

# Analyse Spectrale - TP n1

Mathieu Chalvidal

January 2019

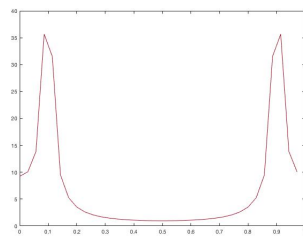
## 1 Rappel sur la Transformée de Fourier Discrète

### 1.1 Résolution du tracé - zéro padding

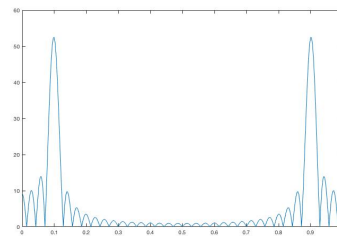
On considère un signal  $x[k]$  constitué d'une composante sinusoïdale (fréquence  $\nu = 0.1$  et amplitude  $\theta = 3$ ). On dispose de  $N = 35$  échantillons. La fonction *sim-sinus* permet de générer un tel signal.

$$\text{TFD} : \text{TFD}(x)(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i \nu \frac{k}{N}}$$

Afin de générer une résolution plus fine de la TFD du signal, nous utilisons une méthode de zéro-padding en construisant une discrétisation  $N'$  plus grande que le nombre  $N$  d'échantillon (ici **un facteur 10** convient en ajoutant des zéros à l'échantillon)



(a) TFD de x par fft en 35 points



(b) TFD de x par fft en 350 points

Nous retrouvons alors la fréquence  $\nu = 0.1$  avec précision en distinguant le lobe principal des lobes secondaires et sachant la TFD est périodique par symétrie hermitienne de la TFD du signal réel.

### 1.2 Résolution fréquentielle

On dispose d'un signal composé de trois composantes sinusoïdales. La durée est de  $N = 50$  échantillons. Les données sont disponibles dans le fichier *sig-sinus2.mat*

Nous comparons ici un fenêtrage rectangulaire et un fenêtrage de Hanning pour l'évaluation des composantes fréquentielles d'un signal sinusoïdale.

Remarquons d'abord que le gain d'une TFD d'un signal filtré par une fenêtre rectangulaire présente des lobes secondaires importants mais une bonne finesse du lobe principale.

La fenêtre de Hamming va permettre de créer une TFD dont les lobes secondaires du gain sont beaucoup plus atténués mais pour une large du lobe principale dégradée en résolution.

Par ailleurs nous réalisons un zéro-padding (facteur 100) pour améliorer la résolution de notre tracé afin d'observer plus clairement les 3 composantes fréquentielles. Nous observons de manière distincte 2 lobes principaux pour les 3 types de fenêtre. (de fréquence respective  $0,096Fe$  et  $0,12Fe$  avec  $Fe$  la fréquence d'échantillonnage) Il est beaucoup plus difficile d'évaluer visuellement la 3ème composante ce qui nous valide la pertinence d'un autre critère d'évaluation.

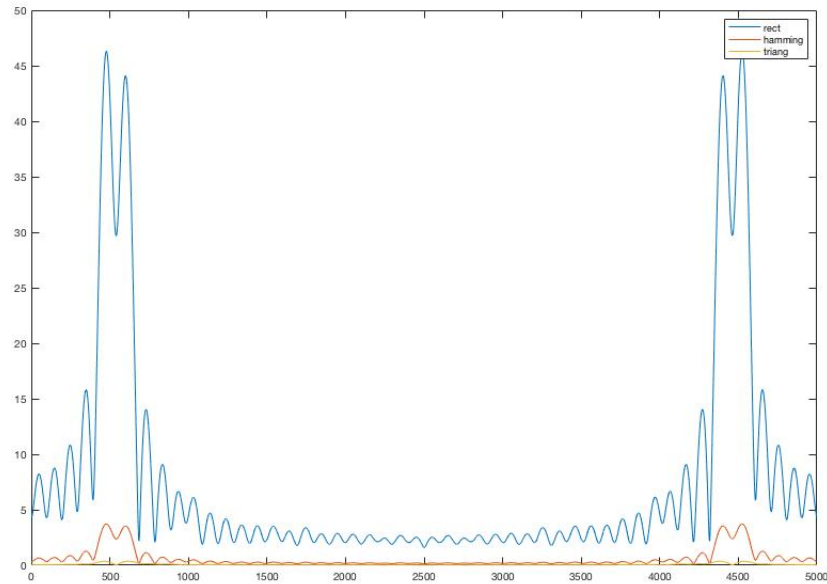


Figure 2: Gain de la TFD du signal avec une fenêtre rectangulaire, de Hamming et triangulaire

## 2 Periodogramme

### 2.1 Propriétés statistiques et variantes du periodogramme

On étudie dans cette section l'influence des variantes du periodogramme sur le biais et la variance de l'estimateur. Afin de pouvoir estimer la valeur moyenne et la variance de ces estimateurs, on considérera plusieurs estimations de DSP obtenues à partir de réalisations différentes du même processus. On considère un modèle ARMA dont les coefficients sont fournis dans le fichier `coef ARMA1.mat`.

La DSP théorique d'un processus ARMA est:

$$S(\nu) = \left| \frac{1 + \sum_{k=1}^m b_k e^{-2\pi j \nu}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k e^{-2\pi j \nu}} \right|^2 \sigma^2 = |H(\nu)|^2 \sigma^2$$

où  $\sigma^2$  est la variance d'un bruit blanc gaussien. Autrement dit, la DSP d'un processus ARMA s'exprime comme la DSP d'un bruit blanc gaussien filtré par H.

La DSP issu des suites b et a est tracée ci-dessous:

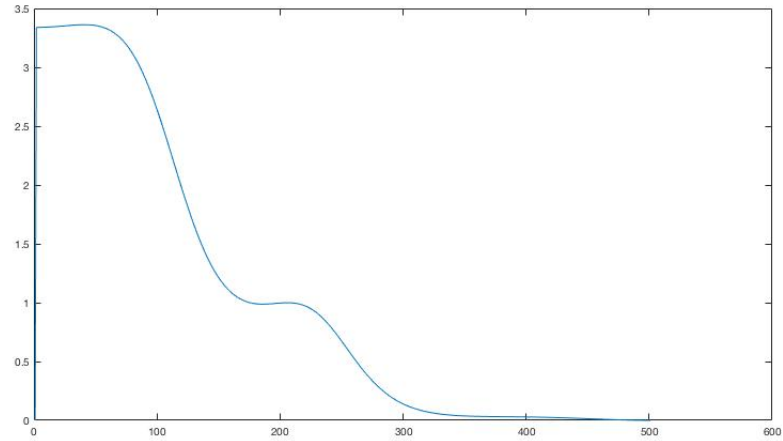
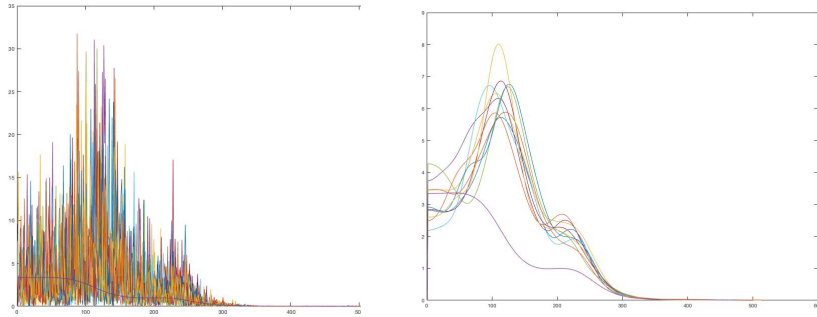


Figure 3: DSP du signal pour une fréquence d'échantillonnage  $\nu = 1/500$

Nous traçons par la suite l'estimation par périodogramme simple et périodogramme de Welch de 10 réalisations du processus ARMA étudiés. (fonctions `periodogram` et `pwelch` dans Matlab) Le compromis biais-variance est ici mis en



(a) Estimation par periodogram de la DSP du signal pour 10 échantillons (b) Estimation par pwelch de la DSP du signal pour 10 échantillons

exergue. Le periodogramme simple présente une grande variance par rapport au periodogramme de welch, en revanche son biais est plus faible.

Nous réalisons la moyenne des estimations des 1000 réalisations et comparons les 3 courbes. Les courbes confirment le compromis biais-variance illustré plus haut. Le periodogramme de welch est plus "lisse" grace au moyennage par fenêtre réalisé. L'estimation de l'énergie totale du spectre semble indiquer que le periodogramme simple est toutefois moins biaisé (mais de façon marginale)

$$Energie_{DSPthéorique} = 533.5006$$

$$Energie_{periodogramme} = 970.6301$$

$$Energie_{pwelch} = 973.2769$$

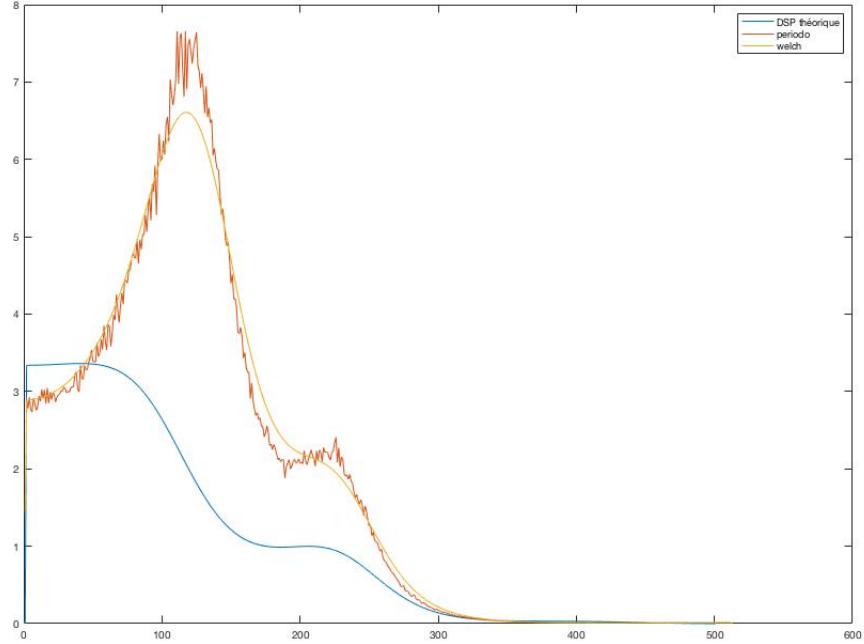


Figure 5: Moyenne des estimations de la DSP par periodogramme simple et de welch et DSP théorique

Nous nous intéressons plus particulièrement au périodogramme de welch. La première figure montre l'influence de la largeur de la fenêtre sur l'estimation de la DSP. Un fenêtrage plus court aura tendance à "lisser" la courbe car il y a une perte de résolution fréquentielle, en revanche, le biais est plus faible. Concernant le recouvrement des fenêtres, le paramètre ne semble pas faire varier grandement l'estimation, ce qui nous conduit à penser que nous pouvons laisser un fort recouvrement afin d'augmenter la taille des fenêtres et ainsi obtenir une résolution optimale.

### 3 Estimation paramétrique

*On considère un modèle AR dont les coefficients sont fournis dans le fichier coef AR2.mat*

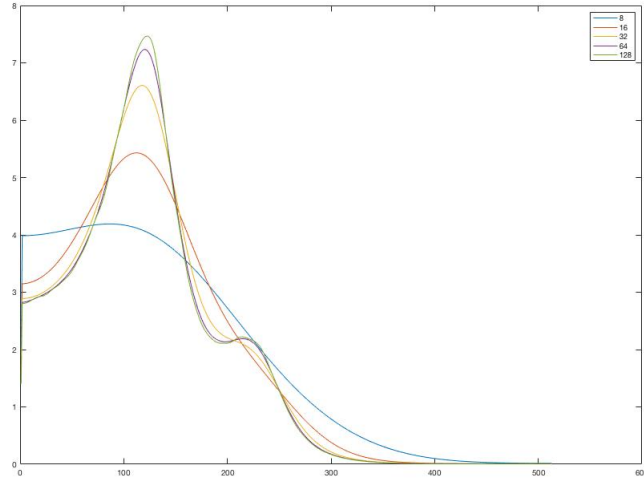


Figure 6: Différentes estimations de la DSP par periodogramme de welch en fonction de la largeur  $N$  de la fenêtre de Hamming

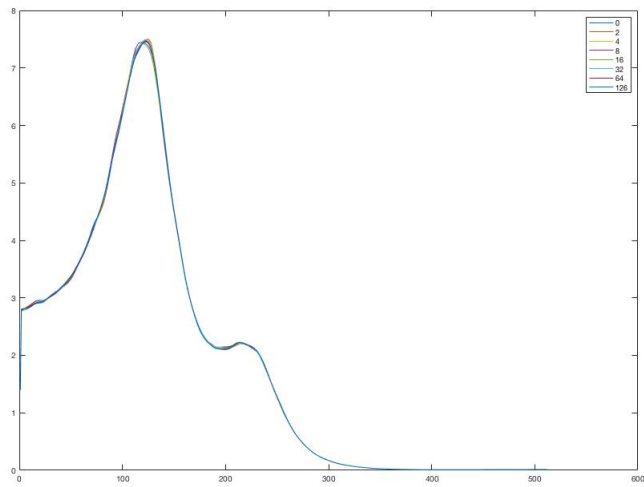


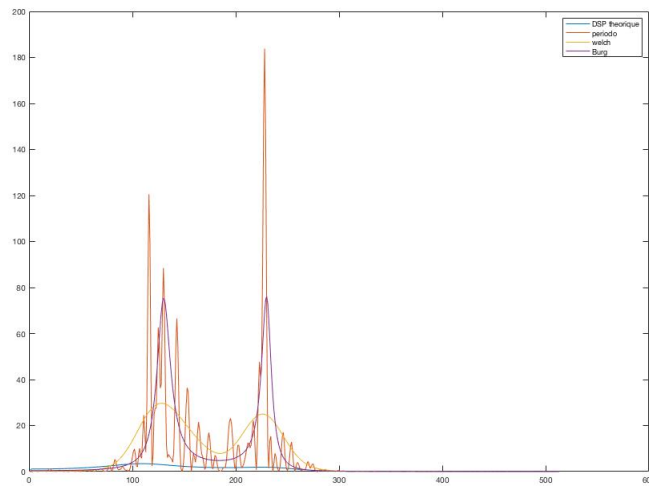
Figure 7: Différentes estimations de la DSP par periodogramme de welch en fonction de la largeur  $N$  du recouvrement des fenêtres

Nous traçons ci-dessous la DSP Théorique du second modèle ARMA ainsi que l'estimation par modèle de Burg, de welch et du periodogramme pour un

échantillon e taille  $N= 256$ .

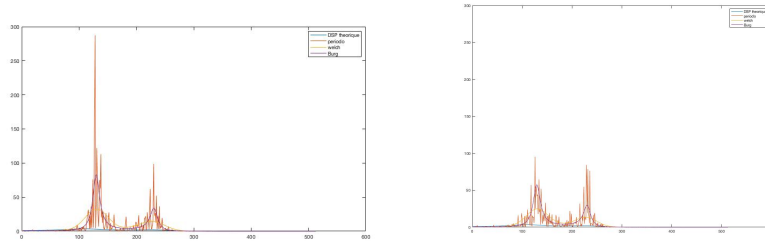
Nous remarquons la présence d'un biais pour chacun des estimateurs. L'estimateur de Burg présente les modes les plus piqués. La variance du périodogramme est la plus forte à nouveau.

Par la suite, nous comparons les estimations sur des tailles d'échantillon différentes ( $N=1024$  et  $N=2048$ ) pour illustrer la réduction du biais lorsque l'échantillon augmente en taille. Cela semble valider le résultat théorique de consistance des estimateurs. Cette remarque appelle à une étude des vitesses de convergences asymptotiques...



3.jpg

Figure 8: Différentes estimations de la DSP



(a) Estimations sur un échantillon  $N=1024$  (b) Estimations sur un échantillon  $N=2048$