邻域有定义, 如果对任何  $\epsilon > 0$ , 总存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  以  $A$  为右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

注意到

$$\begin{aligned} & \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\} \\ &= \{x | 0 < x - x_0 < \delta\} \cup \{x | -\delta < x - x_0 < 0\} \end{aligned}$$

于是我们有

定理. 极限存在等价于左右极限都存在且相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

例 7. 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

例 8. 设  $f(x) = |x|$ , 研究函数极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

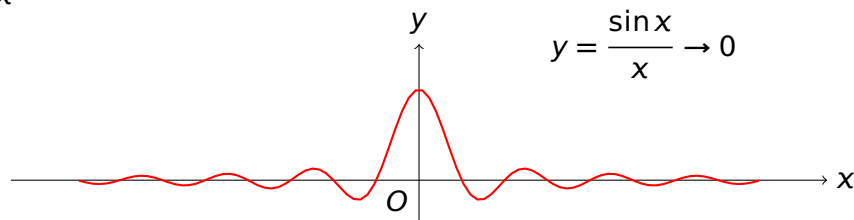
例 9. 设  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ x^2-x+2, & x > 1 \end{cases}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

注记. 研究当  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f(x)$  的左右极限, 不要求  $f(x)$  在  $x_0$  处有定义.

练习. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x < 0 \\ e^x, & 0 < x < 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$ ; 判断极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  是否存在, 若存在求出该极限.

解.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在.

观察函数  $\frac{\sin x}{x}$  当  $x \rightarrow \infty$  时的变化趋势.



函数  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  的过程中, 对应函数值  $f(x)$  无限趋近于确定值  $A$ .

通过上面演示实验的观察: 当  $x$  无限增大时,  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  无限接近于 0.

问题. 如何用数学语言刻画函数“无限接近”.

- 用  $|f(x) - A| < \varepsilon$  表示  $|f(x) - A|$  任意小;
- 用  $|x| > X$  表示  $x \rightarrow \infty$  的过程.

定义 2. 设  $f(x)$  在  $|x|$  足够大时有定义, 如果存在常数  $A$ , 对任何  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $X > 0$ , 使得当  $|x| > X$  时, 总有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称当  $x \rightarrow \infty$  时  $f(x)$  以  $A$  为极限, 记为

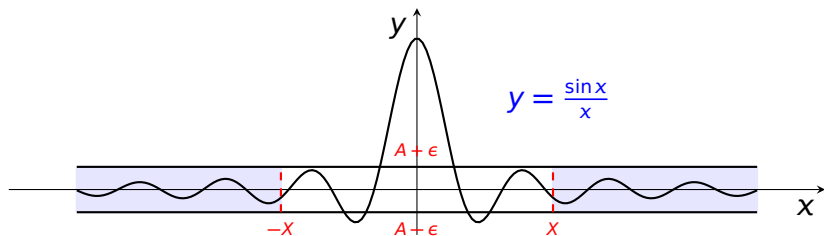
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

思考.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  的  $\varepsilon$  语言定义.

" $\varepsilon - X$ " 定义:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ , 使当  $|x| > X$  时, 恒有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

注记.  $x \rightarrow \infty$  有两种方向, 即  $x \rightarrow -\infty$  和  $x \rightarrow +\infty$ . 类似地可以定义  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  和  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

定理.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .



当  $x < -X$  或  $x > X$  时, 函数  $y = f(x)$  图形完全落在以直线  $y = A$  为中心线, 宽为  $2\varepsilon$  的带形区域内.

例 10. 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .

证明. 由条件可知:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{1}{|x|},$$

故对  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\epsilon}$ , 则当  $|x| > X$  时恒有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \epsilon,$$

即  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .

例 11. 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$ .

证明.  $\forall \epsilon > 0$ , 由数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$  知道, 存在正整数  $N_1 > 0$ , 使得当  $n > N_1$  时有  $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ . 取  $X = N_1 + 1$ , 则当  $x > X$  时有  $[x] > N_1$ , 从而

$$\left| \frac{1}{2^x} - 0 \right| = \frac{1}{2^x} \leq \frac{1}{2^{[x]}} < \frac{1}{2^{N_1}} < \epsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C = C \quad (2.2.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k > 0) \quad (2.2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \quad (2.2.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = 0 \quad (b > 1) \quad (2.2.4)$$

### 2.2.2 函数极限的性质

性质 1 (唯一性). 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则这个极限唯一.

证明. 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 又  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$ , 且  $A \neq B$  由定义可知:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2$ , 使得:

1. 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta_1)$  时恒有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ;
2. 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta_2)$  时恒有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ;

取  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ , 并令  $\epsilon = \frac{|A-B|}{2}$ , 则当  $x \in U(x_0, \delta)$  时有

$$\begin{aligned} |A-B| &= |(f(x)-A) - (f(x)-B)| \\ &\leq |f(x)-A| + |f(x)-B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |B-A|. \end{aligned}$$

这是不可能的, 故收敛数列不可能有两个极限.

**性质 2** (局部有界性). 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则存在  $\delta > 0$  和  $M > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有  $|f(x)| \leq M$ .

证明. 取  $\epsilon = 1$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有  $|f(x) - A| < \epsilon = 1$ . 此时

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f(x) - A) + A| \\ &\leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| \end{aligned}$$

取  $M = 1 + |A|$ , 就得到函数极限的局部有界性.

例子. 设  $f(x) = 1/x$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ , 此时当  $0 < |x - 1| < 1/2$  时有  $|f(x)| \leq 2$ .

**性质 3** (局部保号性). 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有  $f(x) > \frac{A}{2} > 0$  (或  $f(x) < \frac{A}{2} < 0$ ).

证明. 取  $\epsilon = A/2$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有  $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$ . 此时  $f(x) > A/2 > 0$ .

**例 12.** 设  $f(x) = 2x - 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 > 0$ , 此时当  $0 < |x - 1| < 1/4$  时, 有  $f(x) > 1/2 > 0$ .

推论 (保号性). 设  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ), 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

推论. 如果函数  $g(x) \geq h(x)$ , 而且  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = B$ , 则有  $A \geq B$ .

极限的性质, 对于其它形式 ( $x \rightarrow \infty$ 、单侧极限) 的极限也成立.



## 2.2.3 小结

- 极限的定义：定义、几何意义；
- 极限的性质：唯一性、局部保号性、局部有界性.

试问函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 10, & x = 0 \\ 5 + x^2, & x < 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处的左、右极限是否存在？当  $x \rightarrow 0$  时,

$f(x)$  的极限是否存在？

答案.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (5 + x^2) = 5$ , 左极限存在,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0, \text{ 右极限存在,}$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

## 2.3 无穷小与无穷大

## 2.3.1 无穷小

定义 1. 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 就称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

注记.  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小  $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| < \epsilon$ .

注记. 类似地, 可以定义  $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 、 $x \rightarrow x_0^-$  和  $x \rightarrow x_0^+$  时的无穷小.

例子.  $0$ 、 $x$ 、 $x^2$ 、 $\sin x$ 、 $1 - \cos x$ 、 $\sqrt{1+x} - 1$  和  $e^x - 1$  都是  $x \rightarrow 0$  时的无穷小.

例子. 函数  $\frac{1}{x}$ 、 $\frac{2}{1+x}$  和  $\frac{x}{x^2+1}$  都是  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小.

注记. 1. 无穷小是变量, 不能与很小的数混淆. 2. 零是可以作为无穷小的唯一的常数.

定理 1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x)$ , 其中  $\alpha(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

定理的意义:

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数  $f(x)$  在  $x_0$  附近的近似表达式  $f(x) \approx A$ , 误差为  $\alpha(x)$ .

证明. **必要性:** 因  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 所以对  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

令  $\alpha(x) = f(x) - A$ , 则有  $\alpha(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小, 且  $f(x) = A + \alpha(x)$ .

**充分性:** 设  $f(x) = A + \alpha(x)$ , 其中  $\alpha(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小, 则对  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|\alpha(x)| < \epsilon, \text{ 即 } |f(x) - A| < \epsilon,$$

也即  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

**定理 2.** 两个 (有限个) 无穷小的和与差还是无穷小.

证明. 设  $\alpha$  及  $\beta$  是当  $x \rightarrow \infty$  时的两个无穷小, 则对  $\forall \epsilon > 0, \exists X_1 > 0, X_2 > 0$ , 使得

1. 当  $|x| > X_1$  时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$

2. 当  $|x| > X_2$  时恒有

$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取  $X = \max \{X_1, X_2\}$ , 则当  $|x| > X$  时, 恒有

$$|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故  $\alpha \pm \beta \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ .

问题. 无穷多个无穷小的和是不是无穷小?

答案. 不是, 例如

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\
 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\
 0 & 0 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \rightarrow 1(n \rightarrow \infty)
 \end{array}$$

定理 3. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明. 设函数  $u$  在  $\dot{U}(x_0, \delta_1)$  内有界, 则  $\exists M > 0, \delta_1 > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时恒有  $|u| \leq M$ . 又设  $\alpha$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小, 则对  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{M}.$$

取  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有

$$|u \cdot \alpha| = |u| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

所以当  $x \rightarrow x_0$  时,  $u \cdot \alpha$  为无穷小.

推论 1. 在自变量的同一变化过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.  $x \sin \frac{1}{x}, x^2 \arctan \frac{1}{x} (x \rightarrow 0)$

推论 2. 常数与无穷小的积是无穷小.

推论 3. 有限个无穷小的积是无穷小.

注意: 两个无穷小的商不一定是无穷小.

问题. 无穷多个无穷小的积是不是无穷小?

答案. 不是, 例如:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\
 1 & 2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\
 1 & 1 & 3^2 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \rightarrow 1(n \rightarrow \infty)
 \end{array}$$

例 1. 求函数极限  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x})$ . ..... 0

练习. 求下列函数极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$ ; ..... 0

### 2.3.2 无穷大

绝对值无限增大的变量称为**无穷大**.

定义. 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的  $M > 0$ , 总存在  $\delta > 0$ , 使得只要  $0 < |x - x_0| < \delta$ , 就有  $|f(x)| > M$ , 则称  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时为**无穷大**, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

注记. 1. 类似地, 可以定义  $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$  时的无穷大.                      2. 特殊情况:  
正无穷大 ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ), 负无穷大 ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .)

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  是极限不存在的一种特殊情形.

3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例:  $\frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})$ ).

例 2. 证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ .

证明.  $\forall M > 0$ , 要使  $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$ , 只需要  $|x-1| < \frac{1}{M}$ . 取  $\delta = \frac{1}{M}$ , 则当  $0 < |x-1| < \delta = \frac{1}{M}$  时, 就有

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

定义 2. 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则直线  $x = x_0$  是函数  $y = f(x)$  的图形的铅直渐近线.

练习.  $\frac{1}{x}$  和  $\frac{x+1}{x^2}$  是  $x \rightarrow 0$  时的无穷大.

练习.  $\frac{x+2}{x^2-1}$  是  $x \rightarrow 1$  时的无穷大.

定理 4. 无穷大的倒数为无穷小, 而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明. 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则对  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时恒有  $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$ ,

即  $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \epsilon$ . 所以当  $x \rightarrow x_0$  时,  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小. 反之, 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 且  $f(x) \neq 0$ ,

则  $\forall M > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时恒有  $|f(x)| < \frac{1}{M}$ , 由于  $f(x) \neq 0$ , 从而

$\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M$ . 所以当  $x \rightarrow x_0$  时,  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷大.

注记. 关于无穷大的讨论, 都可归结为关于无穷小的讨论.

例 3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x^2+1} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x+1} = \infty$ .

### 2.3.3 小结

主要内容: 两个定义; 四个定理; 三个推论.

几点注意:

1. 无穷小(大)是变量, 不能与很小(大)的数混淆, 零是唯一的无穷小的数;
2. 无穷多个无穷小的代数和(乘积)未必是无穷小;
3. 无界变量未必是无穷大.

在自变量的同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小: 反之, 无穷小的倒数是否一定为无穷大?

答案. 不一定. 0 是无穷小, 但其倒数不存在. 所以课本上表示为“非零的无穷小的倒数是无穷大”.

## 2.4 极限运算法则

### 2.4.1 极限运算法则

定理 1. 如果  $\lim f(x) = A$ ,  $\lim g(x) = B$ , 那么

$$1. \lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$2. \lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$3. \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{要求分母不为零})$$

证明. 因为  $\lim f(x) = A$ ,  $\lim g(x) = B$  所以

$$f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta. \quad \text{其中 } \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0.$$

由无穷小运算法则, 得

$$[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) = \alpha \pm \beta \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) &= (A + \alpha)(B + \beta) - AB \\ &= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B + \beta)},$$

因为  $B\alpha - A\beta \rightarrow 0$ , 又因为  $\beta \rightarrow 0, B \neq 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $|\beta| < \frac{|B|}{2}$ , 所以

$$|B + \beta| \geq |B| - |\beta| > |B| - \frac{1}{2}|B| = \frac{1}{2}|B|.$$

于是

$$|B(B + \beta)| > \frac{1}{2}B^2,$$

故  $\left| \frac{1}{B(B + \beta)} \right| < \frac{2}{B^2}$ , 有界, 故 (3) 成立.

推论 1. 如果  $\lim f(x)$  存在, 而  $c$  为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c \lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论 2. 如果  $\lim f(x)$  存在, 而  $n$  是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

### 2.4.2 求极限方法举例

1. 设  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ , 则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= a_0 \left( \lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n + a_1 \left( \lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0) \end{aligned}$$

2. 设  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , 且  $Q(x_0) \neq 0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

注意: 若  $Q(x_0) = 0$ , 则商的法则不能应用.

3. 如果基本初等函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域有定义, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

例 1. 求函数极限  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$ .

解. 原式  $= 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1$   
 $= 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2$

例 2. 求  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5}$

解. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3 \neq 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)} = \frac{2^3 - 1}{3} = \frac{7}{3}$$

例子. 求函数极限  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$ .

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3+1}{3+3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

例子. 求函数极限  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ .

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

例子. 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x - 3} = 2$ , 求  $a, b$ .

解.  $x \rightarrow 1$  时, 分母的极限是零, 而商的极限存在, 故

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0.$$



于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1+a}{x+3} = \frac{2+a}{4} = 2.\end{aligned}$$

故  $a=6, b=-7$ .

例 3. 求函数极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$ .

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1+x}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x} \\ &= -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 4. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1}$ .

解. 先用  $x^3$  去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}}{7 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

**无穷小分出法:** 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

例 5. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x + 1} + ax + b \right) = 2$ , 求  $ab$ .

解.

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 + ax(x+1) + b(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+a)x^2 + (a+b)x + 2+b}{x+1}\end{aligned}$$

若商的极限存在, 则必须  $1+a=0$ ,  $a+b=2$ , 解得

$$a=-1, b=3.$$

例 6. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$

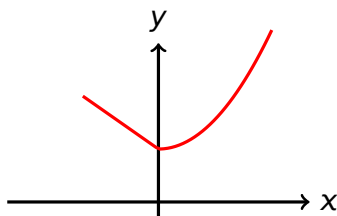
解.  $n \rightarrow \infty$  时, 是无限多个无穷小之和, 先变形再求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 7. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0; \\ x^2 + 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .



解. 易知

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} = 1 - 0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = 1 + 0 = 1,$$

左右极限相等, 故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

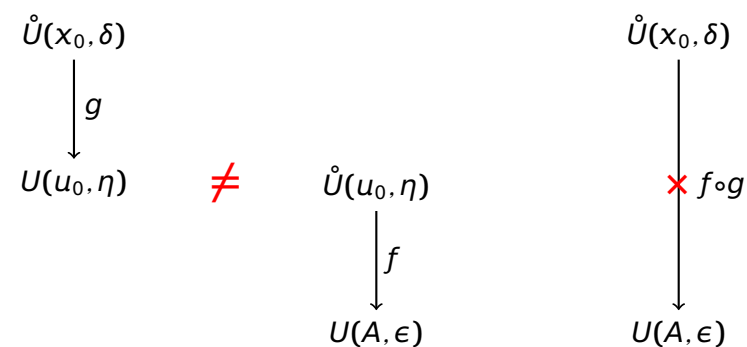
练习. 求下列函数极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2 \ln(1+x) + e^x + 2)$ ; ..... 3

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\sqrt{x}-1}; \dots\dots\dots 4$$

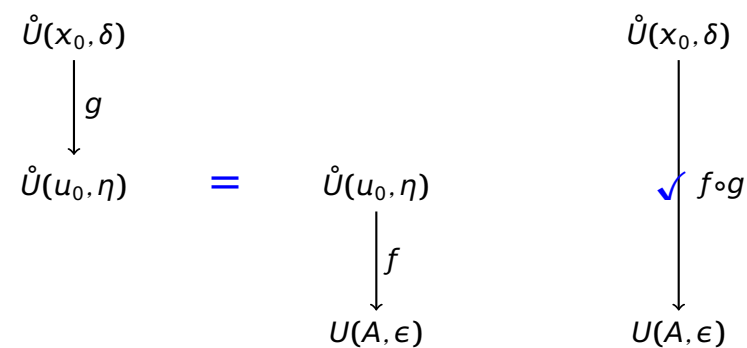
$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}. \dots\dots\dots \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A$$

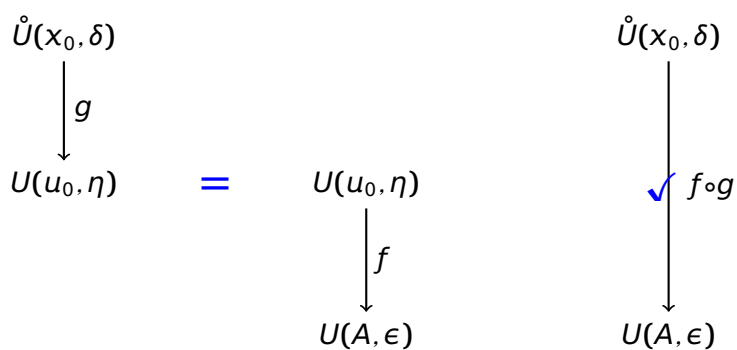


$$\begin{array}{l} x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0) \\ g(x) \neq u_0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A$$



定理 2. 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ ,  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ , 并且存在  $\delta_0 > 0$  使得  $x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$  时  $g(x) \neq u_0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A.$$

定理. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$  且  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right] = f(u_0).$$

例子.  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{\overbrace{x-2}^{\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)}}{x^2 - 4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - 4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$

### 2.4.3 小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
  - 多项式与分式函数代入法求极限;
  - 消去零因子法求极限;
  - 无穷小因子分出法求极限;
  - 利用无穷小运算性质求极限;
  - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

问题. 在某个过程中, 若  $f(x)$  有极限,  $g(x)$  无极限, 那么  $f(x) + g(x)$  是否有极限? 为什么?

答案. 没有极限, 使用反证法易证.

## 2.5 极限存在准则、两个重要极限

极限存在准则 I	极限存在准则 II
↓	↓
重要极限 I	重要极限 II
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

### 2.5.1 夹逼准则

定理 (极限存在准则 I). 如果数列  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , 而且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ .

例子. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$

注记. 在上述定理中, 如果不等式  $x_n \leq y_n \leq z_n$  仅在  $n > N$  时成立, 结论不变.

证明.  $\because x_n \rightarrow a, z_n \rightarrow a, \therefore \forall \epsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0$ , 使得

1. 当  $n > N_1$  时恒有  $|x_n - a| < \epsilon$ ,

2. 当  $n > N_2$  时恒有  $|z_n - a| < \epsilon$ .

取  $N = \max \{N_1, N_2\}$ , 上两式同时成立, 即

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon, a - \epsilon < z_n < a + \epsilon$$

当  $n > N$  时, 恒有

$$a - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \epsilon$$

即  $|y_n - a| < \epsilon$  成立,  $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

定理 (极限存在准则 I'). 如果  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ , 则有  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ .

注记. 若将  $x \rightarrow x_0$  全部改为  $x \rightarrow \infty$ , 定理仍成立.

注记. 在上述定理中, 如果不等式  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  仅在  $x_0$  的某个去心邻域上成立, 结论不变.

准则 I 和准则 I' 称为**夹逼准则**或者**两面夹准则**

**注意:** 利用两面夹准则求极限关键是构造出  $y_n (f(x))$  与  $z_n (h(x))$ , 并且  $y_n (f(x))$  与  $z_n (h(x))$  的极限是容易求的.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

一般地, 如果当  $x \rightarrow 0$  时,  $\phi(x) \rightarrow 0$ , 则有

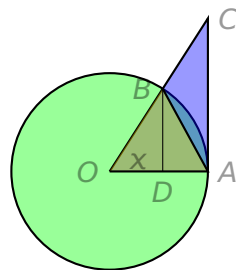
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin [\phi(x)]}{\phi(x)} = 1$$

证明. 如图所示, 设单位圆  $O$ , 圆心角  $\angle AOB = x$  ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ) 作单位圆的切线, 得  $\triangle ACO$ . 设扇形  $OAB$  的圆心角为  $x$ ,  $\triangle OAB$  的高为  $BD$ , 则有  $\sin x = BD$ ,  $x = \text{弧 } \widehat{AB}$ ,  $\tan x = AC$ , 所以

$$\sin x < x < \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



上式对于  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  也成立. 当  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left( \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

由两面夹准则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

例 1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ .

$$\begin{aligned} \text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

例 2. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解. 易得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 3. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ .

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \right) \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \times 1 = 3\end{aligned}$$

例 4. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$ .

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} \\ &= \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

练习. 求下列函数极限:

- |  |               |
|--|---------------|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x}$ .....      | $\frac{5}{4}$ |
| (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ ..... | $\frac{2}{3}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$ ..... | $\frac{2}{3}$ |
| (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$ ..... | $\frac{3}{5}$ |



$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x} \dots\dots\dots 1$$

例 5. 求  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ .

解. 令  $t = x - \pi$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{例 6. 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \dots\dots\dots 1.$$

$$\text{例 7. 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \dots\dots\dots 1.$$

$$\text{例 8. 求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} \dots\dots\dots 1.$$

## 2.5.2 重要极限 II

定理 (极限存在准则 II). 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.

2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记. 若数列是某一项开始单调变化, 结论仍然成立.

例子. 证明数列  $x_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots + \sqrt{3}}}}$  ( $n$  重根式) 的极限存在, 并求出极限.

证明. 显然  $x_{n+1} > x_n$ , 即  $\{x_n\}$  是单调递增的; 又  $x_1 = \sqrt{3} < 3$ , 假定  $x_k < 3$ , 则

$$x_{k+1} = \sqrt{3 + x_k} < \sqrt{3 + 3} < 3,$$

即  $\{x_n\}$  是有界的; 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 又由  $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$  可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + x_n}$$

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = A$ , 则有

$$A = \sqrt{3+A} \implies A = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, A = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ (舍去)}$$

$n$	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

$\implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

证明. 设  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , 则

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots (n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

显然  $x_{n+1} > x_n$ ,  $\therefore \{x_n\}$  是单调递增的;

证明. 又因为

$$\begin{aligned} x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

所以  $\{x_n\}$  是有界的由单调收敛准则,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (e = 2.71828 \cdots)$$

可以证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xrightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

一般地, 如果当  $x \rightarrow a$  时,  $\psi(x) \rightarrow 0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}} = e$$

例 9. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

解. 原式 =  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right]^2 = e^2$$

例 10. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x$

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1} \cdot (-\frac{1}{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}} = e^{-1/3}\end{aligned}$$

练习 1. 求函数极限:

$$\begin{aligned}(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^x &\dots\dots\dots e^{-4} \\ (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{3x}} &\dots\dots\dots e^{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

定理. 若  $\lim_{x \rightarrow \square} u(x) = A > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \square} v(x) = B$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow \square} u(x)^{v(x)} = A^B.$$

例 11. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

$$\begin{aligned}\text{解. 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2x}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^2.\end{aligned}$$

练习 2. 求函数极限:

$$\begin{aligned}(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{4x}} &\dots\dots\dots e^{\frac{1}{4}} \\ (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1} &\dots\dots\dots e^{-1} \\ (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x-3} &\dots\dots\dots e^4\end{aligned}$$

例 12. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

解. 由条件知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

例 13. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

解. 令  $e^x - 1 = u$ , 即  $x = \ln(1+u)$ . 则当  $x \rightarrow 0$  时, 有  $u \rightarrow 0$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}} = 1$$

### 2.5.3 连续复利

例子. 复利问题: 假设银行活期存款的年利率为 0.5%, 存入  $M$  元一年后最多可以得到多少钱?

- 粗略:  $M(1 + 0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常:  $M \left( 1 + \frac{0.5\%}{4} \right)^4 = M \times 1.00500938$
- 极端:  $M \left( 1 + \frac{0.5\%}{360} \right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实. 常数  $e$  反映了连续增长的规律.

设一笔贷款  $A_0$  (称为本金), 年利率为  $r$ , 则

- 一年后本利和  $A_1 = A_0(1+r)$
- 两年后本利和  $A_2 = A_1(1+r) = A_0(1+r)^2$

- $k$  年后本利和  $A_k = A_0(1+r)^k$

如果一年分  $n$  期计息, 年利率仍为  $r$ , 则每期利率为  $\frac{r}{n}$ , 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

$$k \text{ 年后本利和 } A_k = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nk}$$

如果计息期数  $n \rightarrow \infty$ , 即每时每刻计算复利 (称为连续复利), 则  $k$  年后的本利和

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rk} \\ &= A_0 e^{rk} \end{aligned}$$

### 1. 两个准则

- 两面夹 (夹逼) 准则
- 单调有界准则

### 2. 两个重要极限

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

复习 1. 求函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin x)^{\frac{1}{3x}} \dots\dots\dots e^{-\frac{2}{3}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{x \sin x} \dots\dots\dots 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1}\right)^{3x+1} \dots\dots\dots e^{-3}$$

例子. 求函数极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$ .

解. 因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $\cos x$  不是无穷小, 所以不能用重要极限 // 公式来计算.

实际上, 这个函数是初等函数, 且在 0 的邻域有定义, 所以其极限为  $(1 + 1)^1 = 2$ .

例子. 设数列  $x_n = \frac{n!}{n^n}$ , 研究数列的极限.

例子. 设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = \frac{1}{2}$ , 且当  $n \geq 1$  时有  $x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{2}$ . 研究数列的极限.

解. 先说明数列收敛, 再根据数列的递归关系求出其极限.

## 2.6 无穷小的比较

### 2.6.1 无穷小的阶

例子. 比较  $x \rightarrow 0$  时的三个无穷小  $x$ ,  $2x$ ,  $x^2$ .

$x$	1	0.1	0.01	0.001	...	$\rightarrow 0$
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	...	$\rightarrow 0$
$x^2$	1	0.01	0.0001	0.000001	...	$\rightarrow 0$

定义. 设  $\alpha$ 、 $\beta$  是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 则称  $\beta$  是比  $\alpha$  高阶的无穷小, 记为  $\beta = o(\alpha)$ .
2. 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 则称  $\beta$  是比  $\alpha$  低阶的无穷小.
3. 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 则称  $\beta$  和  $\alpha$  是同阶的无穷小.
- ★ 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 则称  $\beta$  和  $\alpha$  是等价无穷小, 记为  $\beta \sim \alpha$ .
4. 若  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$ , 则  $\beta$  是  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小.

例 1. 在  $x \rightarrow 0$  时, 无穷小  $x^2$  比  $x$  高阶.

例 2. 在  $x \rightarrow 0$  时, 无穷小  $x^2$  比  $x^3$  低阶.

例 3. 在  $x \rightarrow 0$  时, 无穷小  $x^2$  和  $5x^2$  同阶.

例 4. 在  $x \rightarrow 0$  时, 无穷小  $x^2$  和  $x^2 + 2x^3$  等价.

例 5. 证明: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x - \sin x$  为  $x$  的三阶无穷小.

证明. 易知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故  $\tan x - \sin x$  为  $x$  的三阶无穷小.

练习 1. 已知  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$  和  $g(x) = x^2$  均为  $x \rightarrow 0$  时的无穷小.

(1) 何时  $f(x)$  比  $g(x)$  高阶?

(2) 何时  $f(x)$  比  $g(x)$  低阶?

(3) 何时  $f(x)$  与  $g(x)$  同阶?

(4) 何时  $f(x)$  与  $g(x)$  等价?

当  $x \rightarrow 0$  时, 有如下这些常用的等价无穷小:

$$(1) \sin x \sim x$$

$$(5) \ln(1+x) \sim x$$

$$(2) \tan x \sim x$$

$$(6) e^x - 1 \sim x$$

$$(3) \arcsin x \sim x$$

$$(7) 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$(4) \arctan x \sim x$$

$$(8) \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$$

意义: 用等价无穷小可给出函数的近似表达式.



定理.  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小的充分必要条件为  $\beta = \alpha + o(\alpha)$ . 称  $\alpha$  是  $\beta$  的主要部分.

证明. ( $\Rightarrow$ ) 设  $\alpha \sim \beta$ , 则有

$$\begin{aligned}\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} &= \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0 \\ \therefore \beta - \alpha &= o(\alpha), \quad \text{即 } \beta = \alpha + o(\alpha)\end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) 设  $\beta = \alpha + o(\alpha)$ , 则有

$$\begin{aligned}\lim \frac{\beta}{\alpha} &= \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim \left( 1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) = 1 \\ \therefore \alpha &\sim \beta\end{aligned}$$

### 2.6.2 等价无穷小代换

定理. 设  $\alpha \sim \alpha'$ 、 $\beta \sim \beta'$ , 且  $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$  存在, 则有  $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ .

证明. 易知

$$\begin{aligned}\lim \frac{\beta}{\alpha} &= \lim \left( \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \\ &= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}\end{aligned}$$

例 6. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{1 - \cos x}$ .

解. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $\tan 2x \sim 2x$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 8.$$

例 7. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$ .

解. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x \sim x$ ,  $\arcsin x \sim x$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积, 则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换, 而不会改变原式的极限.

例子. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x}$ .

解. 当  $x \rightarrow 0$ ,  $\tan x \sim x$ ,  $\sin x \sim x$ .

$$\text{原式} = \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{(2x)^3} = 0. \quad \text{✗}$$

解 (正确解法). 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin 2x \sim 2x$ ,  $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^3$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3} = \frac{1}{16}. \quad \text{✓}$$

注记. 只能分别代换乘除项, 不能分别代换加减项.

注记. 当  $\alpha_1 \sim \beta_1$ 、 $\alpha_2 \sim \beta_2$  时, 下列等式总是成立:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \sim \beta_1 \cdot \beta_2 \quad \text{✓}$$

但下列等式未必成立:

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 \not\sim \beta_1 \pm \beta_2 \quad \text{✗}$$

例子. 当  $x \rightarrow 0$  时, 有

$\begin{aligned} x + x^2 &\sim x + x^3 \\ x &\sim x \end{aligned}$	$\xrightarrow{\text{两边同时相减}}$	$x^2 \not\sim x^3 \quad \text{✗}$
--	-------------------------------	-----------------------------------

练习 2. 求下列函数极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$ ; .....  $\frac{3}{2}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{(e^{2x} - 1)\ln(1 - 2x)}$ . .....  $-\frac{9}{8}$

### 2.6.3 小结与思考

1. 无穷小的比较: 反映了同一过程中, 两无穷小趋于零的速度快慢, 但并不是所有的无穷小都可进行比较.

- 高(低)阶无穷小;
- 等价无穷小;
- 无穷小的阶.

2. 等价无穷小的代换: 求极限的又一种方法, 注意适用条件.

思考. 任何两个无穷小都可以比较吗?

答案. 不能. 例如当  $x \rightarrow +\infty$  时  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$  都是无穷小量, 但  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  不存在且不为无穷大. 故当  $x \rightarrow +\infty$  时  $f(x)$  和  $g(x)$  不能比较.

## 2.7 函数的连续性

### 2.7.1 函数的连续性的概念

例子. 自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

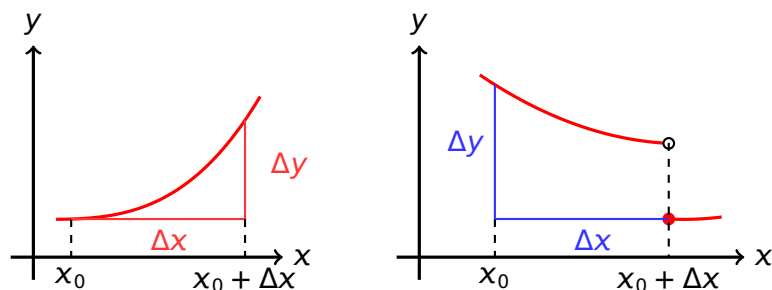
1. 当时间变化很微小时, 气温的变化也很微小.
2. 当边长变化很微小时, 正方形的面积变化很微小.

对于  $y = f(x)$  定义域中的一点  $x_0$ , 如果  $x$  从  $x_0$  作微小改变  $\Delta x$  后,  $y$  的相应改变量  $\Delta y$  也很微小, 则称  $f(x)$  在点  $x_0$  连续.

设函数  $f(x)$  在  $U(x_0, \delta)$  内有定义, 当  $x$  在  $U(x_0, \delta)$  内由  $x_0$  变到  $x_0 + \Delta x$  时, 称  $\Delta x$  为自变量  $x$  在点  $x_0$  的增量; 相应地, 函数  $y$  从  $f(x_0)$  变到  $f(x_0 + \Delta x)$ ,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

称为函数  $f(x)$  相应于  $\Delta x$  的增量.



定义 1. 设  $y = f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

则称  $f(x)$  在点  $x_0$  连续.



定义 2. 设  $y = f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

则称  $f(x)$  在点  $x_0$  连续.

$\varepsilon - \delta$  定义:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使当  $|x - x_0| < \delta$  恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

从定义我们可以看出, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 必须满足以下三个条件:

1. 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有定义

2. 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

函数在某点连续  $\iff$  函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  (极限存在):

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \epsilon)$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (连续):

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)$$

例 1. 试证函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续.

解. 易知

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

由定义知, 函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

例 2. 证明函数  $y = \sin x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

证明. 任取  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

因为  $\left| \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 1$ , 故

$$|\Delta y| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|.$$

对任意的  $\alpha$ , 当  $\alpha \neq 0$  时, 有  $|\sin \alpha| < \alpha$ , 故

$$|\Delta y| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| < |\Delta x|.$$

所以当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\Delta y \rightarrow 0$ . 即函数  $y = \sin x$  对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$  都是连续的.

定义. 若函数  $f(x)$  在  $(a, x_0]$  内有定义, 且  $f(x_0^-) = f(x_0)$ , 则称  $f(x)$  在点  $x_0$  处左连续.

若函数  $f(x)$  在  $[x_0, b)$  内有定义, 且  $f(x_0^+) = f(x_0)$  则称  $f(x)$  在点  $x_0$  处右连续.

定理.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

例 3. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 0, \\ x-2, & x < 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处的连续性.

解.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2 = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2) = -2 \neq f(0)$$

函数右连续但不左连续, 故函数  $f(x)$  在点  $x=0$  处不连续.

练习 1. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ , 判断它在  $x=0$  处的连续性.

答案.  $f(x)$  在  $x=0$  处是连续的.

定义. 如果  $f(x)$  在区间  $I$  的每一点都连续, 则称  $f(x)$  在区间  $I$  上连续, 或称  $f(x)$  是区间  $I$  上的连续函数.

函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则:

- 函数在开区间  $(a, b)$  内连续;
- 在左端点  $x=a$  处右连续;
- 在右端点  $x=b$  处左连续.

注记. 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

### 2.7.2 函数的间断点

定义. 设  $f(x)$  在点  $x_0$  的某个去心邻域有定义, 如果  $f(x)$  在点  $x_0$  不连续, 则称它在点  $x_0$  间断, 或者称点  $x_0$  是  $f(x)$  的间断点.

$x_0$  为  $f(x)$  的间断点, 有以下三种情形:

1.  $f(x)$  在点  $x_0$  处没有定义;
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在;
3.  $f(x)$  在点  $x_0$  处有定义,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 但

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

定义 3. 如果  $f(x)$  在点  $x_0$  处的极限存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$ , 或  $f(x)$  在点  $x_0$  处无定义则称点  $x_0$  为函数  $f(x)$  的[可去间断点](#).

例子.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  在  $x = 0$  处有可去间断点.

例子.  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$  ..... [可去间断点](#)

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 即可使其变为连续点.

定义. 如果  $f(x)$  在点  $x_0$  处左、右极限都存在, 但  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ , 则称点  $x_0$  为函数  $f(x)$  的[跳跃间断点](#).

例子.  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$  ..... [跳跃间断点](#)

跳跃间断点与可去间断点统称为[第一类间断点](#).

第一类间断点的特点: 函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等, 则为可去间断点;
2. 左右极限不相等, 则为跳跃间断点.

定义. 如果  $f(x)$  在点  $x_0$  处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点  $x_0$  为函数  $f(x)$  的[第二类间断点](#).

例子.  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $x = 0$  处.....无穷间断点

例子.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  在  $x = 0$  处.....振荡间断点

注记. 间断点常见位置: (1) 分母为零; (2) 分段点.

例子. 求函数  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$  的间断点, 并判断类型.

例子. 求  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \leq 1, x \neq 0 \\ \frac{x^2-4}{x-2}, & x > 1, x \neq 2 \end{cases}$  的间断点, 并判断其类型.

函数的间断点可能不只是个别的几个点.

例子. 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

在定义域  $R$  内每一点处都间断, 且都是第二类间断点.

例子.  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ -x, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$  仅在  $x = 0$  处连续, 其余各点处处间断.

例 4. 求  $a$  的值, 使函数  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0, \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续.

解. 易知  $f(0) = a$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + x) = a,$$

由  $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$ , 得  $a = 1$ .

### 2.7.3 初等函数的连续性

定理 1. 若函数  $f(x), g(x)$  在点  $x_0$  处连续则  $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$  在点  $x_0$  处也连续.



例子.  $\sin x, \cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 故  $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$  在其定义域内连续.

定理 2. 严格单调递增(递减)的连续函数必有严格单调递增(递减)的连续反函数.

例子.  $y = \sin x$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上单调增加且连续故

$$y = \arcsin x$$

在  $[-1, 1]$  上也是单调增加且连续.

同理  $y = \arccos x$  在  $[-1, 1]$  上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 3. 设函数  $u = \varphi(x)$  在点  $x = x_0$  连续, 且  $\varphi(x_0) = u_0$ , 而函数  $y = f(u)$  在点  $u = u_0$  连续, 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在点  $x = x_0$  也连续.

例子. 因为  $u = \frac{1}{x}$  在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  内连续,  $y = \sin u$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 故  $y = \sin \frac{1}{x}$  在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  内连续.

定理 4. 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

$y = \sqrt{\cos x - 1}$ ,  $D: x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  这些孤立点的去心邻域内没有定义, 故不连续.

初等函数在连续点求极限可用代入法.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in \text{定义区间})$$

例 5. 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \sqrt{e^x - 1}$

解. 原式  $= \sin \sqrt{e^1 - 1} = \sin \sqrt{e - 1}$ .

### 2.7.4 小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.

2. 区间上的连续函数

3. 间断点的分类

- **第一类间断点**:  $f(x_0^-)$  和  $f(x_0^+)$  均存在
  - **可去间断点**:  $f(x_0^-) = f(x_0^+)$
  - **跳跃间断点**:  $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$
- **第二类间断点**:  $f(x_0^-)$  和  $f(x_0^+)$  至少一个不存在
  - **无穷间断点**:  $f(x_0^-)$  和  $f(x_0^+)$  至少一个为无穷大
  - **振荡间断点**:  $f(x_0^-)$  和  $f(x_0^+)$  均不为无穷大

4. 初等函数的连续性

- 初等函数在其定义区间上连续;
- 初等函数的连续性在求极限时的应用: 代入法.

思考. 若  $f(x)$  在  $x_0$  连续, 则  $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$  在  $x_0$  是否连续? 又若  $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$  在  $x_0$  连续,  $f(x)$  在  $x_0$  是否连续?

答案. 因为  $f(x)$  在  $x_0$  连续,  $\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  且

$$0 \leq ||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right] \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right] = f^2(x_0)$$

故  $|f(x)|, f^2(x)$  在  $x_0$  都连续.

但反之不成立. 例  $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$  在  $x_0 = 0$  不连续, 但  $|f(x)|, f^2(x)$  在  $x_0 = 0$  连续.

## 2.8 闭区间上连续函数的性质

### 2.8.1 最大值和最小值定理

定义. 对于在区间  $I$  上有定义的函数  $f(x)$ , 如果有  $x_0 \in I$ , 使得对于任一  $x \in I$  都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称  $f(x_0)$  是函数  $f(x)$  在区间  $I$  上的最大 (小) 值.

例子.  $y = 1 + \sin x$ , 在  $[0, 2\pi]$  上,  $y_{\max} = 2$ ,  $y_{\min} = 0$ ;

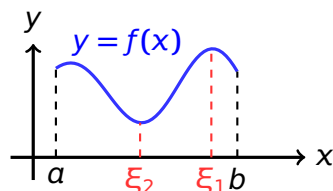
例子.  $y = \operatorname{sgn} x$ , 在  $(-\infty, +\infty)$  上,  $y_{\max} = 1$ ,  $y_{\min} = -1$ ;

例子.  $y = \operatorname{sgn} x$ , 在  $(0, +\infty)$  上,  $y_{\max} = y_{\min} = 1$

定理 1 (最值定理). 设  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在该区间上有界而且一定能取到最大值  $M$  和最小值  $m$ .

若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则  $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ , 使得  
 $\forall x \in [a, b]$  时, 有

$$f(\xi_1) \geq f(x), \quad f(\xi_2) \leq f(x).$$



1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

例 1. 函数  $y = \tan x$  在开区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上是连续的, 但在这个开区间上它是无界的, 而且也没有最大值和最小值.

例 2. 函数  $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x + 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

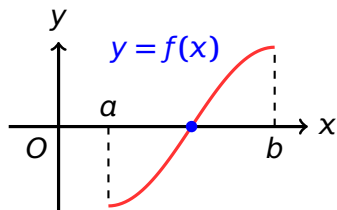
在区间  $[0, 2]$  虽然有界, 但既无最大值也无最小值.

### 2.8.2 零点定理与介值定理

定义. 如果  $x_0$  使  $f(x_0) = 0$ , 则  $x_0$  称为函数  $f(x)$  的**零点**.

定理 2 (零点定理). 设  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a)$  和  $f(b)$  异号, 则在开区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

几何解释: 连续曲线弧  $y = f(x)$  的两个端点位于  $x$  轴的不同侧, 则曲线弧与  $x$  轴至少有一个交点.



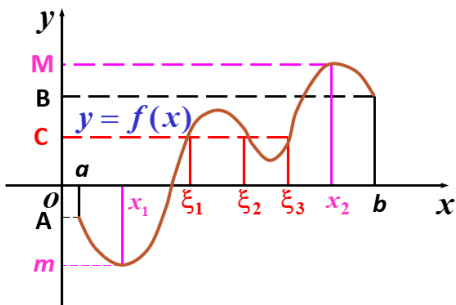
例 3. 证明方程  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$  在区间  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 3)$  内各有一个实根.

例 4. 证明方程  $2 \sin x = x + 1$  有实数解.

定理 3 (介值定理). 设  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) = A$  和  $f(b) = B$  不相等, 则对于  $A$  与  $B$  之间的任何数  $C$ , 在开区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = C$ .

证明. 令  $g(x) = f(x) - C$ . 则由零值定理可以得到结论.

几何意义: 在  $[a, b]$  上的连续曲线  $y = f(x)$  与水平直线  $y = C$  ( $C$  介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间) 至少相交一点.



推论. 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值  $M$  与最小值  $m$  之间的任何值.

证明. 设  $f(x_1) = M$ ,  $f(x_2) = m$ , 在区间  $[x_1, x_2]$  (或者  $[x_2, x_1]$ ) 上运用介值定理可得结论

例 5. 证明方程  $x^5 - 3x + 1 = 0$  在开区间  $(0, 1)$  内至少有一个实根.

证明. 令  $f(x) = x^5 - 3x + 1$ , 则  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 又

$$f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0,$$

由零点定理,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = 0$ , 即

$$\xi^5 - 3\xi + 1 = 0$$

$\therefore$  方程  $x^5 - 3x + 1 = 0$  在  $(0, 1)$  上至少有一根  $\xi$ .

例 6. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为  $[a, b]$  上的  $n$  个点, 证明: 在  $[a, b]$  上至少存在一个点  $\xi$ , 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

证明.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 故函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有最大值  $M$  与最小值  $m$ . 于是

$$m \leq f(x_i) \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

从而

$$nm \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq nM \implies m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M$$

1. 若  $f(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$  或  $f(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ , 则可取  $\xi = a$  或  $\xi = b$ .

2. 若  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$  与  $f(a), f(b)$  不同, 由介值定理可知, 在  $(a, b)$  至少存在一点  $\xi$ , 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

综上, 命题得证.

例 7. 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且对于任意的  $x \in [a, b]$  都有  $a \leq f(x) \leq b$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  中有不动点, 即存在  $x^* \in [a, b]$ , 使  $f(x^*) = x^*$ .

证明. 令  $g(x) = f(x) - x$ , 则  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 由于  $a \leq f(x) \leq b$ , 故

$$g(a) \geq 0, g(b) \leq 0.$$

1. 若  $g(a) = 0$ , 可取  $x^* = a$ .
2. 若  $g(b) = 0$ , 可取  $x^* = b$ .
3. 若  $g(a) > 0, g(b) < 0$ , 则由介值定理知, 存在  $x^* \in (a, b)$ , 使  $g(x^*) = 0$ , 即有  $f(x^*) = x^*$ .

例 8. 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) < a, f(b) > b$ . 证明  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = \xi$

证明. 令  $F(x) = f(x) - x$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 而

$$F(a) = f(a) - a < 0, F(b) = f(b) - b > 0,$$

由零点定理,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$F(\xi) = f(\xi) - \xi = 0,$$

即  $f(\xi) = \xi$

### 2.8.3 均衡价格的存在性

假设需求函数  $D = D(P)$  和供给函数  $S = S(P)$  都是连续函数. 如果生产某种商品的资源十分昂贵, 则价格为零时供给必为零, 即  $S(0) = 0$ ; 再假定  $D(0) > 0$ , 即消费者有消费欲望. 令

$$Z(P) = D(P) - S(P); \text{ 于是 } Z(0) = D(0) - S(0) > 0.$$

另外, 当价格涨到某个充分大的值  $P = P^*$  时, 公司会发现生产该产品利润丰厚, 而顾客会感到价格过高, 这样必然导致供过于求, 即  $D(P^*) < S(P^*)$ , 从而

$$Z(P^*) = D(P^*) - S(P^*) < 0.$$

又  $D = D(P)$  和  $S = S(P)$  都是区间  $[0, P^*]$  上的连续函数, 所以  $Z(P) = D(P) - S(P)$  也是区间  $[0, P^*]$  上的连续函数, 于是由零点定理, 存在  $P_e \in (0, P^*)$ , 使得

$$Z(P_e) = D(P_e) - S(P_e) = 0,$$

即

$$D(P_e) = S(P_e), \text{ 且 } P_e > 0.$$

定理. 假设需求函数  $D = D(P)$  和供给函数  $S = S(P)$  都是连续函数, 且满足:

1. 价格为零时, 需求超过供给, 即  $D(0) > S(0)$ ;
2. 存在某个价格  $P = P^* > 0$ , 使得在此价格下, 供给超过需求, 即  $S(P^*) > D(P^*)$ .

则市场上一定存在一个正的均衡价格, 即存在  $P_e > 0$ , 使得  $D(P_e) = S(P_e)$ .

#### 2.8.4 小结

- 四个定理

1. 最值定理
2. 零点定理
3. 介值定理
4. 均衡价格的存在性定理

注意条件: 1. 闭区间; 2. 连续函数

- 解题思路

1. 直接法: 先利用最值定理, 再利用介值定理;
2. 辅助函数法: 先作辅助函数  $F(x)$ , 再利用零点定理;

思考. 假设有一个登山者头天上午 8 点从山脚开始上山, 晚上 6 点到达山顶, 第二天上午 8 点从山顶沿原路下山, 下午 6 点到达山脚. 问该登山者在上、下山过程中, 会同时经过同一地点吗? 为什么?

答案. 会.

不妨设山高为  $h$ , 登山者头天登山的高度函数  $f_1(x), f_2(x)$  在  $[8, 18]$  上连续, 且

$$f_1(8) = 0, f_1(18) = h; f_2(8) = h, f_2(18) = 0$$

设

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

则  $f(x)$  在  $[8, 18]$  上连续, 且

$$f(8) = -h < 0, f(18) = h > 0.$$

由零点定理知存在一点  $\xi \in (8, 18)$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

问题. 证明方程  $x = a \sin x + b$ , 其中  $a > 0, b > 0$ , 至少有一个正根, 并且它不超过  $a + b$ .

问题. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ , 则在  $[x_1, x_n]$  上必有  $\xi$ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$