# Pomiar ryzyka rynkowego cz. 3

24.05.2022

## 1 Metody testowania wstecznego (*backtesting*) dla wartości zagrożonej

**Przypomnijmy przykład dotyczący testowania wstecznego.**
Rozważmy miarę ryzyka określoną jako kwantyl ($\alpha\%$) rozkładu zmiennej ryzyka (**ta miara to właśnie wartość zagrożona, VaR**). Jeśli wartość tego kwantyla została oszacowana poprawnie, to dla danych z niedalekiej przyszłości ilość stóp zwrotu mniejszych niż ten kwantyl powinna wynosić około $\alpha\%$.

Załóżmy, że mamy dane $(r_1, r_2, ..., r_{2n})$ z okresu $(1, 2, ..., 2n)$. Można zastosować następującą procedurę:

1. Szacujemy kwantyl rzędu $\alpha$, $K_\alpha^1$ na podstawie danych $(1, 2, ..., n)$.
2. Sprawdzamy, czy wartość $r_{n+1}$ przekracza $K_\alpha^1$. Podstawiamy $I_\alpha^1 = 1$, jeśli $r_{n+1} < K_\alpha^1$ lub $I_\alpha^1 = 0$, jeśli $r_{n+1} > K_\alpha^1$.
3. Szacujemy kwantyl rzędu $\alpha$, $K_\alpha^2$ na podstawie danych $(2, 3, ..., n+1)$.
4. Sprawdzamy, czy wartość $r_{n+2}$ przekracza $K_\alpha^2$. Podstawiamy $I_\alpha^2 = 1$, jeśli $r_{n+2} < K_\alpha^2$ lub $I_\alpha^2 = 0$, jeśli $r_{n+2} > K_\alpha^2$.
5. ...
6. Szacujemy kwantyl rzędu $\alpha$, $K_\alpha^n$ na podstawie danych $(n, n+1, ..., 2n-1)$.
7. Sprawdzamy, czy wartość $r_{2n}$ przekracza $K_\alpha^n$. Podstawiamy $I_\alpha^n = 1$, jeśli $r_{2n} < K_\alpha^n$ lub $I_\alpha^n = 0$, jeśli $r_{2n} > K_\alpha^n$.

Jeśli oszacowania są poprawne, to $(I_\alpha^1, I_\alpha^2, ..., I_\alpha^n)$ powinno mieć rozkład Bernoulliego o średniej $E(I_\alpha) = \alpha$ i wariancji $Var(I_\alpha) = \alpha(1-\alpha)$.

W dalszej części wprowadzimy testy bazujące na własnościach wektora przekroczeń $(I_\alpha^1, I_\alpha^2, ..., I_\alpha^n)$.
Uwaga: Długości okresu, z którego wyznaczamy VaR i okresu, dla którego wyznaczamy wektor przekroczeń mogą być różne.

## 1.1 Test pokrycia (test Kupca, *unconditional coverage test*)

Niech:
$\pi$ - procent przekroczeń wynikający z danych (czyli średnia z wektora przekroczeń);
$p$ - procent przekroczeń wynikający z założonego modelu (czyli $\alpha$).
Możemy testować równość tych dwóch wartości. Test Kupca opiera się na następujących hipotezach:

$$H_0: \quad \pi = p,$$

$$H_1: \quad \pi \neq p.$$

Możemy zapisać funkcję wiarygodności z rozkładu Bernoulliego:

$$L(\pi) = \prod_{i=1}^{n} (1-\pi)^{(1-I_\alpha^i)} \pi^{I_\alpha^i} = (1-\pi)^{I_0} \pi^{I_1}, \tag{1}$$

gdzie $I_0$ - ilość zer, a $I_1$ - ilość jedynek w wektorze przekroczeń.
Zatem dla estymatora średniej ilości przekroczeń $\hat{\pi} = \frac{I_1}{n}$ mamy:

$$L(\hat{\pi}) = \left(1 - \frac{I_1}{n}\right)^{I_0} \left(\frac{I_1}{n}\right)^{I_1}. \tag{2}$$

Jeżeli spełniona jest hipoteza $H_0$, tzn. $\pi = p$, to również:

$$L(p) = (1-p)^{I_0} (p)^{I_1}. \tag{3}$$

Możemy zastosować test ilorazu wiarygodności. Służy do porównywania dwóch modeli, z których jeden jest zagnieżdżony w drugim (tzn. ma w stosunku do niego ograniczoną przestrzeń parametrów). Formalnie: rozważmy model statystyczny z przestrzenią parametrów $\Theta$. Niech $\Theta_0$ będzie podprzestrzenią $\Theta$, $\Theta_0 \in \Theta$. Hipoteza $H_0$ mówi, że parametr modelu $\theta$ należy do przestrzeni $\Theta_0$, $H_0 : \theta \in \Theta_0$ , tzn model z parametrami ograniczonymi do podprzestrzeni $\Theta_0$ nie jest gorszy od modelu ogólniejszego. Hipoteza alternatywna przjmuje postać $H_1 : \theta \in \Theta \backslash \Theta_0$. Wtedy statystyka testowa (nazywana ilorazem wiarygodności) przyjmuje postać:

$$LR = -2 \ln \left[ \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)} \right], \tag{4}$$

gdzie $L$ to funkcja wiarygodności. Jeśli hipoteza $H_0$ jest spełniona, to statystyka $LR$ zbiega asymptotycznie do rozkładu $\chi^2$ z liczbą stopni swobody równą różnicy wymiarów pomiędzy $\Theta$ i $\Theta_0$.

W przypadku testu pokrycia modelem zagnieżdżonym jest model z ustaloną wartością $p$. Modelem ogólniejszym jest model, w którym dopuszczamy różne wartości procentu przekroczeń. W tym przypadku funkcja wiarygodności osiąga supremum dla parametru $\hat{\pi}$. Zatem iloraz wiarygodności przyjmuje następującą postać:

$$LR = -2 \ln \left[ \frac{L(p)}{L(\hat{\pi})} \right] = -2 \ln \left[ \frac{(1-p)^{I_0} (p)^{I_1}}{(1 - \frac{I_1}{n})^{I_0} (\frac{I_1}{n})^{I_1}} \right]. \tag{5}$$

Jeśli hipoteza $H_0$ jest prawdziwa, to $LR \sim \chi_1^2$. Zatem zarówno obszar krytyczny testu, jak i jego $p$-wartość można wyznaczyć bazując na dystrybunacie rozkładu $\chi_1^2$.

## 1.2 Test niezależności (test Christofersena, *independence test*)

**Przykład** Załóżmy, że $\alpha = 5\%$, $n = 100$. Jeśli na przykład $I_\alpha = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, ..., 0)$, to mimo że średnia liczba przekroczeń będzie równa 5%, to ułożenie kolejnych wartości w wektorze $I_\alpha$ wskazuje na niepoprawne założenia o modelu (zależności w wektorze $I_\alpha$).

Załóżmy, że $I_\alpha^i$ są zależne i mogą być opisane łańcuchem Markowa o macierzy przejścia:

$$\pi = \begin{bmatrix} 1-\pi_{01} & \pi_{01} \\ 1-\pi_{11} & \pi_{11}, \end{bmatrix} \tag{6}$$

tzn. $\pi_{11} = P(I_\alpha^{i+1} = 1 | I_\alpha^i = 1)$ i $\pi_{01} = P(I_\alpha^{i+1} = 1 | I_\alpha^i = 0)$.
Wtedy funkcję wiarygodności można zapisać jako:

$$L(\pi) = (1-\pi_{01})^{I_{01}} \pi_{01}^{I_{01}} (1-\pi_{11})^{I_{10}} \pi_{11}^{I_{11}}, \tag{7}$$

gdzie $I_{ij}$ jest liczbą obserwacji z $j$ następującym po $i$. Prawdopodobieństwa przejścia można z kolei estymować jako:

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{I_{01}}{I_{00} + I_{01}}, \tag{8}$$

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{I_{11}}{I_{10} + I_{11}}. \tag{9}$$

i

$$\hat{\pi} = \begin{bmatrix} \frac{I_{00}}{I_{00}+I_{01}} & \frac{I_{01}}{I_{00}+I_{01}} \\ \frac{I_{10}}{I_{10}+I_{11}} & \frac{I_{11}}{I_{10}+I_{11}} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Jeśli natomiast $I_\alpha^i$ są niezależne, to $\pi_{01} = \pi_{11} = pi$, a estymator $\hat{pi} = \frac{I_1}{n}$ i

$$\hat{PI} = \begin{bmatrix} 1-\hat{pi} & \hat{pi} \\ 1-\hat{pi} & \hat{pi} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Jest to przypadek zagnieżdżony w przypadku zakładającym łańcuch Markowa (dla $\pi_{01} = \pi_{11}$). Zatem można testować hipotezę $H_0 : \pi_{01} = \pi_{11}$ za pomocą testu ilorazu wiarygodności ze statystyką testową:

$$LR = -2 \ln \left[ \frac{L(\hat{PI})}{L(\hat{\pi})} \right]. \tag{12}$$

Jeśli hipoteza $H_0 : \pi_{01} = \pi_{11}$ jest prawdziwa, to asymptotycznie $LR \sim \chi_1^2$. Zatem zarówno obszar krytyczny jak i $p$-wartość testu ilorazu wiarygodności można wyznaczyć bazując na dystrybunacie rozkładu $\chi_1^2$.

## 1.3 Testowanie całego rozkładu zmiennej ryzyka (test Berkowitza)

Załóżmy teraz, że na podstwie próbki z pierwszego okresu $(1, 2, ..., t)$ szacujemy cały rozkład $F_{t+1}$ dla $r_{t+1}$. Przypomnijmy, że w poprzednich przypadkach szacowaliśmy tylko kwantyl $K_\alpha^{t+1}$.

1. Szacujemy rozkład $F_{t+1}$ na podstawie danych $(1, 2, ..., t)$,

2. szacujemy rozkład $F_{t+2}$ na podstawie danych $(2, 3, ..., t+1)$,

3. ...

4. szacujemy rozkład $F_T$ na podstawie danych $(T-t, T-t+1, ..., T)$.

Jeśli rozkład jest oszacowany poprawnie, to wartości $F_s(r_s)$ powinny mieć rozkład jednostajny. (Przypomnijmy, że jeśli X pochodzi z rozkładu o dystrybunacie $F$, to $F(X)$ ma rozkład jednostajny $U(0,1)$). Możemy zatem testować hipotezę, że próbka $(F_{t+1}(r_{t+1}), F_{t+2}(r_{t+2}), ..., F_T(r_T))$ pochodzi z rozkładu $U(0,1)$, na przykład stosując:

- metody graficzne (histogram, dystrybuanta, itp.),
- testy na zgodność rozkładu (test Kołmogorowa-Smirnowa, itp.),
- testy rozkładu normalnego dla zmodyfikowanych danych (przypomnijmy, że jeśli $X$ ma rozkład jednostajny, to $F^{-1}(X)$ ma rozkład o dystrybuancie $F$):
  $(\phi^{-1}(F_{t+1}(r_{t+1})), \phi^{-1}(F_{t+2}(r_{t+2})), ..., \phi^{-1}(F_T(r_T)))$
  (test Shapiro-Wilka, test Jarque-Berra, itp.).

# 2 Uzyskiwalność (ang. Elicitability)

Jeżeli miara ryzyka jest uzyskiwalna, to istnieje dla niej funkcja scoringowa pozwalająca na uszeregowanie modeli, którą można wykorzystać do testów porównawczych (np. testowanie wsteczne). Jest to użyteczna własność przy wyborze modelu, estymacji, porównaniu prognoz miar ryzyka i ich rankingu.

**Definicja**

$T$ jest uzyskiwalną miarą ryzyka dla zmiennej losowej $X$, jeśli istnieje dla niej funkcja scoringowa $S : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow [0, \infty)$ taka, że:

$$T(X) = \text{argmin}_{y \in \mathbf{R}}(\mathbf{E}[S(y, X)]). \tag{13}$$

Przykładowe funkcje scoringowe:

- średnia $T(X) = \mathbf{E}(X)$ jest uzyskiwalna przez $S(y,x) = ||y-x||^2$,
- mediana $T(X) = Me(X)$ jest uzyskiwalna przez $S(y,x) = ||y-x||$,
- kwantyl $T(X) = q_X(\alpha)$ jest uzyskiwalny przez $S(y,x) = \alpha(x-y)_+ + (1-\alpha)(y-x)_-$,
- ekspektyl $T(X) = e_X(\tau)$ jest uzyskiwalny przez $S(y,x) = \tau(x-y)_+^2 + (1-\tau)(y-x)_-^2$.

Empiryczny estymator funkcji scoringowej można obliczyć jako:

$$\hat{S}_n(y_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S(y_k, X_k), \tag{14}$$

gdzie $X_1, X_2, ...X_n$ to dane rzeczywiste, dla których weryfikujemy model, a $y_1, y_2, ...y_n$ to odpowiadające im wartości miary ryzyka (np: kwantyle). Funkcja scoringowa mierzy "odległość" oszacowanej miary ryzyka od rzeczywistych danych.

Uwagi

- Wartość zagrożona i ekspektylowa wartość zagrożona są uzyskiwalne.
- Expected shortfall nie jest uzyskiwalną miarą ryzyka.

# 3 Literatura uzupełniająca


[1] Alexander J. McNeil , Rudiger Frey, Paul Embrechts, Quantitative Risk Management, Princeton University Press, New Jersey, 2005,

[2] Carol Alexander, Market Risk Analysis, vol. IV: Value at Risk Models, Wiley, Chichester, 2008,

[3] Kevin Dowd, Measuring Market Risk, Wiley, 2002,

[4] Philippe Jorion, Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk, MCGraw-Hill, 2001.