Analyse Temps-fréquence - TP base d'ondelettes

Mathieu Chalvidal

January 2019

1 Proprietes de base des ondelettes

1.1 filtres h et g

Nous remarquons d'abord que les propriétés de h en tant que filtre miroir conjugué sont vérifiées, c'est à dire:

- $|TF(h)(\omega)|^2 + |TF(h)(\omega + \pi)|^2 = 2$
- $|TF(h)(0)| = \sqrt{2}$

par ailleurs le filtre g vérifie également:

- $|TF(g)(\omega)|^2 + |TF(g)(\omega + \pi)|^2 = 2$
- $TF(h)(\omega)TF(g)^*(\omega) + TF(h)(\omega + \pi)TF(g)^*(\omega + \pi) = 0$

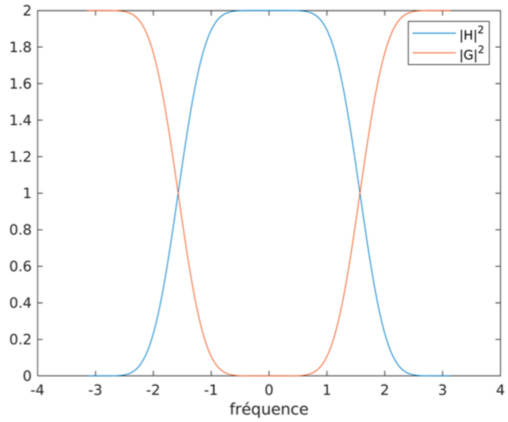

Figure 1: module des filtres h et g sur l'interval $[-\pi, \pi]$

1.2 orthogonalité des ondelettes et fonctions d'échelle

D'après les propriétés des filtres h et g que nous avons identifié. Nous avons des conditions d'orthogonalité sur les ondelettes et fonctions d'échelles.

Tout d'abord nous avons que: $\langle \phi_{a,b}, \psi_{a,b} \rangle = 0$ comme cela est mis en évidence pour les ondelettes de Daubechies en figure 2.

De plus les ondelettes et fonctions d'échelles sont orthogonales entre elles par construction : c'est à dire que:

$$\langle \phi_{a,b}, \phi_{a',b'} \rangle = \begin{cases} \text{1 si a=a' et b=b'} \\ \text{0 sinon} \end{cases}$$

$$\langle \psi_{a,b}, \psi_{a',b'} \rangle = \begin{cases} \text{1 si a=a' et b=b'} \\ \text{0 sinon} \end{cases}$$

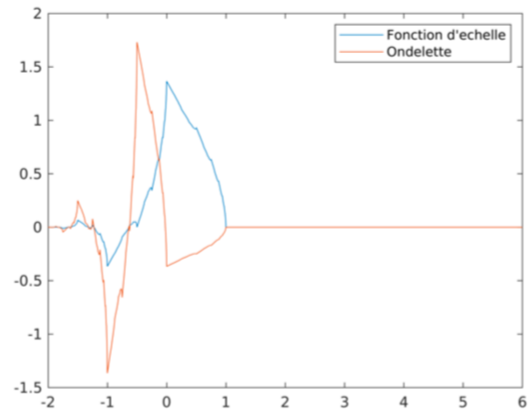

Figure 2: Orthogonalité des fonctions d'échelle et d'ondelettes pour L^2

1.3 Decompositions sur les fonctions d'échelles

Ici la fonction d'échelle de la famille des ondelettes de Daubechies est tracée dans la base des fonctions d'echelle de resolution plus fine.

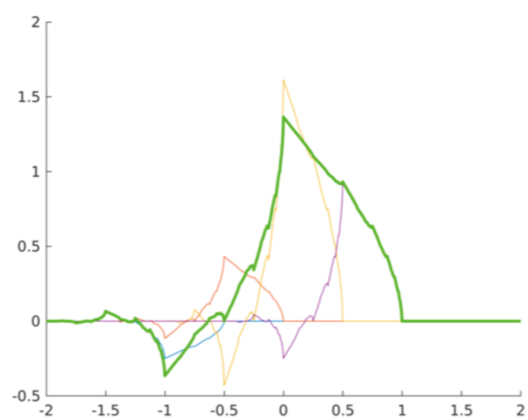

Figure 3: Décomposition de ϕ_0 dans $(\phi_{1,n})_n$

1.4 Moments nuls

Les ondelettes de Daubechies ont la particularite d'etre a support compact et d'avoir des moments nuls. Içi nosu traçons les 10 premiers moments d'une ondelette à 3 moments nuls.

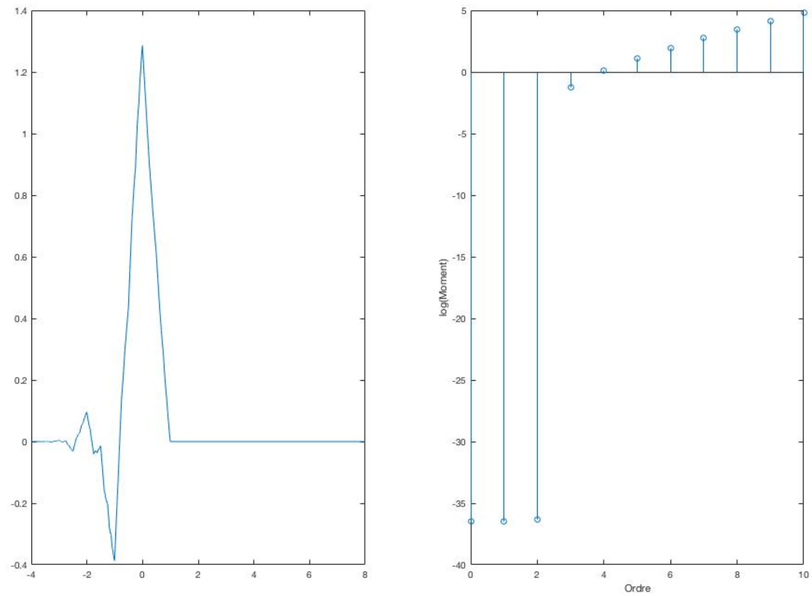

Figure 4: 10 premiers log-moments de l'ondelette db3

2 Decomposition en ondelettes

Voir pdf section 2.

3 Approximation de signaux

Dans cette section nous nous intéressons à la capacité de compression d'un signal 2D (photographie florence.jpg) par seuillage dans les bases Canoniques, DCT et d'ondelettes.

L'image est encodé au format RGB. Nous réaliserons donc la décomposition et le seuillage sur les 3 canaux différents afn de comparer avec l'image originale.

Nous comparerons 3 seuillages différents en pour chaque base: (N=500000, 100 000, 10 000 sachant que nous avons un signal de départ de 3*1200*1600=3*192000, ce qui correspond à des compressions d'environ 75, 95 et 99.5% respectivement)

3.1 Seuillage canonique

Nous seuillons l'image directement exprimée dans la base RGB. Ceci nous donne les résultats présentés dans la figure 5.

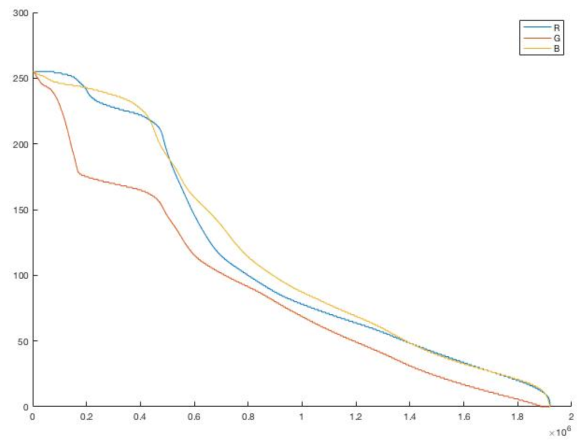

Figure 5: Coefficients en ondelettes classés pour les 3 canaux R,G,B

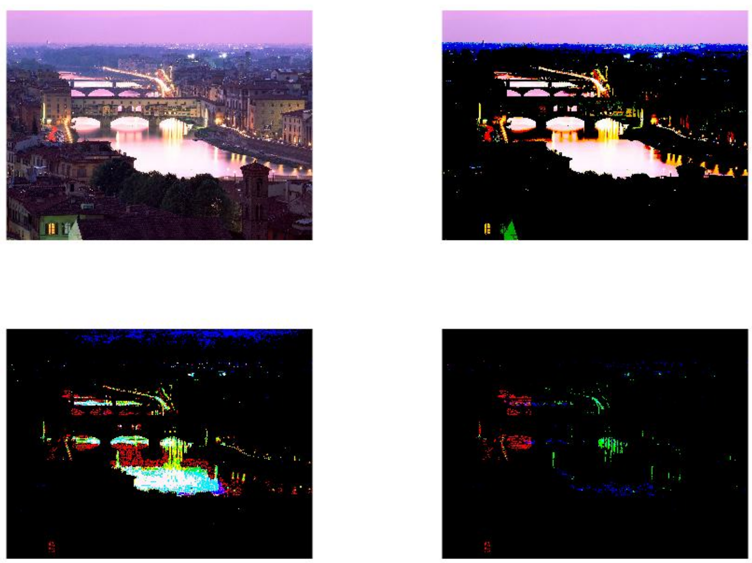

Figure 6: Image originale et reconstruction seuillée pour N = 500 000, 100 000 et 10 000 coefficients

3.2 Seuillage coefficients d'ondelettes

Nous choisissons d'exprimer l'image par décomposition en ondelettes de daubechies2, daubechies8, coiflets et symlets.

Nous seuillons alors les coefficients et reconstruisons l'image. Une étude des coefficients classés nous permet de voir que cette décomposition permet une expression beaucoup plus parcimonieuse du signal (figure 5)

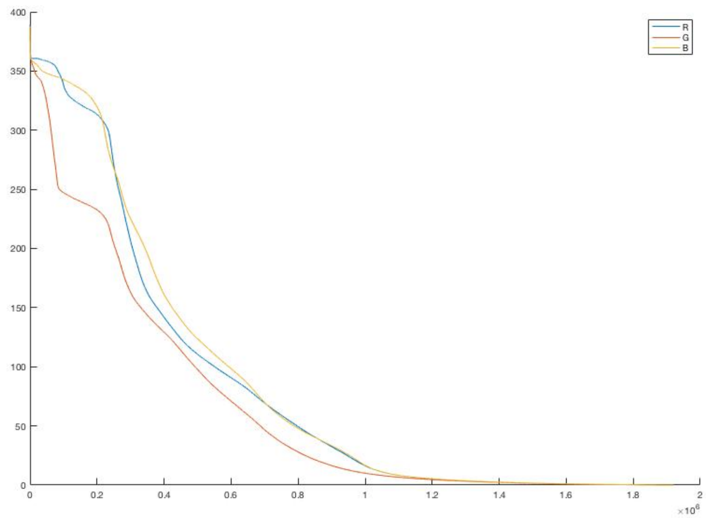

Figure 7: Coefficients en ondelettes classés pour les 3 canaux R,G,B pour ondelettes db2

Les résultats de reconstruction avec d'autres ondelettes et avec differentes profondeurs sont proposés en annexe.

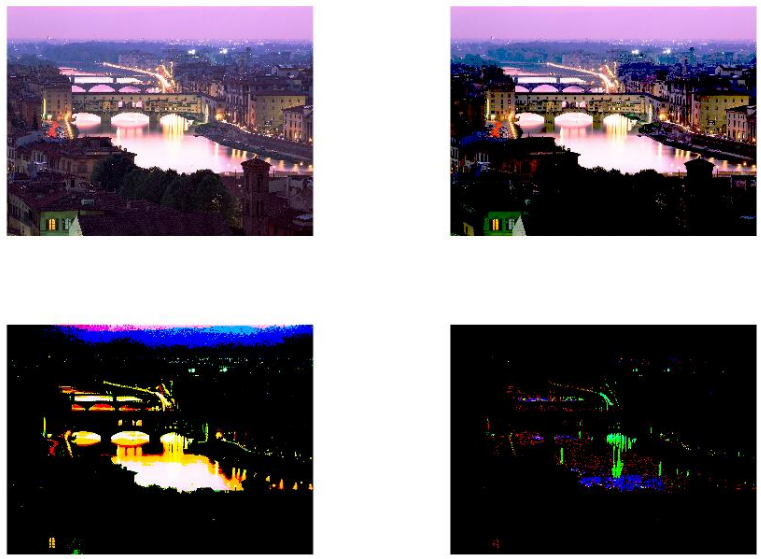

Figure 8: Image originale et reconstruction seuillée pour N = 500 000, 100 000 et 10 000 coefficients de l'ondelette de Daubechies 2

3.3 Seuillage coefficients DCT

Nous exprimons maintenant l'image par transformation en bases de cosinus discrets.

Nous seuillons alors les coefficients et reconstruisons l'image. Içi encore, l'étude des coefficients classés indique une décomposition particulièrement parcimonieuse du signal.(Notons l'échelle logarithmique de la figure 6)

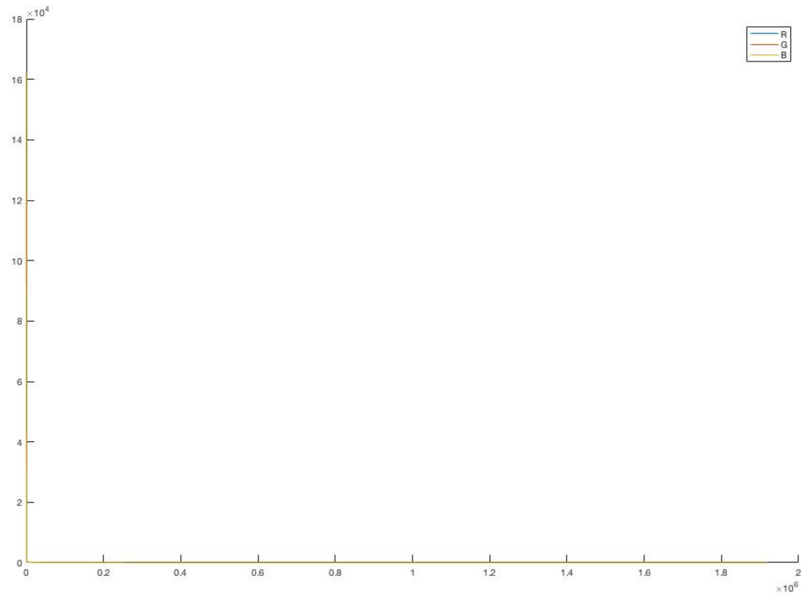

Figure 9: Coefficients classés pour les 3 canaux R,G,B

Ceci semble expliquer pourquoi le seuillage entre 500000 et 100000 coefficients ne change pas foncièrement la qualité de l'image reconstruite.

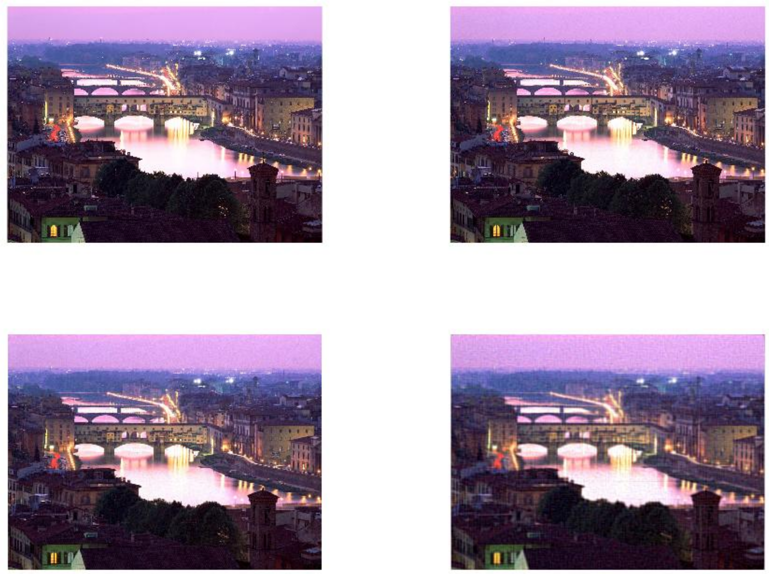

Figure 10: Image originale et reconstruction seuillée pour N = 500 000, 100 000 et 10 000

En conclusion, l'analyse qualitative des images compressées semblent indiquer que la DCT est la meilleure décomposition de celles envisagées. Cela s'explique par le fait que la DCT à le plus fort ratio de compacité d'énergie, comme montré par la figure du classement des coefficiens. Les résultats sur les ondelettes sont similaires. Toutefois l'ondelette de Daubechies semblait la plus indiquée du fait des moments nuls. L'analyse pourrait se poursuivre avec l'estimation d'un seuil optimal afin de perdre un minimum d'energie dans l'image tout en réduisant la taille nécessaire pour encoder l'image.

Appendices

Figure 11: Image originale et reconstruction seuillée pour N = 500 000, 100 000 et 10 000 coefficients de l'ondelette de Daubechies 8

Figure 12: Image originale et reconstruction seuillée pour N = 500 000, 100 000 et 10 000 coefficients de symlets 2

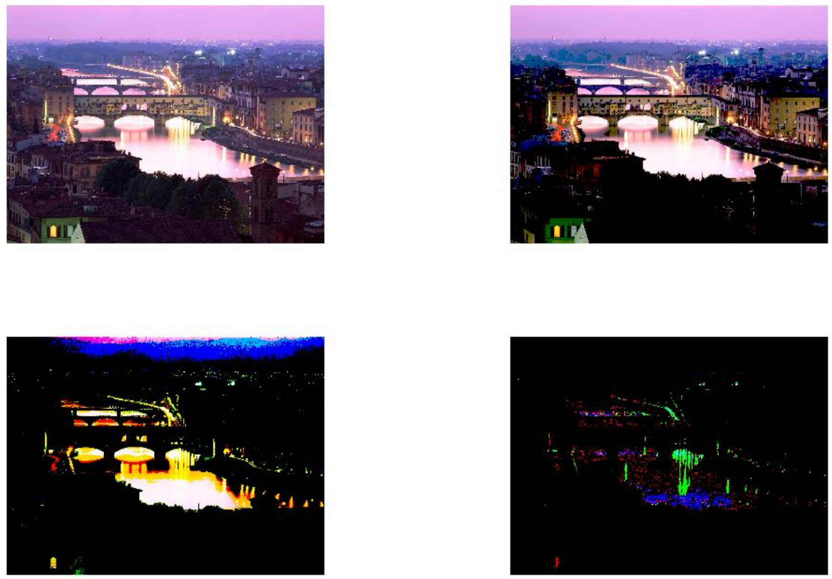

Figure 13: Image originale et reconstruction seuillée pour N = 500 000, 100 000 et 10 000 coefficients de coiflets 2