

# Differentialgeometrie I

gehalten von Dr. Anna Siffert  
im Sommersemester 2018

an der  
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg



In L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X gesetzt von  
Thomas Ackermann & Mathieu Kaltschmidt

aktueller Stand: 26. Juni 2018



# Differentialgeometrie I

Dr. Anna Siffert



UNIVERSITÄT  
HEIDELBERG  
ZUKUNFT  
SEIT 1386

---

## Vorwort

Bei diesen Vorlesungsnotizen handelt es sich um kein offizielles Skript, sondern lediglich um die Umsetzung des Vorlesungsmitschriebs in  $\text{\LaTeX}$ .

Für die Vollständigkeit & Richtigkeit des Inhalts wird deshalb **keine Gewährleistung** übernommen.

Bei Fragen, Korrekturen und Verbesserungsvorschlägen freuen wir uns über eine Nachricht.<sup>1</sup>

Die Dozentin Frau Dr. Siffert empfiehlt die nachfolgende Literatur zur Vertiefung des in der Vorlesung behandelten Stoffs:

- [1] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. 14., corrected print. Boston ; Basel ; Berlin: Birkhäuser, 2013.
- [2] Jeff Cheeger und David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. Amsterdam [u.a.]: North-Holland, 1975.
- [3] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin und Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. 3. ed. Berlin ; Heidelberg [u.a.]: Springer, 2004.
- [4] Detlef Gromoll, Wilhelm Klingenberg und Wolfgang Meyer. *Riemannsche Geometrie im Großen*. 2. Aufl. Berlin ; Heidelberg [u.a.]: Springer, 1975.
- [5] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. New York: Academic Press, 1978.
- [6] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. 2. ed. New York ; Heidelberg [u.a.]: Springer, 2013.
- [7] John M. Lee. *Riemannian manifolds. an introduction to curvature*. New York ; Berlin ; Heidelberg [u.a.]: Springer, 1997.

Eine Inhaltsübersicht der in der Vorlesung behandelten Themen befindet sich auf der nächsten Seite.

---

<sup>1</sup>Mail an [M.Kaltschmidt@stud.uni-heidelberg.de](mailto:M.Kaltschmidt@stud.uni-heidelberg.de) oder [T.Ackermann@stud.uni-heidelberg.de](mailto:T.Ackermann@stud.uni-heidelberg.de)



# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Vorwort</b>  | <b>ii</b> |
| <b>Inhalt der Vorlesung</b>                           | <b>1</b>  |
| <b>1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten</b>          | <b>1</b>  |
| 1.1 Definitionen . . . . .                            | 2         |
| 1.2 Differenzierbare Abbildungen . . . . .            | 8         |
| 1.3 Untermannigfaltigkeiten . . . . .                 | 8         |
| 1.4 Tangentialraum . . . . .                          | 9         |
| <b>2 Vektorbündel</b>                                 | <b>18</b> |
| 2.1 Tangentialbündel . . . . .                        | 18        |
| 2.2 Vektorbündel . . . . .                            | 19        |
| 2.2.1 Direkte Summe (Whitney-Summe) . . . . .         | 23        |
| 2.2.2 Tensorbündel . . . . .                          | 23        |
| 2.2.3 Homomorphismenbündel . . . . .                  | 24        |
| 2.2.4 Duales Bündel . . . . .                         | 24        |
| 2.2.5 Alternierendes Vektorbündel . . . . .           | 24        |
| 2.3 Zusammenhang und kovariante Ableitung . . . . .   | 30        |
| 2.4 Krümmung . . . . .                                | 38        |
| 2.5 Krümmung und Parallelverschiebung . . . . .       | 41        |
| <b>3 Riemannsche Mannigfaltigkeiten</b>               | <b>46</b> |
| 3.1 Wiederholung: Symmetrische Bilinearform . . . . . | 46        |
| 3.2 Riemannsche Metriken . . . . .                    | 47        |
| 3.3 Levi-Civita-Zusammenhang . . . . .                | 51        |
| <b>4 Geodätische</b>                                  | <b>55</b> |
| 4.1 Die Exponentialabbildung . . . . .                | 60        |
| 4.2 Satz von Hopf-Rinow . . . . .                     | 75        |
| <b>Anhang</b>   | <b>I</b>  |
| <b>5 Wiederholungen und Exkurse</b>                   | <b>II</b> |
| 5.1 Tensoren & Tensorrechnung . . . . .               | II        |

## *Inhaltsverzeichnis*

|                              |   |           |
|------------------------------|---|-----------|
| 5.2                          | Explizite Rechnungen in Koordinaten . . . . . | III       |
| 5.2.1                        | Christoffel-Symbole . . . . .                 | IV        |
| 5.2.2                        | Parallelverschiebung . . . . .                | VI        |
| 5.3                          | Riemannsche Normalkoordinaten . . . . .       | VII       |
| <b>Abbildungsverzeichnis</b> |   | <b>IX</b> |



# 1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

## Worum geht es in der Differentialgeometrie?

In den ersten Semestern des Mathematikstudiums wird Analysis in linearen Vektorräumen und metrischen Räumen betrieben. Zudem wurden eventuell Banachräume und Hilberträume betrachtet. Zentrale Objekte dieser Vorlesung sind sogenannte **Riemannsche Mannigfaltigkeiten** (diese werden in Abschnitt 3 eingeführt). Dies sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten ausgestattet mit einer Riemannschen Metrik, d.h. einem Objekt, welches es uns erlaubt alle wichtigen geometrischen Größen zu beschreiben, wie zum Beispiel Winkel, Längen, etc. Riemannsche Mannigfaltigkeiten oder allgemeiner differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind im Allgemeinen weder lineare Vektorräume noch metrische Räume<sup>1</sup>.

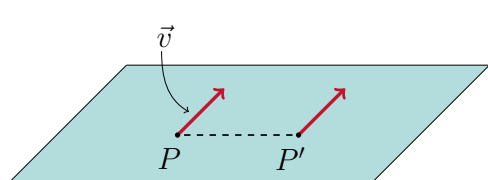
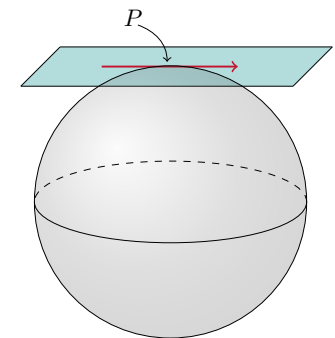
Unser Ziel ist es die Konzepte der Analysis und Geometrie auf diese differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Somit bleibt die Frage: was sind überhaupt differenzierbare Mannigfaltigkeiten? Dies ist Gegenstand dieses Kapitels.

Wir beginnen zunächst einmal mit einer kurzen Gegenüberstellung der bereits bekannten Konzepte aus dem  $\mathbb{R}^n$  mit den korrespondierenden Begriffen der Differentialgeometrie, welche wir in den kommenden Vorlesungen noch genauer kennenlernen werden.

---

<sup>1</sup>der fortgeschrittene Leser könnte nun einwenden, dass wir Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit der Struktur eines metrischen Raumes ausstatten können. Dies stimmt, aber das wissen wir jetzt noch nicht! A priori sind Riemannsche Mannigfaltigkeiten keine metrischen Räume. Mehr dazu in Abschnitt 3



|  |   |
|--|---|
|  <p style="text-align: center;"><math>\mathbb{R}^n</math></p>   |  <p style="text-align: center;"><math>\mathcal{M}</math></p>  |
| <p style="text-align: center;">Parallelverschiebung</p> <p style="text-align: center;">Gerade = kürzeste Verbindung</p> <p style="text-align: center;">flacher Raum</p> <p style="text-align: center;">Skalarprodukt</p> | <p style="text-align: center;">Begriff des Zusammenhangs</p> <p style="text-align: center;">Konzept der Geodätischen</p> <p style="text-align: center;">gekrümmter Raum</p> <p style="text-align: center;">Riemannsche Metrik</p> |

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind topologische Mannigfaltigkeiten mit einer zusätzlichen Struktur, welche uns erlaubt Analysis auf der Mannigfaltigkeit zu betreiben ("wir wollen differenzieren können").

Um diesen Satz mit Sinn zu füllen, müssen wir folgende Fragen klären:

- a) Was sind topologische Mannigfaltigkeiten?
- b) Was ist mit zusätzlicher Struktur gemeint?

## 1.1 Definitionen

Wir beginnen damit **a)** zu erläutern. Topologische Mannigfaltigkeiten sind die zentralen Objekte der Topologie, welches jenes Teilgebiet der Mathematik ist, welches die Eigenschaften von topologischen Räumen untersucht.

Um topologische Mannigfaltigkeiten definieren zu können wiederholen wir zunächst die Definition eines topologischen Raumes.

Ein topologischer Raum ist eine Menge  $X$  ausgestattet mit einer Topologie, d.h. einer Teilmenge der Potenzmenge von  $X$ , welche mehreren Axiomen genügt. Topologien erlauben es die zunächst intuitive Anschauung von beispielsweise "Nähe" mathematisch zu präzisieren und auf allgemeine Situationen zu übertragen. Dies ist der allgemeinste Begriff

eines Raumes, indem man Konzepte wie Steigkeit, Konvergenz, Kompaktheit und Zusammenhang sinnvoll definieren kann. Metrische Räume sind z.B. topologische Räume mit mehr Struktur.

**Erinnerung:**  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, wenn  $\forall p \in U \exists \varepsilon > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(p) \subset U$ . Dieser Begriff von Offenheit heißt *euklidische Topologie* und erfüllt:

- i)  $\emptyset, \mathbb{R}^n$  offen
- ii)  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen  $\Rightarrow U \cap V$  offen in  $\mathbb{R}^n$
- iii)  $U_i, i \in I$  offen in  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \subset \mathbb{R}^n$  offen

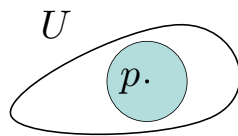


Abbildung 1.1: Offene Menge

### Definition 1.1 (Topologischer Raum)

Ein topologischer Raum ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer Menge  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ , sodass:

- i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- ii)  $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$
- iii)  $U_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Elemente aus  $\mathcal{T}$  heißen *offen*. Komplemente davon abgeschlossen.

Ein topologischer Raum besteht also aus den Daten  $X$  und  $\mathcal{T}$ . Oft wird jedoch nur  $X$  angegeben, wenn die Wahl von  $\mathcal{T}$  aus dem Kontext ersichtlich ist. Beachten Sie, dass dies unpräzise ist und zu Verwechslungen führen kann—so kann eine Menge  $X$  mit ganz unterschiedlichen Topologien ausgestattet sein. Insbesondere kann z.B. eine Menge  $U \subset X$  bezüglich einer Topologie  $\mathcal{T}_1$  auf  $X$  offen sein, während dies für eine andere Topologie  $\mathcal{T}_2$  auf  $X$  nicht der Fall ist.

**Bemerkung:** Alternativ ist auch eine Definition über abgeschlossene Mengen und Umgebungen möglich.

### Beispiel 1.3

1. Das Ihnen vermutlich am besten vertraute Beispiel ist das des Euklidischen Raums  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der euklidischen Metrik

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

## 2. Metrische Räume

Es gibt aber auch weniger anschauliche Beispiele:

3. Diskrete offene Mengen
4. Indiskrete Topologie
5. Drei Punkte
6. Hilbertwürfel

Zum Schluss wollen wir noch ein paar natürliche Konstruktionen von topologischen Räumen aus ebenen topologischen Räumen diskutieren. Diese liefern natürlich große Beispielsklassen.:

### Beispiel 1.4

- i) Produkttopologie
- ii) Quotiententopologie
- iii) Teilraumtopologie.

Sei  $N$  eine Teilmenge von  $X$ . Dann ist auch  $(N, \mathcal{T}_1)$  ein topologischer Raum, wobei  $\mathcal{T}_1$  wie folgt gegeben ist:

$$V \in \mathcal{T}_1 \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{T}, \text{ sodass } V = N \cap U$$

### Definition 1.5 (Topologische Mannigfaltigkeiten)

Eine topologische Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum  $\mathcal{M}$  der Dimension  $n$  mit folgenden Eigenschaften:

- i)  $\mathcal{M}$  ist hausdorffsch. Das heißt für alle  $p, q \in \mathcal{M}$  mit  $p \neq q$  existieren zwei disjunkte, offene Umgebungen  $U \ni p$  und  $V \ni q$  wobei  $U, V \in \mathcal{T}$

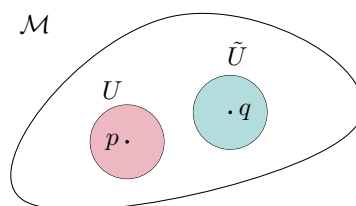


Abbildung 1.2: Hausdorff'sche Eigenschaft

### ii) 2. Abzählbarkeitsaxiom

$\mathcal{M}$  hat eine abzählbare Basis der Topologie, das heißt es existiert eine abzählbare Menge  $\{U_1, \dots, U_k, \dots\}$  offener Teilmengen oder abzählbar viele offene Mengen  $U_1, \dots, U_k, \dots$  mit  $U_i \in \mathcal{T}$ , sodass  $\forall p \in \mathcal{M}$  und alle Umgebungen  $U$  von  $p$  gibt es ein  $k$  sodass  $p \in U_k \subseteq U$ .

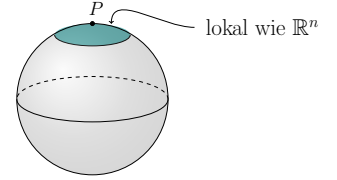
- iii)  $\mathcal{M}$  ist homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , das heißt  $\forall p \in \mathcal{M}$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $p$  und ein **Homöomorphismus**  $X : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  (offen).

**Definition 1.6 (Karte, Atlas)**

Das Paar  $(X, U)$  heißt **Karte** von  $\mathcal{M}$  um  $p$ .

Eine Menge  $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}\}$  von Karten heißt **Atlas** von  $\mathcal{M}$ , falls

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \mathcal{M} \quad (1.1)$$



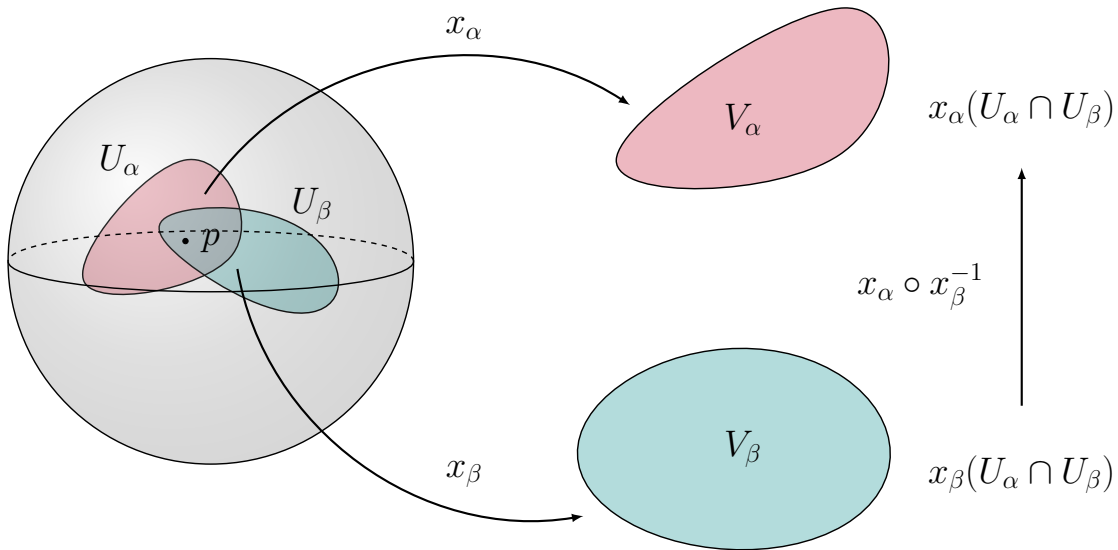
Topologische Mannigfaltigkeiten sind die Grundbausteine. Nun wollen wir auf diesen Mannigfaltigkeiten Geometrie betreiben. Dafür benötigen wir mehr Struktur. Wir wollen die differenzierbare Struktur des  $\mathbb{R}^n$  auf unseren Mannigfaltigkeiten "holen".

**Definition 1.7 (Kartenwechsel)**

Seien  $x_\alpha$  und  $x_\beta$  zwei Karten, dann ist der Kartenwechsel wie folgt definiert:

$$x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

Dies ist ein Homöomorphismus.



**Abbildung 1.3:** Kartenwechsel

[ $C^\infty$ -Atlas] Nun wollen wir, dass  $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$  Diffeomorphismen sind.

**Definition 1.8**

Sei  $\mathcal{M}$  eine topologische Mannigfaltigkeit.

- a) Ein Atlas  $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha)\}$  auf  $M$  heißt  $C^\infty$ -Atlas, falls alle Kartenwechsel  $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$  mit  $\alpha, \beta \in A$   $C^\infty$ -Diffeomorphismen sind.
- b) Sei  $\mathcal{A}$  ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M$ .  
Eine Karte  $(x, U)$  ist verträglich mit  $\mathcal{A}$ , falls  $x \circ x_\alpha^{-1}$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist.

Gegeben ein  $C^\infty$ -Atlas, so kann man diesen zu einem maximalen  $C^\infty$ -Atlas vervollständigen. Maximal bedeutet hierbei, dass der Atlas nicht strikt in einem anderen enthalten ist.

**Definition 1.9 (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)**

Eine differenzierbare Struktur auf einer topologischen Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein maximaler  $C^\infty$ -Atlas. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur.

**Bemerkung:** Man kann auch eine topologische Mannigfaltigkeit definieren, ohne das 2. Abzählbarkeitsaxiom zu fordern.

**Aber:** Dann bekommt man Mannigfaltigen mit ganz anderen Eigenschaften als diejenigen, die wir betrachten wollen.

**Wichtig:** Hausdorffsch + 2. Abzählbarkeitsaxiom  $\Rightarrow$  parakompakt, d. h. jede offene Überdeckung hat eine lokal endliche Verfeinerung.

$(V_j)$  heißt Verfeinerung von  $(U_i)$ , falls  $\forall V_j \exists U_i$  mit  $V_j \subseteq U_i$

Lokal endlich:  $\forall p \in X \exists$  Umgebung  $U$ , die nur endlich viele  $V_j$  trifft

Parakompakt  $\Rightarrow \exists$  Partition der Eins  $f$  mit

$$f_i : V_i \subseteq X \rightarrow [0, 1], \sum_{i \in I} f_i(x) = 1$$

**Beispiel 1.11**

Metrische Räume sind parakompakt.

**Beispiel 1.12 (differenzierbare Mannigfaltigkeiten)**

1.  $\mathbb{R}^n$  mit Atlas  $\mathcal{A} = \{(\text{id}, \mathbb{R}^n)\}$
2.  $V$  Vektorraum,  $B$  Basis mit  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ , Atlas  $\mathcal{A} = \{(\chi_B, V)\}$

$$\chi_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

wobei  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis ist.

3.  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $(\chi_U, U)$  mit  $\chi_U = \text{id}|_U$ ,  $V \subseteq \mathcal{M}^n$ ,  $M$  differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $\mathcal{A} = \{(\chi_U, U)\}$  Atlas von  $\mathcal{M}$   
 $\mathcal{A}_V = \{(\chi_V, U_V)\}$  wobei  $(\chi_V, U_V) = (\chi_{U \cap V}, U \cap V)$

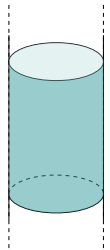
4.  $\mathcal{M}_1 = S^1$ ,  $M_2 = \mathbb{R}$ ,  $M_1 \times M_2 = \text{"unendlicher Zylinder"}$

Seien  $M_1^{n_1}, M_2^{n_2}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so ist  $M_1 \times M_2$  ebenfalls eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n_1 + n_2$ .

Atlas  $\mathcal{A} = \{(x \times y, U \times V)\}$ , wobei

$(x, U) = \text{Karte von } M_1$

$(y, V) = \text{Karte von } M_2$



$$(x \times y)(p_1, p_2) = (x(p_1), y(p_2))$$

5.  $S_R^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

- Teilraumtopologie:  $U \subset S_R^n$  offen  $\Leftrightarrow \exists U' \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen mit  $U = U' \cap S_R^n$
- Atlas: Wir brauchen zwei Karten. Einmal für den Nord- und einmal für den Südpol (haben unterschiedliche Orientierung).  
Nordpol (N):

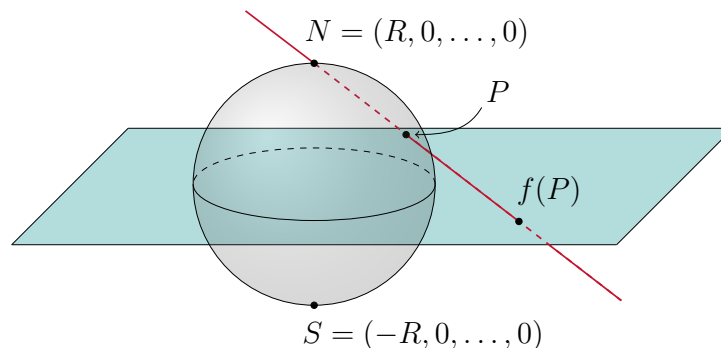
$$f_N : S_R^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

$$f_N(x_0, \dots, x_n) = \frac{R}{R - x_0}(x_1, \dots, x_n) \quad (1.4)$$

Analog für den Südpol (S):

$$f_S : \mathcal{M}_s \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

→ Zwei Karten  $f_N$  und  $f_S$  ("Stereographische Projektionen").



**Bemerkung:**  $N$  mit der Teilraumtopologie und dem Atlas  $\mathcal{A}_N = \{(\chi|_U, U \cap N)\}$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

### Definition 1.14

Seien  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Einbettung ist eine differenzierbare Abbildung

$$f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$$

sodass

1.  $f(N) \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit
2.  $f : N \rightarrow f(N)$  Diffeomorphismus

## 1.2 Differenzierbare Abbildungen

### Definition 1.15 (Differenzierbare Abbildungen)

Seien  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt differenzierbar, falls  $\forall p \in \mathcal{M}$  Karten  $(x, U)$  von  $\mathcal{M}$  um  $p$  (Karten  $(y, V)$  von  $\mathcal{N}$  um  $f(p)$ )

Es gilt:  $y \circ f \circ x^{-1} : x(U \cap f^{-1}(U')) \rightarrow y(f(U) \cap U')$  ist  $C^\infty$ -differenzierbar. Wir bezeichnen die Menge aller differenzierbaren Abbildungen durch  $C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ;  $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ .

### Definition 1.16 (Diffeomorphismus)

Eine differenzierbare Abbildung  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt Diffeomorphismus, falls  $f$  eine Bijektion und  $f^{-1}$  differenzierbar ist.

Die Menge aller Diffeomorphismen  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  bezeichnen wir mit  $\text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .  $\text{Diff}(\mathcal{M}) \equiv \text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  bilden eine Gruppe (Diffeomorphismengruppe).

## 1.3 Untermannigfaltigkeiten

### Definition 1.17 (Untermannigfaltigkeiten)

Sei  $\mathcal{M}$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$  heißt Untermannigfaltigkeit falls:  $\forall p \in \mathcal{N} \exists$  Karte  $(x, U)$  von  $\mathcal{M}$  um  $p$   $x : \mathcal{M} \rightarrow V' \times V''$  mit  $x(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = V' \times \{z_0\}$  für ein  $z_0 \in V''$

**Bemerkung:**  $\mathcal{N}$  mit der Teilraumtopologie und dem Atlas  $\mathcal{A}_{\mathcal{N}} = \{(x_U, U \cap \mathcal{N})\}$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

### Definition 1.19 (Einbettung)

Seien  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Einbettung ist eine differenzierbare Abbildung

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \tag{1.6}$$

Sodass

- $f(\mathcal{N}) \cap \mathcal{M}$  eine Umkehrfunktion.
- $f : \mathcal{N} \rightarrow f(\mathcal{N})$  Diffeomorphismus.

## 1.4 Tangentialraum

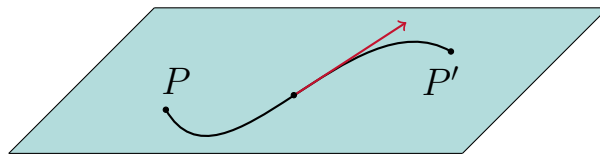
### Definition 1.20

1. Ein Tangentialvektor an  $\mathcal{M}$  im Punkt  $p \in \mathcal{M}$  ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$v : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ .

2. Die Menge aller Tangentialvektoren an  $\mathcal{M}$  in  $p$  heißt Tangentialraum von  $\mathcal{M}$  in  $p$ :  $T_p\mathcal{M}$  ist ein Vektorraum.



### 1.21 Hilfslemma (Existenz einer Glockenfunktion)

Sei  $U \subseteq \mathcal{M}$  offen,  $p \in U$ . Dann  $\exists \varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ , s. d.

1.  $\text{supp } \varphi \subseteq U$
2.  $\varphi = 1$  auf einer Umgebung  $U' \subset U$  von  $p$  ist

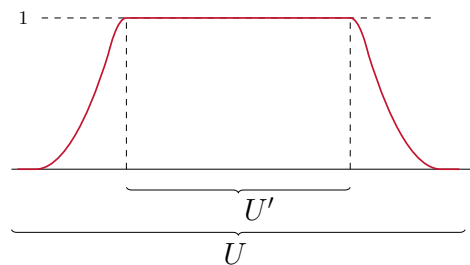
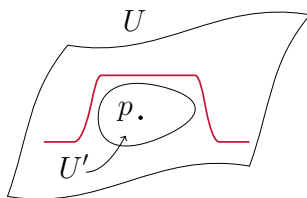


Abbildung 1.4: Visualisierung des Hilfslemmas (1.21) ("bump function")

### Beweis:

Sei  $(x, U)$  eine Karte um  $p$ ,  $\varepsilon > 0$ , s. d.  $B_{2\varepsilon}(x(p)) \subset V \subset \mathbb{R}^n$  und wähle  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\left. \begin{array}{l} \text{supp}(\psi) \subset B_{2\varepsilon}(x(p)) \\ \varphi = 1 \text{ auf } B_\varepsilon \end{array} \right\} \text{ Resultat aus Analysis}$$

$$\text{Setze } \varphi(q) = \begin{cases} \psi(x(q)) & \text{für } q \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

□



### 1.23 Satz (Eigenschaften des Tangentialraums)

Für  $v \in T_p\mathcal{M}$  gilt:

1.  $v(\text{konstante Funktion}) = 0$
2. Falls  $f = g$  in einer Umgebung von  $p$ , so gilt  $v(f) = v(g)$

"Lokalisierung von Tangentialvektoren"

**Beweis: (zu 2)**

Wähle  $\varphi$  wie im Hilfslemma, wobei  $U$  so gewählt ist, dass  $\varphi f = \varphi g$  auf  $U$  ist. Nun gilt:

$$\begin{aligned} v(\varphi f) &= v(\varphi)f(p) + \varphi(p)v(f) \\ &= v(\varphi)f(p) + v(f) \\ v(\varphi g) &= v(\varphi)g(p) + v(g) \end{aligned}$$

Dann folgt  $v(\varphi f) = v(\varphi g) \Leftrightarrow v(f) = v(g)$ . □

**Beweis: (zu 1)**

$v(\lambda f) = \lambda v(f)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

zz:  $v(1) = 0$ . Aufgrund von  $v(\lambda) = \lambda v(1)$  genügt es zu zeigen, dass  $v(1) = 0$ . Dies folgt aus der Produktregel

$$v(1) = v(1 * 1) = 1v(1) + v(1)1 = 2v(1) \Rightarrow v(1) = 0 \quad \square$$

Jede Karte liefert eine spezielle Basis von  $T_p\mathcal{M}$ .

#### Definition 1.26

Sei  $(x, U)$  eine Karte von  $\mathcal{M}$  um  $p$ . Definiere Tangentialvektoren  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$  ( $i = 1, \dots, m$ ) wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f) := \partial_i(f \circ x^{-1}) \Big|_{x(p)} \quad (1.7)$$

Hierbei bedeutet  $\partial_i$  die  $i$ -te partielle Ableitung.

### 1.27 Satz

Die Tangentialvektoren  $(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p)$  bilden eine Basis des  $T_p\mathcal{M}$ . Jeder Tangentialvektor lässt sich schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^m v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{i=1}^m \xi \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p. \quad (1.8)$$

**Beweis: (Satz 1.27 Teil 1)**

Es gilt die lineare Unabhängigkeit:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (x^j) = \delta_{ij} \quad (1.9)$$

Jetzt muss noch gezeigt werden, dass  $(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p)$  ein Erzeugendensystem für  $T_p\mathcal{M}$  ist. Dafür benötigen wir allerdings zunächst ein Hilfslemma. □

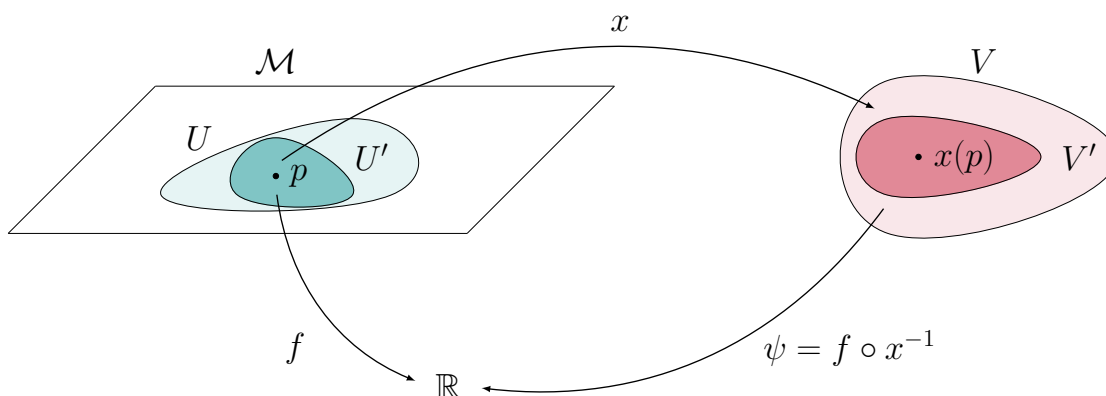
**1.29 Hilfslemma**

Sei  $f : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Dann existiert eine Umgebung  $U' \subset U$  von  $p$  ( $p \in U'$ ) und eine glatte Funktion  $f_i : U' \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^m (x_i - x_i(p)) f_i. \quad (1.10)$$

Wobei  $f_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i} \big|_p (f)$ .

**Beweis:**



**Abbildung 1.5:** Veranschaulichung von Hilfslemma 1.29

Nach Abbildung ?? gilt:

$$\psi(u) - \psi(u_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \psi(tu + (1-t)u_0) dt$$

Hierbei ist  $u = x(q)$  mit  $q \in \mathcal{M}$  und  $u_0 = x(p)$ .

$$\psi(u) - \psi(u_0) = \sum_i (u^i - u_0^i) \int_0^1 \underbrace{\frac{d\psi}{du^i}}_{:=\psi_i(u)} dt$$

Setze  $f_i = \psi_i \circ x : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f_i$  ist glatt und es gelten folgende Eigenschaften nach Definition:

- $\psi(u) - \psi(u_0) = \psi(x(q)) - \psi(x(p)) = f(q) - f(p)$
- $u^i = x^i(q)$
- $u_0^i = x^i(p)$

- $\psi_i(u) = \psi_i(x(1)) = f_i(q)$

Diese Eigenschaften können wir nun wie folgt verwenden:

$$f(q) - f(p) = \sum_{i=1}^n (x_i(q) - x_i(p)) f_i(q)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f) &= \partial_i \underbrace{(f \circ x^{-1})}_{\psi} \Big|_{x(p)} \\ &= \partial_i \psi \Big|_{x(p)} \\ &= \psi_i(x(p)) = f_i(p) \end{aligned}$$

Da  $\psi(u) = \psi(u_0) + \sum_i (u^i - u_0^i) \psi_i(u)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_i} \psi \Big|_{x(p)} = \psi_i(u) \Big|_x (p) = \psi(x(p))$$

Und somit gilt schließlich  $f_i(p) = \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_p (f)$ . □

Nun können wir unseren Beweis fortführen.

**Beweis: (Satz 1.27 Teil 2)**

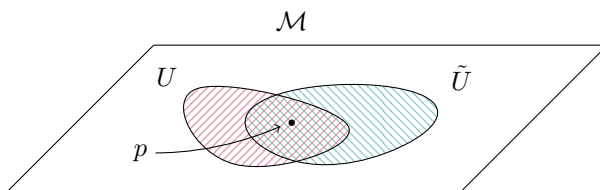
$$\begin{aligned} v(f) &= v(f(p) + \sum_i (x_i - x_i(p)) f_i) \\ &= v(f(p)) + \sum_i v(x_i - x_i(p)) f_i \end{aligned}$$

Benutze Produktregel

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_i \underbrace{((x_i(p) - x_i(p)) v(f_i))}_{=0} + \underbrace{v(x_i - x_i(p)) f_i}_{=v(x_i)} \\ &= \sum_i v(x_i) f_i \\ &= \sum_i v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f \end{aligned} \quad \square$$

### 1.32 Satz (Transformationsregel)

Seien  $(x, U)$  und  $(\tilde{x}, \tilde{U})$  zwei Karten um  $p \in \mathcal{M}$ .



Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \Big|_p = \sum_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \Big|_p (x_j)}_{\in \mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \quad (1.11)$$

(In der linearen Algebra hatten Transformationen die ähnliche Gestalt:  $\tilde{v}_i = \sum_j a_{ij} v_j$ )

**Definition 1.33 (Differential, Ableitung)**

Seien  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  glatt. Das **Differential (Ableitung)** von  $f$  in  $p$  ist die lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f \Big|_p : T_p \mathcal{M} &\rightarrow T_{f(p)} \mathcal{N} \\ v &\mapsto \mathrm{d}f \Big|_p (v), \end{aligned}$$

welche definiert ist durch:

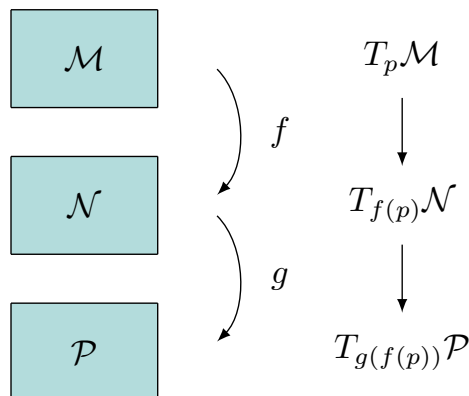
$$\underbrace{\mathrm{d}f \Big|_p}_{T_{f(p)} \mathcal{N}} \underbrace{(v)}_{\in T_p \mathcal{M}} = \underbrace{v(\phi \circ f)}_{\in T_{f(p)} \mathcal{N}}, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$$

Fakt:  $\mathrm{d}f \Big|_p$  ist linear.

**1.34 Satz (Kettenregel)**

Seien  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  und  $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$  glatte Abbildungen. Dann gilt:

$$\mathrm{d}(g \circ f) \Big|_p = \mathrm{d}g \Big|_{f(p)} \circ \mathrm{d}f \Big|_p \quad (1.12)$$



**Beweis: (Satz 1.34)**

$$\begin{aligned}
 \mathrm{d}(g \circ f) \Big|_p (v)(\phi) &= v(\phi \circ g \circ f) \\
 &= \mathrm{d}f \Big|_p (v)(\phi \circ g) \\
 &= \mathrm{d}g \Big|_{f(p)} \circ \mathrm{d}f \Big|_p (v)(\phi)
 \end{aligned}
 \quad \square$$

### 1.36 Satz

Sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  glatt und sei  $(x, U)$  eine Karte von  $\mathcal{M}$  um  $p$  und  $(y, V)$  eine Karte von  $\mathcal{N}$  um  $p$ . Setze  $f_j = y_j \circ f$  mit  $f_j : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , dann gilt:

$$\underbrace{\mathrm{d}f \Big|_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right)}_{\in T_{f(p)} \mathcal{M}} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f_j)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)}}_{\in T_{f(p)} \mathcal{N}} \quad (1.13)$$

### Definition 1.37 (regulärer Wert/Punkt, Submersion, Immersion)

Sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  glatt und es gelte  $\dim \mathcal{M} = m$ ,  $\dim \mathcal{N} = n$ .

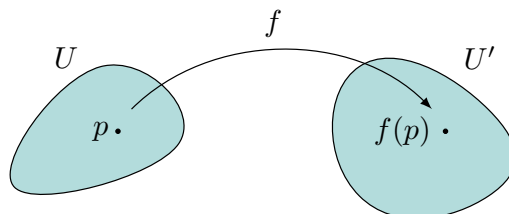
1. Rang  $f$  in  $p$  ist  $\mathrm{Rang} \mathrm{d}f \Big|_p$ .
2.  $p \in \mathcal{M}$  heißt regulärer Punkt ( $\in \mathcal{M}$ )  $\Leftrightarrow \mathrm{Rang} \mathrm{d}f \Big|_p = \dim \mathcal{N}$ .
3.  $q \in \mathcal{N}$  heißt regulärer Wert ( $\in \mathcal{N}$ )  $\Leftrightarrow \forall p \in f^{-1}(q)$  sind reguläre Punkte.
4.  $f$  heißt Submersion  $\Leftrightarrow f$  surjektiv und alle  $p \in \mathcal{M}$  sind reguläre Punkte.
5.  $f$  heißt Immersion  $\Leftrightarrow \mathrm{d}f \Big|_p$  injektiv für alle  $p \in \mathcal{M}$

**1.38 Satz (Umkehrsatz)**

Sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  glatt. Sei  $df|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$  ein Isomorphismus, dann existiert eine Umgebung  $U$  um  $p$  und eine Umgebung  $U'$  um  $f(p)$ , so dass

$$f|_U : U \rightarrow U' \quad (1.14)$$

ein Diffeomorphismus ist.

**Beweis: (Satz 1.38)**

Nutze Karten um dies auf den euklidischen Fall zu führen.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \\
 \downarrow x & & \downarrow y \\
 V \subseteq \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\phi} & V \subseteq \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Seien  $(x, U)$  und  $(y, U')$  Karten von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  um  $p$  und  $f(p)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt:  $f(U) \subset U'$ . Dann ist  $\phi$  eine glatte Abbildung deren Differential  $d\phi|_{x(p)}$  invertierbar ist. Umkehrsatz im  $\mathbb{R}^n$  auf  $\phi$  anwenden: Es existieren Umgebungen  $\hat{V}$  von  $x(p)$  und  $\hat{V}'$  von  $y(f(p)) = \phi(x(p))$ , so dass  $\hat{\phi}|_{\hat{V}}$  ein Diffeomorphismus ist. Dann ist

$$f|_{x^{-1}(\hat{V})} : x^{-1}(\hat{V}) \rightarrow y^{-1}(\hat{V}')$$

ein Diffeomorphismus.

$$\phi = y \circ f \circ x^{-1} \Rightarrow f = y^{-1} \circ \phi \circ x$$

□

### 1.40 Satz (Satz über implizite Funktionen)

Sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  glatt und es gelte  $\dim \mathcal{M} = m$ ,  $\dim \mathcal{N} = n$ .

1. Sei  $\text{Rang}_p f = r$  und  $v \in V$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$ . Dann existiert zu jeder Karte  $(y, U')$  um  $f(p)$  eine Karte  $(x, U)$  um  $p$ , so dass

$$y \circ f \circ x^{-1}(v_1, \dots, v_m) = (v_1, \dots, v_r, \phi_{r+1}(v), \dots, \phi_n(v)). \quad (1.15)$$

Falls  $y(f(p)) = 0$ , so kann man  $x$  so wählen, dass  $x(p) = 0$  und  $\phi_j(0) = 0$  ( $\forall j > r$ ).

2. Sei  $\text{Rang } f = r$  auf einer Umgebung von  $p$ . Dann gibt es Karten  $(x, U)$ ,  $(y, U')$ , so dass

$$y \circ f \circ x^{-1}(v_1, \dots, v_m). \quad (1.16)$$

#### Beweis: (Satz 1.40 Teil 1)

Wähle Karten und modifiziere diese geschickt. Sei  $(y, U')$  eine Karte von  $\mathcal{N}$  um  $f(p)$ . Sei  $(\hat{x}, U)$  eine Karte von  $\mathcal{M}$  um  $p$  mit  $\hat{x}(p) = 0$ . Setze

$$\hat{A} = (\hat{A})_{ij} = (\partial_i \hat{\phi}_j),$$

mit  $\phi = y \circ f \circ x^{-1}$ . Da  $\text{Rang}_p f = r$ , können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$\det \tilde{A} \neq 0.$$

Wobei hier nun  $\tilde{A} = (\hat{A}_{ij})_{1 \leq i \leq r}$ . Setze

$$x_i = \begin{cases} y_i \circ f & 1 \leq i \leq r \\ \hat{x}_i & \text{falls } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Dann gilt  $x(p) = 0$  und

$$\partial_i (x_j \circ \hat{x}^{-1})(0) = \begin{pmatrix} \partial_i \hat{\phi}_j(0) & \star \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass  $\text{Rang } x = m = \dim \mathcal{M}$  im Punkt  $p$ . Mit Hilfe des Umkehrsatzes folgt, dass  $x$  ein lokaler Diffeomorphismus ist und eine Umgebung  $U$  um den Punkt  $p$  existiert und eine Umgebungen  $V$  von 0 in  $\mathbb{R}^n$ , sodass  $x : \mathcal{M} \rightarrow V$  eine Karte ist und

$$\begin{aligned} \phi(v_1, \dots, v_m) &= y \circ f \circ x^{-1}(v_1, \dots, v_m) \\ &= (v_1, \dots, v_r, \phi_{r+1}(v), \dots, \phi_m(v)). \end{aligned}$$

Wobei  $\phi_k$  glatt auf  $U'$  sind mit  $\phi_i(0) = 0$ . Betrachte die Jacobi-Matrix:

$$A_{ij} = (\partial_i \phi_j)_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \star & \partial_i \phi_j \end{pmatrix}$$

Da  $\text{Rang } \phi = r$  in einer Umgebung von  $U = 0$  hat folgt:

$$\partial_i \phi_j = 0 \quad \forall i, j > r. \quad \square$$

**1.42 Korollar**

Sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  mit  $\dim \mathcal{M} = m$  und  $\dim \mathcal{N} = n$  glatt, dann gilt:

1. Sei  $q \in \mathcal{N}$  ein regulärer Wert, so ist

$$\mathcal{H} = f^{-1}(q) = \{p \in \mathcal{M} \mid f(p) = q\} \quad (1.17)$$

eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m - n$ .

2. Sei  $f$  linear in einer Umgebung von  $\mathcal{H} = f^{-1}(q)$  vom Rang  $r$ , so ist  $\mathcal{H}$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m - r$ . Der Tangentialraum  $T_p \mathcal{H}$  ist isomorph zu

$$\ker df \Big|_p \subseteq T_p \mathcal{M}, \quad \forall p \in \mathcal{H}. \quad (1.18)$$



## 2 Vektorbündel

### 2.1 Tangentialbündel

Wir wollen nun alle Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  gemeinsam betrachten.

$$T\mathcal{M} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M} = \{(p, v) | p \in \mathcal{M}, v \in T_p\mathcal{M}\} \quad (2.1)$$

Dies soll nun die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit haben. Das heißt wir müssen eine Topologie und eine  $C^\infty$ -Struktur auf  $T\mathcal{M}$  definieren.

$$\begin{aligned} \pi : T\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (p, v) &\mapsto p \end{aligned}$$

Sei  $(x, U)$  eine Karte von  $\mathcal{M}^m$ . Dann definieren wir eine Karte  $(\bar{x}, \bar{U})$  von  $T\mathcal{M}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{p \in U} T_p\mathcal{M} \\ \bar{x} : \bar{U} &\rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m} \\ (p, v) &\mapsto (x(p), \xi) \end{aligned}$$

Wobei  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m) \in \mathbb{R}^m$  gegeben ist durch:

$$v = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \quad \forall p \in U. \quad (2.2)$$

Wir können aber Kartenwechsel betrachten.

Seien  $(\bar{x}, \bar{U})$  und  $(\bar{y}, \bar{U}')$  zwei Karten. Betrachte die Abbildungen:

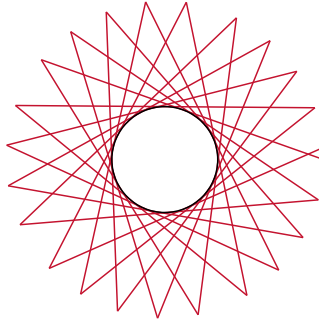
$$\begin{aligned} \bar{y} \circ \bar{x}^{-1} : \underbrace{x(\bar{U} \cap \bar{U}')}_{x(U \cap U') \times \mathbb{R}^m} &\rightarrow \underbrace{\bar{y}(\bar{U} \cap \bar{U}')}_{y(U \cap U') \times \mathbb{R}^m} \\ (v, \xi) &\mapsto (y \circ \underbrace{x^{-1}(v)}_{v \in T\mathcal{M}|_{\bar{U} \cap \bar{U}'}} , \eta) \end{aligned}$$

Wobei  $\eta = d(y \circ x^{-1})|_U \xi$ .

Da  $y \circ x^{-1}$  Diffeomorphismus ist, ist  $\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}$  ein Isomorphismus. Nun können wir die Topologie auf  $T\mathcal{M}$  definieren.  $O \subset T\mathcal{M}$  offen, falls  $\bar{x}(O \cap \bar{U})$  offen in  $V \times \mathbb{R}^m$  ist für alle Karten  $(x, U) \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$  (bzw  $(\bar{x}, \bar{U}) \in \mathcal{A}_{T\mathcal{M}}$ )

**2.1 Satz**

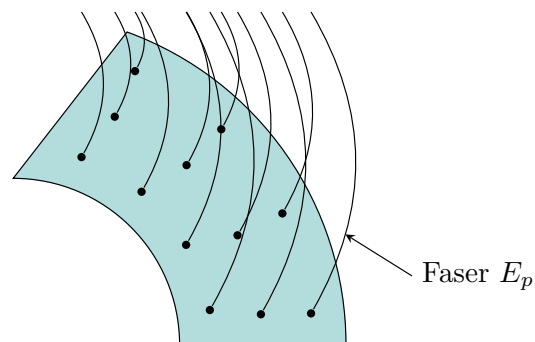
$T\mathcal{M}$  mit dieser Topologie ist eine topologische Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{A}_{T\mathcal{M}}$  eine differenzierbare Struktur.



**Abbildung 2.1:** Darstellung des Tangentialbündels eines Kreises

## 2.2 Vektorbündel

$T\mathcal{M}$  hat die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit. Allerdings hat es noch mehr, nämlich die eines Vektorbündels, was wir nun definieren.



**Abbildung 2.2:** Veranschaulichung eines Vektorbündels

**Definition 2.2 (Vektorbündel)**

Sei  $\mathcal{M}$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein  $\mathbb{R}$ -Vektorbündel vom Rang  $k$  über  $\mathcal{M}$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer glatten surjektiven Abbildung:

$$\pi : E \rightarrow \mathcal{M},$$

so dass:

1.  $\forall p \in \mathcal{M}$  hat  $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$  die Struktur eines  $\mathbb{R}$ -Vektorraums der Dimension  $k$ .  $E_p$  heißt Faser von  $E$  über  $p$ .
2. Für alle  $p$  in  $\mathcal{M}$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $p$  in  $\mathcal{M}$  und ein Diffeomorphismus, für den gilt:
  - $\pi \circ \phi = pr_1$
  - Für alle  $q \in U$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi \Big|_q : \{q\} \times \mathbb{R}^k &\rightarrow E_q \\ \{q, \xi\} &\mapsto \phi_q(\xi) := \phi(q, \xi) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.  $\phi$  heißt lokale Trivialisierung von  $E$ .

$$\begin{array}{ccc} \phi : U \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\quad} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow pr_1 \quad \swarrow \pi & \\ & U & \end{array}$$

**Bemerkung:** Ein Vektorbündel ist ein Tripel  $(E, \pi, \mathcal{M})$  aber wir schreiben oft nur  $E$ . Hierbei wird  $E$  Totalraum und  $\mathcal{M}$  Basis genannt.

### Beispiel 2.4

1. Triviales Bündel:

$$\begin{aligned} \pi : E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathcal{M} \\ (p, \xi) &\mapsto p \end{aligned}$$

2. Tangentialbündel

$$\begin{aligned} \pi : T\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (p, v) &\mapsto p \end{aligned}$$

3. Tautologisches Bündel

Hierbei ist die Mannigfaltigkeit der Reell projektive Raum  $\mathbb{RP}^n$  und  $E = \{(l, x) | l \in \mathbb{RP}^n, x \in l \subset \mathbb{R}^{n+1}\}$ .

$$\begin{aligned} \pi : E &\rightarrow \mathbb{RP}^n \\ (l, x) &\mapsto l \end{aligned}$$

Behauptung: Dies ist ein Vektorbündel vom Rang 1. Vektorraumstruktur auf  $E_l$ :

$$\begin{aligned}(l, x) + (l, y) &:= (l, x + y) \\ k(l, x) &:= (l, kx)\end{aligned}$$

Nun wollen wir uns damit beschäftigen wie wir Vektorbündel konstruieren können. Angenommen uns wäre das folgende gegeben:

1. Eine Familie von Vektorräumen  $E_p$  (mit  $p \in \mathcal{M}$ ) der Dimension  $k$
2. Eine offene Überdeckung  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  von  $\mathcal{M}$
3.  $\forall \alpha \in A, p \in U_\alpha$  gibt es den folgenden Isomorphismus:

$$\phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k \rightarrow E_p \tag{2.3}$$

Setze  $E = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} E_p$  und definiere folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned}\pi : E &\rightarrow \mathcal{M} \\ (p, v) &\mapsto p \\ \phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k &\rightarrow E \Big|_{U_\alpha} \\ (p, \xi) &\mapsto (p, \phi_{\alpha,p}(\xi)).\end{aligned}$$

Nun stellt sich die Frage unter welchen Voraussetzungen  $(E, \pi, \mathcal{M})$  ein Vektorbündel ist.

### 2.5 Lemma

Sei  $\mathcal{M}$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $E$  eine Menge und die Abbildung  $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$  surjektiv. Sei  $\{U_\alpha\}$  eine offene Überdeckung von  $\mathcal{M}$  zusammen mit bijektiven Abbildungen

$$\phi_\alpha^{-1} = \varphi : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k,$$

die  $pr_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$  erfüllen, so dass wann immer  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , dann ist

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cup U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k,$$

von der Form:

$$(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(p, v) = (p, \tau(p)v)$$

mit einer glatten Abbildung  $\tau : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$ .

Dann existiert eine eindeutige Struktur als glattes  $k$ -dim Vektorbündel über  $\mathcal{M}$  für die  $\varphi_\alpha^{-1}$  lokale Trivialisierungen sind.

**Beweis: (Lemma 2.5)**

Sei  $p \in \mathcal{M}$  und setze  $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$ . Falls  $p \in U_\alpha$ , dann ist

$$\varphi_\alpha \Big|_p : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k.$$

Definiere eine Vektorraumstruktur auf  $E_p$  durch die Forderung, dass die Abbildung  $\varphi_\alpha \Big|_p$  ein Isomorphismus ist. Durch Verkleinern von  $U_\alpha$  und Hinzunahme von weiteren offenen Mengen kann man annehmen, dass jedes  $U_\alpha$  diffeomorph zu  $\bar{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$  ist. Verknüpfung von  $\varphi_\alpha$  mit einem solchen Diffeomorphismus liefert eine Bijektion:

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \bar{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k.$$

Diese nutzen wir als Karte für  $E$ . Wegen Gleichung 2.5 bekommen wir eine glatte Struktur auf  $E$ .  $\square$

Sei  $(x, U)$  Karte von  $\mathcal{M}$ ,  $p \in U$ ,  $v \in T_p \mathcal{M}$ .

$$v = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \quad (2.4)$$

Definiere:

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto (p, v), \end{aligned}$$

dort wo  $(x)$  und  $(\bar{x})$  überlappen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p &= \left( \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_p \\ v &= \sum_{j=1}^m \xi_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_p = \sum_{ji1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \\ &= \sum_{i,j}^m \xi_i \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_p \\ &\Rightarrow \bar{\xi}_j = \sum_i v_i \left( \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

$$\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}(x, v) = (x, \bar{v}) \quad (2.5)$$

$$= (x, \tau(x)v) \quad (2.6)$$

Wobei nun  $\tau(x)$  gegeben ist durch  $\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i}$ .

Im Folgenden werden nun einige Beispiele für Vektorbündel angegeben.

### 2.2.1 Direkte Summe (Whitney-Summe)

Es seien zwei Vektorbündel gegeben:

$$\begin{aligned}\pi : E &\rightarrow \mathcal{M} \\ \pi' : E' &\rightarrow \mathcal{M}'\end{aligned}$$

mit Rang  $k$  bzw.  $k'$ . Dann existiert eine offene Überdeckung  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ , sodass für alle  $\alpha \in A$  und alle  $p \in U_\alpha$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k &\rightarrow E_p, & g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\rightarrow \text{Gl}(k, \mathbb{R}) \\ \phi'_{\alpha,p} : \mathbb{R}^{k'} &\rightarrow E'_p, & g'_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\rightarrow \text{Gl}(k', \mathbb{R})\end{aligned}$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p &:= E_p \oplus E'_p \\ \mathcal{E} &= \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{E}_p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{k'} &\rightarrow E_p \oplus E'_p \\ (v, w) &\mapsto (\phi_{\alpha,p}(v), \phi'_{\alpha,p}(w))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\rightarrow \text{Gl}(k + k', \mathbb{R}) \\ p &\mapsto \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(p) & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta}(p) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathcal{E}$  ist nun ein Vektorbündel. Wir nennen  $\mathcal{E}$  die Whitney-Summe von  $E$  und  $E'$  und schreiben:

$$\mathcal{E} = E \oplus E'.$$

### 2.2.2 Tensorbündel

Es seien  $E'$  und  $E''$  Vektorbündel über  $\mathcal{M}$  und  $(U_\alpha)$  sei wie oben definiert.

$$\begin{aligned}(E' \otimes E'')_p &:= E'_p \otimes E''_p \\ \phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^{k''} &\rightarrow E'_p \otimes E''_p \\ (v, w) &\mapsto \phi'_{\alpha,p}(v) \otimes \phi''_{\alpha,p}(w)\end{aligned}$$

Wir erhalten zusammen die folgende Übergangsmatrix:

$$g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta}(p) \otimes g''_{\alpha\beta}(p) \tag{2.7}$$

Diese Abbildung ist glatt und somit ergibt sich ein neues Vektorbündel.

### 2.2.3 Homomorphismenbündel

Es seien die Daten wie eben schon gegeben. Das Homomorphismenbündel

$$\text{Hom}_p(E', E'') := \text{Hom}(E'_p, E''_p),$$

ist wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha p} : \text{Hom}(\mathbb{R}^{k'}, \mathbb{R}^{k''}) &\rightarrow \text{Hom}(E'_p, E''_p) \\ f &\mapsto \phi''_{\alpha p} \circ f \circ (\phi'_{\alpha p})^{-1} \end{aligned}$$

### 2.2.4 Duales Bündel

Sei ein Vektorbündel  $(E, \pi, \mathcal{M})$  gegeben. Wir wollen nun das sogenannte duale Vektorbündel konstruieren. Wir führen hier die folgende Notation ein  $E^* = \text{Hom}(E, \mathbb{R})$ , wobei  $\mathbb{R}$  das triviale Vektorbündel vom Rang 1 ist. Ein wichtiges Beispiel ist hierbei das Kotangentenbündel  $T^*\mathcal{M} = \text{Hom}(T\mathcal{M}, \mathbb{R})$ .  $T_p^*\mathcal{M}$  heißt der Kotangentenraum.

Sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung.

$$\text{d}f \Big|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

Es gilt  $\text{d}f \Big|_p \in T_p^*\mathcal{M} \subset T^*\mathcal{M}$ . Sei  $x : U \rightarrow \mathcal{M}$  eine Karte

$$\text{d}x \Big|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Die so definierten Differentiale  $\{\text{d}x^1 \Big|_p, \dots, \text{d}x^n \Big|_p\}$  bilden eine Basis für  $T_p^*\mathcal{M}$ .

- $\text{d}x^i \Big|_p$  heißen Kotangentenvektoren
- $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  heißen Tangentenvektoren

Seien  $(x, U)$  und  $(y, U')$  zwei Karten um  $p$ .

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_j a_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \quad \text{wobei } a_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \quad (2.8)$$

$$\text{d}x^k = \sum_l b_l^k \text{d}y^l \Big|_p = \sum_l \frac{\partial x^k}{\partial y^l} \text{d}y^l \Big|_p \quad (2.9)$$

### 2.2.5 Alternierendes Vektorbündel

Das Alternierende Vektorbündel

$$\begin{aligned} \wedge^m(E', E'')_p &:= \wedge^m(E'_p, E''_p) \\ &= \{f : \underbrace{E'_p \times \dots \times E'_p}_{m\text{-mal}} \rightarrow E''_p\} \end{aligned}$$

Wobei  $f$  multilinear und alternierend ist.

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha p} : \wedge^m (\mathbb{R}^{k'}, \mathbb{R}^{k''}) &\rightarrow \wedge^m (E'_p, E''_p) \\ f &\mapsto ((v_1, \dots, v_m) \mapsto \phi''_{\alpha p}(f^{-1}(\phi_{\alpha p})'(v_1), \dots, f^{-1}(\phi'_{\alpha p})(v_m)))\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $g_{\alpha\beta}$  glatt ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\wedge^1(E', E'') &= \text{Hom}(E', E'') \\ \wedge^1(T\mathcal{M}, \mathbb{R}) &= T^*\mathcal{M}\end{aligned}$$

**Definition 2.7 (Bündel-Abbildung)**

Seien  $(E, \pi, \mathcal{M})$  und  $(E', \pi', \mathcal{M}')$  Vektorbündel. Ein paar  $(f, L)$  von glatten Abbildungen  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  und  $L : E \rightarrow E'$  heißt Bündelabbildung falls:

- $\pi' \circ L = f \circ \pi$
- $L|_{E_p}$  ist  $\mathbb{R}$ -linear

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}' \end{array} \quad (2.10)$$

**Beispiel 2.8**

Seien  $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$  glatte Mannigfaltigkeiten und  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  glatt. Dann ist  $(f, df)$  eine Bündel-Abbildung von  $T\mathcal{M}$  nach  $T\mathcal{M}'$ .

**Definition 2.9 (Unterbündel)**

Sei  $(E, \pi, \mathcal{M})$  ein Vektorbündel mit Rang  $k$ . Eine Untermannigfaltigkeit  $E' \subset E$  ist ein Unterbündel vom Rang  $k'$  falls

$$\pi|_{E'} : E' \rightarrow \mathcal{M}, \quad (2.11)$$

ein Vektorbündel ist.

**Beispiel 2.10 (Unterbündel)**



1.  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$TS^n \cong \{(p, x) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} | x \perp p\} \subset \underbrace{S^n \times \mathbb{R}^{n+1}}_{\text{triviales Bündel}}$$

ist ein Unterbündel

2.  $\mathbb{RP}^n$  mit dem tautologischen Bündel

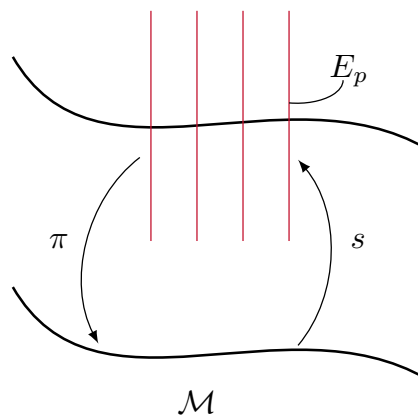
$$\{(l, x) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} | x \in l\} \subset \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$$

ist ein Unterbündel.

### Definition 2.11 (Schnitte von Vektorbündeln)

Sei  $(E, \pi, \mathcal{M})$  ein Vektorbündel. Eine glatte Abbildung  $s : \mathcal{M} \rightarrow E$  heißt Schnitt von  $E$ , falls  $\pi \circ s = \text{id}|_{\mathcal{M}}$ . Wir bezeichnen die Schnitte von  $E$  mit  $\Gamma(E)$ .

Sei  $U \subset \mathcal{M}$ . Ein Schnitt von  $E$  über  $U$  ist eine Abbildung  $s : U \rightarrow E$  mit  $\pi \circ s = \text{id}_U$ .



### Beispiel 2.12 (Schnitte)

- Nullschnitt

$$\begin{aligned} s : \mathcal{M} &\rightarrow E \\ p &\mapsto 0 \in E_p \end{aligned}$$

- Schnitte von  $T\mathcal{M}$  heißen Vektorfelder. Wir bezeichnen die Menge der **Vektorfelder**  $V : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  mit  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ .

### 2.13 Satz

Der Raum der Schnitte  $\Gamma(E)$  ist ein Modul über  $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ .

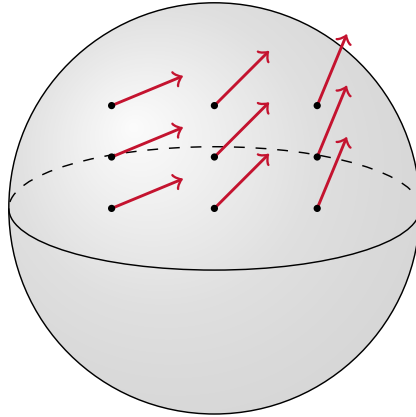


Abbildung 2.3: Beispiel für ein Vektorfeld

**Beweis: (Satz 2.13)**

Seien  $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ , so ist  $s_1 + s_2 \in \Gamma(E)$

$$(s_1 + s_2)(p) := s_1(p) + s_2(p) \quad (2.12)$$

Sei  $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ ,  $s \in \Gamma(E)$ , so ist  $\phi \circ s \in \Gamma(E)$

$$(\phi s)(p) := \phi(p)s(p). \quad (2.13)$$

□

**2.15 Lemma**

Sei  $(E, \pi, \mathcal{M})$  ein Vektorbündel und  $p \in \mathcal{M}$ . Dann existiert für alle  $x \in E_p$  ein Schnitt  $s \in \Gamma(E)$ , so dass  $s(p) = x$

**Beweis: (Lemma 2.15)**

Wähle eine lokale Trivialisierung von  $E$  auf  $W \ni p$

$$\phi : W \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(W) = E \Big|_W$$

und eine glatte Funktion  $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$  mit  $\varphi(p) = 1$  und  $\text{supp}(\varphi) \subset W$ . Sei  $\xi \in \mathbb{R}^k$ , so dass  $\phi(p, \xi) = x$ .

Definiere:

$$s(q) = \begin{cases} \phi(q, \varphi(q)\xi) & q \in W \\ 0_q & q \notin W \end{cases}$$

$s$  ist glatt, da folgendes gilt:

- $s$  ist glatt auf  $W$

- $s$  ist 0 auf einer Umgebung von  $\mathcal{M} \setminus W$

$$s(p) = (\phi(p), \phi(p)\xi) = \phi(p, \xi) = x$$

□

**Definition 2.17 (Lokaler Rahmen)**

Sei  $(E, \pi, \mathcal{M})$  ein Vektorbündel vom Rang  $k$  und  $U \subset \mathcal{M}$ . Ein Rahmen von  $E$  über  $U$  ist ein  $k$ -Tupel  $(s_1, \dots, s_k)$  von glatten Schnitten über  $U$  (das heißt  $s_i \in \Gamma_i(E)$ ), so dass für alle  $p \in U$   $s_1(p), \dots, s_k(p)$  eine Basis von  $E_p$  bilden.

**2.18 Satz**

Sei  $(E, \pi, \mathcal{M})$  ein Vektorbündel vom Rang  $k$ .

1. Aus einem lokalen Rahmen folgt eine lokale Trivialisierung. Sei  $(s_1, \dots, s_k)$  ein lokaler Rahmen über  $U \subset \mathcal{M}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \phi : U \times \mathbb{R}^k &\rightarrow E \Big|_U \\ (p, \xi) &\mapsto \sum_{i=1}^k \xi_i s_i(p), \end{aligned}$$

eine lokale Trivialisierung

2. Aus einer lokalen Trivialisierung folgt ein lokaler Rahmen. Sei  $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E \Big|_U$  eine lokale Trivialisierung. Dann ist  $(s_1, \dots, s_k)$  ein lokaler Rahmen mit

$$s_i(p) = \phi(p, e_i),$$

wobei  $\{e_i\}$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^k$  ist.

**Beweis: (Teil 1 Satz 2.18)**

Es gilt, dass

$$\phi \Big|_p : \{p\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow E \Big|_p$$

ein Isomorphismus ist. Außerdem hat

$$\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E \Big|_U,$$

maximalen Rang.

Für alle  $p$  in  $U$  existiert eine Umgebung  $V \subset U$  von  $p$ , so dass die folgende Abbildung eine lokale Trivialisierung ist:

$$\psi_V : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow E \Big|_V.$$

Dann gilt:

$$\psi_V^{-1} \circ \phi(q, \xi) = (q, \underbrace{\psi_q^{-1} \circ \phi_q(\xi)}_{\text{Isomorphismus}}) \quad (2.14)$$

$\psi_V^{-1} \circ \phi : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$  ist ein Diffeomorphismus. Daraus folgt, dass  $\phi$  maximalen Rang auf  $V$  und  $U$  hat womit folgt, dass  $\phi$  ein Diffeomorphismus ist.  $\square$

**Beweis: (Teil 2 Satz 2.18)**

Diese Aussage ist sofort klar, da  $\phi_p$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

Lokale Rahmen erlauben es uns mit Schnitten zu rechnen.

**Definition 2.21 (Hauptteil)**

Sei  $(s_1, \dots, s_k)$  ein lokaler Rahmen und  $\phi$  die dazugehörige lokale Trivialisierung. Ferner sei  $s \in \Gamma_U(E)$  über  $U \subset \mathcal{M}$ . Dann existiert eine glatte Abbildung

$$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

so dass

$$s(p) = \sum_{i=1}^k \sigma_i(p) s_i(p) \quad (2.15)$$

$$\phi(p, \sigma(p)) = s(p). \quad (2.16)$$

$\sigma$  heißt der Hauptteil von  $s$  bezüglich  $\phi$ .

**Bemerkung:** Die Aussagen:  $\sigma$  ist glatt und  $s$  ist glatt sind äquivalent.

Sei  $(t_1, \dots, t_k)$  ein lokaler Rahmen über  $V$  und  $\psi$  die dazugehörige lokale Trivialisierung, so dass  $U \cap V \neq \emptyset$ . Über  $U \cap V$  gilt:

$$s_i = \sum_j g_i^j t_j, \quad (2.17)$$

wobei  $g_i^j : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ . Setze  $g(p) = (g_i^j(p))_{i,j=1}^k$

$$g(p)(t_1(p), \dots, t_k(p)) = (s_1(p), \dots, s_k(p)) \quad (2.18)$$

$$g : U \cap V \ni p \mapsto g(p) \in \text{GL}(E|_p) \quad (2.19)$$

sei  $s \in \Gamma_{U \cap V}(E)$  und Hauptteile  $\sigma_\phi, \sigma_\psi$ , dann ist

$$\sigma_\phi^i = \sum_{j=1}^k g_i^j \sigma_\psi^j$$

$$\sigma_\phi = g \sigma_\psi$$

$$g : U \cap V \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$$

**Definition 2.23 (Pullback)**

Sei  $(E, \pi, \mathcal{M})$  ein Vektorbündel und  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  eine glatte Abbildung. Der Pullback von  $E$  über  $f$  ist das Vektorbündel  $f^*E$  welches definiert ist durch:

1.  $(f^*E)_{p \in \mathcal{N}} = \{(p, x) | x \in E_{f(p)}\}$
2. sei  $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U$  lokale Trivialisierung von  $E$

$$f^*\phi : f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (f^*E) \Big|_{f^{-1}(U)} \quad (2.20)$$

$$(p, \xi) \mapsto (p, \phi(f(p), \xi)) \quad (2.21)$$

**Definition 2.24 (Schnitt entlang Abbildung)**

Ein Schnitt von  $E$  entlang von  $f$  ist eine glatte Abbildung  $s : \mathcal{N} \rightarrow E$ , so dass  $\pi \circ s = f$ .

## 2.3 Zusammenhang und kovariante Ableitung

**Definition 2.25**

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{F}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}) \\ X : \phi &\mapsto X(\phi) \end{aligned}$$

Wobei

$$X(\phi)(p) := X_p(\phi) \quad (2.22)$$

**Definition 2.26 (Lie-Klammern)**

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (2.23)$$

$$[X, Y] f := X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (2.24)$$

Zusammen mit der Lie-Klammer ist  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  eine Lie-Algebra.

(Hier bleibt als Übung zu zeigen, dass  $[X, Y]$  tatsächlich ein neues Vektorfeld ist.)

**Definition 2.27 (Zusammenhang)**

Sei  $(E, \pi, \mathcal{M})$  ein Vektorbündel vom Rang  $k$ . Ein Zusammenhang auf  $E$  ist eine Abbildung

$$D : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \quad (2.25)$$

$$(X, s) \mapsto D(X, s) = D_X s \quad (2.26)$$

Wobei folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $D$  ist tensoriell in  $X$ :

$$\begin{aligned} D_{X_1+X_2}s &= D_{X_1}s + D_{X_2}s \\ D_{\phi X}s &= \phi D_X s \end{aligned}$$

2.  $D$  ist eine Derivation in  $s$ :

$$\begin{aligned} D_X(s_1 + s_2) &= D_X s_1 + D_X s_2 \\ D_X(\phi s) &= X(\phi)s + \phi D_X s \end{aligned}$$

**Notation:**  $D_X s$  (Kovariante Ableitung von  $s$  in Richtung  $X$ )

**Wichtiger Spezialfall:**

$$\begin{aligned} E &= T\mathcal{M} \\ D : \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{\text{tensoriell}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{\text{derivativ}} &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

### Beispiel 2.28

Sei  $E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$  das triviale Bündel mit

$$\begin{aligned} s &: \mathcal{M} \rightarrow E \\ p &\mapsto (p, \sigma(p)) \end{aligned}$$

wobei  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ ,  $\sigma_i \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ . Dann ist der kanonische Zusammenhang gegeben als:

$$(D_X s)(p) = (p, X_p(\sigma_1), \dots, X_p(\sigma_k)) \quad (2.27)$$

Wir benutzen die folgende Notation:  $D_X s = X(\sigma)$ .

### 2.29 Lemma

$X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  und  $X_1(p) = X_2(p)$ , dann folgt daraus, dass

$$(D_{X_1} s)(p) = (D_{X_2} s)(p). \quad (2.28)$$

### 2.30 Lemma

$s_1, s_2 \in \Gamma(\mathcal{M})$  und  $s_1 = s_2$  in einer Umgebung von  $p$ , daraus folgt, dass

$$(D_X s_1)(p) = (D_X s_2)(p). \quad (2.29)$$

Wir beweisen zuerst das Lemma 2.30.

**Beweis: (Lemma 2.30)**

Wähle  $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$  mit  $\text{supp } \phi \subseteq U$  und  $\phi = 1$  auf einer Umgebung  $V \subset U$  von  $p$ . Dann gilt

$$\phi s_1 = \phi s_2 \quad (2.30)$$

$$D_X(\phi s_1)(p) = D_X(\phi s_2)(p) \quad (2.31)$$

Für die linke Seite ist

$$D_X(\phi s_1)(p) = \underbrace{X(p)}_{=0} s_1(p) + \underbrace{\phi(p)}_{=1} D_X s_1(p) = D_X s_1(p). \quad (2.32)$$

Das gleiche gilt für die rechte Seite und somit folgt die Aussage:

$$(D_X s_1)(p) = (D_X s_2)(p). \quad \square$$

Als nächstes möchten wir Lemma 2.29 beweisen. Allerdings können wir gleich etwas allgemeineres beweisen wodurch Lemma 2.29 sofort klar wird.

**2.32 Lemma**

Sei  $\mathcal{L} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$  eine tensorielle Abbildung. Tensoriell bedeutet hierbei, dass

$$\mathcal{L}(\phi s) = \phi \mathcal{L}(s), \quad \forall \phi \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \quad (2.33)$$

gilt.

Sei weiterhin  $p \in \mathcal{M}$  und  $s, \tilde{s} \in \Gamma(E)$  mit  $s(p) = \tilde{s}(p)$ , dann gilt

$$\mathcal{L}(s)(p) = \mathcal{L}(\tilde{s})(p) \quad (2.34)$$

Lemma 2.29 folgt sofort aus diesem Lemma, da die Abbildung

$$\begin{aligned} D_\bullet s : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \Gamma(E) \\ X &\mapsto D_X s \end{aligned}$$

tensoriell ist.

**Beweis: (Lemma 2.32)**

Sei  $U$  eine Umgebung von  $p$  und  $\phi = (s_1, \dots, s_k)$  ein lokaler Rahmen auf  $U$ . Sei außerdem  $\varphi$  eine Bumpfunktion mit  $\text{supp } \varphi \subset U$  und  $\varphi(p) = 1$ .

Wir schreiben

$$s = \sum_{i=1}^k \sigma_i s_i, \quad \tilde{s} = \sum_{i=1}^k \tilde{\sigma}_i s_i \quad (2.35)$$

mit  $\sigma_i(p) = \tilde{\sigma}_i(p)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s)(p) &= \varphi^2(p) \mathcal{L}(s)(p) \\ &= \mathcal{L}(\varphi^2 s)(p) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathcal{L}((\varphi \sigma_i)(\varphi s_i))(p) \\ &= \sum_{i=1}^k \varphi(p) \sigma_i(p) \mathcal{L}((\varphi s_i))(p) \end{aligned}$$

Analog rechnet man mit  $\tilde{s}$

$$\mathcal{L}(\tilde{s})(p) = \sum_{i=1}^k \varphi(p) \tilde{\sigma}_i(p) \mathcal{L}((\varphi s_i))(p). \quad (2.36)$$

Da  $\sigma_i(p) = \tilde{\sigma}_i(p)$  und  $\varphi(p) = 1$  folgt nun die Aussage

$$\mathcal{L}(s)(p) = \mathcal{L}(\tilde{s})(p). \quad \square$$

### Definition 2.34 (Tensorfeld)

Ein Tensorfeld vom Typ  $(n, s)$  ist ein glatter Schnitt des Bündels

$$T_s^n(\mathcal{M}) = \left( \bigotimes_{i=1}^n T\mathcal{M} \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=1}^s T_s^* \mathcal{M} \right).$$

In anderen Worten: ein Tensorfeld vom Typ  $(n, s)$  ist eine Abbildung

$$B : \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{s \text{ mal}} \rightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{n \text{ mal}},$$

die tensoriell in jedem Argument ist.

Lemma 2.32 sagt uns, dass jede Abbildung  $B$  aus einem Vektorfeld kommt.

### 2.35 Korollar

Sei  $B$  ein Tensorfeld vom Typ  $(n, s)$ , dann induziert  $B$  für alle  $p$  eine  $s$ -lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} B_p : T_p \mathcal{M}^s &\rightarrow T_p \mathcal{M}^n \\ (v_1, \dots, v_s) &\mapsto B_p(v_1, \dots, v_s) \end{aligned}$$

Wir wollen nun wieder zu Zusammenhängen zurückkehren.

### Beispiel 2.36 (Kanonischer Zusammenhang)

Wir wählen die Koordinaten wie folgt:

$$s(p) = (p, \sigma(p)), \quad s \in \Gamma(\mathcal{M} \times \mathbb{R}^k), \quad (2.37)$$

wobei  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  mit  $\sigma_i \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ . Dann ist der kanonische Zusammenhang gegeben durch:

$$D_X s = (X(\sigma_1), \dots, X(\sigma_k)) \quad (2.38)$$

Sei  $\omega$  eine 1-Form auf  $\mathcal{M}$  mit Werten in Matrizen  $\text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R})$ . Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \omega &\in \Gamma(\text{Hom}(T\mathcal{M}, \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R}))) \\ \omega_p &: T_p \mathcal{M} \rightarrow \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R}) \\ \omega &= (\omega_{ij})_{i,j=1}^k \end{aligned}$$

$\omega_{ij}$  ist eine 1-Form auf  $\mathcal{M}$

$$w_p^{ij} : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$



**Definition 2.37 (Zusammenhang über 1-Form)**

Mit einer 1-Form kann folgender Zusammenhang definiert werden:

$$(D_X^\omega s)(p) = (p, X_p(\sigma) + \omega_p(X_p)\sigma(p)) \quad (2.39)$$

**2.38 Satz**

Sei  $(E, \pi, \mathcal{M})$  ein Vektorbündel und  $D$  ein Zusammenhang auf  $E$ . Weiterhin sei  $\omega$  eine 1-Form mit Werten in  $\text{Hom}(E, E)$ . Dann ist

$$D_X^\omega s = D_X s + \omega(X)s, \quad (2.40)$$

ein Zusammenhang auf  $E$

Umgekehrt gilt ebenso der folgende Satz:

**2.39 Satz**

Seien  $D$  und  $D'$  zwei Zusammenhänge auf  $E$ . Dann definiert

$$\omega(X)s = D'_X s - D_X s, \quad (2.41)$$

eine 1-Form mit Werten in  $\text{Hom}(E, E)$ .

**Beispiel 2.40**

Sei  $E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$ . Dann ergibt sich:

$$D_X^\omega s = (p, X(\sigma) + \omega_p(X_p)\sigma_p). \quad (2.42)$$

Aus dem Satz von oben folgt, dass  $D_X^\omega s$  alle Zusammenhänge auf  $E$  sind. Aus der Lokalisierung folgt

$$\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E \Big|_U.$$

Wir stellen uns die Frage wie wir Zusammenhänge mit einer 1-Form finden können. Dies ist mithilfe von Zusammenhangsformen bezüglich eines lokalen Rahmens möglich. Sei  $\phi = (s_1, \dots, s_k)$  ein lokaler Rahmen von  $E$  über  $U$  und sei  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ . Zudem sind  $D_X s_1, \dots, D_X s_k \in \Gamma(E)$ . Diese lassen sich wie folgt darstellen:

$$D_X s_i = \sum_{j=1}^k \omega_{ij}(X) s_j \quad (2.43)$$

Wobei die 1-Form  $\omega_{ij}(X) : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und tensoriell in  $X$  ist. Es ist  $s = \sum_i \sigma_i s_i$ . Damit erhält man:

$$\begin{aligned} D_X s &= \sum (X(\sigma_i) s_i + \sigma_i D_X s_i) \\ &= \sum_j X(\sigma_j) s_j + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \sigma_i \omega_{ij}(X) s_j \\ &= \sum_j \left[ X(\sigma_j) + \sum_i \sigma_i \omega_{ij}(X) \right] s_j \end{aligned}$$

Unser nächster Schritt ist es nun die Parallelverschiebung zu definieren. Auf dem Weg dorthin ist unser erstes Ziel zunächst die kovariante Ableitung von Schnitten längs einer Abbildung zu definieren.

1. Zu Schnitten längs einer Abbildung:

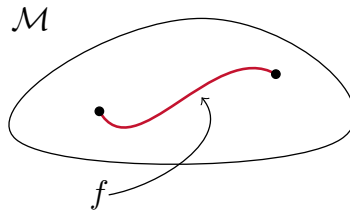
$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow s^{\mathcal{N}} & \downarrow \pi \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{f} & \mathcal{M} \end{array} \quad (2.44)$$

Eine Abbildung  $s^{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow E$  heißt Schnitt längs  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  falls:

- i)  $s^{\mathcal{N}}$  ist glatt
- ii) Das Diagramm 2.44 kommutiert:  $f = \pi \circ s^{\mathcal{N}}$

Notation:  $\Gamma_f(E)$

**Wichtiger Spezialfall:**  $\mathcal{N} = I$ , das heißt  $f$  ist eine Kurve falls  $E = T\mathcal{M}$



**Abbildung 2.4:** Kurve  $f$  auf einer Mannigfaltigkeit

Hier sieht das Diagramm dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccc} & & T\mathcal{M} \\ & \nearrow s^I & \downarrow \pi \\ I & \xrightarrow{f} & \mathcal{M} \end{array} \quad (2.45)$$

2. Wollen  $D : \mathfrak{X}(\mathcal{N}) \times \Gamma_f(E) \rightarrow \Gamma_f(E)$ .

**Definition 2.41 (Kovariante Ableitung längs eines Schnittes)**

Sei  $\phi = (s_1, \dots, s_k)$  ein lokaler Rahmen von  $E$  über  $U$  und  $s \in \Gamma_f(U)$ . Dann ist:

$$s = \sum_{i=1}^k \sigma_i s_i \circ f \quad (2.46)$$

Wir definieren die kovariante Ableitung längs  $f$  als:

$$D_X^f s = \sum_{j=1}^k \left( X(\sigma_j) + \sum_{i=1}^k \omega_{ij}(f_* X) \sigma_i \right) s_j \circ f \quad (2.47)$$

$$= X(\sigma) + (f^* \omega)(X) \sigma \quad (2.48)$$

Die Wohldefiniertheit soll als Übung gezeigt werden.

**2.42 Satz**

Die kovariante Ableitung längs  $f$

$$D^f : \mathfrak{X}(\mathcal{N}) \times \Gamma_f(E) \rightarrow \Gamma_f(E),$$

ist tensoriell im ersten Argument und derivativ im zweiten Argument.

Wenn wir die Schnitte  $\Gamma_f(E)$  mit  $\Gamma(f^*E)$  identifizieren, dann erhalten wir den zurückgezogenen Zusammenhang

$$f^*D : \mathfrak{X}(\mathcal{N}) \times \Gamma(f^*E) \rightarrow \Gamma(f^*E). \quad (2.49)$$

**2.43 Satz**

Sei  $s^{\mathcal{M}} \in \Gamma(E)$ ,  $q \in \mathcal{N}$  und  $v \in T_q \mathcal{N}$ . Dann gilt:

$$D_v^f(s^{\mathcal{M}} \circ f) = D_{f^*v} s^{\mathcal{M}} \quad (2.50)$$

Die wichtigste Situation ist hierbei der Fall der Kurven also mit  $\mathcal{N} = I$  und  $E = T\mathcal{M}$ . Hier gilt nämlich

$$D_t s := D_{\frac{\partial}{\partial t}}^c s. \quad (2.51)$$

**Bemerkung:** Sei  $c$  so gewählt, dass  $\dot{c}(t) = 0$ , das heißt  $c(t) = p$ .

**Achtung:**  $D_t s$  kann ungleich Null sein, selbst wenn  $\dot{c}(t) = 0$ .

Zum Beispiel:  $c(t) = p$  und  $s \in \Gamma_c(E)$ , dann muss  $s(t) \in E_p$  nicht konstant sein.

Als nächstes wollen wir nun die kovariante Ableitung längs von Kurven verwenden, um die Parallelverschiebung zu definieren.

**Definition 2.45 (Parallelität)**

Sei  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$  eine glatte Kurve und  $(E, \pi, \mathcal{M})$  ein Vektorbündel. Ein Schnitt  $s^I \in \Gamma_c(E)$  heißt parallel längs  $c$ , falls

$$D_t^c s = 0. \quad (2.52)$$

**Bemerkung:** Wenn  $s_1$  und  $s_2$  parallel sind, so ist auch  $\alpha s_1 + \beta s_2$  ( $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) parallel.

In einem lokalen Rahmen bedeutet  $D_t^c s = 0$ :

$$\dot{\sigma} + \omega(\dot{c})\sigma = 0. \quad (2.53)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

**2.47 Lemma**

Sei  $t_0 \in I$  und  $X \in E_{c(t_0)}$  dann existiert genau ein paralleler Schnitt  $s$  längs  $c$  mit  $s(t_0) = x$ .

Sei  $c$  eine glatte Kurve mit  $c(t_0) = p$  und  $c(t_1) = q$  ( $t_0, t_1 \in I$ ). Setze  $P_c(x) = s(t_1)$  wobei  $s$  der eindeutig bestimmte parallele Schnitt längs  $c$  mit  $s(t_0) = x$  ist.

**Definition 2.48 (Parallelverschiebung)**

$P_c : E_p \rightarrow E_q$  heißt Parallelverschiebung längs  $c$ .

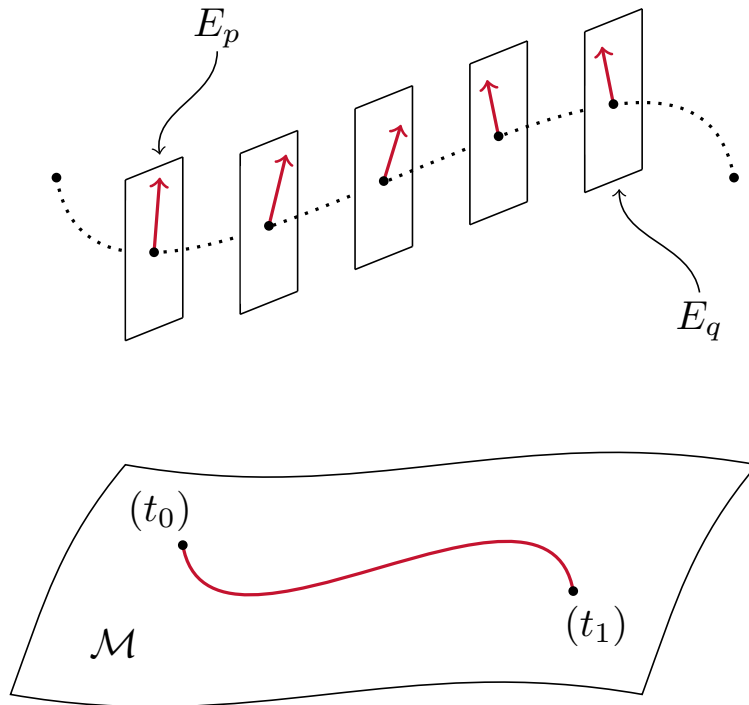


Abbildung 2.5: Parallelverschiebung

### 2.49 Lemma

Sei  $t_0 \in I$  und seien  $s_1, \dots, s_k$  parallele Schnitte längs  $c$ . Falls  $(s_1^I(t_0), \dots, s_k^I(t_0))$  eine Basis von  $E_{c(t_0)}$  ist, so ist  $(s_1^I(t), \dots, s_k^I(t))$  eine Basis von  $E_{c(t)}$  für alle  $t \in I$ .

**Beweis: (Lemma 2.49)**

$$s_i^I(t) = P_c s_i^I(t_0)$$

Da  $P$  invertierbar ist folgt die Aussage.  $\square$

### Definition 2.51 (Paralleler Rahmen)

Ein  $k$ -Tupel von Schnitten  $\phi = (s_1, \dots, s_k)$  längs  $c$  heißt Rahmen von  $E$  längs  $c$ , falls  $(s_1(t), \dots, s_k(t))$  eine Basis von  $E_{c(t)}$  für alle  $t \in I$  ist.  $\phi = (s_1, \dots, s_k)$  heißt paralleler Rahmen, falls alle  $s_i$  parallel sind.

Warum sind parallele Rahmen für uns interessant?

Wir betrachten den parallelen Rahmen  $\phi = (s_1, \dots, s_k)$  und sei  $s \in \Gamma_c(E)$ . Das heißt

$$s = \sum_{i=1}^k \sigma_i s_i.$$

Damit erhalten wir für die kovariante Ableitung:

$$D_t s = \sum_{i=1}^k D_t (\sigma_i s_i) \tag{2.54}$$

$$= \sum_{i=1}^k (\partial_t \sigma_i) s_i. \tag{2.55}$$

Bezüglich des parallelen Rahmens ist die kovariante Ableitung also gerade die Standardableitung.

**Bemerkung:** Parallelverschiebung kann man allgemein längs Stückweiser glatter Kurven  $c$  definieren.

## 2.4 Krümmung

### Definition 2.53 (Krümmungstensor)

Der Krümmungstensor eines Zusammenhangs  $D$  auf  $E$  ist die Abbildung:

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (X, Y, s) &\mapsto R(X, Y)s \end{aligned}$$

Hierbei gilt:  $R(X, Y)s = D_X(D_Y s) - D_Y(D_X s) - D_{[X, Y]}s$

**Achtung:** Die Vorzeichen-Konvention ist in der Literatur im Allgemeinen nicht eindeutig!

### 2.54 Satz

Der Krümmungstensor ist tensoriell in  $X, Y$  &  $s$ . Außerdem ist er schiefsymmetrisch in  $X$  &  $Y$ .

**Beweis:**

- $R(X, Y) = -R(Y, X)$  trivial  $\Rightarrow$  Schiefsymmetrie klar.
- zu zeigen:  $R$  ist tensoriell in  $s$ , das heißt  $R(X, Y)(\varphi s) = \varphi R(X, Y)s$ 
  - a)  $D_X(D_Y(\varphi s)) = D_X(Y(\varphi)s + \varphi D_Y s) = X(Y(\varphi))s + Y(\varphi)D_X s + X(\varphi)D_Y s + \varphi D_X(D_Y s)$
  - b)  $-D_Y(D_X(\varphi s)) = -Y(X(\varphi))s + -X(\varphi)D_Y s - Y(\varphi)D_X s + \varphi D_Y(D_X s)$
  - c)  $-D_{[X, Y]}(\varphi s) = -[X, Y](\varphi)s - \varphi D_{[X, Y]}s$

$$\Rightarrow R(X, Y)\varphi s = \varphi D_X(D_Y s) - \varphi D_Y(D_X s) - \varphi D_{[X, Y]}s = \varphi R(X, Y)s \quad \square$$

- zu zeigen:  $R$  ist tensoriell in  $X$ .

### 2.56 Hilfslemma

$$[\varphi X, Y] = \varphi[X, Y] - Y(\varphi)X$$

**Beweis:**

$$[\varphi X, Y]f = \varphi X(Y(f)) - Y(\varphi X(f)) = \varphi X(Y(f)) - Y(\varphi)X(f) - \varphi Y(X(f)) \quad \square$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} R(\varphi X, Y)s &= D_{\varphi X}(D_Y s) - D_Y(D_{\varphi X} s) - D_{[\varphi X, Y]}s \\ &= \varphi D_X(D_Y s) - Y(\varphi)D_X s - \varphi D_Y(D_X s) - D_{\varphi[X, Y]}s + D_{Y(\varphi)X}s \\ &= \varphi R(X, Y)s \end{aligned} \quad \square$$

### 2.59 Korollar

$R_p : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \times E_p \rightarrow E_p$  ist punktweise definiert  $\forall p \in \mathcal{M}$

**Bemerkung:** In vielen Büchern wird zunächst der Fall  $E = T\mathcal{M}$  diskutiert.

### Beispiel 2.61

1) Kanonischer Zusammenhang auf  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$  :

$$s \in \Gamma(E) \quad \longleftrightarrow \quad \sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

In diesen Fall ist der Krümmungstensor wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} R(X, Y)s &= D_X(D_Y s) - D_Y(D_X s) - D_{[X, Y]}s \\ &= X(Y(\sigma)) - Y(X(\sigma)) - [X, Y]\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Definition 2.62**

- a) Ein Zusammenhang  $D$  auf  $E$  mit  $R \equiv 0$  heißt *flach*.  
 b) Ein Vektorbündel  $E$  mit flachem Zusammenhang heißt *flaches Bündel*.

**Beispiel 2.63**

2) Zusammenhang auf  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$  gegeben durch eine 1-Form mit Werten in  $\text{Mat}(k \times k, \mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} D_X^\omega s &= X(\sigma) + \omega(X) \cdot \sigma \\ &= \sum_{j=1}^k (X(\sigma^j) + \sum_{i=1}^k \sigma^i \omega_i^j(X)) s_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^\omega(X, Y)s &= D_X^\omega(D_Y^\omega s) - D_Y^\omega(D_X^\omega s) - D_{[X, Y]}^\omega s \\ &= D_X^\omega(Y(\sigma) + \omega(Y) \cdot \sigma) - D_Y^\omega(X(\sigma) + \omega(X) \cdot \sigma) - [X, Y](\sigma) - \omega([X, Y])\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Übung!} &= X(Y(\sigma)) + X(\omega(Y))\sigma - Y(X(\sigma)) - Y(\omega(X))\sigma + \omega(X)\omega(Y)\sigma \\ &\quad - \omega(Y)\omega(X)\sigma - [X, Y]\sigma - \omega([X, Y])\sigma \\ &= \left( \underbrace{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])}_{:= d\omega(X, Y)} - [\omega(X), \omega(Y)] \right) \sigma \end{aligned}$$

Hierbei wird  $d$  äußeres Differential genannt.

**Lineare Zusammenhänge:**  $E = T\mathcal{M}$

$$\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

**Krümmung :**

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \end{aligned}$$

**Torsion:**

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ (X, Y) &\longmapsto T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

**2.64 Lemma**

$T$  ist tensoriell in  $X$  und  $Y$ .

**Beweis:**

$T(X, Y) = -T(Y, X) \longrightarrow$  z.z.  $T$  tensoriell in  $X$ .

$$\begin{aligned} T(\varphi X, Y) &= \nabla_{\varphi X} Y - \nabla_Y(\varphi X) - [\varphi X, Y] \\ &= \varphi T(X, Y) \end{aligned}$$

□

**Definition 2.66**

Ein Zusammenhang  $\nabla$  heißt *symmetrisch*, falls  $T \equiv 0$ .

## 2.5 Krümmung und Parallelverschiebung

1. Gegeben seien  $u, v \in T_p \mathcal{M}$ . Dann können wir  $R_p(u, v) : E_p \rightarrow E_p$  als lineare Abbildung von  $E_p$  nach  $E_p$  auffassen.
2. Gegeben sei eine geschlossene ( $c(0) = c(1) = p$ ) Kurve  $c : I = [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  (glatt). So liefert  $P_c : E_p \rightarrow E_p$  einen Isomorphismus mit:

$$D_t s = 0 \quad (2.56)$$

$$P_c : x \mapsto y. \quad (2.57)$$

Wobei gilt:

$$\begin{aligned} P_c(\lambda x) &= \lambda P_c(x), & P_c(\tilde{s}(0)) &= \tilde{s}(1) = \lambda P_c(s(0)) \\ P_c(\lambda s(0)) &= \tilde{s}(1), & P_c(s(0)) &= s(1). \end{aligned}$$

Dieser Isomorphismus wird Holonomie von  $D$  längs  $c$  genannt.

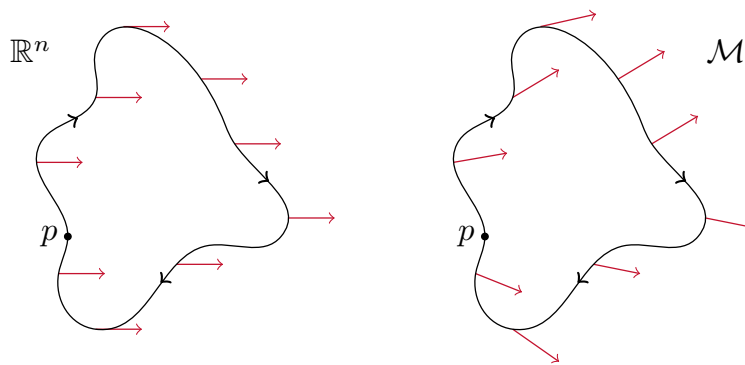
**Bemerkung:** Im allgemeinen hängt die Abbildung  $P_c$  vom Weg  $c$  ab. Dies gilt allerdings nicht im  $\mathbb{R}^n$ , da hier die Krümmung Null ist.

Parallelverschiebung entlang unterschiedlicher geschlossener Kurven mit dem selben Anfangspunkt  $p$  liefern im Allgemeinen unterschiedliche Resultate für  $P(r)$  :

$$P_{c_1}(r) \neq P_{c_2}(r)$$

**Notation:** Parallelverschiebung  $P_c$  entlang  $c$

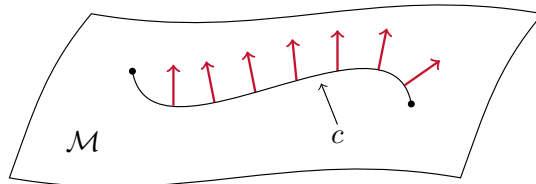
$$\begin{aligned} c : (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow \mathcal{M}, & \text{Kurve in } \mathcal{M} \\ c(0) = p, \quad c'(0) = x &\Big|_p, & Y \text{ glattes Vektorfeld auf } \mathcal{M} \end{aligned}$$



**Abbildung 2.6:** Parallelverschiebung auf Kurve  $c$  in  $\mathbb{R}^n$  vs. auf beliebiger Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$



Die kovariante Ableitung lässt sich durch Parallelverschiebung ausdrücken. Wir bezeichnen die Parallelverschiebung entlang  $c$  mit  $P_c$ , wobei  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  eine Kurve in  $\mathcal{M}$  ist.



Es gelte  $c(0) = p$ ,  $c'(0) = X_p$  und  $Y$  sei ein glattes Vektorfeld auf  $\mathcal{M}$ . Dann gilt:

$$\nabla_{X_p} Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( P_{c(t)}^{-1} Y_{c(t)} - Y_p \right) \quad (2.58)$$

**Beweis: (Beweis von Gleichung 2.58)**

Für  $Y$ , definiert in einer Umgebung von  $p$ , ist der Wert  $(\nabla_X Y)(p)$  vollständig bestimmt durch Restriktion von  $Y$  auf die Kurve  $c$  mit  $c'(0) = X_p$ .

Expandiere  $Y$  als Linearkombination paralleler Vektorfelder längs  $c$ . Sei  $\{\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n\}$  eine Basis von  $T_p \mathcal{M}$ . Sei  $w_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  mit  $w_i(0) = \hat{w}_i$ . Mit anderen Worten:  $\{w_1(t), \dots, w_n(t)\}$  ist eine Basis von  $T_{c(t)} \mathcal{M}$ .

$$Y = \sum_{i=1}^m a_i w_i$$

Mit Koeffizienten  $a_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Betrachte:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( P_{c(t)}^{-1} Y(t) - Y(0) \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^m (a_i(t) - a_i(0)) \cdot w_i(0) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{d}{dt} a_i(t) \right) \Big|_{t=0} w_i(0) \\ &= D_t \left( \sum_{i=1}^m a_i w_i \right) \Big|_{t=0} \\ &= \nabla_X Y \end{aligned}$$

□

**Definition 2.69 (Parallele Fortsetzung)**

Sei  $p \in \mathcal{M}$  und  $v \in T_p \mathcal{M}$ , dann existiert ein paralleles Vektorbündel längs  $c$  mit  $X|_p = v$ .

$X|_p$  heißt parallele Fortsetzung von  $v$ .

Es stellt sich nun die folgende Frage:

Kann man  $v \in T_p\mathcal{M}$  zu einem parallelen Vektorfeld in einer Umgebung von  $p$  fortsetzen? Also existiert ein Vektorfeld  $X$  auf  $\mathcal{M}$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$ , sodass  $X|_p = v$  und  $X$  parallel sind?

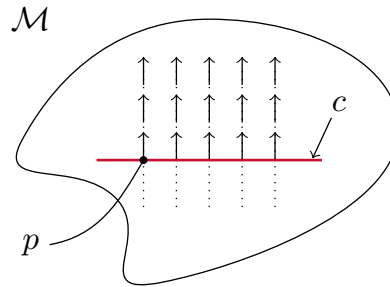


Abbildung 2.7: Paralleltransport

Gegeben sei

$$\begin{aligned} V : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathcal{M} \\ (t, \tau) &\mapsto V(t, \tau) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein Vektorfeld  $Z$  in einer Umgebung von  $p$ :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z \Big|_{(t,0)} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z = 0 \quad (2.59)$$

Wir hätten gerne, dass  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = 0$ . Es genügt zu zeigen, dass folgendes gilt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = 0$$

2.59 impliziert:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z = 0$$

Es muss deshalb zwangsweise gelten:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = 0.$$

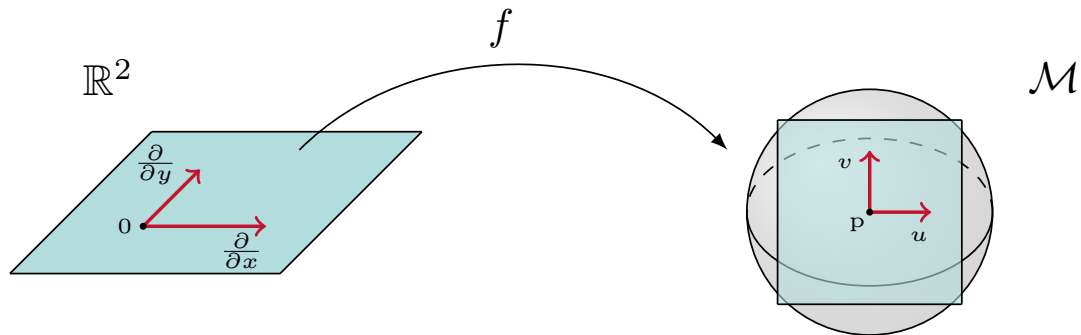
Da  $[\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial t}] = 0$  gilt, ist

$$R\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial t}\right) Z = 0 \quad (2.60)$$

Das bedeutet also falls  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = 0$ , dann gilt  $R = 0$ . Mit anderen Worten  $R = 0$  ist eine notwendige Bedingung für die Parallelität. Man kann zeigen, dass  $R \equiv 0$  auch hinreichend

ist.

Betrachte nun die folgende Situation:

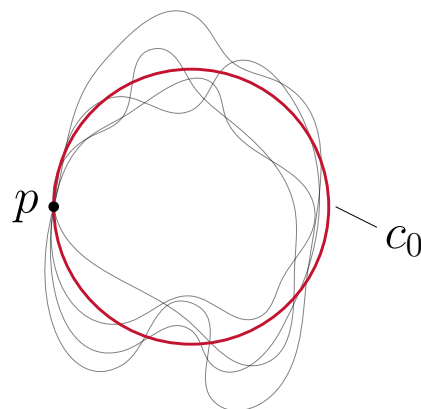


Sei  $f$  glatt und  $f(0) = p$  und sei außerdem

$$df \Big|_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = f_x(0) = u$$

$$df \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = f_y(0) = v.$$

Es sei eine Familie von Kurven  $c_s$  wobei  $0 \leq s \leq 1$  und  $c_s(0) = c_s(1) = 0$ .



**Abbildung 2.8:** Variation der Kurve  $c_0$

$P_s$  ist die Parallelverschiebung längs  $c_s$ . Wir definieren

$$c : I \times I \rightarrow \mathcal{M}$$

$$(s, t) \mapsto c(s, t)$$

wie folgt:

$$c(s, t) = \begin{cases} f(4st, 0) & 0 \leq t \leq 1/4 \\ f(s, s(4t - 1)) & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ f(s(3 - 4t), s) & 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ f(0, 4s(1 - t)) & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

**2.70 Satz**

Sei  $p \in \mathcal{M}$ ,  $u, v \in T_p\mathcal{M}$  und  $f : U \rightarrow \mathcal{M}$  sei wie oben definiert.  $P_s$  sei die Parallelverschiebung längs  $c_s$  von  $c_s(0) = p$  nach  $c_s(1) = 0$ . Dann gilt:

$$\partial_s \partial_s P_s(0) = 2 R(u, v) \quad (2.62)$$

## 3 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

### 3.1 Wiederholung: Symmetrische Bilinearform

**Definition 3.1 (Entartung, Index)**

- Eine symmetrische Bilinearform  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht entartet, falls:

$$\begin{aligned} B(v, w) &= 0 \\ \Rightarrow v &= 0. \end{aligned}$$

- $\text{Index}(B) = \max\{\dim W \mid W \subset V \text{ ist UR mit } \dim n \text{ und } B|_{W \times W} \text{ ist negativ definit.}\}$

Es existiert eine Basis  $b_1, \dots, b_n$  von  $V$ , so dass

$$c(s, t) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ -1 & 1 \leq i \leq \text{Index}(B) \\ 1 & \text{Index}(B) + 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (3.1)$$

**Definition 3.2 (Bilinearform zurückholen)**

Seien  $V, W$   $\mathbb{R}$ -Vektorräume und  $B_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform. Sei außerdem  $\phi : W \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Dann ist die zurückgeholte Bilinearform:

$$(\phi^* B_V)(w_1, w_2) := B(\phi(w_1), \phi(w_2)) \quad (3.2)$$

**Bemerkung:**

- $(\phi^* B_V)$  ist eine symmetrische Bilinearform, die entartet sein kann.
- Wenn  $B_V$  positiv definit und  $\phi$  injektiv ist, dann folgt daraus, dass  $(\phi^* B_V)$  positiv definit ist.

**Definition 3.4 (Isometrie)**

Seien  $V, W$   $\mathbb{R}$ -Vektorräume mit nicht-entarteten Bilinearformen  $B_V$  und  $B_W$ .  $\phi : W \rightarrow V$  heißt Isometrie, falls  $(\phi^* B_V) = B_W$ .

## 3.2 Riemannsche Metriken

### Definition 3.5 (Riemannsche Metriken)

Eine (Semi-) Riemannsche Metrik auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , ist eine Familie von nicht-entarteten symmetrischen Bilinearformen  $(g_p)_{p \in \mathcal{M}}$  auf  $T_p\mathcal{M}$ , so dass für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  gilt:

$$g_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.3)$$

$$p \mapsto g_p(X_p, Y_p) \quad (3.4)$$

ist glatt in  $p \in \mathcal{M}$ .

### Bemerkung:

- Eine solche Metrik heißt Riemannsch, wenn  $g_p$  positiv definit für alle  $p$  in  $\mathcal{M}$ .
- Eine solche Metrik heißt Lorentz-Metrik, falls  $\text{Index}(g_p) = 1$  für alle  $p$  in  $\mathcal{M}$ .

**Zu Semi-Riemannsch:** Index potentiell  $\geq 1$ , aber auch Riemannsche Metriken werden als Semi-Riemannsch bezeichnet.

Mittels Riemannscher Metriken lassen sich die wesentlichen geometrischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten beschreiben. Sie können verwendet werden um Winkel, Distanz bzw. Längen von Kurven zu messen.

### Definition 3.7 ((Semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit)

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ausgestattet mit einer (Semi-)Riemannschen Metrik  $g$ , wird (Semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit genannt.

### Notation: $(\mathcal{M}, g)$

Wir wollen nun (Semi-)Riemannsche Metrik  $g$  in lokalen Koordinaten betrachten. Sei  $(x, U)$  eine Karte von  $\mathcal{M}$ . Ferner bezeichnen wir mit  $(X_1, \dots, X_n)$  den dazugehörigen lokalen Rahmen von  $T\mathcal{M}|_U$ , das heißt  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Dann sind

$$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.5)$$

$$p \mapsto g_{ij}(p) := g \Big|_p (X_i(p), X_j(p)) \quad (3.6)$$

glatte Funktionen und es gilt:

$$g_p \left( X \Big|_p, Y \Big|_p \right) = g_p \left( \sum_i^m \xi^i X_i \Big|_p, \sum_i^m \eta^i X_i \Big|_p \right) \quad (3.7)$$

$$= \sum_{ij} \xi^j \eta^i \underbrace{g \Big|_p (X_j \Big|_p, X_i \Big|_p)}_{g_{ij}(p)} \quad (3.8)$$

**Definition 3.8 (Fundamentalmatrix)**

$(g_{ij})_{i,j=1}^m$  heißt Fundamentalmatrix von  $g$  bezüglich  $(x, U)$ .

**Bemerkung:**

1. Die Matrix  $(g_{ij})_{i,j=1}^m$  ist symmetrisch, d.h.  $g_{ij} = g_{ji}$  (Folgt aus Symmetrie von  $g_p$ ).
2.  $(g_{ij})_{i,j=1}^m$  ist invertierbar (Folgt aus der Tatsache, dass  $g_p$  nicht entartet ist).

Die Inverse Matrix von  $(g_{ij})_{i,j=1}^m$  bezeichnen wir mit  $(g^{ij})_{i,j=1}^m$

**Beispiel 3.10**

- a) Sei  $V$  ein reeller  $n$ -dimensionaler Vektorraum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eine nicht entartete Bilinearform auf  $V$ . Für  $v, w \in T_p V$  gilt  $g_p(v, w) := \langle v, w \rangle$ . Sei  $X : V \rightarrow V$  glatt ( $X$  Vektorfeld), dann gilt:

$$g_p(X(p), Y(p)) = \langle X(p), Y(p) \rangle \quad (3.9)$$

ist glatt. Daraus folgt, dass  $g$  eine Semi-Riemannsche Metrik ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} g_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \left\langle \phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \end{aligned}$$

- b) Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit

$$\begin{aligned} \phi_p : T_p \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+k} \\ [c] &\mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c(t) \end{aligned}$$

wobei  $\phi_p$  injektiv und linear ist. Dann ist

$$g_p = \phi_p^* \langle \cdot, \cdot \rangle \quad (3.10)$$

positiv definit.

**Definition 3.11 (erste Fundamentalform)**

Die Metrik 3.10 heißt erste Fundamentalform von  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$

Als nächstes wollen wir die Existenz von Semi-Riemannschen Metriken zeigen.

**3.12 Satz**

Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit kann mit einer Riemannschen Metrik ausgestattet werden.

**Übung:** gilt dies auch für Semi-Riemannsche Metriken?

**Beweis: (Beweis Satz 3.12)**

Sei  $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}$  Atlas von  $\mathcal{M}$ . Setze

$$(g_\alpha)_{ij} = \delta_{ij}$$

Sei  $\varphi_\alpha$  eine glatte Partition der Eins mit  $\text{supp } \varphi_\alpha \subseteq U_\alpha$ . Dann setze:

$$g := \sum_{\alpha} \varphi_\alpha g_\alpha.$$

$g$  ist hierbei nach Konstruktion glatt.

Positivität: Sei  $v \in T_p \mathcal{M}$ ,  $v \neq 0$ , dann gilt:

$$g_p(v, v) = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha(p) g_\alpha \Big|_p (v, v) \geq 0.$$

Es existiert ein  $\alpha_0$ , so dass  $\varphi_{\alpha_0}(p) > 0$ .

$$\Rightarrow g_p(v, v) \geq \varphi_{\alpha_0}(p) g_{\alpha_0} \Big|_p (v, v) > 0. \quad \square$$

**Wichtig:** Wir haben in unserem Beweis Wahlen getroffen. Daraus folgt, dass die Metrik  $g$  nicht kanonisch ist. Unter Umständen können Metriken sehr verschiedene Eigenschaften haben.

**Definition 3.14 (Isometrie)**

Seien  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und unsere Daten sind jetzt  $(\mathcal{M}_1, g_1), (\mathcal{M}_2, g_2)$ .

$$\phi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2, \quad \text{Diffeomorphismus}$$

Wir wollen zusätzlich, dass  $\phi$  die Metriken erhält, also

$$\phi^* g_2 = g_1 \tag{3.11}$$

Das heißt vom Standpunkt der Riemannschen Geometrie sind  $(\mathcal{M}_1, g_1)$  und  $(\mathcal{M}_2, g_2)$  nicht zu unterscheiden, wenn  $\phi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  ein Diffeomorphismus mit

$$\phi^* g_2 = g_1 \tag{3.12}$$

existiert. Eine solche Abbildung heißt **Isometrie**.

Unsere nächste Frage ist: wie verhält sich  $g_{ij}$  unter Kartenwechsel?

**3.15 Lemma (Transformationsregel)**

Seien  $(x, U)$  und  $(y, V)$  Karten von  $p$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} g_{ij}^y &= g(Y_i, Y_j) \\ &= \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial}{\partial y^i} (x^k \circ y^{-1}) \frac{\partial}{\partial y^j} (x^l \circ y^{-1}) g_{kl}^x \end{aligned}$$



**Beweis: (Beweis Lemma 3.15)**

Wir wissen:

$$y_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial y^i} (x^k \circ y^{-1}) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} g_{ij}^y &= g(Y_i, Y_j) \\ &= \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial}{\partial y^i} (x^k \circ y^{-1}) \frac{\partial}{\partial y^j} (x^l \circ y^{-1}) \underbrace{g\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)}_{=g_{lk}^x} \end{aligned} \quad \square$$

**Nächstes Ziel:** Führe ausgezeichneten Zusammenhang ein. Dazu benötigen wir zunächst ein Hilfslemma. Eine Semi-Riemannsche Metrik  $g$  definiert einen Isomorphismus zwischen Tangentialbündel und Kotangentialbündel

$$T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M} \quad (3.13)$$

$$T_p\mathcal{M} \ni v \mapsto g_p(v, \cdot) \in T_p^*\mathcal{M} \quad (3.14)$$

**3.17 Hilfslemma**

Auf einer Semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}, g)$  gibt es eine Eins zu Eins Korrespondenz zwischen Vektorfeldern und 1-Formen

$$\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M}) \quad (3.15)$$

$$x \mapsto g(X, \cdot) \quad (3.16)$$

**Beweis: (Beweis Hilfslemma 3.17)**

Wir haben bereits einen Faserweisen Isomorphismus

$$T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p^*\mathcal{M}$$

definiert.

Jetzt bleibt die Glattheit zu zeigen, was bedeutet, dass aus  $X$  glatt folgt, dass  $g(X, \cdot)$  glatt ist. Wir Arbeiten in den Karten  $(x, U)$ , denn dann ist

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p \right)$$

eine Basis von  $T_p^*\mathcal{M}$ . Es gilt  $g_p = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , was bedeutet, dass:

$$\begin{aligned} g_p(X, Y) &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j \left( \sum \xi^k X_k, \eta^l X_l \right) \\ &= \sum g_{ij} \xi^k \eta^l \delta_{ik} \delta_{jl} \\ &= \sum g_{ij} \xi^i \eta^j \end{aligned}$$

Wir erhalten als  $g(X, Y) = \sum g_{ij}$  für  $X = \sum \xi^k X_k$  und  $Y = \sum \eta^l Y_l$  beliebig. Wir schreiben nun auch die 1-Form in lokale Koordinaten:

$$\phi = \sum_j \varphi_j dx^j \quad (3.17)$$

Zu Zeigen: sei  $\phi = g(X, \cdot)$ , dann sind die Koeffizientenfunktionen glatt.

$$\begin{aligned} \phi(Z) &= \sum_j \varphi_j dx^j \left( \sum_l \eta^l X_l \right) \\ &= \sum_j \varphi_j \eta^l dx^j(X_l) \\ &= \sum_j \varphi_j \eta^j \end{aligned}$$

Nach obiger Rechnung haben wir also

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^m g_{ij} \xi^i. \quad (3.18)$$

Dies ist eine glatte Funktion. □

## 3.3 Levi-Civita-Zusammenhang

### 3.19 Satz

Sei  $(\mathcal{M}, g)$  eine (Semi-) Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann existiert auf  $\mathcal{M}$  ein Zusammenhang mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $D$  ist Torsionsfrei:

$$D_Y X - D_X Y = [Y, X], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (3.19)$$

2.  $D$  ist metrisch:

$$Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (3.20)$$

Dieser Zusammenhang ist eindeutig durch die **Koszulformel** bestimmt:

$$2g(D_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \quad (3.21)$$

$$- g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) \quad (3.22)$$

$D$  heißt **Levi-Civita-Zusammenhang**.

**Beweis: (Beweis Satz 3.19)**

Zu zeigen:

Die beiden geforderten Eigenschaften bestimmen den Zusammenhang und Koszuformel ist erfüllt.

Die zweite geforderte Eigenschaft impliziert:

$$Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$$

$$Yg(X, Z) = g(D_Y X, Z) + g(X, D_Y Z)$$

$$Zg(X, Y) = g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) &= g(D_X Y + D_Y X, Z) + g(D_X Z - D_Z X, Y) \\ &\quad + g(D_Y Z - D_Z Y, X) \\ &= 2g(D_X Y, Z) - g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$2g(D_X Y, Z) = g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \quad (3.23)$$

$$+ Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \quad (3.24)$$

Definiere  $D : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  durch  $D(X, Y)$ , welches das eindeutig bestimmte glatte Vektorfeld ist, das die Koszulformel erfüllt.

Es bleibt zu zeigen:  $D : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  ist ein Zusammenhang.

1)  $D$  ist tensoriell im ersten Argument:

$$\begin{aligned} 2g(D(\varphi X, Y), Z) &= 2g(D_{\varphi X} Y, Z) \\ &= (\varphi X)(g(Y, Z)) + Y(g(\varphi X, Z)) - Z(g(\varphi X, Y)) \\ &\quad - g(\varphi X, [Y, Z]) - g(Y, [\varphi X, Z]) + g(Z, [\varphi X, Y]) \\ &= (\varphi X)g(Y, Z) + Y(\varphi)g(X, Z) + (\varphi Y)g(X, Z) \\ &\quad - Z(\varphi)g(X, Y) - (\varphi Z)g(X, Y) - \varphi g(X, [Y, Z]) \\ &\quad - \varphi g(Y, [X, Z]) + Z(\varphi)g(X, Y) - \varphi g(Z, [X, Y]) \\ &\quad - Y(\varphi)g(Z, X) \\ &= \varphi g(D_X Y, Z) \end{aligned}$$

2)  $D$  ist derivativ im zweiten Argument:

$$\begin{aligned}
 2g(D_X(\varphi Y), Z) &= X(g(\varphi Y, Z)) + (\varphi Y)g(X, Z) - Z(g(X, \varphi Y)) \\
 &= g(X, [\varphi Y, Z]) - g(\varphi Y, [X, Z]) + g(Z, [X, \varphi Y]) \\
 &= (\varphi X)g(Y, Z) + X(\varphi)g(Y, Z) + (\varphi Y)g(X, Z) \\
 &\quad - (\varphi Z)g(X, Y) - Z(\varphi)g(X, Y) - \varphi g(X, [Y, Z]) \\
 &\quad + Z(\varphi)g(X, Y) - \varphi g(Y, [X, Z]) + \varphi g(Z, [X, Y]) \\
 &\quad + X(\varphi)g(Z, Y) \\
 &= 2X(\varphi)g(Y, Z) + 2\varphi g(D_X Y, Z) \quad \square
 \end{aligned}$$

Das nächste Ziel ist die Berechnung von  $D$  in lokalen Koordinaten. Sei also eine Karte  $(x, U)$  gegeben. Mit  $x_1, \dots, x_n$  bezeichnen wir den zugehörigen lokalen Rahmen. ( $x_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ )

$$D(x_i, x_j) = D_{x_i}^{x_j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k x_k \quad (3.25)$$

Hierbei bezeichnet man  $\Gamma_{ij}^k : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  als **Christoffel-Symbole**.

Sei  $D$  nun torsionsfrei, das heißt  $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ . Für  $X = x_i$  und  $Y = x_j$  gilt  $[x_i, x_j] = 0$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 D_{x_i}^{x_j} - D_{x_j}^{x_i} &= 0 \\
 \iff \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k x_k - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ji}^k x_k &= 0 \\
 \iff \sum_{k=1}^m [\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k] x_k &= 0
 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  für den Fall der Torsionsfreiheit.

Sei  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang.

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_{x_i} x_j, x_k) &= \frac{1}{2} [x_i(g(x_j, x_k)) + x_j(g(x_i, x_k)) - x_k(g(x_i, x_j))] \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{x_i}^{x_j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k x_k \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_X x_j, x_l) &= g\left(\sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k x_k, x_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \underbrace{g(x_k, x_l)}_{g_{kl}} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir eine Formel zur Berechnung der Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \quad (3.27)$$

## 4 Geodätische

Geodätische sind Kurven, die das Konzept der Geraden im  $\mathbb{R}^n$  auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung ist über Zusammenhänge möglich.

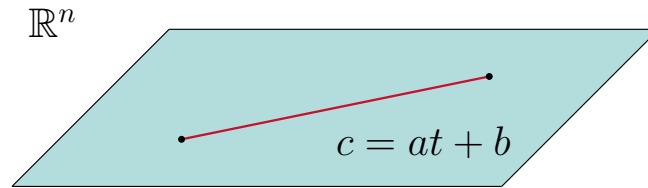


Abbildung 4.1: Gerade im  $\mathbb{R}^n$

### Definition 4.1 (Geodätische)

Sei  $\mathcal{M}$  eine Mannigfaltigkeit mit einem linearen Zusammenhang  $\nabla$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen. Eine Kurve  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$  ist eine Geodätische falls:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{c}(t) = 0 \quad (\nabla_t \dot{c}(t) = 0)$$

Dies ist eine Differentialgleichung, wenn wir in lokale Koordinaten übergehen. **In lokalen Karten:**

Sei  $(x, U)$  Karte von  $\mathcal{M}$ ,  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$  Geodätische.

$$c^k = x^k \circ c : I \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.1)$$

$$\dot{c}(t) = \sum_k \dot{c}^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{c(t)} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_t \dot{c}(t) &= \sum_{k=1}^m \nabla_t (\dot{c}^k(x_k \circ c)) \\ &= \sum_k \ddot{c}^k(t) (x_k \circ c) + \dot{c}^k(t) \nabla_{\dot{c}(t)} x_k \\ &= \sum_k \left( \ddot{c}^k(t) + \sum_{i,j} \dot{c}^i \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k c(t) \right) x_k \circ c \end{aligned}$$

Wir betrachten die Kurve  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .

Durch auswerten der zuvor hergeleiteten Gleichung erhalten wir:

$$\ddot{c}^k(t) = - \sum_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k \quad (4.3)$$

Wir erhalten also eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese können wir in zwei Gleichungen erster Ordnung umschreiben.

$$\dot{c}^k(t) = \xi^k(t) \quad (4.4)$$

$$\dot{\xi}^k(t) = - \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j \quad (4.5)$$

Auf (Semi-) Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(\mathcal{M}, g)$  erhalten wir die Geodätische mithilfe des Levi-Civita Zusammenhanges.

#### Beispiel 4.2

1.  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Eukl}}), \Gamma_{ij}^k = 0$

$$\ddot{c}^k(t) = 0, \quad \forall t, k$$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow c(t) = at + b$$

2.  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Minkowski}}), \Gamma_{ij}^k = 0$

$$\Rightarrow c(t) = at + b$$

#### 4.3 Lemma

Sei  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$  eine Geodätische, dann folgt daraus, dass

$$\tilde{c}(t) = c(\alpha t + \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ebenfalls eine Geodätische ist.

**Beweis: (Beweis Lemma 4.3)**

$$\dot{\tilde{c}}^k = \alpha \dot{c}^k(\alpha t + \beta)$$

$$\ddot{\tilde{c}}^k = \alpha^2 \ddot{c}^k(\alpha t + \beta)$$

□

#### Definition 4.5 (Parametrisierung nach der Bogenlänge)

Sei  $(\mathcal{M}, g)$  eine (Semi-) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Kurve  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$  ist

- *parametrisiert nach der Bogenlänge, falls*

$$g(\dot{c}, \dot{c}) = 1 \quad (4.6)$$

- *proportional zu Bogenlänge parametrisiert, falls*

$$g(\dot{c}, \dot{c}) = \alpha > 0, \quad \alpha \text{ const.} \quad (4.7)$$

**Übung:** Geodätische sind immer proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

Wir brauchen lokale Existenz und Eindeutigkeit für unsere Lösungen.

**Erinnerung:** Sei  $O \in J \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und

$$\left. \begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^m \\ V \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \text{offen}$$

und  $f : J \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt. Dann existiert für jedes  $(u, v) \in U \times V$  ein eindeutiges maximales Intervall  $I_{u,v} \subset J$ , sodass eine eindeutige Funktion  $x_{u,v} : I_{u,v} \rightarrow V$  existiert mit:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{u,v}(t) &= f(t, u, x_{u,v}(t)) \\ x_{u,v}(0) &= v \end{aligned}$$

Ferner ist

$$O = \{(t, u, v) \in J \times U \times V \mid t \in I_{u,v}\}$$

offen und

$$(t, u, v) \mapsto x_{u,v}(t)$$

ist glatt.

**Literaturhinweis:** *Fundamentals of differential geometry* Kapitel 4

#### 4.6 Satz

Sei  $\mathcal{M}$  ein Mannigfaltigkeit mit dem Zusammenhang  $\nabla$ .

1. **(Existenz)** Zu jedem  $p \in \mathcal{M}$ ,  $v \in T_p\mathcal{M}$  existiert ein  $I$  und eine Geodätische

$$c : I \rightarrow \mathcal{M},$$

mit  $0 \in I$ ,  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = v$

2. **(Eindeutigkeit)** Sind  $c_1, c_2 : I_i \rightarrow \mathcal{M}$  Geodätische mit  $c_1(0) = c_2(0)$  und  $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$ , dann folgt:

$$c_1(t) = c_2(t), \quad \forall t \in I_1 \cup I_2$$



3. Gegeben  $p, v$  dann existiert ein eindeutiges maximal offenes Intervall  $I_v \ni 0$  und maximale Geodätische (Also Geodätische auf dem maximalen Intervall)

$$c_v : I_v \rightarrow \mathcal{M},$$

mit  $\dot{c}_v(0) = v$  und  $c(0) = \pi(v)$

4. Die Menge

$$O = \{(t, v) \in \mathbb{R} \times T\mathcal{M} \mid t \in I_v\}$$

ist offen und

$$c : O \rightarrow \mathcal{M}$$

$$(t, v) \mapsto c_v(t)$$

ist glatt.

**Definition 4.7 (Vollständigkeit)**

Ein Zusammenhang auf  $\mathcal{M}$  heißt vollständig, falls  $O = \mathbb{R} \times T\mathcal{M}$ . Das heißt alle Geodätischen sind auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

Eine (Semi-) Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt vollständig falls der Levi-Civita Zusammenhang vollständig ist.

**Bemerkung:** Ist  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  eine Geodätische, dann folgt daraus, dass  $f \circ c : I \rightarrow \mathcal{N}$  eine Geodätische ist

**Beweis:**

Übung (Hinweis: Isometrien erhalten Christoffel Symbole). □

Sei  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ein Diffeomorphismus. Die Menge der Fixpunkte von  $\varphi$  ist:

$$\text{Fix}(\varphi) = \{p \in \mathcal{M} \mid \varphi(p) = p\} \quad (4.8)$$

**4.10 Satz**

Sei  $(\mathcal{M}, g)$  ein (Semi-) Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\varphi \in \text{Isom}(\mathcal{M}, g)$ . Sei  $p \in \text{Fix}(\varphi)$  und  $v \in T_p\mathcal{M}$  mit  $d\varphi_p(v) = v$ . Dann hat die Geodätische

$$c_v : I_v \rightarrow \mathcal{M}, \quad (4.9)$$

die Eigenschaft:  $c_v(t) \in \text{Fix}(\varphi)$  für alle  $t \in I_v$

**Beweis: (Beweis Satz 4.10)**

$\varphi \circ c_v(t) = \tilde{c}(t)$  ist eine Geodätische mit

$$\tilde{c}(0) = \varphi(p) = p$$

$$\dot{\tilde{c}}(0) = d\varphi_p(v) = v$$

$$\Rightarrow \tilde{c}(t) = v(t), \quad \forall t \in I$$

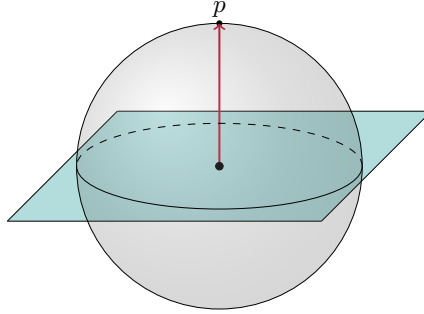
$$\Rightarrow \varphi(c_v(t)) = c_v(t)$$

$$\Rightarrow c_v(t) \in \text{Fix}(\varphi) \quad \square$$

### Beispiel 4.12 (Geodätische auf $S^n$ )

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\} \subset (\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Eukl}}) \quad (4.10)$$

Hier ist  $T_p S^n = p^\perp$ . Dies wird in Abbildung 4.3 veranschaulicht.



**Abbildung 4.2:** Veranschaulichung des Tangentialraumes des  $S^n$  am Punkt  $p$

Für  $u, v \in p^\perp$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle v, p \rangle &= 0 \\ \langle p, v \rangle &= 0 \\ \langle p, p \rangle &= 1 \end{aligned}$$

Wir haben die Standardmetrik mit:

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle.$$

Sei  $A \in O(n+1)$

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

Für die Metrik  $g$  gilt:

$$\begin{aligned} g_p(v, w) &= \langle v, w \rangle \\ &= \langle Av, Aw \rangle \\ &= g_{A_p}(Av, Aw) \\ \Rightarrow A &\in \text{Isom}(S^n) \end{aligned}$$

Seien  $p \in S^n$  und  $v \in T_p S^n = p^\perp$ .  $E = \text{span}\{v, p\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist eine Ebene. Sei  $A_E : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  die Spiegelung an  $E$ . Betrachte den Vektor  $(p, v, \underbrace{e_3, \dots, e_{n+1}}_{E^\perp})$

$$\begin{aligned} A_E(p) &= p \\ A_E(v) &= v \\ A_E(e_i) &= -e_i, \quad \forall i \end{aligned}$$

$A_E \in O(n+1) \subset \text{Isom}(S^n)$ .  $\text{Fix}(A) = E \cup S^n$  ist ein Kreis.

$$c_v : I_v S^n \quad (4.11)$$

$$c_v(t) = \cos(\alpha t)p + \sin(\alpha t) \frac{v}{\|v\|} \quad (4.12)$$

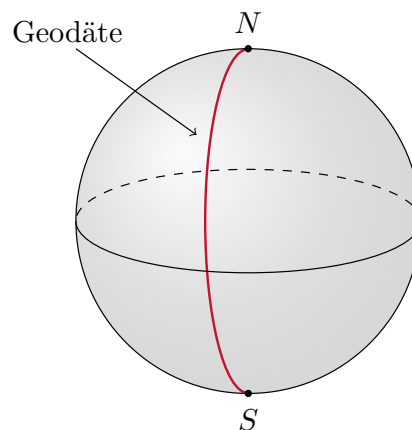


Abbildung 4.3: Geodäte auf  $S^n$

Mit der Anfangsbedingung  $\dot{c}_v(0) = v$  folgt  $\alpha = \|v\|$ .  
Es folgt, dass  $S^n$  vollständig ist, da  $I_v = \mathbb{R}$ .

**Übung:** Finde Geodätische für den Hyperbolischen Raum  $H^n$ .

## 4.1 Die Exponentialabbildung

Wir betrachten eine Abbildung von  $T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , wobei die Mannigfaltigkeit mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ausgestattet ist ( $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \nabla)$ ). Die Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

1. Für  $p \in \mathcal{M}$  bildet  $\exp$  eine Umgebung von  $0 \in T_p\mathcal{M}$  auf eine Umgebung von  $p$  in  $\mathcal{M}$  diffeomorph ab.
2. Geraden durch  $0 \in T_p\mathcal{M}$  werden isometrisch auf Geodätische durch  $p$  abgebildet.

### Definition 4.13 (Exponentialabbildung)

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \exp: T_p\mathcal{M} \supset D &\rightarrow \mathcal{M} \\ v &\mapsto c_v(1) \end{aligned}$$

mit  $D = \{v \in T\mathcal{M} \mid (1, U) \in 0\}$ .

$$D_p = D \cap T_p\mathcal{M}$$

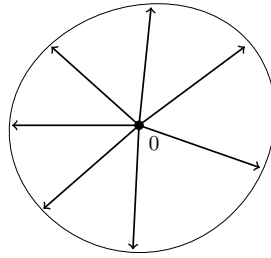
$$\exp_p : D_p \longrightarrow \mathcal{M}$$

heißt **Exponentialabbildung**.

**Bemerkung:** Es lassen sich die folgenden Aussagen treffen:

1.  $D \subset T\mathcal{M}$  und  $D_p \subset T_p\mathcal{M}$  sind offen und  $\exp, \exp_p$  sind glatt.
2.  $0 \in D_p : \exp_p(0) = p$
3.  $\exp_p(t \cdot v) = c_{t \cdot v}(1) = c_v(t)$
4.  $D_p$  ist sternförmig und  $0 \in T_p\mathcal{M}$ . Das bedeutet:

$$v \in D_p \Rightarrow \alpha v \in D_p \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1$$



**Abbildung 4.4:** Darstellung eines Sterngebietes

#### 4.15 Lemma (Differential der Exponentialabbildung)

Wir wissen bereits:  $\exp : D_p \longrightarrow \mathcal{M}$  sowie  $\exp_p(0) = p$ .

Für das Differential der Exponentialabbildung ergibt sich dann:

$$d(\exp_p) : T_0 T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_p\mathcal{M}$$

$$v \longmapsto v$$

das heißt  $d(\exp_p)_0 = \text{id}$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 d(\exp_p)_0(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(0 + t \cdot v) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c_{t \cdot v}(1) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c_v(t) \\
 &= c_v(0) \\
 &= v
 \end{aligned}$$

□

#### 4.17 Korollar

Für alle  $p \in \mathcal{M}$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $0 \in T_p\mathcal{M}$  und eine Umgebung  $V$  von  $p \in \mathcal{M}$ , so dass  $\exp_p : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist.



Falls  $(\mathcal{M}, \nabla)$  vollständig ist, dann ist die Exponentialabbildung auf ganz  $T\mathcal{M}$  definiert. Wir haben gesehen:

$$(S^n, g) : c_v(t) = \cos(\|v\|t)p + \sin(\|v\|t)\frac{v}{\|v\|}$$

Falls  $\|v\| = 2\pi$ , dann gilt:

$$\exp_p(v) = c_v(1) = p$$

Daraus folgt, dass  $\exp$  nicht injektiv ist, also damit auch kein globaler Diffeomorphismus.

Wir wollen nun wieder zurück zur Behandlung der Geodätischen kommen. Besonders interessieren wir uns jetzt für eine spezielle Eigenschaft der Geodätischen, nämlich dass die Geodätische längenminimierende Kurven sind.

Es sei  $(\mathcal{M}, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  eine glatte Kurve.

**Definition 4.18 (Länge einer Kurve c)**

$$\begin{aligned}
L(c) &= \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt \\
&= \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt
\end{aligned} \tag{4.13}$$

**Definition 4.19 (Energie von c)**

$$E(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))) dt \tag{4.14}$$

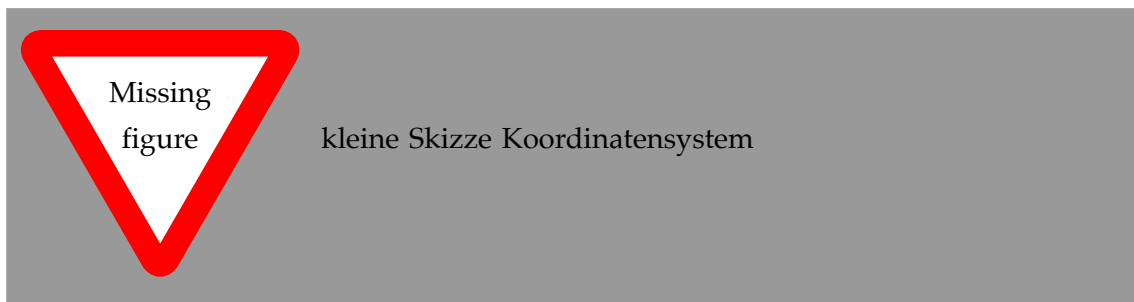
$$= \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2 dt \tag{4.15}$$

**Bemerkung:** Die Länge der Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung:

$$L(c) = L(c \circ \varphi) \tag{4.16}$$

für Umparametrisierungen:

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$$



**Beweis:**

$$\begin{aligned}
L(c \circ \varphi) &= \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} (c \circ \varphi)(t) \right\| dt \\
&= \int_a^b \|\dot{c}(\varphi(t))\| \dot{\varphi}(t) dt \quad ; \dot{\varphi}(t) > 0 \\
&= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\dot{c}(s)\| ds \\
&= L(c)
\end{aligned}$$

wobei  $s = \varphi(t)$ . □

**Bemerkung:** Die Energie hängt von der Parametrisierung ab!

**4.23 Lemma**

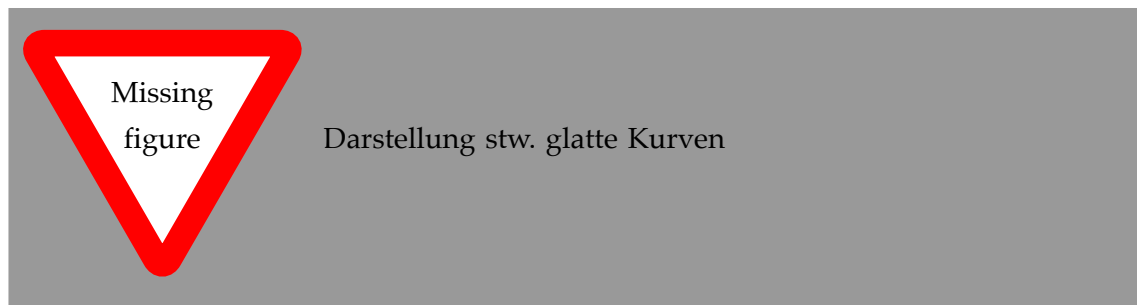
Es gilt die Ungleichung:

$$L(c)^2 \leq 2(b-a)E(c) \quad (4.17)$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

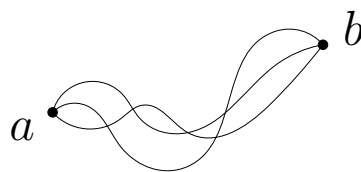
Seien nachfolgend  $p, q \in \mathcal{M}$ .

$\Omega_{p,q}$  = stückweise glatte Kurven von  $p$  und  $q$



$$L : \Omega_{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Variation:



**Abbildung 4.5:** Variation einer Kurve mit festem Anfangs- und Endpunkt.

Betrachten wir eine 1-Parameter Familie von Kurven:

$$I \ni s \longmapsto c_s \in \Omega_{p,q}$$

so dass  $L(c_s)$  glatt von  $s$  abhängt.

$$\left. \partial_s L(c(s)) \right|_{s=0} = 0 \iff c \text{ Geodätische}$$

**Definition 4.24 (1-Parameter Variation)**

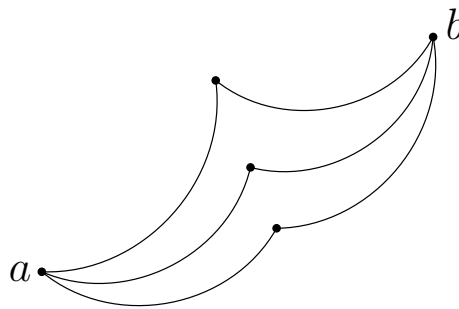
Eine stückweise glatte 1-Parameter Variation von  $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : I \times [a, b] &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (s, t) &\longmapsto \mathcal{H}(s, t) \end{aligned}$$

Mit  $\mathcal{H}(0, t) = c(t)$  genau so, dass

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$$

existiert, wobei  $\mathcal{H}$  glatt auf  $I \times [t_i, t_{i+1}]$  ist.



**Abbildung 4.6:** Variation einer stückweise glatten Kurven vom Punkt  $a$  nach  $b$ .

Eine solche Variation heißt **eigentlich**, falls:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(s, a) &= c(a) \\ \mathcal{H}(s, b) &= c(b) \end{aligned}$$

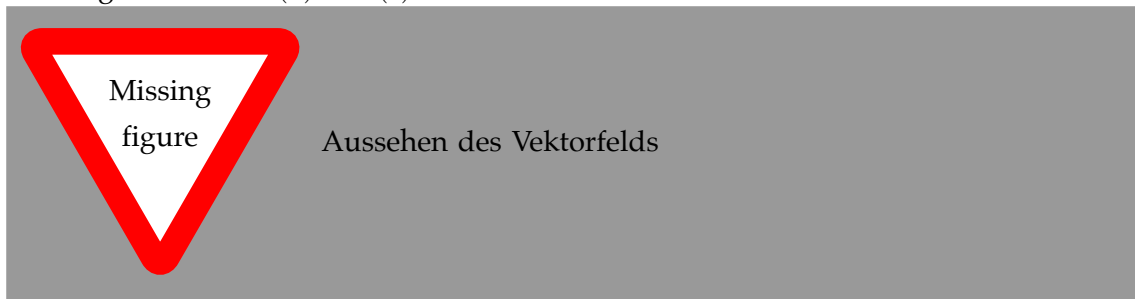
Wir setzen  $c_s = \mathcal{H}(s, \cdot)$  sowie  $c_0 = c$ .

Das Variationsfeld von  $\mathcal{H}$  ist:

$$V(\cdot) = \partial_s \mathcal{H}(0, \cdot) = \partial_s \mathcal{H}(s, \cdot) \Big|_{s=0}$$

$V$  ist ein stückweises Vektorfeld längs  $c$ .

$\mathcal{H}$  ist eigentlich  $\Rightarrow V(a) = V(b) = 0$ .





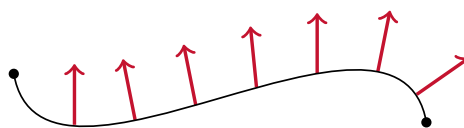
#### 4.25 Lemma

Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  eine stückweise glatte Kurve und  $V$  ein stückweise glattes Vektorfeld längs  $c$ . Dann existiert eine 1-Parameter Variation  $\mathcal{H} : I \times [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  von  $c$  mit Variationsfeld  $V$  und  $\mathcal{H}(s, t) = c(t) \forall t$  für die  $V(t) = 0$ .

**Beweis:**

$$\mathcal{H}(s, t) = \exp_p c(t)(s(V(t)))$$

□



**Abbildung 4.7:** Darstellung des Variationsfeldes

#### 4.27 Satz

Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

Sei  $\mathcal{H} : I \times [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  eine stückweise glatte 1-Parameter Variation von  $c$ ,  $V$  das Vektorfeld  $V = \partial_s \mathcal{H}(0, \cdot)$ ,  $c_s = \mathcal{H}(s, \cdot)$  und  $L(s) = L(c(s))$ .

Dann ist  $L : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatt um  $0 \in I$  und die erste Ableitung  $\partial_s L(0)$  ist gegeben durch:

$$\partial_s L(0) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \left[ g(V, \dot{c}) \Big|_a^b + \sum_{i=0}^{n-1} g(V(t_i), \Delta \dot{c}(t_i)) - \int_a^b g(V, D_t \dot{c}) dt \right]$$

Hierbei gilt  $a = t_0 \leq \dots \leq t_m = b$  und

$$\Delta \dot{c}(t_i) = \underbrace{\dot{c}(t_i - 0)}_{\text{von links}} - \underbrace{\dot{c}(t_i + 0)}_{\text{von rechts}}$$

Die Notation bedeutet, dass die Kurve stückweise glatt ist und die Ableitung an den Verbindungspunkten springt. Wir haben also zwei verschiedene Grenzwerte.

**Bemerkung:** Vor dem Beweis des vorangegangenen Lemmas wollen wir noch einige Bemerkungen machen:

1.  $\partial_s L(0)$  hängt nur von  $V$  ab und nicht explizit von  $\mathcal{H}$ .
2.  $c$  glatt  $\Rightarrow$  Term  $\Delta \dot{c}(t_i) = 0$ .

3.  $c$  Geodätische  $\Leftrightarrow D_t \dot{c} = 0$ .

**Beweis: (Vorangegangenes Lemma)**

$$L(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{c}_s(t)\| dt \quad \text{ist glatt in } s.$$

Berechne die Ableitung:

$$\begin{aligned} \partial_s L(0) &= \frac{d}{ds} \left[ \sum \int \|\dot{c}_s(t)\| dt \right] \Big|_{s=0} dt \\ &= \sum \int \frac{d}{ds} \|\dot{c}_s(t)\| \Big|_{s=0} dt \\ &= \sum \int \frac{d}{ds} \sqrt{g(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t))} \Big|_{s=0} dt \\ &= \sum \int \frac{1}{2} \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \frac{d}{ds} g(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)) \Big|_{s=0} dt \\ &= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \sum \int \frac{1}{2} \cdot 2 g(D_s \dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)) \Big|_{s=0} dt \\ &= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \sum \int g(D_s \frac{d}{dt} \mathcal{H}(s, t), \frac{d}{dt} \mathcal{H}(s, t)) dt \\ &= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \sum \int g(D_t \frac{d}{ds} \mathcal{H}(s, t), \frac{d}{dt} \mathcal{H}(s, t)) dt \\ &= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \sum \int g(D_t V, \dot{c}(t)) dt \\ &= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \sum \int \left( \frac{d}{dt} g(v(t), \dot{c}) - g(v(t), D_t \dot{c}(t)) \right) dt \quad \square \end{aligned}$$

#### 4.30 Satz

Eine reguläre Kurve (das heißt  $\dot{c}(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$ ) die stückweise glatt ist, ist eine Geodätische genau dann, wenn folgendes gilt:

1.  $c$  ist eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve
2. Die erste Variation der Bogenlänge verschwindet für jede eigentliche Variation von  $c$

**Beweis:**

1. Sei  $c$  eine Geodätische. Daraus folgt, dass  $c$  glatt ist und nach der Bogenlänge parametrisiert ist.  $\Rightarrow c$  ist regulär und  $\nabla_t \dot{c} = 0$ . Aus der Gleichung für die Variation der Bogenlänge folgt:

$$\frac{d}{ds} L(c_s) \Big|_{s=0} = [g(v(t), \dot{c}(t))]_a^b + \sum_i g(v(t_i), \Delta \dot{c}(t)) = 0$$

2. Sei  $c$  nach der Bogenlänge parametrisiert und  $\partial_s L(0) = 0$  (das heißt  $\frac{d}{ds} L(c_s) \big|_{s=0} = 0$ ) für jede eigentliche Variation von  $c$ .

Betrachte  $V = \varphi \nabla_t \dot{c}$ .  $V$  ist dann ein stückweise glattes Variationsfeld längs  $c$  mit  $V(t) = 0$  ( $t \in [a, t_i] \cup (t_{i+1}, b]$ ) Bilde eigentliche Variation  $c_s$  von  $c$  mit Variationsfeld  $V$ .

$$0 = \partial_s L(0) = - \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\varphi \nabla_t \dot{c}, \nabla_t \dot{c}) dt \quad (4.18)$$

$$= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi \|\nabla_t \dot{c}\|^2 dt \quad (4.19)$$

Daraus folgt, dass  $\|\nabla_t \dot{c}\| = 0$ . Damit folgt, dass  $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$  eine Geodätische ist.

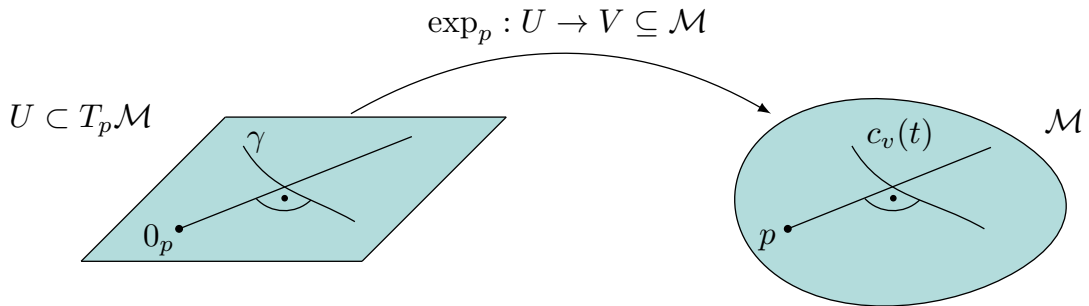
Wir wollen nun noch ein Argument angeben, warum Gleichung 4.18 verschwindet. Setze  $f(t_i) = \dot{c}(t_i - 0) - \dot{c}(t_i + 0)$  und betrachte das parallele Vektorfeld  $F$  längs  $c$ . Setze  $V = \varphi F$  und betrachte die zugehörige Einparameter Variation von  $c$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_s L(0) = g(v(t_i), \dot{c}(t_i - 0) - \dot{c}(t_i + 0)) \\ &= \varphi(t_i) g(f(t_i), f(t_i)) \end{aligned}$$

$$f(t_i) = \dot{c}(t_i - 0) - \dot{c}(t_i + 0) = 0 \quad (4.20)$$

□

Zsection( $\mathcal{M}, g$ ) als metrischer Raum Ziel ist es jetzt zu zeigen, dass  $(\mathcal{M}, d)$  ein metrischer Raum ist, wobei  $d$  eine geeignet definierte Distanzfunktion ist. Um dieses Ziel zu erreichen, benötigen wir zunächst ein paar Überlegungen zur Exponentialabbildung.



**Abbildung 4.8:** Die Exponentialabbildung erhält Orthogonalität

In Abbildung 4.8 ist zu sehen, dass der Strahl  $tv$  auf radiale Geodätische  $c_v(t) = \exp_p(tv)$  abgebildet wird durch die Exponentialabbildung.  $\exp_p$  erhält Orthogonalität zu den radialen Richtungen. Dies nennt man **radiale Isometrie**.

#### 4.32 Lemma (Gaußlemma)

Sei  $p \in \mathcal{M}$ ,  $v \in T_p \mathcal{M}$  und  $c_v(t) = \exp_p(tv)$  auf  $[0, b]$  definiert. Dann ist  $\exp_p$  in einer offenen Umgebung von  $\{tv | t \in [a, b]\} \subset T_p \mathcal{M}$  definiert und es gilt:

$$a) \, d(\exp_p|_{tv})(v) = \dot{c}_v(t)$$

b) Für  $\eta \in T_{tv}(T_p\mathcal{M}) \cong T_p\mathcal{M}$  gilt:

$$g(d(\exp_p)_{tv}(\eta), d(\exp_p)_{tv}(v)) = g(\eta, v) \quad (4.21)$$

**Beweis: (Beweis Gaußlemma 4.32)**

zu a):

$$\begin{aligned} d(\exp_p|_{tv})(v) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \underbrace{\exp_p(tv + sv)}_{c_v(t+s)} \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c_v(t+s) = \dot{c}_v(t) \\ &= \dot{c}_c(t) \end{aligned}$$

zu b):

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $t = 1$  (da  $c_{tv}(1) = c_v(t)$ ). Ferner betrachten wir die Variation  $H$  von  $c_v$ :

$$\begin{aligned} H &: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} \\ H(s, t) &= \exp_p(t(v + s\eta)) \end{aligned}$$

$V(t)$  sei das zugehörige Variationsfeld mit

$$V(t) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} H(s, t)$$

Außerdem ist  $c_s(t) = \exp_p(t(v + s\eta))$ .

$$L(c_s) = \sqrt{g(v + s\eta, v + s\eta)}$$

$$\Rightarrow \partial_s L(0) = \frac{1}{\|v\|} g(v, \eta) \quad (4.22)$$

Wir können  $\partial_s L(0)$  auch mittels der ersten Variation der Bogenlänge berechnen.

$$\begin{aligned} \partial_s L(0) &= \frac{1}{\|v\|} g(v(t), \dot{c}_v(t)) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{\|v\|} (g(v(1), \dot{c}_v(1)) - g(v(0), \dot{c}_v(0))) \\ &= \frac{1}{\|v\|} (g(d(\exp_p) \Big|_v(\eta), \dot{c}_v(1)) - g(v(0), \dot{c}_v(0))) \end{aligned}$$

Die Gleichungen 4.22 und 4.33 implizieren die Behauptung, falls

$$g(v(0), \dot{c}_v(0)) = 0$$

ist.

Nach a) können wir o.B.d.A annehmen, dass  $\eta \perp v$  ist (Warum?). Das heißt:

$$\begin{aligned} 0 &= g(\eta, v) = g(\eta, \dot{c}_v(0)) \\ &= g(v(0), \dot{c}_v(0)) \end{aligned}$$

□

**Definition 4.34 (Distanzfunktion)**

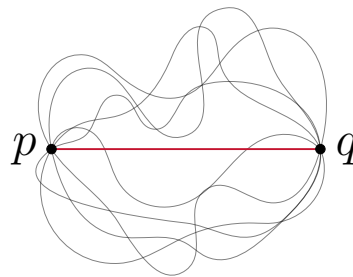
Seien  $p, q \in \mathcal{M}$ , so ist

$$d(p, q) := \inf\{L(c) \mid c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M} \text{ Stückweise glatt mit } c(a) = p \text{ und } c(b) = q\} \quad (4.23)$$

die Distanzfunktion.

**Beispiel 4.35**

Im  $\mathbb{R}^2$  wäre die Distanz zwischen den Punkten  $p$  und  $q$  die Länge der roten Kurve (Gerade) in Abbildung 4.5



**Abbildung 4.9:** Kürzeste Strecke im  $\mathbb{R}^2$ .

**Bemerkung:**

- Infimum muss nicht angenommen werden (Beispiel:  $\mathbb{R}^2/0$ )
- Die Kürzeste Strecke ist im Allgemeinen nicht eindeutig.

**4.37 Satz (( $\mathcal{M}, d$ ) als metrischer Raum)**

$(\mathcal{M}, d)$  ist ein metrischer Raum, das bedeutet:

1.  $d(p, q) = d(q, p)$
2.  $d(p, q) = 0 \iff p = q$
3.  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$

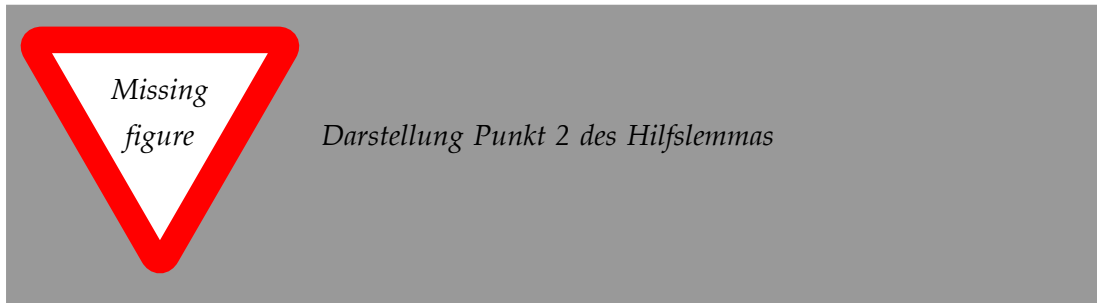
Außerdem ist  $d : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  stetig und die von  $d$  induzierte Topologie ist die ursprüngliche Topologie auf  $\mathcal{M}$ .

Für den Beweis des Satzes benötigen wir ein Hilfslemma.

**4.38 Lemma**

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $B_\varepsilon(0) = \{v \in T_p\mathcal{M} \mid \|v\| < \varepsilon\} \subseteq T_p\mathcal{M}$ . Sei außerdem  $\varepsilon$  klein genug, so dass  $\exp_p \big|_{B_\varepsilon(0)}$  ein Diffeomorphismus ist. Setze  $B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0)) \subseteq \mathcal{M}$ .

1. Dann ist  $\forall v \in B_\varepsilon(0)$  die Geodätische  $c_v$  die bis auf Umparametrisierungen eindeutige, kürzeste Verbindung von  $p$  nach  $q = \exp_p(v)$ .
2. Sei  $q \notin B_\varepsilon(p)$ . Dann gilt für jede Kurve  $c$  von  $p$  nach  $q$ :  $L(c) < \varepsilon$ .



**Beweis:**

Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  Kurve mit  $c(a) = p$  und  $c(b) = q = \exp_p(v)$  wobei für das Bild von  $c$  gilt:  $\text{Im}(c) \subset B_\varepsilon(p)$ . Setze:

$$\begin{aligned}\bar{c}(t) &= \exp_p^{-1}(c(t)) \\ s(t) &= \|\bar{c}(t)\| \\ y(t) &= \frac{\bar{c}(t)}{\|\bar{c}(t)\|} \quad t \neq a \\ \bar{v}(x) &= \frac{x}{\|x\|} \quad \text{auf } T_p\mathcal{M} \\ v(q) &= d\left(\exp_p(\bar{v}(\exp_p^{-1}(q)))\right)\end{aligned}$$

Aus diesen Definitionen folgt direkt:

1.  $\|\bar{v}\| = 1$  (trivial)
2.  $\|v\| = 1$  (folgt aus dem Gaußlemma 4.32)
3.  $\dot{\bar{c}}(t) = \dot{s}(t)y(t) + s(t)\dot{y}(t) = \dot{s}(t)\bar{v}(\bar{c}(t)) + s(t)\dot{y}(t)$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 g(v(c(t)), \dot{c}(t)) &= g(\mathbf{d} \exp_p(\bar{v}(\bar{c}(t))), \mathbf{d} \exp_p(\dot{\bar{c}}(t))) \\
 &\stackrel{4.32}{=} g(\bar{v}(\bar{c}(t)), \dot{\bar{c}}(t)) \\
 &\stackrel{(3)}{=} g(\bar{v}(c(t)), \dot{s}(t) \bar{v}(\bar{c}(t))) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \dot{s}(t)
 \end{aligned}$$

Also folgt für die Länge  $L(c)$  der Kurve:

$$L(c) \stackrel{(2)}{=} \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \cdot \underbrace{\|v(c(t))\|}_{=1} dt \quad (4.24)$$

Denn:

$$\begin{aligned}
 L(c) &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \int_a^b g(\dot{c}(t), v(c(t))) dt = \int_a^b \dot{s}(t) dt \\
 &= s(b) - s(a) \\
 &= \|\bar{c}(b)\| - \|\bar{c}(a)\| \\
 &= \|v\| \\
 &= L\left(c_v \Big|_{[0,1]}\right)
 \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\dot{c}(t)$  parallel zu  $v(c(t))$  ist für alle  $t$ . Dies ist äquivalent zu der Aussage  $\dot{\bar{c}}(t)$  ist parallel zu  $\bar{v}(\bar{c}(t))$ .

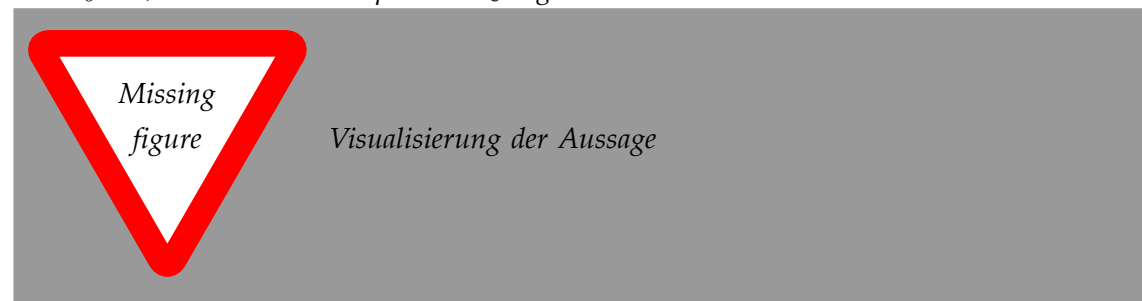
Das bedeutet, dass  $c$  eine Umparametrisierung von  $c_v$  ist.

Sei nun  $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  eine beliebige, stückweise glatte Kurve von  $p$  nach  $q$ .

Setze:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \max\{t \mid c(t) = p\} \\
 b_0 &= \min\{t \mid c(t) \in \exp(\partial B_\varepsilon(0))\}
 \end{aligned}$$

oder  $b_0 = b$ , wenn  $c$  schon komplett in  $B_\varepsilon$  liegt.



Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} L(c) &\geq L(c|_{[a_0, b_0]}) \\ &\geq L(c_v|_{[0,1]}) = \|v\| \end{aligned} \quad (4.25)$$

mit Gleichheit wenn  $c \equiv c_{[a_0, b_0]}$  eine Umparametrisierung von  $c_v|_{[0,1]}$  ist. Dies beweist Aussage (1). Außerdem folgt aus  $\|v\| \geq \varepsilon$ , falls  $q \neq B_\varepsilon(p)$  die Aussage (2).  $\square$

Mit diesem Wissen wollen wir nun den zuvor vorgestellten Satz beweisen.

**Beweis: (Satz 4.37)**

Die ersten beiden Aussagen sind recht offensichtlich wahr.

- $d(p, q) \geq 0$  ist klar!

Es gilt  $d(p, q) = 0 \forall p \in \mathcal{M}$  für die konstante Kurve die Länge null hat.

Sei  $d(p, q) = 0$ . Wir nehmen  $p \neq q$  an. Wähle  $r > 0$ , so dass  $\exp_p|_{B_r(0)}$  ein Diffeomorphismus ist und betrachten  $q \notin \exp_p(B_r(0))$ .

Gemäß des Hilfslemmas hat jede Kurve von  $p$  nach  $q$  mindestens die Länge  $r$ .

Daraus folgt:

$$d(p, q) > r > 0 \quad \nexists$$

- $d(p, q) = d(q, p)$  ist ebenfalls klar! (Laufe die Kurve rückwärts ab)
- Dreiecksungleichung:

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $c_1$  und  $c_2$  so, dass:

$$\begin{aligned} L(c_1) &\leq d(p, r) + \varepsilon \\ L(c_2) &\leq d(r, q) + \varepsilon \end{aligned}$$

Die Kurve  $c = c_1 \star c_2$  sei nun diejenige Kurve, die durch  $c_1$  und  $c_2$  gegeben ist.

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq L(c) = L(c_1) + L(c_2) \\ &= d(p, r) + d(r, q) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Dies zeigt für alle  $\varepsilon > 0$  die Dreiecksungleichung.

- Die Metrik induziert die ursprüngliche Topologie  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$

Sei die Umgebung  $U$  offen, das heißt  $U \in \mathcal{T}$ . Die Notation  $U$  offen<sup>d</sup> bedeutet offen bezüglich  $d$ . Wir wollen zeigen, dass  $U$  offen<sup>d</sup> impliziert, dass  $U \in \mathcal{T}$ .



Sei  $U$  offen<sup>d</sup>, das heißt für jedes  $p \in U \exists r(p) > 0$ , so dass  $B_{r(p)} \subseteq U$ .  
Dann gilt:

$$B_{r(p)}(p) = \exp_p(B_{r(p)}(0))$$

falls  $r(p)$  **hinreichend klein** ist. Was dies genau bedeutet soll mit der Definition, die nach Beendigung des Beweises folgt geklärt werden.

Da  $\exp_p$  ein Diffeomorphismus ist und  $B_{r(p)}(0)$  offen, folgt:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow B_{r(p)}(p) \text{ ist offen} \\ &\Rightarrow U = \bigcup_{p \in U} B_{r(p)}(p) \text{ ist offen} \end{aligned}$$

Die Umkehrung folgt sehr ähnlich und wird deshalb an dieser Stelle nicht vorgerechnet. □

#### Definition 4.41 (Injektivitätsradius)

Wir definieren den Injektivitätsradius in  $p$  als:

$$\text{injrad}(p) = \sup\{r \mid \exp_p \Big|_{B_r(0)} : B_r(0) \longrightarrow \exp_p(B_r(0)) \text{ Diffeomorphismus}\} \quad (4.26)$$



Damit erhalten wir ein Kriterium für die im im Beweis des vorangegangenen Satzes verwendete Forderung nach "hinreichender Kleinheit":

$$r(p) \text{ hinreichend klein} \quad \Leftrightarrow \quad r(p) \leq \text{injrad}(p) \quad (4.27)$$

#### 4.42 Lemma (d ist stetig.)

##### Beweis:

Zunächst zeigen wir, dass  $d(p, -)$  stetig in  $p$  ist.

Sei  $U \subset \mathcal{M}$ ,  $V \subset T_p \mathcal{M}$  so, dass  $\exp_p : V \longrightarrow U$  ein Diffeomorphismus ist.

Sei  $p_n \in \mathcal{M}$  eine Folge mit  $p_n \rightarrow p$ . Dann gibt es  $v_n \in T_p \mathcal{M}$  mit  $v_n \rightarrow 0$  so, dass  $\exp_p(v_n) = p_n$ .

Wir erhalten:

$$d(p, p_n) \leq \int_0^1 \|\dot{c}_{v_n}(t)\| dt = \|v_n\| \longrightarrow 0 \quad \square$$

- $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Seien  $p_n \rightarrow p$  und  $q_n \rightarrow q$  Folgen in  $\mathcal{M}$ . Dann gilt:

$$|d(p, q) - d(p_n, q_n)| \stackrel{(\star)}{\leq} d(p, p_n) + d(q, q_n) \longrightarrow 0.$$

Die Abschätzung  $(\star)$  gilt da:  $d(p, q) \leq d(p, p_n) + d(p_n, q_n) + d(q_n, q)$ .

Im Folgenden ist  $\mathcal{M}$  immer eine Zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit.

**Definition 4.44 (Geodätisch Vollständig)**

Sei  $p \in \mathcal{M}$ , dann heißt  $\mathcal{M}$  geodätisch vollständig in  $p$ , falls  $\exp_p$  auf ganz  $T_p\mathcal{M}$  definiert ist, das heißt alle Geodätischen durch  $p$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind.

**Beispiel 4.45**

1.  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{textEukl}})$  ist geodätisch vollständig
2.  $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$  ist nicht geodätisch vollständig

## 4.2 Satz von Hopf-Rinow

**4.46 Satz (von Hopf-Rinow)**

Sei  $\mathcal{M}$  wie oben eine Zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ferner sei  $p \in \mathcal{M}$ , dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $\mathcal{M}$  ist geodätisch vollständig im Punkt  $p$
- ii)  $\mathcal{M}$  ist geodätisch vollständig in allen Punkten  $q \in \mathcal{M}$
- iii)  $\overline{B_r}(p)$  sind kompakt für alle  $r > 0, r \in \mathbb{R}$
- iv)  $B_r(q)$  sind kompakt für alle  $r \in \mathbb{R}_+$  und alle  $q \in \mathcal{M}$
- v)  $(\mathcal{M}, d)$  ist ein vollständiger metrischer Raum, d.h. alle Cauchy-Folgen konvergieren

Jeder der Bedingungen i) - v) impliziert die folgende Aussage:

- vi) Jeder Punkt  $q \in \mathcal{M}$  lässt sich mit  $p$  durch eine minimale Geodätische verbinden.

**Bemerkung:** Aussage vi) ist schwächer als die Aussage i) - v) (Vergleich: Beispiel ??)

**Definition 4.48 (Vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit)**

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , die i) - v) erfüllt, heißt vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.

**4.49 Korollar**

Jede kompakte Mannigfaltigkeit ist vollständig.

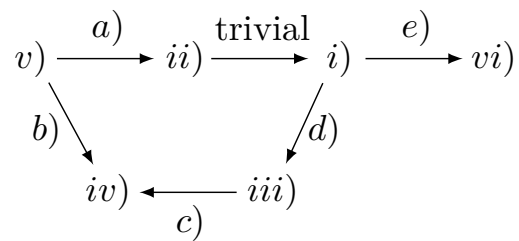
**Beweis: (Korollar 4.49)**

Es genügt *iii)* von Satz 4.46 zu zeigen.

$\overline{B}_r(p) \subset \mathcal{M}$  abgeschlossen und da  $\mathcal{M}$  kompakt folgt, dass  $\overline{B}_r(p)$  kompakt ist.  $\square$

**Beweis: (Satz von Hopf-Rinow 4.46)**

Die Beweisstruktur ist in der Abbildung bla zu sehen



**Abbildung 4.10:** Beweisstruktur für den Satz von Hopf-Rinow

<++>

# Anhang

# 5 Wiederholungen und Exkurse

## 5.1 Tensoren & Tensorrechnung

In diesem Abschnitt seien grundsätzlich alle  $V$  endlichdimensionale Vektorräume.

$$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k, W) = \text{Menge aller multilinearen Abbildungen} \\ V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \longrightarrow W$$

### 5.1 Satz

Für diesen Fall existiert ein Isomorphismus

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_k \cong \mathcal{L}(V_1^*, \dots, V_k^*, \mathbb{R})$$

**Bemerkung:**

$$V^{**} \cong V \\ V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^* \cong \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k, \mathbb{R})$$

### Definition 5.3

Ein kovarianter  $k$ -Tensor auf  $V$  ist ein Element in  $\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k\text{-mal}}$ , das heißt es handelt sich um eine multilineare Abbildung:  $V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

**Beispiel:** Die Determinante ist ein kovarianter  $k$ -Tensor in  $\mathbb{R}^k$ .

### Definition 5.4

Ein kontravarianter  $k$ -Tensor auf  $V$  ist ein Element in  $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-mal}}$ , das heißt es handelt sich um eine multilineare Abbildung:  $V^* \times \dots \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$

Typischerweise treten gemischte Tensoren auf, das heißt Elemente in:

$$T^{(n,l)} V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{l\text{-mal}}$$

## Tensoren auf Mannigfaltigkeiten

$$T^{(r,s)} T\mathcal{M} := \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T^{(r,s)}(T_p \mathcal{M})$$

### Definition 5.5

Ein Tensorfeld vom Typ  $(r, s)$  ist ein Schnitt von  $T^{(r,s)} T\mathcal{M}$ .

**Übung:** Bestimmen sie den Typ der folgenden Tensoren:

- Vektorfelder
- 1-Formen
- Torsion
- Krümmungstensor

## 5.2 Explizite Rechnungen in Koordinaten

In diesem Abschnitt wollen wir anhand zweier Beispiele explizite Rechnungen in Koordinaten ausführen.

Wir beginnen zunächst mit der Euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^2$ :

$$g = dx^2 + dy^2 \tag{5.1}$$

Wir wollen eine Koordinatentransformation in ebene Polarkoordinaten durchführen:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow r \cdot \cos \varphi \\ y &\longrightarrow r \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Wir erhalten demnach mit Hilfe der Transformationsregel:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$$

Damit folgt für unsere neue Metrik  $g_{\text{Polar}}$  die Darstellung:

$$\begin{aligned}
g_{\text{Polar}} &= dx \otimes dx + dy \otimes dy \\
&= (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \otimes (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \\
&\quad + (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) \otimes (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) \\
&= \cos^2 \varphi dr \otimes dr - r \sin \varphi \cos \varphi dr \otimes d\varphi \\
&\quad - r \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \otimes dr + r^2 \sin^2 \varphi d\varphi \otimes d\varphi \\
&\quad + \sin^2 \varphi dr \otimes dr + r \sin \varphi \cos \varphi dr \otimes d\varphi \\
&\quad + r \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \\
&= dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi
\end{aligned}$$

Die Darstellung der ersten Fundamentalform ergibt sich demnach zu:

$$(g_{ij})_{\text{Polar}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

### 5.2.1 Christoffel-Symbole

Wir wollen nun mit dieser Erkenntnis einige Christoffel-Symbole für verschiedene Metriken explizit ausrechnen.

Zunächst einmal betrachten wir wieder die **euklidische Metrik** auf  $\mathbb{R}^2$ :

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \text{diag}(1, 1)$$

In diesem Fall verschwinden alle Christoffel-Symbole, da der  $\mathbb{R}^2$ , allgemeiner auch der  $\mathbb{R}^n$  keine Krümmung besitzt, also *flach* ist. Wir erhalten:

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j, k$$

Dies bedeutet, dass die kovariante Ableitung gleich der "gewöhnlichen" Ableitung ist, was wir auch erwarten.

Kommen wir nun zu der zuvor hergeleiteten Metrik für die **ebenen Polarkoordinaten**:

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

Wir erhalten  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  und damit schließlich:

$$\begin{aligned}\nabla_{(\frac{\partial}{\partial \varphi})} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \nabla_{(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y})} (-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}) \\ &= (-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}) (-y \frac{\partial}{\partial x}) + (-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}) (x \frac{\partial}{\partial y}) \\ &= -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial x} \\ &= r \frac{\partial}{\partial r}\end{aligned}$$

Mit diesem Wissen berechnen wir nun explizit die Christoffel-Symbole:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}(1(0+0-0) + 0 \dots) = 0 \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}(r^{-2} \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{22}}{\partial r} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi}) = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r\end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis erhalten wir analog wie zuvor:

$$\begin{aligned}\nabla_{(\frac{\partial}{\partial \varphi})} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= -r \frac{\partial}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Zuletzt wollen wir uns eine etwas kompliziertere Metrik auf dem  $\mathbb{R}^3$  anschauen:

$$(\mathbb{R}^3, g = (1+x^2) \, dx \otimes dx + dy \otimes dy + e^z \, dz \otimes dz)$$

Daraus folgt direkt für die erste Fundamentalform und ihr Inverses:

$$\begin{aligned}g_{ij} &= \text{diag}((1+x^2), 1, e^z) \\ g_{ij}^{-1} &= \text{diag}((1+x^2)^{-1}, 1, e^{-z})\end{aligned}$$

Wir berechnen damit wieder die Christoffel-Symbole mit der bekannten Formel:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

Betrachten wir beispielsweise  $\Gamma_{12}^3$  fällt auf, dass:

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^3 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 g^{3l} (\partial_1 g_{2l} + \partial_2 g_{1l} - \partial_l g_{12}) \\ &= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{13} - \partial_3 g_{12}) \\ &= 0 \quad , \text{ da } g \text{ diagonal ist.}\end{aligned}$$



Man findet:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \underbrace{(2 \cdot \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11})}_{= \partial_1 g_{11}} \\ &= \frac{1}{2} (1 + x^2)^{-1} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{1 + x^2}\end{aligned}$$

außerdem berechnet man:  $\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}$ .

Alle anderen Christoffel-Symbole sind null!

### 5.2.2 Parallelverschiebung

Auch für das in der Vorlesung eingeführte Konzept der Parallelverschiebung wollen wir nachfolgend ein explizites Beispiel liefern.

Sei  $\gamma(t)$  die Kurve, die durch die Gleichungen  $x = t$ ,  $y = t$  und  $z = t$  definiert wird. Grundlage der Berechnung ist die zuvor bereits verwendete Metrik

$$g = (1 + x^2) dx \otimes dx + dy \otimes dy + e^z dz \otimes dz$$

Wie sieht der Paralleltransport entlang  $\gamma$  aus?

Der Anfangsvektor sei  $(v_1(0), v_2(0), v_3(0))^T$ . Die Formel für den Paralleltransport lautet:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} v^k = 0$$

Komponentenweises Einsetzen unter Berücksichtigung der im vorherigen Abschnitt berechneten Christoffel-Symbole liefert ein System aus drei Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{cases} \frac{dv_1(t)}{dt} + \underbrace{\frac{t}{1+t^2} \frac{dx}{dt}}_{=1} v_1(t) = 0 \\ \frac{dv_2(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dv_3(t)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{dz}{dt}}_{=1} v_3(t) = 0 \end{cases}$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen ergeben sich zu:

$$\begin{cases} v_1(t) &= \frac{v_1(0)}{\sqrt{1+t^2}} \\ v_2(t) &= v_2(0) \\ v_3(t) &= v_3(0) e^{-\frac{t}{2}} \end{cases}$$

Seien  $v(0) = (v_1(0), v_2(0), v_3(0))^T$  sowie  $w(0) = (w_1(0), w_2(0), w_3(0))^T$  gegeben, dann gilt für die Vektorfelder, welche durch den Paralleltransport entlang  $\gamma$  entstehen:

$$g(v(t), w(t)) = \underbrace{\sum_{i=1}^3 v_i(0)w_i(0)}_{\text{const.}}$$

Es ergibt sich schlussendlich:

$$xg(v, w) = g(\nabla_x v, w) + g(v, \nabla_x w) = 0.$$

## 5.3 Riemannsche Normalkoordinaten

Wir lernen in diesem Exkurs einen neuen Satz an Koordinaten, die sog. **Riemannschen Normalkoordinaten** kennen.

Die Idee liegt darin, den lokalen Diffeomorphismus

$$\exp_p : V \longrightarrow U$$

zu verwenden, um spezielle, an die Geometrie angepasste Koordinaten zu definieren.

Für  $p \in \mathcal{M}$  sein  $E_1, E_2; \dots E_n$  eine Orthonormalbasis von  $T_p\mathcal{M}$ , das heißt:

$$g \Big|_p (E_i, E_j) = \delta_{ij}$$

Dies impliziert:

$$E : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_p\mathcal{M}$$

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i E_i$$

ist ein linearer Diffeomorphismus.

Dann ist:  $E^{-1} \circ \exp_p^{-1} : U \longrightarrow E^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus, also eine Karte für  $\mathcal{M}$ .

### Definition 5.6

Die so erhaltenen Karten heißen **Riemannsche Normalkoordinaten**.

### 5.7 Satz

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $p \in \mathcal{M}$  und seien  $(x, U)$  die Riemannschen Normalkoordinaten von  $p$ . Dann gelten für:

$$g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{erste Fundamentalform}$$

$$\Gamma_{ij}^k : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{Christoffel-Symbole}$$

die folgenden Aussagen:

1.  $x(p) = 0$
2.  $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$
3.  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$

**Beweis:**

$$1. \quad x(p) = E^{-1} \circ \overbrace{\exp_p^{-1}}^{=0} = E^{-1}(0) = 0$$

$$\begin{aligned} 2. \quad g_{ij}(p) &= g_p(x_i, x_j) = g_p(\overbrace{d(\exp \circ E)}^{=x^{-1}} \Big|_{e_i}, d(\exp \circ E) \Big|_{e_j}) \\ &= g_p(d(\exp) \Big|_0 E_i, d(\exp) \Big|_0 E_j) \\ &= g_p(E_i, E_j) \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

3.  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $c(\lambda) = \exp_p(tE_v)$  eine Geodätische mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = E_v$ .  
Also erfüllt  $c$  die Geodätengleichung ( $\nabla_t \dot{c} = 0$ )

$$0 = \ddot{c}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) \quad \forall k$$

Es gilt aber:

$$\begin{aligned} c^k(t) &= x^k(c(t)) = t \cdot v^k \\ \dot{c}^k(t) &= v^k \\ \ddot{c}^k(t) &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$0 = \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(0) v^i v^j \quad (\star)$$

Setze nun:

$$\begin{aligned} \beta(v, w) &:= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0) v^i w^j = \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ji}^k(0) v^i w^j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0) v^j w^i = \beta(w, v) \end{aligned}$$

*Damit folgt direkt:*

- $\beta(v, v) = 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$
- $\beta(v, w) = 0 \ \forall v, w \in \mathbb{R}^n$
- $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$

□

Einfacher Trick:

$$\begin{aligned}\beta(x+y, x+y) &= \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) \\ &= \underbrace{\beta(x, x)}_{=0} + \underbrace{\beta(y, y)}_{=0} + 2\beta(x, y)\end{aligned}$$

Daraus folgt direkt:  $\beta(x, y) = 0$ . Man nennt dies das **Polarisationsargument**.

# Abbildungsverzeichnis

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Offene Menge . . . . .   | 3  |
| 1.2  | Hausdorff'sche Eigenschaft . . . . .   | 4  |
| 1.3  | Kartenwechsel . . . . .  | 5  |
| 1.4  | Visualisierung des Hilfslemmas (1.21) ("bump function") . . . . .  | 9  |
| 1.5  | Veranschaulichung von Hilfslemma 1.29 . . . . .  | 11 |
| 2.1  | Darstellung des Tangentialbündels eines Kreises . . . . .  | 19 |
| 2.2  | Veranschaulichung eines Vektorbündels . . . . .  | 19 |
| 2.3  | Beispiel für ein Vektorfeld . . . . .  | 27 |
| 2.4  | Kurve $f$ auf einer Mannigfaltigkeit . . . . .   | 35 |
| 2.5  | Parallelverschiebung . . . . .   | 37 |
| 2.6  | Parallelverschiebung auf Kurve $c$ in $\mathbb{R}^n$ vs. auf beliebiger Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ . . . . . | 41 |
| 2.7  | Paralleltransport . . . . .  | 43 |
| 2.8  | Variation der Kurve $c_0$ . . . . .  | 44 |
| 4.1  | Gerade im $\mathbb{R}^n$ . . . . .   | 55 |
| 4.2  | Veranschaulichung des Tangentialraumes des $S^n$ am Punkt $p$ . . . . .  | 59 |
| 4.3  | Geodäte auf $S^n$ . . . . .  | 60 |
| 4.4  | Darstellung eines Sterngebietes . . . . .  | 61 |
| 4.5  | Variation einer Kurve mit festem Anfangs- und Endpunkt. . . . .  | 64 |
| 4.6  | Variation einer stückweise glatten Kurven vom Punkt $a$ nach $b$ . . . . .                                       | 65 |
| 4.7  | Darstellung des Variationsfeldes . . . . .   | 66 |
| 4.8  | Die Exponentialabbildung erhält Orthogonalität . . . . .   | 68 |
| 4.9  | Kürzeste Strecke im $\mathbb{R}^2$ . . . . .   | 70 |
| 4.10 | Beweisstruktur für den Satz von Hopf-Rinow . . . . .   | 76 |