# 第八章　多元函数微分学

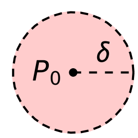
## 8.1　多元函数的基本概念

### 8.1.1　区域

设 $P_0(x_0,y_0)\in \boldsymbol{R}^2,\delta$ 为某一正数, 在 $\boldsymbol{R}^2$ 中与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 $\delta$ 的点 $P(x,y)$ 的全体, 称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 $\delta$ 邻域, 记作 $U(P_0,\delta)$, 即

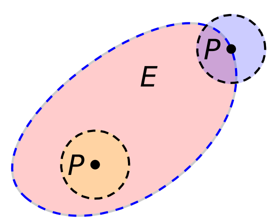
$$
\begin{aligned}
U(P_0,\delta) &= \left\{P\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |P_0P|<\delta\right\}\\
&= \left\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.
\end{aligned}
$$

在几何上, $U(P_0,\delta)$ 就是平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心, 以 $\delta$ 为半径的圆盘 (不包括圆周).



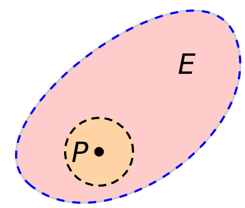

设集合 $E\subset \boldsymbol{R}^2$, 点 $P\in \boldsymbol{R}^2$,

- 内点： 存在 $\delta>0$, 使得 $U(P,\delta)\subset E$.
- 边界点： 在点 $P$ 的任一邻域内, 都既有集合 $E$ 的点, 又有余集 $E^c$ 的点.
- 聚点： 对任意给定的 $\delta>0,P$ 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 中总有 $E$ 中的点 ($P$ 本身可属于 $E$, 也可不属于 $E$).




边界点的全体称为 $E$ 的边界，记作 $\partial E$.

设集合 $E \subset \boldsymbol{R}^2$,




- 开集： $E$ 中每一点都是 $E$ 的内点

$$\{(x,y)|1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

- 闭集： $E$ 的余集 $E^c$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的开集

$$\left\{(x,y)\left|1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\right|\right\}$$

非开非闭：$\left\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\right\}$

设集合 $E \subset \boldsymbol{R}^2$, 如果存在常数 $k > 0$, 使得对所有的 $P(x,y) \in E$, 都有

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant k,$$

则称 $E$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的有界集.

一个集合如果不是有界集, 就称为无界集.

设 $D$ 是开集. 如果对于 $D$ 内任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 $D$ ，则称开集 $D$ 是连通的.

- 连通的开集称为区域或者开区域

$$\left\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}$$

- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

$$\left\{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

注记**.** $n$ 维空间中邻域、区域等概念也可定义.

### 8.1.2　多元函数的概念

定义 **1.** 设 $D$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个非空子集, 从 $D$ 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的任一映射 $f$ 称为定义在 $D$ 上的一个 二元函数, 记作

$$f : D \subset \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}, \text{ 或 } z = f(x,y).$$

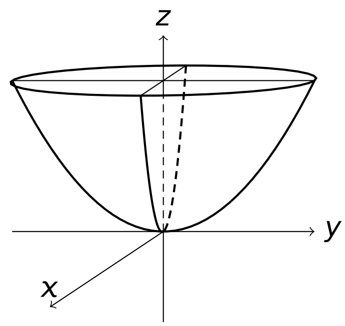
其中 $x,y$ 称为自变量, $z$ 称为因变量, $D$ 称为函数 $f$ 的定义域, $f(D) = \{f(x,y)|(x,y) \in D|\}$ 称为函数 $f$ 的值域, 并且称 $\boldsymbol{R}^3$ 中的子集

$$\left\{(x,y,z)\left|z = f\left(x,y\right),(x,y) \in D\right.\right\}$$

为函数 $z=f(x,y)$ (在 $D$ 上) 的图形 (或图像).

类似地可以定义三元函数、$n$ 元函数.

$f(x,y)=x^2+y^2$




二元函数的图形通常是一张曲面.

与一元函数类似，当我们用某个算式表达多元函数时，凡是使算式有意义的自变量所组成的点集称为这个多元函数的自然定义域..

例 **1.** $z=\ln(x+y)$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)|x+y>0\}.$$

例 **2.** $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}.$$

注记**.** 凡用算式表达的多元函数, 除另有说明外, 其定义域是指的自然定义域.

练习 **1.** 求二元函数的定义域并画出该区域.

(1) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$

(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y-2}}$

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-|x|-|y|}$

一元函数的单调性、奇偶性、周期性等性质的定义在多元函数中不再适用，但有界性的定义仍然适用.

### 8.1.3 多元函数的极限

定义. 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 $\delta$ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$.

定义. 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\middle|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 去心 $\delta$ 邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

定义 **2.** 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 $D$, $P(x_0,y_0)$ 是 $D$ 的聚点. 如果存在常数 $A$，对任意给定 $\epsilon>0$，总存在一个 $\delta>0$，只要 $(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$，就有

$$|f(x,y)-A|<\epsilon,$$

则称当 $(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 以 $A$ 为极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

注记. *1.* 定义中 $P\to P_0$ 的方式是任意的, 即 $P\to P_0 \Leftrightarrow |PP_0|\to 0$

*2.* 二元函数的极限也叫二重极限.

*3.* 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

例 **3.** 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$，其中

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

证明. 证用 $O$ 和 $P$ 分别表示点 $(0,0)$ 与 $(x,y)$,$f(x,y)$ 的定义域为 $D=\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, 点 $O(0,0)$ 为 $D$ 的一个聚点. 因为

$$|f(x,y)-0|=\left|\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2$$

则对任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $P\in D\cap U^\circ(O,\delta)$ 时, 就有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon.$$

所以结论成立.

注记. 函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 成立 $\Longleftrightarrow$ 当 $(x,y)$ 以任意方式趋于 $(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 总趋于 $A$.

例 **4.** 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

解. 取 $y=kx^3$, 则当 $(x,y)$ 沿直线 $y=kx^3$($k$ 为任意实常数) 趋向于 $(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx^3}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{kx^6}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{1+k^2}.$$

显然, 极限值随直线斜率 $k$ 的不同而不同, 故极限不存在.

确定极限不存在的方法

1. 令 $P(x,y)$ 沿 $y=kx$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$，若极限值与 $k$ 有关，则可断言极限不存在;
2. 找两种不同趋近方式, 使 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在, 但两者不相等，此时也可断言 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在.

定义 **3.** 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 $D$, $P_0(x_0,y_0)$ 是 $D$ 的聚点, 且 $P_0(x_0,y_0)\in D$, 若 $f(x,y)$ 满足

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续. 如果 $f(x,y)$ 在 $D$ 的每一点处都连续, 则称函数 $f(x,y)$ 在 $D$ 上连续, 或称 $f(x,y)$ 是 $D$ 上的连续函数.

### 8.1.4 多元函数的连续性

例 **5.** 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 的连续性.

**解.** 取 $y=kx$, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

其值随 $k$ 的不同而变化，极限不存在. 故函数在 $(0,0)$ 处不连续.

例 **6.** 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 在 $(0,0)$ 处的连续性.

**解.** 取 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\rho\left(\sin^3\theta+\cos^3\theta\right)\right|<2\rho.$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 有

$$|f(x,y)-f(0,0)|<2\rho<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0),$$

故函数在 $(0,0)$ 处连续.

多元初等函数：由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子表示的函数.

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的, 其中定义区域指包含在定义域内的区域或闭区域.

例 **7.** 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.

**解.** 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}xy=0\cdot 1=0$, 而 $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$ 所以

$$\lim_{(x,y)\to(0.1)}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

**注记.** 二元函数有和一元函数类似的性质：

1. 二元初等函数在定义区域上总是连续的.

2. 若二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续，则它在 $D$ 上必能取得最大值和最小值 *(*从而有界*)*.

3. 若二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续，则它在 $D$ 上必能取得介于最大值和最小值之间的任何值.

一般地，求 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是初等函数，且 $P_0$ 是 $f(P)$ 的定义域的内点，则 $f(P)$ 在点 $P_0$ 处连续，于是 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

例 **8.** 求二元函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3x+y$.

解**.** *5*

例 **9.** 求二元函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$.

解**.** $\dfrac{1}{2}$

练习 **2.** 求二元函数极限：

*(1)* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x-y}{x+y}$. ........................................................ $\dfrac{1}{3}$

*(2)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\sin xy}{x}$. ........................................................ 3

1. 区域、多元函数的概念

2. 多元函数极限的概念及极限不存在的判定（注意坎近方式的任意性）

3. 多元函数连续的概念

4. 闭区域上连续函数的性质

思考**.** 设 $\Omega$ 为空间任一有界闭区域*,* $P$ 为 $\Omega$ 外一点. 问 $\Omega$ 上是否一定有到 $P$ 点最远和最近的点存在*?* 为什么*?*

答案．有.

设 $P$ 点的坐标为 $(x_0,y_0,z_0)$，$Q(x,y,z)$ 为 $\Omega$ 上任意一点．则两点间距离为

$$|PQ| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

它是 $\Omega$ 上的连续函数，由闭区域上连续函数的性质可知，一定有最大值和最小值存在，对应的点即为最值点．

## 8.2　偏导数及其在经济分析中的应用

### 8.2.1　偏导数的定义及其计算方法

定义 **1.** 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 某邻域内有定义，如果极限

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点 $(x_0,y_0)$ 处对 $x$ 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ z_x(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \text{或 } f_x(x_0,y_0)$$

类似地定义函数在点 $(x_0,y_0)$ 处对 $y$ 的偏导数为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 任某平面区域 $D$ 内的每一点 $(x,y)$ 处都存在对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数，那么这些偏导数仍然是 $x,y$ 的函数，我们称它们为 $f(x,y)$ 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},f_x(x,y),f_y(x,y),z_x,z_y\ldots.$$

在不致产生误解时，偏导函数也简称为偏导数.

实际求 $z=f(x,y)$ 的偏导数时，因为始终只有一个自变量在变动，另一个自变量可看作常量，所以仍旧用一元函数的微分方法求解.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Longrightarrow \boxed{\text{把 } y \text{ 暂时看作常量而对 } x \text{ 求导数}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Longrightarrow \boxed{\text{把 } x \text{ 暂时看作常量而对 } y \text{ 求导数}}$$

例 **1.** 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解**.** 由条件可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y.$$

所以

$$\left.\tfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8,$$
$$\left.\tfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7.$$

例 **2.** 设 $z = x^y (x > 0, x \neq 1)$, 求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

证明. 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x,$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x}{y} \cdot yx^{x-1} + \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \ln x \\ &= 2x^y = 2z.\end{aligned}$$

例 **3.** 设 $z = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解**.** 由复合函数求导公式可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)_x \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|y|} \cdot \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \quad \left(\sqrt{y^2} = |y|\right) \\ &= \frac{|y|}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

解. 同理可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_y \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{(-xy)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \\ &= -\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{sgn}\,\frac{1}{y}\quad (y\neq 0)\end{aligned}$$

$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x\neq 0\\ y=0}}$ 不存在.

例 **4.** 求 $f(x,y)=e^{x^2y}$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解. $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=4e^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=e^2$.

练习 **1.** 求下列函数的偏导数.

*(1)* $z=2x^3-5xy^2+x^2y$　　*(2)* $z=\arctan\frac{y}{x}$

答案. 由函数求导法则易得

*(1)* $z_x=6x^2-5y^2+2xy$, $z_y=-10xy+x^2$.

*(2)* $z_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $z_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

类似地，对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，可以定义三个偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

$$\begin{aligned}f_x(x,y,z) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x} \\ f_y(x,y,z) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y} \\ f_z(x,y,z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}\end{aligned}$$

有关偏导数的几点说明:

1. 偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 是一个整体记号，不能拆分;

2. 求分界点、不连续点处的偏导数要用定义求;

例 **5.** 设 $z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}, f_x(0,0), f_y(0,0)$.

解**.** $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{|x\cdot 0|}-0}{x}=0=f_y(0,0)$.

例 **6.** 已知一定量理想气体的状态方程为 $pV=RT$ ($R$ 为常数), 证明

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1$$

证明*.* 因

$$\begin{aligned}
p&=\frac{RT}{V}, & \frac{\partial p}{\partial V}&=-\frac{RT}{V^2}\\
V&=\frac{RT}{p}, & \frac{\partial V}{\partial T}&=\frac{R}{p}\\
T&=\frac{pV}{R}, & \frac{\partial T}{\partial p}&=\frac{V}{R}
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1$$

### **8.2.2** 偏导数的几何意义及其存在与连续的关系

$f_x(x_0,y_0)$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y),\\ y=y_0\end{cases}$ 在点 $M_0$ 处的切线对 $x$ 轴的斜; $f_y(x_0,y_0)$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y),\\ x=x_0\end{cases}$ 在点 $M_0$ 处的切线对 $y$ 轴的斜率.

一元函数在某点可导 $\Longrightarrow$ 连续. 多元函数在某点偏导数存在 $\overset{?}{\Longrightarrow}$ 连续.

例如, 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 依定义知在 $(0,0)$ 处,$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. 但函数在该点处并不连续.

多元函数在某点偏导数存在 $\not\Rightarrow$ 连续.

### 8.2.3　高阶偏导数

对 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $z_x$ 和 $z_y$ 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$ ............ 纯偏导
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$ ............ 纯偏导
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$ ............ 混合偏导
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$ ............ 混合偏导

定义：二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 **7.** 求 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$ 的各二阶偏导数.

**解.** 由求导法则易知：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x.$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-9y^2-1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-18xy,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1$$

例 **8.** 设 $u=\mathrm{e}^{ax}\cos by$, 求一阶偏导数.

**解.** 由条件易得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\mathrm{e}^{ax}\cos by,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-b\mathrm{e}^{ax}\sin by$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\mathrm{e}^{ax}\cos by,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-b^2\mathrm{e}^{ax}\cos by,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-ab\mathrm{e}^{ax}\sin by,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-ab\mathrm{e}^{ax}\sin by.$$

练习 **2.** 求下列函数的二阶偏导数.

*(1)* $z=x^2y^3+\mathrm{e}^x\sin y$

*(2)* $z=\sin(x-y)$

问题 **1.** 混合偏导数都相等吗? 具备怎样的条件才相等?

定理 **1.** 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 $D$ 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

此定理说明, 二阶混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关. 这个性质还可进一步推广：高阶混合偏导数在其连续的条件下与求导次序无关.

例 **9.** 验证函数 $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

证明. 易知 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$，于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

因此 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$

### 8.2.4　偏导数在经济分析中的应用

在一元函数微分学中，我们引出了边际和弹性的概念，来分别表示经济函数在一点的变化率和相对变化率，这些概念也可以推广到多元函数微分学中去，并被赋予了丰富的经济含义.

假设 $A,B$ 两种商品彼此相关，那么 $A$ 与 $B$ 的需求量 $Q_1$ 和 $Q_2$ 分别是两种商品的价格 $P_1$ 和 $P_2$ 及消费者的收入 $y$ 的函数，即

$$\begin{cases} Q_1 = f(P_1, P_2, y), \\ Q_2 = g(P_1, P_2, y). \end{cases}$$

可以求得六个偏导数:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial P_1}, \frac{\partial Q_1}{\partial P_2}, \frac{\partial Q_1}{\partial y}, \frac{\partial Q_2}{\partial P_1}, \frac{\partial Q_2}{\partial P_2}, \frac{\partial Q_2}{\partial y},$$

其中 $\frac{\partial Q_1}{\partial P_1}$ 称为商品 $A$ 的需求函数关于价格 $P_1$ 的偏边际需求，它表示当商品 $B$ 的价格 $P_2$ 和消费者的收入 $y$ 固定时，商品 $A$ 的价格变化一个单位时商品 $A$ 的需求量的近似改变量. $\frac{\partial Q_1}{\partial y}$ 称为商品 $A$ 的需求函数关于消费者 $y$ 的偏边际需求，表示当 $P_1, P_2$ 固定时，消费者的收入变化一个单位时商品 $A$ 的需求量的近似改变量.　对于一般的需求函数，如果 $P_2, y$ 固定而 $P_1$ 上升时，商品 $A$ 的需求量 $Q_1$ 将减少，将有 $\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} < 0$; 当 $P_1, P_2$ 固定而消费者的收入 $y$ 增加时，一般 $Q_1$ 将增大，将有 $\frac{\partial Q_1}{\partial y} > 0$. 其他情形可类似讨论.

如果 $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} > 0$ 和 $\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} > 0$, 说明两种商品中任意一个价格减少，都将使其中一个需求量增加，另一个需求量减少，这时称 $A,B$ 两种商品为替代品. 例如，苹果和香蕉就是替代品.

如果 $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} < 0$ 和 $\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} < 0$, 说明两种商品中任意一个价格减少，都将使需求量 $Q_1$ 和 $Q_2$ 同时增加，这时称 $A,B$ 两种商品为互补品. 例如，汽车和汽油就是互补品.

例 **10.** 设 $A,B$ 两种商品是彼此相关的，它们的需求函数分别为

$$Q_A = \frac{50\sqrt[3]{P_B}}{\sqrt{P_A}}, \quad Q_B = \frac{75P_A}{\sqrt[3]{P_B^2}}$$

试确定 $A,B$ 两种商品的关系.

**解.** 由于函数中不含有收入 $y$, 可以求出四个偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_A}{\partial P_A} &= -25P_A^{-\frac{3}{2}}P_B^{\frac{1}{3}}, & \frac{\partial Q_A}{\partial P_B} &= \frac{50}{3}P_A^{-\frac{1}{2}}P_B^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{\partial Q_B}{\partial P_B} &= -50P_AP_B^{-\frac{5}{3}}, & \frac{\partial Q_B}{\partial P_A} &= 75P_B^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

因为 $P_A>0, P_B>0$, 所以

$$\frac{\partial Q_A}{\partial P_B}>0, \quad \frac{\partial Q_B}{\partial P_A}>0$$

这说明 $A, B$ 两种商品是替代品.

设 $A, B$ 两种商品的需求量函数由

$$\begin{cases} Q_1=f(P_1, P_2, y), \\ Q_2=g(P_1, P_2, y). \end{cases}$$

式表示, 当商品 $B$ 的价格 $P_2$ 和消费者收入 $y$ 保持不变, 而商品 $A$ 的价格 $P_1$ 发生变化时, 需求量 $Q_1$ 和 $Q_2$ 对价格 $P_1$ 的偏弹性分别定义为

$$E_{AA}=E_{11}=\lim_{\Delta P_1\to 0}\frac{\Delta_1 Q_1/Q_1}{\Delta P_1/P_1}=\frac{P_1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial P_1}$$

$$E_{BA}=E_{21}=\lim_{\Delta P_1\to 0}\frac{\Delta_1 Q_2/Q_2}{\Delta P_1/P_1}=\frac{P_1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial P_1}$$

其中 $\Delta_1 Q_i=Q_i(P_1+\Delta P_1, P_2, y)-Q_i(P_1, P_2, y)\,(i=1,2)$.

当 $P_1$ 和 $y$ 不变而 $P_2$ 变动时，有偏弹性

$$E_{AB}=E_{12}=\lim_{\Delta P_2\to 0}\frac{\Delta_2 Q_1/Q_1}{\Delta P_2/P_2}=\frac{P_2}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}$$

$$E_{BB}=E_{22}=\lim_{\Delta P_2\to 0}\frac{\Delta_2 Q_2/Q_2}{\Delta P_2/P_8}=\frac{P_2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial P_2}$$

其中 $\Delta_2 Q_i=Q_i(P_1, P_2+\Delta P_2, y)-Q_i(P_1, P_2, y)\,(i=1,2)$.

$E_{11}, E_{22}$ 依次是商品 $AB$ 的需求量对自身价格的偏弹性, 称为直接价格偏弹性(或自价格弹性）, 而 $E_{12}, E_{21}$ 则是商品 $AB$ 的需求量对商品 $BA$ 的价格的偏弹性, 它们称为交叉价格偏弹性(或互价格弹性).

偏弹性 $E_{ij}(i,j=1,2)$ 具有明确的经济意义.

例如 $E_{11}$ 表示 $A, B$ 两种商品的价格为 $P_1$ 和 $P_2$ 时, $A$ 商品的价格 $P_1$ 改变 1% 时其销售量 $Q_1$ 改变的百分数;

$E_{12}$ 表示 $A, B$ 两种商品的价格为 $P_1$ 和 $P_2$ 时, $B$ 商品的价格 $P_2$ 改变 1% 时其销售量 $Q_1$ 改变的百分数. 对 $E_{21}, E_{22}$ 可作类似的解释.

例 **11.** 某种数码相机的销售量 $Q_A$, 除与它自身的价格 $P_A$ 有关外, 还与彩色喷墨打印机的价格 $P_B$ 有关, 具体为

$$Q_A = 120 + \frac{250}{P_A} - 10P_B - P_B^2$$

求 $P_A = 50, P_B = 5$ 时, *(1)*$Q_A$ 对 $P_A$ 的弹性; *(2)*$Q_A$ 对 $P_B$ 的交叉弹性.

解**.** *(1)* $Q_A$ 对 $P_A$ 的弹性为

$$E_{AA} = \frac{\partial Q_A}{\partial P_A} \cdot \frac{P_A}{Q_A} = -\frac{250}{P_A^2} \cdot \frac{P_A}{120 + \frac{250}{P_A} - 10P_B - P_B^2}$$
$$= -\frac{250}{120P_A + 250 - P_A\left(10P_B + P_B^2\right)}$$

当$P_A = 50, P_B = 5$ 时, $E_{AA} = -\frac{250}{120\cdot 50 + 250 - 50(50+25)} = -\frac{1}{10}$.

解**.** *(2)* $Q_A$ 对 $P_B$ 的交叉弹性为

$$E_{AB} = \frac{\partial Q_A}{\partial P_B} \cdot \frac{P_B}{Q_A}$$
$$= -(10 + 2P_B) \cdot \frac{P_B}{120 + \frac{250}{P_A} - 10P_B - P_B^2}$$

当$P_A = 50, P_B = 5$ 时$E_{AB} = -20 \cdot \frac{5}{120+5-50-25} = -2.$

1. 偏导数的定义（偏增量比的极限）

2. 偏导数的计算、偏导数的几何意义

3. 高阶偏导数 $\begin{cases} \text{纯偏导} \\ \text{混合偏导 (相等的条件)} \end{cases}$

4. 偏导数在经济分析中的应用

思考**.** 若函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续，能否断定 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的偏导数必定存在?

答案**.** 不能.

例如, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, 在 $(0, 0)$ 处连续, 但 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0)$ 不存在.

# 8.3 全微分及其应用

## 8.3.1 偏微分

由一元函数微分学中增量与微分的关系得

$$f(x+\Delta x, y)-f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+o(\Delta x),$$

$$f(x, y+\Delta y)-f(x,y)=f_y(x,y)\Delta y+o(\Delta y).$$

等式左边称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处对 $x$ 或 $y$ 的偏增量，右边称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处对 $x$ 或 $y$ 的偏微分.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 的某邻域内有定义，并设 $P(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为这邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$$

为函数在点 $P$ 对应于自变量增量 $\Delta x$, $\Delta y$ 的全增量，记为 $\Delta z$, 即

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y).$$

定义 **1.** 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 的某邻域内有定义. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 的全增量 $\Delta z$ 可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中 $A$、$B$ 不依赖于 $\Delta x$、$\Delta y$ (一般与 $x, y$ 有关), $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微分, 称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 的全微分, 记作 $\mathrm{d}z$, 即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

函数 $z=f(x,y)$ 的全微分也可写为

$$\mathrm{d}z=A\ \mathrm{d}x+B\ \mathrm{d}y$$

注记**.** 当函数 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内各点处都可微分时, 那么称 $z=f(x,y)$ 在 $D$ 内可微分.

定理 **1.** 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微分, 则 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处连续.

证明. 由 $f$ 可微可知

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

令 $\rho \to 0$, 得

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta z = 0$$

即

$$\lim_{\rho\to 0} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处连续.

定理 **2.** 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 可微分, 则 $f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处的偏导数必定存在, 且 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

证明. 由 $f$ 可微可知

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho).$$

令 $\Delta y = 0$, 即取 $\rho = |\Delta x|$, 则有

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A\Delta x + o(|\Delta x|).$$

等式两边同除以 $\Delta x$, 并令 $\Delta x \to 0$, 得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = A$$

从而偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 存在, 且等于 $A$. 同样可证 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$. 证毕.

一元函数在某点导数存在 $\Longleftrightarrow$ 微分存在 一元函数在某点的各偏导数存在 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ 全微分存在

例子**.** 函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处有 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, 于是

$$\Delta z - \left[f_x(0,0)\cdot\Delta x + f_y(0,0)\cdot\Delta y\right] = \frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

而极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在，故函数不可微.

注记. 多元函数的各偏导数存在 $\not\Rightarrow$ 全微分存在.

例 **1** (可微的充分条件). 如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $(x,y)$ 连续, 则该函数在点 $(x,y)$ 可微分.

证明. 由条件可得

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\ &=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]\\ &\quad+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\end{aligned}$$

由拉格朗日中值定理，可得

$$\begin{aligned}& f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\\ =& f_x\,(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\,\Delta x\ \ (0<\theta_1<1)\\ =& f_x(x,y)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x\ \text{（依偏导数的连续性）}\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_1$ 为 $\Delta x$, $\Delta y$ 的函数, 且当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时,$\varepsilon_1\to 0$.

同理

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_2\Delta y,$$

且当 $\Delta y\to 0$ 时, $\varepsilon_2\to 0$. 于是有

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_2\Delta y.$$

又因为

$$\left|\frac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right|\le|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\xrightarrow{\rho\to 0}0,$$

故函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处可微.

习惯上, 记全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

通常我们把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理.

全微分的定义可推广到三元及三元以上函数

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

叠加原理也适用于二元以上函数的情况.

例 **2.** 计算函数 $z = \mathrm{e}^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解**.** 由条件易得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\mathrm{e}^{xy},\ \frac{\partial z}{\partial y} = x\mathrm{e}^{xy},$$

于是

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = \mathrm{e}^2,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = 2\mathrm{e}^2$$

故所求全微分为

$$\mathrm{d}z = \mathrm{e}\,\mathrm{d}x + 2\mathrm{e}\,\mathrm{d}y.$$

例 **3.** 求函数 $z = y\cos(x-2y)$, 当 $x = \frac{\pi}{4}, y = \pi$, $\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}, \mathrm{d}y = \pi$ 时的全微分.

解**.** 由条件易得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -y\sin(x-2y),\ \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x-2y) + 2y\sin(x-2y),$$

于是

$$\mathrm{d}z|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{\pi}{4},\pi)}\mathrm{d}x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{\pi}{4},\pi)}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi(4-7\pi).$$

例 **4.** 计算函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + \mathrm{e}^{yz}$ 的全微分.

解**.** 由条件易知:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz},\ \frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz}$$

故所求全微分

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}\right)\mathrm{d}y + ye^{yz}\,\mathrm{d}z$$

练习 **1.** 求 $z = x^2y^3$ 在 $x = 1$，$y = 2$，$\Delta x = 0.2$，$\Delta y = 0.1$ 时的全微分.

练习 **2.** 求 $z = \mathrm{e}^{xy}$ 的全微分.

练习 **3.** 求 $u=xy+yz+zx$ 的全微分.

例 **5.** 试证函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在, 但偏导数在点 $(0,0)$ 不连续, 而 $f$ 在点 $(0,0)$ 可微.

思路：按有关定义讨论; 对于偏导数需分

$$(x,y)\neq(0,0),(x,y)=(0,0) \text{ 讨论.}$$

证明. 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{\rho\to0}\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\frac{1}{\rho} \\ &= 0 = f(0,0),\end{aligned}$$

故函数在点 $(0,0)$ 连续,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

同理

$$f_y(0,0)=0.$$

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时, 极限

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f_x(x,y)=\lim_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|}-\frac{x^3}{2\sqrt{2}|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}\right)$$

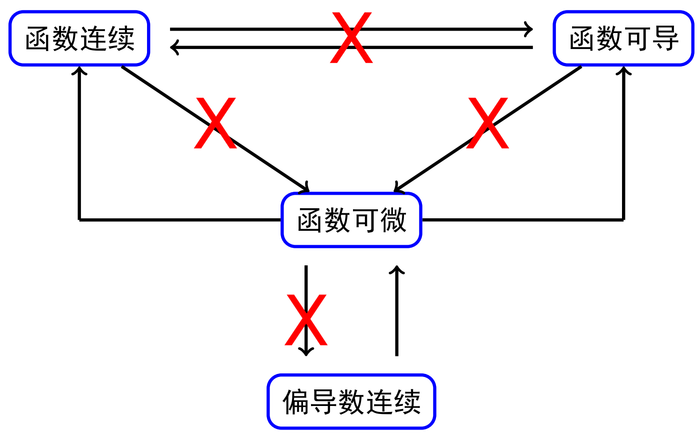
不存在. 所以 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

同理可证 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

下证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)\\ &=\Delta x\cdot\Delta y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\ &=o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\end{aligned}$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，$\mathrm{d}f|_{(0,0)}=0$.




## 8.3.2　全微分在近似计算中的应用

利用全微分公式，我们有下列近似计算公式：

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

例 **6.** 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

**解.** 设函数 $f(x,y)=x^y$, 并取 $x=1,y=2,\Delta x=0.04,\Delta y=0.02$，则

$$f_x(x,y)=yx^{y-1},\ f_y(x,y)=x^y\ln x,$$

于是有 $f(1,2)=1$, $f_x(1,2)=2$, $f_y(1,2)=0$，故

$$(1.04)^{2.02}\approx 1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08.$$

练习 **4.** 求 $1.01^{2.99}$ 的近似值.

例 **7.** 要在高为 $H = 20cm$, 半径 $R = 4cm$ 的圆柱体表面均匀地渡上一层厚度为 0.1 cm 的黄铜, 问需要准备多少黄铜? (黄铜的密度为 8.9 g/cm$^3$)

解**.** 圆柱体的体积为 $V = \pi R^2 H$. 依题意，需要求 $R = 4, H = 20, \Delta R = 0.1, \Delta H = 0.2$ 时的 $\Delta V$. 由于

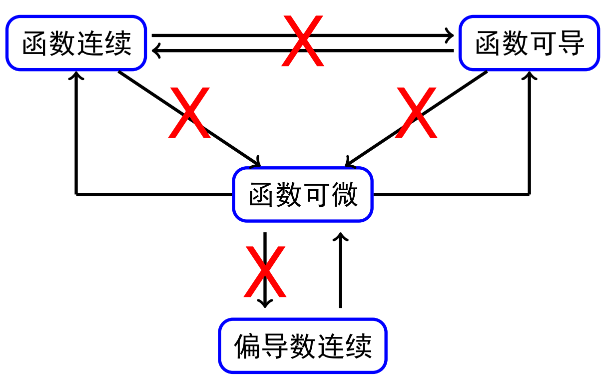
$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi RH, \frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta V \approx \mathrm{d}V &= \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \Delta R + \frac{\partial V}{\partial H} \cdot \Delta H \\ &= 160\pi \bullet 0.1 + 16\pi \bullet 0.2 \\ &= 19.2\pi \mathrm{cm}^3\end{aligned}$$

从而所需准备的黄铜为 $19.2\pi \times 8.9g$.

1. 多元函数全微分的概念;
2. 多元函数全微分的求法;
3. 多元函数连续、可导、可微的关系.（注意：与一元函数的区别）




# 8.4　多元复合函数的求导法则

在一元函数微分学中, 复合函数的求导法则起着重要的作用. 现在我们把它推广到多元复合函数的情形. 下面按照多元复合函数不同的复合情形，分三种情况进行讨论.

**定理 1.** 如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 $t$ 可导, 函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 $(u,v)$ 具有连续偏导数, 则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 $t$ 可导, 且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

**注记.** 上述定理的结论可推广到中间变量多于两个的情况, 如

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$$

**注记.** 上述公式中的 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 称为全导数.

*证明.* 设 $t$ 获得增量 $\Delta t$, 则有

$$\Delta u=\phi(t+\Delta t)-\phi(t),\ \Delta v=\psi(t+\Delta t)-\psi(t).$$

由于函数 $z=f(u,v)$ 在点 $(u,v)$ 有连续偏导数，故

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+\varepsilon_1\Delta u+\varepsilon_2\Delta v,$$

当 $\Delta u\to 0,\Delta v\to 0$ 时, $\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0$. 于是

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}+\varepsilon_1\frac{\Delta u}{\Delta t}+\varepsilon_2\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时, $\Delta u\to 0,\Delta v\to 0$ $\frac{\Delta u}{\Delta t}\to\frac{du}{dt}$, $\frac{\Delta v}{\Delta t}\to\frac{dv}{dt}$，从而

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

链式法则如图示

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dr] & \\ z \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & v \arrow[r] & t \\ & w \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$$

例 **1.** 设 $z = uv + \sin t$, 而 $u = \mathrm{e}^t, v = \cos t$ 求全导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

解. 由条件易得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial t} \\
&= ve^t - u \sin t + \cos t \\
&= \mathrm{e}^t \cos t - \mathrm{e}^t \sin t + \cos t \\
&= \mathrm{e}^t (\cos t - \sin t) + \cos t
\end{aligned}$$

定理 **2.** 如果函数 $u = \varphi(x, y)$ 及 $v = \psi(x, y)$ 都在点 $(x, y)$ 具有对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 $(u, v)$ 具有连续偏导数, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 $(x, y)$ 的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

链式法则如图示

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[r] \arrow[ddr] & x \\
z \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \\
 & v \arrow[r] \arrow[uur] & y
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

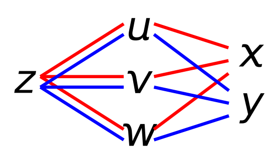
推论 **1.** 设 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 及 $w=\omega(x,y)$ 都在点 $(x,y)$ 具有对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数, 函数 $z=f(u,v,w)$ 在对应点 $(u,v,w)$ 具有连续偏导数, 则复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$$

在点 $(x,y)$ 的两个偏导数都存在, 且可用下列公式计算:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$




例 **2.** 设 $z=\mathrm{e}^u\sin v$, 而 $u=xy, v=x+y$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

**解.** 由多元函数的复合函数求导法则可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\mathrm{e}^u\sin v\cdot y+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1\\&=\mathrm{e}^u(y\sin v+\cos v)\\\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\&=\mathrm{e}^u\sin v\cdot x+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1\\&=\mathrm{e}^u(x\sin v+\cos v)\end{aligned}$$

练习 **1.** *(1)* 设 $z=e^{x-2y}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, 求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

*(2)* 设 $z=e^u\sin v$, $u=xy$, $v=x-y$, 求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

例 **3.** 设 $w=f(x+y+z,xyz),f$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

**解.** 令 $u=x+y+z, v=xyz$, 则 $w=f(u,v)$. 为表达简便起见, 引入以下记号:

$$f_1'=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},\quad f_{12}''=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}$$

这里下标 1 表示对第一个变量 $u$ 求偏导数, 下标 2 表示对第二个变量 $v$ 求偏导数. 同理有 $f_2', f_{11}'', f_{22}''$ 等. 由 $w = f(u,v)$ 及 $u = x+y+z, v = xyz$ 复合函数求导法则, 有

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_1' + yzf_2'$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_1' + yzf_2'$$

于是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(f_1' + yzf_2'\right) = \frac{\partial f_1'}{\partial z} + yf_2' + yz\frac{\partial f_2'}{\partial z}.$$

又

$$\frac{\partial f_1'}{\partial z} = \frac{\partial f_1'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f_1'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = f_{11}'' + xyf_{12}''$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial z} = \frac{\partial f_2'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f_2'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = f_{21}'' + xyf_{22}''$$

故

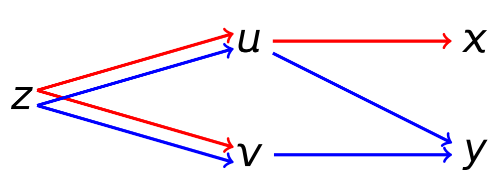
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= f_{11}'' + xyf_{12}'' + yf_2' + yzf_{21}'' + xy^2zf_{22}'' \\ &= f_{11}'' + y(x+z)f_{12}'' + xy^2zf_{22}'' + yf_2'.\end{aligned}$$

定理 **3.** 如果函数 $u = \varphi(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 具有对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数, 函数 $v = \psi(y)$ 在点 $y$ 可导, 函数 $z = f(u,v)$ 在对应点 $(u,v)$ 具有连续偏导数, 则复合函数 $z = f[\varphi(x,y), \psi(y)]$ 在点 $(x,y)$ 的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

链式法则如图示



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

设 $z = f(u,x,y)$ 其中 $u = \phi(x,y)$ 即 $z = f[\phi(x,y),x,y]$. 为求 $z$ 的偏导数，可令 $v = x$, $w = y$, 则

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 1.$$

于是:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

- $\frac{\partial z}{\partial x}$：把复合函数 $z = f[\phi(x,y),x,y]$ 中的 $y$ 看作常两而对 $x$ 的偏导数.
- $\frac{\partial f}{\partial x}$：把 $f(u,x,y)$ 中的 $u$ 及 $y$ 看做常量而对 $x$ 的偏导数.

设有 $z = f(u,v)$ 具有连续偏导数，$u$, $v$ 为自变量，则全微分为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

若又有 $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$，$u$, $v$ 为中间变量，则全微分仍为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

由条件知

$$z = f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$$

的全微分为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 带入上式得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

例 **4.** 已知 $\mathrm{e}^{-xy}-2z+\mathrm{e}^{z}=0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解**.** 易知

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-xy}-2z+e^{z}\right)=0,$$

于是

$$\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}(-xy)-2\,\mathrm{d}z+\mathrm{e}^{z}\,\mathrm{d}z=0,$$

即

$$(\mathrm{e}^{z}-2)\,\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-xy}(x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x),$$

从而

$$\mathrm{d}z=\frac{y\mathrm{e}^{-xy}}{(\mathrm{e}^{z}-2)}\mathrm{d}x+\frac{x\mathrm{e}^{-xy}}{(\mathrm{e}^{z}-2)}\mathrm{d}y,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\mathrm{e}^{-xy}}{\mathrm{e}^{z}-2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\mathrm{e}^{-xy}}{\mathrm{e}^{z}-2}.$$

练习 **2.** 利用全微分的形式不变性，求二元函数 $z=(x^2-y^2)e^{xy}$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1. 求导法则：分三种情况, 特别要注意课中所讲的特殊情况

2. 全微分形式不变性

# 8.5 隐函数的求导公式

## 8.5.1 一个方程的情形

定理 **1** (隐函数存在定理)**.** 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数, 且 $F(x_0,y_0)=0, F_y(x_0,y_0)\neq 0$, 则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个具有连续导数的函数 $y=f(x)$, 它满足条件 $y_0=f(x_0)$, 并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

注记**.** 将方程方程所确定的函数 $y=f(x)$ 代人方程可得

$$F(x,f(x))\equiv 0,\Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

从而得到隐函数求导公式**.**

例 **1.** 验证方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个单值可导、且 $x=0$ 时 $y=1$ 的隐函数 $y=f(x)$, 并求这函数的一阶和二阶导数在 $x=0$ 的值.

解**.** 令 $F(x,y)=x^2+y^2-1$, 则

$$F_x=2x,\ F_y=2y,\ F(0,1)=0,\ F_y(0,1)=2\neq 0.$$

由隐函数存在定理可知方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个单值可导、且 $x=0$ 时 $y=1$ 的函数 $y=f(x)$.

函数的一阶和二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y},\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{1}{y^3},\ \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=-1$$

例 **2.** 已知 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解**.** 令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$, 则

$$F_x(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2},\ F_y(x,y)=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{y-x}.$$

定理 **2** (隐函数存在定理 2)**.** 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数, 且

$$F(x_0,y_0,z_0)=0, F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$, 它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 **3.** 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解**.** 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$, 则

$$F_x=2x, F_z=2z-4,\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z},$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\cdot\frac{x}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

例 **4.** 设 $z=f(x+y+z,xyz)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial x}{\partial y},\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

提示**.** 把 $z$ 看成 $x,y$ 的函数对 $x$ 求偏导数得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$,

把 $x$ 看成 $z,y$ 的函数对 $y$ 求偏导数得 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$,

把 $y$ 看成 $x,z$ 的函数对 $z$ 求偏导数得 $\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

解**.** 令 $u=x+y+z,\ v=xyz$, 则 $z=f(u,v)$.

把 $z$ 看成 $x,y$ 的函数对 $x$ 求偏导数得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+f_v\cdot\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

整理得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_u+yzf_v}{1-f_u-xyf_v}.$$

把 $x$ 看成 $z,y$ 的函数对 $y$ 求偏导数得

$$0=f_u\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial y}+1\right)+f_v\cdot\left(xz+yz\frac{\partial x}{\partial y}\right),$$

整理得

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{f_u+xzf_v}{f_u+yzf_v}.$$

把 $y$ 看成 $x,z$ 的函数对求偏导数得

$$1=f_u\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial z}+1\right)+f_v\cdot\left(xy+xz\frac{\partial y}{\partial z}\right),$$

整理得

$$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1-f_u-xyf_v}{f_u+xzf_v}.$$

练习 **1.** *(1)* 设方程 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

*(2)* 设方程 $\mathrm{e}^z=xyz$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

## 8.5.2 方程组的情形✻

下面，考虑隐函数存在定理的推广，考虑方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

定理 **3** (隐函数存在定理 3)**.** 设 $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式 *(* 或称雅可比 *(Jacobi)* 行列式*)：*

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u}&\frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u}&\frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零,

则方程组在点 $(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一组具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, 它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, 并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}.$$

例 **5.** 设 $xu-yv=0, yu+xv=1$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$

解 (1)**.** 直接代入公式;

解 (2)**.** 运用公式推导的方法, 将所给方程的两边对 $x$ 求导并移项

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}=-u \\ y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial v}{\partial x}=-v \end{cases}, J=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+y^2,$$

在 $J\neq 0$ 的条件下,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}.$$

将所给方程的两边对 $y$ 求导, 用同样方法得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}.$$

隐函数的求导法则 (分以下几种情况)

1. $F(x,y)=0$

2. $F(x,y,z)=0$

3. $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$

思考. 已知 $\dfrac{x}{z}=\varphi\left(\dfrac{y}{z}\right)$, 其中 $\varphi$ 为可微函数, 求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

答案. 记 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\varphi\left(\frac{y}{z}\right)$, 则

$$F_x=\frac{1}{z},\ F_y=-\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)\cdot\frac{1}{z},\ F_z=\frac{-x}{z^2}-\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)\cdot\frac{(-y)}{z^2},$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x-y\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-z\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)}{x-y\varphi'\left(\frac{y}{z}\right)}$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

## 8.6 多元函数的极值及其应用

### 8.6.1 二元函数的极值

定义. 设点 $(x_0,y_0)$ 在 $z=f(x,y)$ 定义域中.

1. 若对 $(x_0,y_0)$ 去心邻域中任何点 $(x,y)$，总有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),$$

称 $(x_0,y_0)$ 为极大值点，$f(x_0,y_0)$ 为极大值.

2. 若对 $(x_0,y_0)$ 去心邻域中任何点 $(x,y)$，总有

$$f(x,y)>f(x_0,y_0),$$

称 $(x_0,y_0)$ 为极小值点，$f(x_0,y_0)$ 为极小值.

---

- 极大值和极小值统称极值.

- 极大值点和极小值点统称极值点.

例 **1.** 对下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$ ........ 极小值点

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ........ 极大值点

(3) $f(x,y)=xy$ ........ 不是极值点

定理 **1** (极值的必要条件)**.** 如果 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,\qquad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明. 不妨设 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处有极大值. 依极大值的定义, 在点 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内异于 $(x_0,y_0)$ 的点 $(x,y)$ 都适合不等式

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),\Longrightarrow f(x,y_0)<f(x_0,y_0)\ (x\neq x_0).$$

这表明一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值, 因而必有

$$f_x(x_0,y_0)=0.$$

同样可证

$$f_y(x_0,y_0)=0.$$

推论**.** 如果三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 具有偏导数, 则它在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 具有极值的必要条件为

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_z(x_0,y_0,z_0)=0.$$

定义**.** 使两个偏导数都为零的点称为驻点.

注记**.** *(1)* 极值点可能在驻点取得，也可能在偏导数不存在的点取得.

*(2)* 驻点不一定是极值点.(例：$(0,0)$ 是 $z=xy$ 的驻点但不是极值点)

定理 **2** (极值的充分条件)**.** 设函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 某邻域内连续，有一阶及二阶连续偏导数，且 $(x_0,y_0)$ 是它的驻点. 令 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则有

*1* 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

*2* 如果 $B^2-AC>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

*3* 如果 $B^2-AC=0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值需另外判定.

对于具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$, 求极值的一般步骤为：

1. 解方程组 $f_x(x,y)=0$, $f_y(x,y)=0$, 求出所有实数解, 即求出所有的驻点.
2. 对于每一个驻点 $(x_0,y_0)$, 求出二阶偏导数的值 $A,B$ 和 $C$.
3. 定出 $AC-B^2$ 的符号, 论判定 $f(x_0,y_0)$ 是否是极值, 是极大值还是极小值.

例 **2.** 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解**.** 先解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0, \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$$

得驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$. 又

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\quad f_{xy}(x,y)=0,\quad f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

因此

(1) 在点 $(1,0)$ 处, $AC-B^2=12\times 6>0$, 又 $A>0$, 故 $f(1,0)=-5$ 是极小值;

(2) 在点 $(1,2)$ 处, $AC-B^2=12\times(-6)<0$, 所以 $f(1,2)$ 不是极值;

(3) 在点 $(-3,0)$ 处, $AC-B^2=-12\times 6<0$, 所以 $f(-3,0)$ 不是极值;

(4) 在点 $(-3,2)$ 处, $AC-B^2=-12\times(-6)>0$, 又 $A<0$, 所以函数在 $(-3,2)$ 处有极大值 $f(-3,2)=31$.

练习 **1.** 求二元函数的极值：

*(1)* $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

*(2)* $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$.

### 8.6.2 二元函数的最值

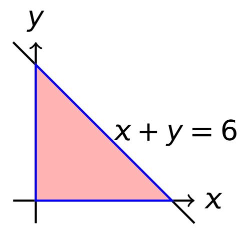
与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值.

求最值的一般方法： 将函数在 $D$ 内的所有驻点处的函数值及在 $D$ 的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

**例 3.** 求二元函数

$$z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$$

在直线 $x+y=6$, $x$ 轴和 $y$ 轴所围成的闭区域 $D$ 上的最大值与最小值.




**解.** 先求函数在 $D$ 内的驻点，解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$$

得区域 $D$ 内唯一驻点 $(2,1)$, 且 $f(2,1)=4$,

再求 $f(x,y)$ 在 $D$ 边界上的最值.

在边界 $x=0$ 和 $y=0$ 上 $f(x,y)=0$.

在边界 $x+y=6$ 上, 有 $y=6-x$，于是

$$f(x,y)=x^2(6-x)(-2),$$

由 $f_x=4x(x-6)+2x^2=0$ 得

$$x_1=0,x_2=4\Longrightarrow y=6-x|_{x=4}=2,\ f(4,2)=-64.$$

比较后可知 $f(2,1)=4$ 为最大值, $f(4,2)=-64$ 为最小值.

**例 4.** 求 $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$ 的最大值和最小值.

**解.** 先求驻点，由

$$\begin{cases} z_x = \frac{(x^2+y^2+1)-2x(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0 \\ z_y = \frac{(x^2+y^2+1)-2y(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0 \end{cases}$$

得驻点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 又因为 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}=0$ 即边界上的值为零. 又

$$z\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以最大值为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 最小值为 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

### 8.6.3 条件极值与拉格朗日乘数法

1. 无条件极值：对自变量除了限制在定义域内外，并无其他条件.
2. 条件极值：自变量有附加条件的极值问题

**问题.** 求函数 $u=f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y)=0$ 下的极值.

**解法.** 令 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$，由

$$\begin{cases} L_x(x,y)=0\\ L_y(x,y)=0\\ g(x,y)=0\end{cases}$$

解出 $\lambda$、$x$、$y$，解得的 $(x,y)$ 即为极值可疑点.

例 **5.** 某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某商品的广告. 根据统计资料, 销售收入 R *(*万元*)* 与电台广告费用 $x_1$ *(*万元*)* 及报纸广告费用 $x_2$ *(*万元*)* 之间的关系有如下的经验公式：

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$$

*(1)* 在广告费用不限的情况下，求最优广告策略*; (2)* 若提供的广告费用为 1.5 万元, 求相应的最优广告策略*.*

解**.** *(1)* 由条件易得利润函数为

$$\begin{aligned}L&=R-(x_1+x_2)\\ &=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10{x_2}^2\end{aligned}$$

由 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=-4x_1-8x_2+13=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=-8x_1-20x_2+31=0\end{cases}$ 得 $x_1=0.75$, $x_2=1.25$.

又由

$$A=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=-4, B=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=-8, C=\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=-20$$

可得

$$B^2-AC=64-80=-16<0, \text{ 且 } A=-4<0$$

故点 $(0.75, 1.25)$ 为极大值点, 由问题的实际意义可知：它为最大点, 即此时最优广告策略是用 0.75 万元作电台广告, 用 1.25 万元作报纸广告.

(2) 做拉格朗日函数

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \lambda) &= L(x_1, x_2)+\lambda(x_1+x_2-1.5) \\ &= 15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2 \\ &+\lambda(x_1+x_2-1.5) \end{aligned}$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1}=13-8x_2-4x_1+\lambda=0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=31-8x_1-20x_2+\lambda=0 \\ x_1+x_2=1.5 \end{cases}$$

解得 $x_1=0$, $x_2=15$, 即广告费 1.5 万元全部用于报纸广告，可使利润最大.

例 **6.** 设某工厂生产甲产品数量 $S$ (吨) 与所用两种原料 $A, B$ 的数量 $x, y$ (吨) 间的关系式 $S(x, y)=0.005x^2y$,, 现准备向银行贷款 150 万元购原料, 已知 A, B 原料每吨单价分别为 1 万元和 2 万元, 问怎样购进两种原料, 才能使生产的数量最多?

解**.** 按题意, 即求函数 $S(x, y)=0.005x^2y$ 在条件 $x+2y=150$ 下的最大值. 作拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda)=0.005x^2y+\lambda(x+2y-150)$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=0.01xy+\lambda=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}=0.005x^2+2\lambda=0 \\ x+2y-150=0 \end{cases}$$

解得 $x=100, y=25$.

因仅有一个驻点，且最大值一定存在，故驻点 $(100, 25)$ 为最大值，最大值 $S(100, 25) = 0.005 \times 100^2 \times 25 = 125$ 吨，即购进 $A$ 原料 100 吨，$B$ 原料 25 吨，可使生产量达到最大值 1250 吨。

**问题.** 求 $u = f(x, y, z, t)$ 在约束条件 $g(x, y, z, t) = 0$ 和 $h(x, y, z, t) = 0$ 下的极值.

**解法.** 令

$$L(x,y,z,t) = f(x,y,z,t) + \lambda g(x,y,z,t) + \mu h(x,y,z,t).$$

由下面各式

$$L_x = 0,\quad L_y = 0,\quad L_z = 0,\quad L_t = 0,\quad g = 0,\quad h = 0$$

消去 $\lambda$ 和 $\mu$，解得的 $(x, y, z, t)$ 即为极值可疑点.

1. 多元函数的极值：取得极值的必要条件、充分条件
2. 多元函数的最值：拉格朗日乘数法

**思考.** 若 $f(x_0, y)$ 及 $f(x, y_0)$ 在 $(x_0, y_0)$ 点均取得极值，则 $f(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0)$ 是否也取得极值？

**答案.** 不是. 例如 $f(x, y) = x^2 - y^2$，

1. 当 $x = 0$ 时，$f(0, y) = -y^2$ 在 $(0, 0)$ 取极大值；
2. 当 $y = 0$ 时，$f(x, 0) = x^2$ 在 $(0, 0)$ 取极小值；
3. 但 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 在 $(0, 0)$ 不取极值.