



CentraleSupélec

Problèmes inverses - Régularisation - Compressed sensing

Travaux pratiques

CENTRALESUPÉLEC, OMA

2018–2019

Département Signaux et Statistique
v. 2019/2 • Gilles Chardon

1 Code fourni

1.1 CVX

CVX est un outil permettant la spécification d'un problème d'optimisation convexe sous forme lisible. Le problème d'optimisation de la régularisation de Tikhonov ℓ_2

$$\tilde{x}_\lambda = \operatorname{argmin} \|h \star x - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2. \quad (1)$$

s'écrit avec CVX

```
cvx_begin
    variable x(L)
    minimize sum_square(conv(h, x) - y) + lambda * sum(square(x))
cvx_end
```

pour un vecteur x réel de taille L .

De nombreuses fonctions de Matlab sont disponibles pour écrire la fonction à minimiser (mais pas toutes...). La bibliothèque s'initialise avec la fonction `cvx_setup`.

1.2 TV

`tv.m` est un code de minimisation de la variation totale pour le traitement d'image. Il résoud le problème

$$\tilde{x}_{TV} = \operatorname{argmin} \|\operatorname{grad} x\|_1 \text{ s.c. } \|Ax - y\|_2 \leq \varepsilon \quad (2)$$

Deux syntaxes sont disponibles :

```
x = tv(x0, A, [], y, epsilon);
```

ou

```
x = tv(x0, A, At, y, epsilon);
```

L'image x à reconstruire est de dimension $L \times L$, et est obtenue sous la forme d'un vecteur \mathbf{x} de taille $L^2 \times 1$. Dans la première syntaxe, A est une matrice $L^2 \times N$ où N est le nombre de mesures. Dans la deuxième syntaxe, A et A^t sont des fonctions appliquant la matrice A et sa transposée A^* , à utiliser quand une méthode rapide de calcul est disponible (par ex. `conv2D.m` pour la convolution 2D). L'algorithme est initialisé à \mathbf{x}_0 , vecteur de taille $L^2 \times 1$.

2 Problèmes pénalisés et constraints

Les problèmes de minimisation peuvent se trouver sous deux formes. Forme pénalisée :

$$\tilde{x}_\lambda = \operatorname{argmin} f(x) + \lambda g(x) \quad (3)$$

et forme contrainte :

$$\tilde{x}_\epsilon = \operatorname{argmin} f(x) \text{ s.c. } g(x) \leq \epsilon. \quad (4)$$

- On suppose f et g strictement convexes. Montrer que ces deux formulations sont équivalentes, i.e. que pour tout λ il existe un ϵ tel que $\tilde{x}_\lambda = \tilde{x}_\epsilon$ et réciproquement.

3 Déconvolution

3.1 Déconvolution 1D

Trois signaux s_1 , s_2 et s_3 de longueur $L = 99$ sont observés (vecteurs m_1 , m_2 et m_3) à travers un filtre de réponse impulsionnelle h (fichier `signaux1D.mat`).

Ces signaux possèdent les propriétés suivantes :

- s_1 : variations lentes
- s_2 : somme de quelques impulsions
- s_3 : signal constant par morceaux

- Tracer la réponse fréquentielle du filtre et en conclure quant à son conditionnement.
- Proposer une régularisation adaptée à chaque signal.
- Implémenter cette régularisation avec CVX et tester sur différents paramètres de régularisation.
- Déterminer un paramètre de régularisation pour chaque signal en utilisant la courbe en L . Tracer la courbe en L et l'estimation du signal.

3.2 Déconvolution 2D

Le tableau `image` contient une image bien connue, floutée par le noyau de convolution PSF (fichier `deconv_image.mat`). De source sûre, l'image originale est composée de zones de luminosité constante.

- Donner une estimation de l'image en utilisant la forme particulière de la régularisation de Tikhonov ℓ_2 pour la déconvolution.
- Reconstruire l'image d'origine en utilisant l'information a priori disponible et comparer (la mesure est perturbée par un bruit dont la norme est d'ordre de grandeur 10).

(utiliser `imagesc (I)`; `colormap gray`; `axis equal`; pour afficher l'image `I`).

3.3 1-Pixel Camera

La 1-Pixel Camera est équipée d'un seul capteur, et d'un réseau de miroir permettant de simuler le produit scalaire de l'image à reconstruire avec un vecteur arbitraire. Après répétition de l'opération pour plusieurs vecteurs, les mesures sont modélisées par $y = Ax$ où x est l'image à reconstruire, A la matrice contenant les vecteurs utilisés pour la mesure, et y les mesures.

Le but est ici de vérifier qu'il est possible d'obtenir une bonne estimation de l'image avec un nombre de mesures inférieur au nombre de pixels de l'image, i.e. quand A est une matrice plus large que haute.

La matrice de mesure de la 1-Pixel Camera et des mesures pour différents objets sont données dans le fichier `1px.mat`. Ces mesures sont partielles, mais de bonne qualité (bruit de norme environ 0.01).

- Tester une reconstruction par moindres carrés.
- Proposer et tester une méthode de reconstruction des images.

4 Algorithmes de minimisation

- Pour chaque problème de minimisation de l'exercice 3.1, choisir, implémenter, et tester un algorithme de minimisation.