

Differentialgeometrie I

gehalten von Dr. Anna Siffert
im Sommersemester 2018

an der
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

In L^AT_EX gesetzt von

Thomas Ackermann & Mathieu Kaltschmidt

aktueller Stand: *11. Mai 2019*

Differentialgeometrie I

Dr. Anna Siffert

Vorwort

Bei diesen Vorlesungsnotizen handelt es sich um kein offizielles Skript, sondern lediglich um die Umsetzung des Vorlesungsmitschriebs in \LaTeX .

Für die Vollständigkeit & Richtigkeit des Inhalts wird deshalb **keine Gewährleistung** übernommen.

Bei Fragen, Korrekturen und Verbesserungsvorschlägen freuen wir uns über eine Nachricht.¹

Die Dozentin Frau Dr. Siffert empfiehlt die nachfolgende Literatur zur Vertiefung des in der Vorlesung behandelten Stoffs:

- [1] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. 14., corrected print. Boston ; Basel ; Berlin: Birkhäuser, 2013.
- [2] Jeff Cheeger und David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. Amsterdam [u.a.]: North-Holland, 1975.
- [3] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin und Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. 3. ed. Berlin ; Heidelberg [u.a.]: Springer, 2004.
- [4] Detlef Gromoll, Wilhelm Klingenberg und Wolfgang Meyer. *Riemannsche Geometrie im Großen*. 2. Aufl. Berlin ; Heidelberg [u.a.]: Springer, 1975.
- [5] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. New York: Academic Press, 1978.
- [6] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. 2. ed. New York ; Heidelberg [u.a.]: Springer, 2013.
- [7] John M. Lee. *Riemannian manifolds. an introduction to curvature*. New York ; Berlin ; Heidelberg [u.a.]: Springer, 1997.

Eine Inhaltsübersicht der in der Vorlesung behandelten Themen befindet sich auf der nächsten Seite.

¹Mail an M.Kaltschmidt@stud.uni-heidelberg.de oder T.Ackermann@stud.uni-heidelberg.de

Danksagung

Zunächst einmal gilt unser Dank der Dozentin der Vorlesung, Frau Dr. Siffert, die ständig mit uns in Kommunikation stand und uns neue Ideen zur Verbesserung der Formulierung des Skripts gegeben hat.

Für sorgfältiges Korrekturlesen und sinnvolle Kommentare und Verbesserungsvorschläge während des gesamten Semesters danken wir unseren Kommilitonen Eugen Dizer, Fabian Glaser, Jakob Henrichs und Claudia Volk.

Der erste Teil wurde noch in Zusammenarbeit mit Quirinus Schwarzenböck erstellt. Dies soll ebenfalls an dieser Stelle gewürdigt werden.

Die aktuelle Version des Skripts und alle TeX-Dateien inklusive der mit TikZ erstellten Grafiken sind öffentlich zugänglich auf Github erhältlich:

<https://github.com/mathieukaltschmidt/Differential-Geometry>

Wir bedanken uns recht herzlich bei allen, die uns bei diesem Projekt unterstützt haben und weiter dazu beitragen das Skript fehlerfrei zu halten.

Thomas Ackermann & Mathieu Kaltschmidt

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	ii
Danksagung	iii
Inhalt der Vorlesung	1
1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	1
1.1. Definitionen	2
1.2. Differenzierbare Abbildungen	7
1.3. Untermannigfaltigkeiten	7
1.4. Tangentialraum	7
2. Vektorbündel	16
2.1. Tangentialbündel	16
2.2. Vektorbündel	17
2.2.1. Direkte Summe (Whitney-Summe)	20
2.2.2. Tensorbündel	21
2.2.3. Homomorphismenbündel	21
2.2.4. Duales Bündel	21
2.2.5. Alternierendes Vektorbündel	22
2.3. Zusammenhang und kovariante Ableitung	26
2.4. Krümmung	34
2.5. Krümmung und Parallelverschiebung	36
3. Riemannsche Mannigfaltigkeiten	41
3.1. Wiederholung: Symmetrische Bilinearform	41
3.2. Riemannsche Metriken	41
3.3. Levi-Civita-Zusammenhang	45
4. Geodätische	48
4.1. Die Exponentialabbildung	53
4.2. (\mathcal{M}, g) als metrischer Raum	60
4.3. Satz von Hopf-Rinow	66
5. Krümmung 2.0	71
5.1. Schnittkrümmung	71
5.2. Ricci-Krümmung	73
5.3. Skalarkrümmung	73
5.4. Satz von Bonnet-Myers	74
5.5. Jacobi-Felder	76
6. Elementare Differentialgeometrie	82
6.1. Raumkurven	82

6.2. Flächen	85
6.2.1. Zweite Fundamentalform	88

Anhang I

A. Wiederholungen und Exkurse	II
A.1. Tensoren & Tensorrechnung	II
A.2. Explizite Rechnungen in Koordinaten	III
A.2.1. Christoffel-Symbole	III
A.2.2. Parallelverschiebung	V
A.3. Riemannsche Normalkoordinaten	VI
Abbildungsverzeichnis	VIII

1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Worum geht es in der Differentialgeometrie?

In den ersten Semestern des Mathematikstudiums wird Analysis in linearen Vektorräumen und metrischen Räumen betrieben. Zudem wurden eventuell Banachräume und Hilberträume betrachtet. Zentrale Objekte dieser Vorlesung sind sogenannte **Riemannsche Mannigfaltigkeiten** (diese werden in Abschnitt 3 eingeführt). Dies sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten ausgestattet mit einer Riemannschen Metrik, d.h. einem Objekt, welches es uns erlaubt alle wichtigen geometrischen Größen zu beschreiben, wie zum Beispiel Winkel, Längen, etc. Riemannsche Mannigfaltigkeiten oder allgemeiner differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind im Allgemeinen weder lineare Vektorräume noch metrische Räume. Der fortgeschrittene Leser könnte nun einwenden, dass wir Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit der Struktur eines metrischen Raumes ausstatten können. Dies stimmt, aber das wissen wir jetzt noch nicht! A priori sind Riemannsche Mannigfaltigkeiten keine metrischen Räume. Mehr dazu in Abschnitt 3.

Unser Ziel ist es die Konzepte der Analysis und Geometrie auf diese differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Somit bleibt die Frage: was sind überhaupt differenzierbare Mannigfaltigkeiten? Dies ist Gegenstand dieses Kapitels.

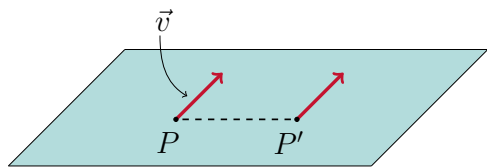
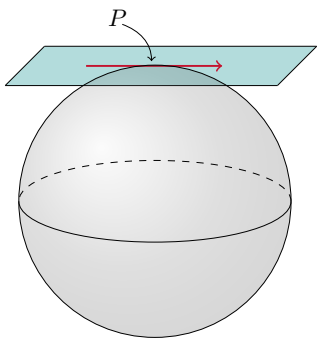
Wir beginnen zunächst einmal mit einer kurzen Gegenüberstellung der bereits bekannten Konzepte aus dem \mathbb{R}^n mit den korrespondierenden Begriffen der Differentialgeometrie, welche wir in den kommenden Vorlesungen noch genauer kennenlernen werden.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind topologische Mannigfaltigkeiten mit einer zusätzlichen Struktur, welche uns erlaubt Analysis auf der Mannigfaltigkeit zu betreiben ("wir wollen differenzieren können").

Um diesen Satz mit Sinn zu füllen, müssen wir folgende Fragen klären:

- a) Was sind topologische Mannigfaltigkeiten?
- b) Was ist mit zusätzlicher Struktur gemeint?

Eine kurze Gegenüberstellung einiger Konzepte der Differentialgeometrie mit bereits bekannten Konzepten aus der Mathematik im \mathbb{R}^n soll als kurze Einführung und Motivation für das Studium der Differentialgeometrie dienen.

 <p style="text-align: center;">\mathbb{R}^n</p>	 <p style="text-align: center;">\mathcal{M}</p>
<p>Parallelverschiebung</p> <p>Gerade = kürzeste Verbindung</p> <p>flacher Raum</p> <p>Skalarprodukt</p>	<p>Begriff des Zusammenhangs</p> <p>Konzept der Geodätischen</p> <p>gekrümmter Raum</p> <p>Riemannsche Metrik</p>

1.1. Definitionen

Wir beginnen damit [a\)](#) zu erläutern. Topologische Mannigfaltigkeiten sind die zentralen Objekte der Topologie, welches jenes Teilgebiet der Mathematik ist, welches die Eigenschaften von topologischen Räumen untersucht.

Um topologische Mannigfaltigkeiten definieren zu können wiederholen wir zunächst die Definition eines topologischen Raumes.

Ein topologischer Raum ist eine Menge X ausgestattet mit einer Topologie, d.h. einer Teilmenge der Potenzmenge von X , welche mehreren Axiomen genügt. Topologien erlauben es die zunächst intuitive Anschauung von beispielsweise "Nähe" mathematisch zu präzisieren und auf allgemeine Situationen zu übertragen. Dies ist der allgemeinste Begriff eines Raumes, indem man Konzepte wie Steigkeit, Konvergenz, Kompaktheit und Zusammenhang sinnvoll definieren kann. Metrische Räume sind z.B. topologische Räume mit mehr Struktur.

Erinnerung: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, wenn $\forall p \in U \exists \varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(p) \subset U$. Dieser Begriff von Offenheit heißt *euklidische Topologie* und erfüllt:

- i) \emptyset, \mathbb{R}^n offen
- ii) $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow U \cap V$ offen in \mathbb{R}^n
- iii) $U_i, i \in I$ offen in $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen

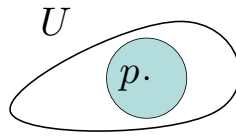


Abbildung 1.1.: Offene Menge

Definition 1.1 (Topologischer Raum)

Ein topologischer Raum ist eine Menge X zusammen mit einer Menge $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, sodass:

- i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- ii) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$
- iii) $U_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Elemente aus \mathcal{T} heißen *offen*. Komplemente davon abgeschlossen.

Ein topologischer Raum besteht also aus den Daten X und \mathcal{T} . Oft wird jedoch nur X angegeben, wenn die Wahl von \mathcal{T} aus dem Kontext ersichtlich ist. Beachten Sie, dass dies unpräzise ist und zu Verwechslungen führen kann – so kann eine Menge X mit ganz unterschiedlichen Topologien ausgestattet sein. Insbesondere kann z.B. eine Menge $U \subset X$ bezüglich einer Topologie \mathcal{T}_1 auf X offen sein, während dies für eine andere Topologie \mathcal{T}_2 auf X nicht der Fall ist.

Bemerkung: Alternativ ist auch eine Definition über abgeschlossene Mengen und Umgebungen möglich.

Beispiel 1.3

1. Das Ihnen vermutlich am besten vertraute Beispiel ist das des Euklidischen Raums \mathbb{R}^n ausgestattet mit der euklidischen Metrik

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

2. Metrische Räume

Es gibt aber auch weniger anschauliche Beispiele:

3. Diskrete offene Mengen
4. Indiskrete Topologie
5. Drei Punkte
6. Hilbertwürfel

Zum Schluss wollen wir noch ein paar natürliche Konstruktionen von topologischen Räumen aus gegebenen topologischen Räumen diskutieren. Diese liefern natürlich große Beispielsklassen.:

Beispiel 1.4

- i) Produkttopologie
- ii) Quotiententopologie
- iii) Teilraumtopologie.

Sei N eine Teilmenge von X . Dann ist auch (N, \mathcal{T}_1) ein topologischer Raum, wobei \mathcal{T}_1 wie folgt gegeben ist:

$$V \in \mathcal{T}_1 \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{T}, \text{ sodass } V = N \cap U$$

Definition 1.5 (Topologische Mannigfaltigkeiten)

Eine topologische Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum \mathcal{M} der Dimension n mit folgenden Eigenschaften:

- i) \mathcal{M} ist hausdorffsch. Das heißt für alle $p, q \in \mathcal{M}$ mit $p \neq q$ existieren zwei disjunkte, offene Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ wobei $U, V \in \mathcal{T}$

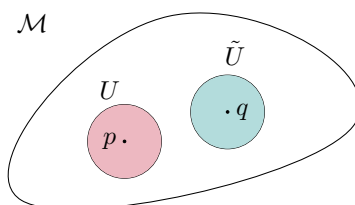


Abbildung 1.2.: Hausdorff'sche Eigenschaft

ii) 2. Abzählbarkeitsaxiom

\mathcal{M} hat eine abzählbare Basis der Topologie, das heißt es existiert eine abzählbare Menge $\{U_1, \dots, U_k, \dots\}$ offener Teilmengen oder abzählbar viele offene Mengen U_1, \dots, U_k, \dots mit $U_i \in \mathcal{T}$, sodass $\forall p \in \mathcal{M}$ und alle Umgebungen U von p gibt es ein k sodass $p \in U_k \subseteq U$.

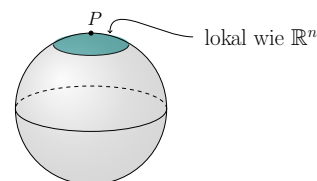
- iii) \mathcal{M} ist homöomorph zu \mathbb{R}^n , das heißt $\forall p \in \mathcal{M}$ existiert eine Umgebung U von p und ein Homöomorphismus $X : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen).

Definition 1.6 (Karte, Atlas)

Das Paar (X, U) heißt **Karte** von \mathcal{M} um p .

Eine Menge $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}\}$ von Karten heißt **Atlas** von \mathcal{M} , falls

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \mathcal{M} \quad (1.1)$$



Topologische Mannigfaltigkeiten sind die Grundbausteine. Nun wollen wir auf diesen Mannigfaltigkeiten Geometrie betreiben. Dafür benötigen wir mehr Struktur. Wir wollen die differenzierbare Struktur des \mathbb{R}^n auf unseren Mannigfaltigkeiten "holen".

Definition 1.7 (Kartenwechsel)

Seien x_α und x_β zwei Karten, dann ist der Kartenwechsel wie folgt definiert:

$$x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

Dies ist ein Homöomorphismus.

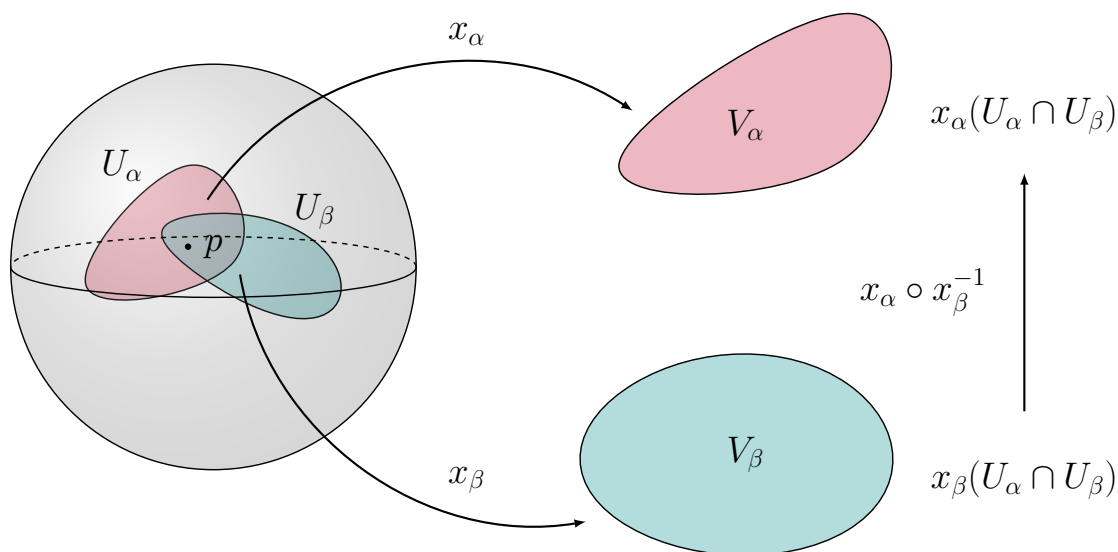


Abbildung 1.3.: Kartenwechsel

Nun wollen wir, dass $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ Diffeomorphismen sind.

Definition 1.8 (C^∞ -Atlas)

Sei \mathcal{M} eine topologische Mannigfaltigkeit.

- a) Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha)\}$ auf \mathcal{M} heißt C^∞ -Atlas, falls alle Kartenwechsel $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ mit $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ C^∞ -Diffeomorphismen sind.
- b) Sei \mathcal{A} ein C^∞ -Atlas von \mathcal{M} .
Eine Karte (x, U) ist verträglich mit \mathcal{A} , falls $x \circ x_\alpha^{-1}$ ein C^∞ -Diffeomorphismus ist.

Gegeben ein C^∞ -Atlas, so kann man diesen zu einem *maximalen* C^∞ -Atlas vervollständigen. Maximal bedeutet hierbei, dass der Atlas nicht strikt in einem anderen enthalten ist.

Definition 1.9 (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)

Eine differenzierbare Struktur auf einer topologischen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist ein maximaler C^∞ -Atlas. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur.

Bemerkung: Man kann auch eine topologische Mannigfaltigkeit definieren, ohne das 2. Abzählbarkeitsaxiom zu fordern.

Aber: Dann bekommt man Mannigfaltigen mit ganz anderen Eigenschaften als diejenigen, die wir betrachten wollen.

Wichtig: Hausdorffsch + 2. Abzählbarkeitsaxiom \Rightarrow parakompakt, d. h. jede offene Überdeckung hat eine lokal endliche Verfeinerung.

(V_j) heißt Verfeinerung von (U_i) , falls $\forall V_j \exists U_i$ mit $V_j \subseteq U_i$

Lokal endlich: $\forall p \in X \exists$ Umgebung U , die nur endlich viele V_j trifft

Parakompakt $\Rightarrow \exists$ Partition der Eins f mit

$$f_i : V_i \subseteq X \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{i \in I} f_i(x) = 1$$

Beispiel 1.11

Metrische Räume sind parakompakt.

Beispiel 1.12 (differenzierbare Mannigfaltigkeiten)

1. \mathbb{R}^n mit Atlas $\mathcal{A} = \{(\text{id}, \mathbb{R}^n)\}$

2. V Vektorraum, B Basis mit $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, Atlas $\mathcal{A} = \{(\chi_B, V)\}$

$$\chi_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

wobei (e_1, \dots, e_n) die Standardbasis ist.

3. $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$, (χ_U, U) mit $\chi_U = \text{id}|_U$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, \mathcal{M} differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\mathcal{A} = \{(\chi_U, U)\}$ Atlas von \mathcal{M}

$\mathcal{A}_V = \{(\chi_V, U_V)\}$ wobei $(\chi_V, U_V) = (\chi_U|_{U \cap V}, U \cap V)$

4. $\mathcal{M}_1 = S^1$, $\mathcal{M}_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \text{"unendlicher Zylinder"}$

Seien $\mathcal{M}_1^{n_1}, \mathcal{M}_2^{n_2}$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so ist $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ ebenfalls eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + n_2$.
Atlas $\mathcal{A} = \{(x \times y, U \times V)\}$, wobei

$(x, U) = \text{Karte von } \mathcal{M}_1$

$(y, V) = \text{Karte von } \mathcal{M}_2$

$$(x \times y)(p_1, p_2) = (x(p_1), y(p_2))$$

5. $S_R^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

- Teilraumtopologie: $U \subset S_R^n$ offen $\Leftrightarrow \exists U' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen mit $U = U' \cap S_R^n$
- Atlas: Wir brauchen zwei Karten. Einmal für den Nord- und einmal für den Südpol (haben unterschiedliche Orientierung).
Nordpol (N):

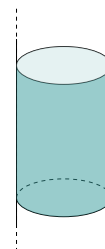
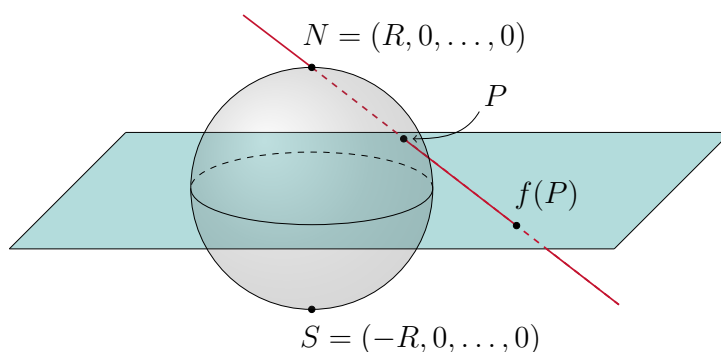
$$f_N : S_R^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

$$f_N(x_0, \dots, x_n) = \frac{R}{R - x_0}(x_1, \dots, x_n) \quad (1.4)$$

Analog für den Südpol (S):

$$f_S : \mathcal{M}_s \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

\rightarrow Zwei Karten f_N und f_S ("Stereographische Projektionen").



Bemerkung: N mit der Teilraumtopologie und dem Atlas $\mathcal{A}_N = \{(\chi|_U, U \cap N)\}$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

1.2. Differenzierbare Abbildungen

Definition 1.14 (Differenzierbare Abbildungen)

Seien \mathcal{M}, \mathcal{N} differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ heißt differenzierbar, falls $\forall p \in \mathcal{M}$ Karten (x, U) von \mathcal{M} um p (Karten (y, V) von \mathcal{N} um $f(p)$)

Es gilt: $y \circ f \circ x^{-1} : x(U \cap f^{-1}(U')) \rightarrow y(f(U) \cap U')$ ist C^∞ -differenzierbar. Wir bezeichnen die Menge aller differenzierbaren Abbildungen durch $C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$; $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$.

Definition 1.15 (Diffeomorphismus)

Eine differenzierbare Abbildung $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ heißt Diffeomorphismus, falls f eine Bijektion und f^{-1} differenzierbar ist.

Die Menge aller Diffeomorphismen $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ bezeichnen wir mit $\text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ($\text{Diff}(\mathcal{M}) \equiv \text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$). Diese bilden eine Gruppe (Diffeomorphismengruppe).

1.3. Untermannigfaltigkeiten

Definition 1.16 (Untermannigfaltigkeiten)

Sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ heißt Untermannigfaltigkeit falls: $\forall p \in \mathcal{N} \exists$ Karte (x, U) von \mathcal{M} um p $x : \mathcal{M} \rightarrow V' \times V''$ mit $x(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = V' \times \{z_0\}$ für ein $z_0 \in V''$

Bemerkung: \mathcal{N} mit der Teilraumtopologie und dem Atlas $\mathcal{A}_\mathcal{N} = \{(x_U, U \cap \mathcal{N})\}$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 1.18 (Einbettung)

Seien \mathcal{M}, \mathcal{N} differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Einbettung ist eine differenzierbare Abbildung

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \tag{1.6}$$

Sodass

- $f(\mathcal{N}) \cap \mathcal{M}$ eine Umkehrfunktion.
- $f : \mathcal{N} \rightarrow f(\mathcal{N})$ Diffeomorphismus.

1.4. Tangentialraum

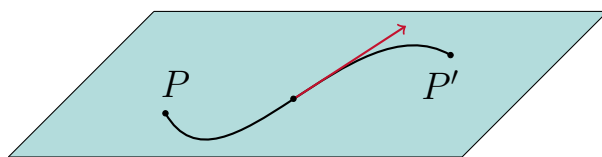
Definition 1.19

1. Ein Tangentialvektor an \mathcal{M} im Punkt $p \in \mathcal{M}$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$v : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

2. Die Menge aller Tangentialvektoren an \mathcal{M} in p heißt Tangentialraum von \mathcal{M} in p : $T_p\mathcal{M}$. $T_p\mathcal{M}$ ist ein Vektorraum.



1.20 Hilfslemma (Existenz einer Glockenfunktion)

Sei $U \subseteq \mathcal{M}$ offen, $p \in U$. Dann existiert ein $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, s. d.

1. $\text{supp } \varphi \subseteq U$
2. $\varphi = 1$ auf einer Umgebung $U' \subset U$ von p ist

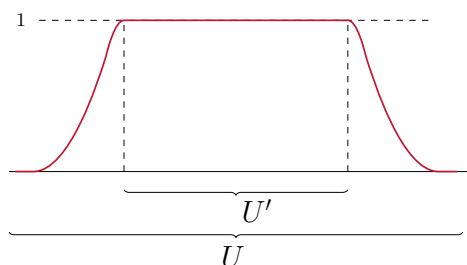
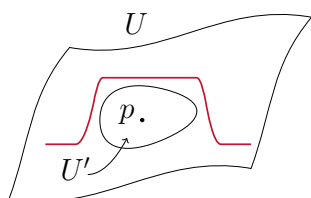


Abbildung 1.4.: Visualisierung des Hilfslemmas (1.20) ("bump function")

Beweis:

Sei (x, U) eine Karte um p , $\varepsilon > 0$, s. d. $B_{2\varepsilon}(x(p)) \subset V \subset \mathbb{R}^n$ und wähle $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left. \begin{array}{l} \text{supp}(\psi) \subset B_{2\varepsilon}(x(p)) \\ \varphi = 1 \text{ auf } B_\varepsilon \end{array} \right\} \text{ Resultat aus Analysis}$$

$$\text{Setze } \varphi(q) = \begin{cases} \psi(x(q)) & \text{für } q \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

□

1.22 Satz (Eigenschaften des Tangentialraums)

Für $v \in T_p\mathcal{M}$ gilt:

1. $v(\text{konstante Funktion}) = 0$
2. Falls $f = g$ in einer Umgebung von p , so gilt $v(f) = v(g)$

"Lokalisierung von Tangentialvektoren"

Beweis: (zu 2)

Wähle φ wie im Hilfslemma, wobei U so gewählt ist, dass $\varphi f = \varphi g$ auf U ist. Nun gilt:

$$\begin{aligned} v(\varphi f) &= v(\varphi)f(p) + \varphi(p)v(f) \\ &= v(\varphi)f(p) + v(f) \\ v(\varphi g) &= v(\varphi)g(p) + v(g) \end{aligned}$$

Dann folgt $v(\varphi f) = v(\varphi g) \Leftrightarrow v(f) = v(g)$.

□

Beweis: (zu 1)

$$v(\lambda f) = \lambda v(f), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

zz: $v(\lambda) = 0$. Aufgrund von $v(\lambda) = \lambda v(1)$ genügt es zu zeigen, dass $v(1) = 0$. Dies folgt aus der Produktregel

$$v(1) = v(1 * 1) = 1v(1) + v(1)1 = 2v(1) \Rightarrow v(1) = 0 \quad \square$$

Jede Karte liefert eine spezielle Basis von $T_p\mathcal{M}$.

Definition 1.25

Sei (x, U) eine Karte von \mathcal{M} um p . Definiere Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ ($i = 1, \dots, m$) wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) \Big|_p := \partial_i(f \circ x^{-1}) \Big|_{x(p)} \quad (1.7)$$

Hierbei bedeutet ∂_i die i -te partielle Ableitung.

1.26 Satz

Die Tangentialvektoren $(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p)$ bilden eine Basis des $T_p\mathcal{M}$. Jeder Tangentialvektor lässt sich schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^m v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p. \quad (1.8)$$

Beweis: (Satz 1.26 Teil 1)

Es gilt die lineare Unabhängigkeit:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (x^j) = \delta_{ij} \quad (1.9)$$

Jetzt muss noch gezeigt werden, dass $(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p)$ ein Erzeugendensystem für $T_p\mathcal{M}$ ist. Dafür benötigen wir allerdings zunächst ein Hilfslemma. \square

1.28 Hilfslemma

Sei $f : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann existiert eine Umgebung $U' \subset U$ von p ($p \in U'$) und eine glatte Funktion $f_i : U' \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^m (x_i - x_i(p)) f_i. \quad (1.10)$$

Wobei $f_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f)$.

Beweis:

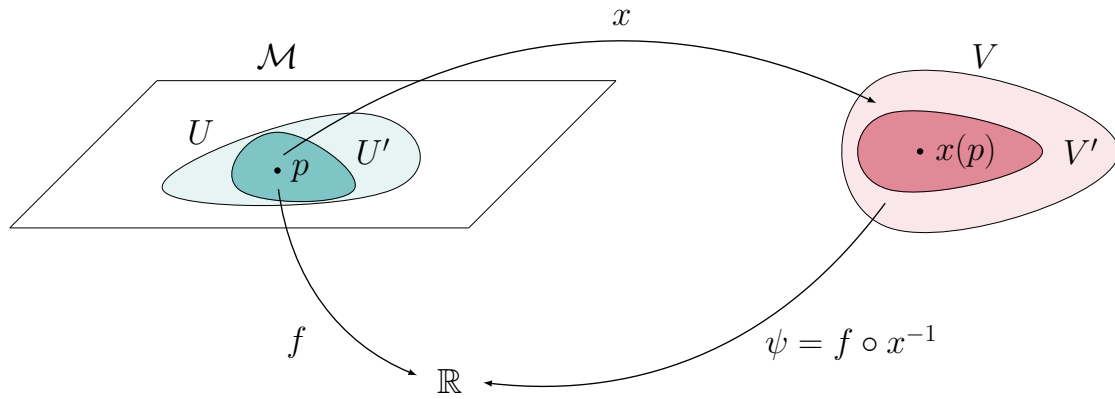


Abbildung 1.5.: Veranschaulichung von Hilfslemma 1.28

Nach Abbildung ?? gilt:

$$\psi(u) - \psi(u_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \psi(tu + (1-t)u_0) dt$$

Hierbei ist $u = x(q)$ mit $q \in \mathcal{M}$ und $u_0 = x(p)$.

$$\psi(u) - \psi(u_0) = \sum_i (u^i - u_0^i) \underbrace{\int_0^1 \frac{d\psi}{du^i}(tu + (1-t)u_0) dt}_{:= \psi_i(u)}$$

Setze $f_i = \psi_i \circ x : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. f_i ist glatt und es gelten folgende Eigenschaften nach Definition:

- $\psi(u) - \psi(u_0) = \psi(x(q)) - \psi(x(p)) = f(q) - f(p)$
- $u^i = x^i(q)$
- $u_0^i = x^i(p)$
- $\psi_i(u) = \psi_i(x(1)) = f_i(q)$

Diese Eigenschaften können wir nun wie folgt verwenden:

$$f(q) - f(p) = \sum_{i=1}^n (x_i(q) - x_i(p)) f_i(q)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f) &= \partial_i \underbrace{(f \circ x^{-1})}_{\psi} \Big|_{x(p)} \\ &= \partial_i \psi \Big|_{x(p)} \\ &= \psi_i(x(p)) = f_i(p) \end{aligned}$$

$$\text{Da } \psi(u) = \psi(u_0) + \sum_i (u^i - u_0^i) \psi_i(u)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial u_i} \psi \right|_{x(p)} = \psi_i(u) \Big|_x (p) = \psi(x(p))$$

Und somit gilt schließlich $f_i(p) = \left. \frac{\partial}{\partial u_i} \right|_p (f)$. □

Nun können wir unseren Beweis fortführen.

Beweis: (Satz 1.26 Teil 2)

$$\begin{aligned} v(f) &= v(f(p) + \sum_i (x_i - x_i(p))f_i) \\ &= v(f(p)) + \sum_i v(x_i - x_i(p))f_i \end{aligned}$$

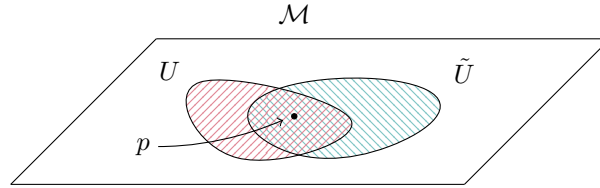
Benutze Produktregel

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_i \underbrace{((x_i(p) - x_i(p))v(f_i))}_{=0} + \underbrace{v(x_i - x_i(p))f_i}_{=v(x_i)} \\ &= \sum_i v(x_i)f_i \\ &= \sum_i v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f \end{aligned}$$

□

1.31 Satz (Transformationsregel)

Seien (x, U) und (\tilde{x}, \tilde{U}) zwei Karten um $p \in \mathcal{M}$.



Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \Big|_p = \sum_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \Big|_p (x_j)}_{\in \mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \quad (1.11)$$

(In der linearen Algebra hatten Transformationen die ähnliche Gestalt: $\tilde{v}_i = \sum_j a_{ij}v_j$)

Definition 1.32 (Differential, Ableitung)

Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ glatt. Das **Differential (Ableitung)** von f in p ist die lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} df \Big|_p &: T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)} \mathcal{N} \\ v &\mapsto df \Big|_p (v), \end{aligned}$$

welche definiert ist durch:

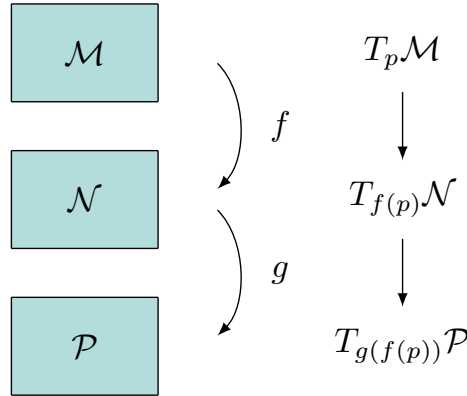
$$\underbrace{df \Big|_p}_{T_{f(p)} \mathcal{N}} \underbrace{(\phi)}_{\in \mathcal{F}(\mathcal{N})} = \underbrace{v(\phi \circ f)}_{\in \mathcal{F}(\mathcal{N})}, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$$

Fakt: $df|_p$ ist linear.

1.33 Satz (Kettenregel)

Seien $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ und $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ glatte Abbildungen. Dann gilt:

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \circ df|_p \quad (1.12)$$



Beweis: (Satz 1.33)

$$\begin{aligned} d(g \circ f)|_p (v)(\phi) &= v(\phi \circ g \circ f) \\ &= df|_p (v)(\phi \circ g) \\ &= dg|_{f(p)} \circ df|_p (v)(\phi) \end{aligned} \quad \square$$

1.35 Satz

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ glatt und sei (x, U) eine Karte von \mathcal{M} um p und (y, V) eine Karte von \mathcal{N} um p . Setze $f_j = y_j \circ f$ mit $f_j : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\underbrace{df|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right)}_{\in T_{f(p)}\mathcal{M}} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f_j)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)}}_{\in T_{f(p)}\mathcal{N}} \quad (1.13)$$

Definition 1.36 (regulärer Wert/Punkt, Submersion, Immersion)

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ glatt und es gelte $\dim \mathcal{M} = m$, $\dim \mathcal{N} = n$.

1. Rang f in p ist $\text{Rang } df|_p$.
2. $p \in \mathcal{M}$ heißt regulärer Punkt ($\in \mathcal{M}$) $\Leftrightarrow \text{Rang } df|_p = \dim \mathcal{N}$.
3. $q \in \mathcal{N}$ heißt regulärer Wert ($\in \mathcal{N}$) $\Leftrightarrow \forall p \in f^{-1}(q)$ sind reguläre Punkte.
4. f heißt Submersion $\Leftrightarrow f$ surjektiv und alle $p \in \mathcal{M}$ sind reguläre Punkte.

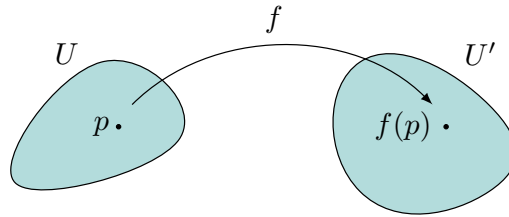
5. f heißt Immersion $\Leftrightarrow df|_p$ injektiv für alle $p \in \mathcal{M}$

1.37 Satz (Umkehrsatz)

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ glatt. Sei $df|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$ ein Isomorphismus, dann existiert eine Umgebung U um p und eine Umgebung U' um $f(p)$, so dass

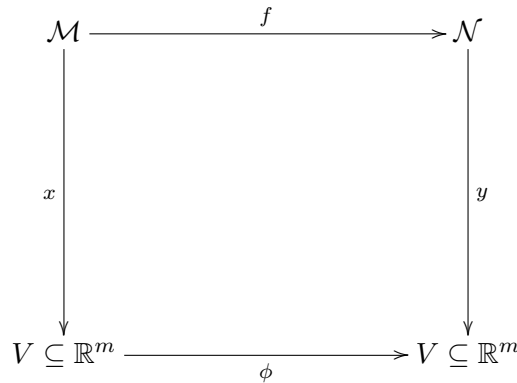
$$f|_U : U \rightarrow U' \quad (1.14)$$

ein Diffeomorphismus ist.



Beweis: (Satz 1.37)

Nutze Karten um dies auf den euklidischen Fall zu führen.



Seien (x, U) und (y, U') Karten von \mathcal{M} und \mathcal{N} um p und $f(p)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt: $f(U) \subset U'$. Dann ist ϕ eine glatte Abbildung deren Differential $d\phi|_{x(p)}$ invertierbar ist. Umkehrsatz im \mathbb{R}^n auf ϕ anwenden: Es existieren Umgebungen \hat{V} von $x(p)$ und \hat{V}' von $y(f(p)) = \phi(x(p))$, so dass $\hat{\phi}|_{\hat{V}}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist

$$f|_{x^{-1}(\hat{V})} : x^{-1}(\hat{V}) \rightarrow y^{-1}(\hat{V}')$$

ein Diffeomorphismus.

$$\phi = y \circ f \circ x^{-1} \Rightarrow f = y^{-1} \circ \phi \circ x$$

□

1.39 Satz (Satz über implizite Funktionen)

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ glatt und es gelte $\dim \mathcal{M} = m$, $\dim \mathcal{N} = n$.

1. Sei $\text{Rang}_p f = r$ und $v \in V$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann existiert zu jeder Karte (y, U') um $f(p)$ eine Karte (x, U) um p , so dass

$$y \circ f \circ x^{-1}(v_1, \dots, v_m) = (v_1, \dots, v_r, \phi_{r+1}(v), \dots, \phi_n(v)). \quad (1.15)$$

Falls $y(f(p)) = 0$, so kann man x so wählen, dass $x(p) = 0$ und $\phi_j(0) = 0$ ($\forall j > r$).

2. Sei $\text{Rang } f = r$ auf einer Umgebung von p . Dann gibt es Karten (x, U) , (y, U') , so dass

$$y \circ f \circ x^{-1}(v_1, \dots, v_m). \quad (1.16)$$

Beweis: (Satz 1.39 Teil 1)

Wähle Karten und modifiziere diese geschickt. Sei (y, U') eine Karte von \mathcal{N} um $f(p)$. Sei (\hat{x}, U) eine Karte von \mathcal{M} um p mit $\hat{x}(p) = 0$. Setze

$$\hat{A} = (\hat{A})_{ij} = (\partial_i \hat{\phi}_j),$$

mit $\phi = y \circ f \circ x^{-1}$. Da $\text{Rang}_p f = r$, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$\det \tilde{A} \neq 0.$$

Wobei hier nun $\tilde{A} = (\hat{A}_{ij})_{1 \leq i \leq r}$. Setze

$$x_i = \begin{cases} y_i \circ f & 1 \leq i \leq r \\ \hat{x}_i & \text{falls } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Dann gilt $x(p) = 0$ und

$$\partial_i(x_j \circ \hat{x}^{-1})(0) = \begin{pmatrix} \partial_i \hat{\phi}_j(0) & \star \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $\text{Rang } x = m = \dim \mathcal{M}$ im Punkt p . Mit Hilfe des Umkehrsatzes folgt, dass x ein lokaler Diffeomorphismus ist und eine Umgebung U um den Punkt p existiert und eine Umgebungen V von 0 in \mathbb{R}^n , sodass $x : \mathcal{M} \rightarrow V$ eine Karte ist und

$$\begin{aligned} \phi(v_1, \dots, v_m) &= y \circ f \circ x^{-1}(v_1, \dots, v_m) \\ &= (v_1, \dots, v_r, \phi_{r+1}(v), \dots, \phi_m(v)). \end{aligned}$$

Wobei ϕ_k glatt auf U' sind mit $\phi_i(0) = 0$. Betrachte die Jacobi-Matrix:

$$A_{ij} = (\partial_i \phi_j)_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \star & \partial_i \phi_j \end{pmatrix}$$

Da $\text{Rang } \phi = r$ in einer Umgebung von $U = 0$ hat folgt:

$$\partial_i \phi_j = 0 \quad \forall i, j > r. \quad \square$$

1.41 Korollar

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ mit $\dim \mathcal{M} = m$ und $\dim \mathcal{N} = n$ glatt, dann gilt:

1. Sei $q \in \mathcal{N}$ ein regulärer Wert, so ist

$$\mathcal{H} = f^{-1}(q) = \{p \in \mathcal{M} \mid f(p) = q\} \quad (1.17)$$

eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - n$.

2. Sei f linear in einer Umgebung von $\mathcal{H} = f^{-1}(q)$ vom Rang r , so ist \mathcal{H} eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - r$. Der Tangentialraum $T_p\mathcal{H}$ ist isomorph zu

$$\ker df \Big|_p \subseteq T_p\mathcal{M}, \quad \forall p \in \mathcal{H}. \quad (1.18)$$

2. Vektorbündel

2.1. Tangentialbündel

Wir wollen nun alle Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} gemeinsam betrachten.

$$T\mathcal{M} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M} = \{(p, v) | p \in \mathcal{M}, v \in T_p\mathcal{M}\} \quad (2.1)$$

Dies soll nun die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit haben. Das heißt wir müssen eine Topologie und eine C^∞ -Struktur auf $T\mathcal{M}$ definieren.

$$\begin{aligned} \pi : T\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (p, v) &\mapsto p \end{aligned}$$

Sei (x, U) eine Karte von \mathcal{M}^m . Dann definieren wir eine Karte (\bar{x}, \bar{U}) von $T\mathcal{M}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{p \in U} T_p\mathcal{M} \\ \bar{x} : \bar{U} &\rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m} \\ (p, v) &\mapsto (x(p), \xi) \end{aligned}$$

Wobei $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m) \in \mathbb{R}^m$ gegeben ist durch:

$$v = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \quad \forall p \in U. \quad (2.2)$$

Wir können aber Kartenwechsel betrachten.

Seien (\bar{x}, \bar{U}) und (\bar{y}, \bar{U}') zwei Karten. Betrachte die Abbildungen:

$$\begin{aligned} \bar{y} \circ \bar{x}^{-1} : \underbrace{x(\bar{U} \cap \bar{U}')}_{x(U \cap U') \times \mathbb{R}^m} &\rightarrow \underbrace{\bar{y}(\bar{U} \cap \bar{U}')}_{y(U \cap U') \times \mathbb{R}^m} \\ (v, \xi) &\mapsto (y \circ \underbrace{x^{-1}(v)}_{v \in T\mathcal{M}|_{\bar{U} \cap \bar{U}'}} , \eta) \end{aligned}$$

Wobei $\eta = d(y \circ x^{-1})|_U \xi$.

Da $y \circ x^{-1}$ Diffeomorphismus ist, ist $\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}$ ein Isomorphismus. Nun können wir die Topologie auf $T\mathcal{M}$ definieren. $O \subset T\mathcal{M}$ offen, falls $\bar{x}(O \cap \bar{U})$ offen in $V \times \mathbb{R}^m$ ist für alle Karten $(x, U) \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ (bzw. $(\bar{x}, \bar{U}) \in \mathcal{A}_{T\mathcal{M}}$)

2.1 Satz

$T\mathcal{M}$ mit dieser Topologie ist eine topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}_{T\mathcal{M}}$ eine differenzierbare Struktur.

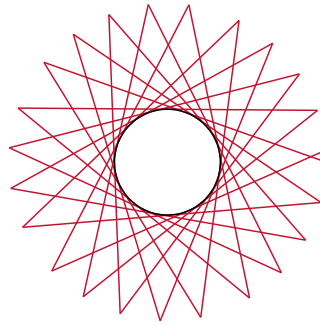


Abbildung 2.1.: Darstellung des Tangentialbündels eines Kreises

2.2. Vektorbündel

$T\mathcal{M}$ hat die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit. Allerdings hat es noch mehr, nämlich die eines Vektorbündels, was wir nun definieren.

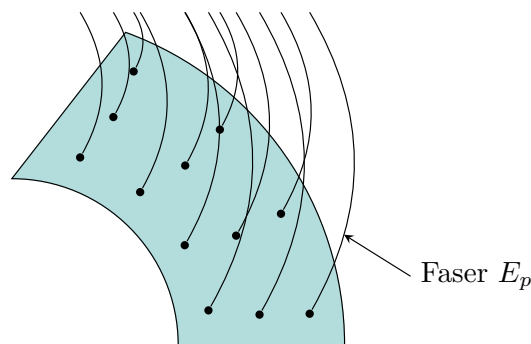


Abbildung 2.2.: Veranschaulichung eines Vektorbündels

Definition 2.2 (Vektorbündel)

Sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein \mathbb{R} -Vektorbündel vom Rang k über \mathcal{M} ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer glatten surjektiven Abbildung:

$$\pi : E \rightarrow \mathcal{M},$$

so dass:

1. $\forall p \in \mathcal{M}$ hat $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$ die Struktur eines \mathbb{R} -Vektorraums der Dimension k . E_p heißt Faser von E über p .
2. Für alle p in \mathcal{M} existiert eine Umgebung U von p in \mathcal{M} und ein Diffeomorphismus, für den gilt:
 - $\pi \circ \phi = pr_1$
 - Für alle $q \in U$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi \Big|_q &: \{q\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow E_q \\ \{q, \xi\} &\mapsto \phi_q(\xi) := \phi(q, \xi) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. ϕ heißt lokale Trivialisierung von E .

$$\begin{array}{ccc}
 \phi : U \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \pi^{-1}(U) \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \pi \\
 & U &
 \end{array}$$

Bemerkung: Ein Vektorbündel ist ein Tripel (E, π, \mathcal{M}) aber wir schreiben oft nur E . Hierbei wird E Totalraum und \mathcal{M} Basis genannt.

Beispiel 2.4

1. Triviales Bündel:

$$\begin{aligned}
 \pi : E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathcal{M} \\
 (p, \xi) &\mapsto p
 \end{aligned}$$

2. Tangentialbündel

$$\begin{aligned}
 \pi : T\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\
 (p, v) &\mapsto p
 \end{aligned}$$

3. Tautologisches Bündel

Hierbei ist die Mannigfaltigkeit der Reell projektive Raum \mathbb{RP}^n und $E = \{(l, x) | l \in \mathbb{RP}^n, x \in l \subset \mathbb{R}^{n+1}\}$.

$$\begin{aligned}
 \pi : E &\rightarrow \mathbb{RP}^n \\
 (l, x) &\mapsto l
 \end{aligned}$$

Behauptung: Dies ist ein Vektorbündel vom Rang 1. Vektorraumstruktur auf E_l :

$$\begin{aligned}
 (l, x) + (l, y) &:= (l, x + y) \\
 k(l, x) &:= (l, kx)
 \end{aligned}$$

Nun wollen wir uns damit beschäftigen wie wir Vektorbündel konstruieren können. Angenommen uns wäre das folgende gegeben:

1. Eine Familie von Vektorräumen E_p (mit $p \in \mathcal{M}$) der Dimension k
2. Eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von \mathcal{M}
3. $\forall \alpha \in A, p \in U_\alpha$ gibt es den folgenden Isomorphismus:

$$\phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k \rightarrow E_p \tag{2.3}$$

Setze $E = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} E_p$ und definiere folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned}\pi : E &\rightarrow \mathcal{M} \\ (p, v) &\mapsto p \\ \phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k &\rightarrow E \Big|_{U_\alpha} \\ (p, \xi) &\mapsto (p, \phi_{\alpha,p}(\xi)).\end{aligned}$$

Nun stellt sich die Frage unter welchen Voraussetzungen (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel ist.

2.5 Lemma

Sei \mathcal{M} eine glatte Mannigfaltigkeit, E eine Menge und die Abbildung $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ surjektiv. Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von \mathcal{M} zusammen mit bijektiven Abbildungen

$$\phi_\alpha^{-1} = \varphi : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k,$$

die $\text{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$ erfüllen, so dass wann immer $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dann ist

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cup U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k,$$

von der Form:

$$(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(p, v) = (p, \tau(p)v)$$

mit einer glatten Abbildung $\tau : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$.

Dann existiert eine eindeutige Struktur als glattes k -dim Vektorbündel über \mathcal{M} für die φ_α^{-1} lokale Trivialisierungen sind.

Beweis: (Lemma 2.5)

Sei $p \in \mathcal{M}$ und setze $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$. Falls $p \in U_\alpha$, dann ist

$$\varphi_\alpha \Big|_p : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k.$$

Definiere eine Vektorraumstruktur auf E_p durch die Forderung, dass die Abbildung $\varphi_\alpha \Big|_p$ ein Isomorphismus ist. Durch Verkleinern von U_α und Hinzunahme von weiteren offenen Mengen kann man annehmen, dass jedes U_α diffeomorph zu $\overline{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$ ist. Verknüpfung von φ_α mit einem solchen Diffeomorphismus liefert eine Bijektion:

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \overline{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k.$$

Diese nutzen wir als Karte für E . Wegen Gleichung 2.5 bekommen wir eine glatte Struktur auf E . \square

Sei (x, U) Karte von \mathcal{M} , $p \in U$, $v \in T_p \mathcal{M}$.

$$v = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \tag{2.4}$$

Definiere:

$$\begin{aligned}\varphi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto (p, v),\end{aligned}$$

dort wo (x) und (\bar{x}) überlappen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p &= \left(\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_p \\ v &= \sum_{j=1}^m \xi_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_p = \sum_{j=1}^m \xi_j \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \\ &= \sum_{i,j} \xi_i \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_p \\ \Rightarrow \bar{\xi}_j &= \sum_i v_i \left(\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

$$\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}(x, v) = (x, \bar{v}) \quad (2.5)$$

$$= (x, \tau(x)v) \quad (2.6)$$

Wobei nun $\tau(x)$ gegeben ist durch $\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i}$.

Im Folgenden werden nun einige Beispiele für Vektorbündel angegeben.

2.2.1. Direkte Summe (Whitney-Summe)

Es seien zwei Vektorbündel gegeben:

$$\begin{aligned} \pi : E &\rightarrow \mathcal{M} \\ \pi' : E' &\rightarrow \mathcal{M}' \end{aligned}$$

mit Rang k bzw. k' . Dann existiert eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, sodass für alle $\alpha \in A$ und alle $p \in U_\alpha$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k &\rightarrow E_p, & g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\rightarrow \text{Gl}(k, \mathbb{R}) \\ \phi'_{\alpha,p} : \mathbb{R}^{k'} &\rightarrow E'_p, & g'_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\rightarrow \text{Gl}(k', \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &:= E_p \oplus E'_p \\ \mathcal{E} &= \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{E}_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{k'} &\rightarrow E_p \oplus E'_p \\ (v, w) &\mapsto (\phi_{\alpha,p}(v), \phi'_{\alpha,p}(w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\rightarrow \text{Gl}(k + k', \mathbb{R}) \\ p &\mapsto \begin{pmatrix} g_{\alpha,\beta}(p) & 0 \\ 0 & g'_{\alpha,\beta}(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\mathcal{E} ist nun ein Vektorbündel. Wir nennen \mathcal{E} die Whitney-Summe von E und E' und schreiben:

$$\mathcal{E} = E \oplus E'.$$

2.2.2. Tensorbündel

Es seien E' und E'' Vektorbündel über \mathcal{M} und (U_α) sei wie oben definiert.

$$\begin{aligned}(E' \otimes E'')_p &:= E'_p \otimes E''_p \\ \phi_{\alpha p} : \mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^{k''} &\rightarrow E'_p \otimes E''_p \\ (v, w) &\mapsto \phi'_{\alpha p}(v) \otimes \phi''_{\alpha p}(w)\end{aligned}$$

Wir erhalten zusammen die folgende Übergangsmatrix:

$$g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta}(p) \otimes g''_{\alpha\beta}(p) \quad (2.7)$$

Diese Abbildung ist glatt und somit ergibt sich ein neues Vektorbündel.

2.2.3. Homomorphismenbündel

Es seien die Daten wie eben schon gegeben. Das Homomorphismenbündel

$$\text{Hom}_p(E', E'') := \text{Hom}(E'_p, E''_p),$$

ist wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha p} : \text{Hom}(\mathbb{R}^{k'}, \mathbb{R}^{k''}) &\rightarrow \text{Hom}(E'_p, E''_p) \\ f &\mapsto \phi''_{\alpha p} \circ f \circ (\phi'_{\alpha p})^{-1}\end{aligned}$$

2.2.4. Duales Bündel

Sei ein Vektorbündel (E, π, \mathcal{M}) gegeben. Wir wollen nun das sogenannte duale Vektorbündel konstruieren. Wir führen hier die folgende Notation ein $E^* = \text{Hom}(E, \mathbb{R})$, wobei \mathbb{R} das triviale Vektorbündel vom Rang 1 ist. Ein wichtiges Beispiel ist hierbei das Kotangentenbündel $T^*\mathcal{M} = \text{Hom}(T\mathcal{M}, \mathbb{R})$. $T_p^*\mathcal{M}$ heißt der Kotangentenraum. Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung.

$$df \Big|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

Es gilt $df \Big|_p \in T_p^*\mathcal{M} \subset T^*\mathcal{M}$. Sei $x : U \rightarrow x(U)$ eine Karte

$$dx \Big|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Die so definierten Differentiale $\{dx^1 \Big|_p, \dots, dx^n \Big|_p\}$ bilden eine Basis für $T_p^*\mathcal{M}$.

- $dx^i \Big|_p$ heißen Kotangentenvektoren
- $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ heißen Tangentenvektoren

Seien (x, U) und (y, U') zwei Karten um p .

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_j a_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \quad \text{wobei } a_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \quad (2.8)$$

$$dx^k = \sum_l b_l^k dy^l \Big|_p = \sum_l \frac{\partial x^k}{\partial y^l} dy^l \Big|_p \quad (2.9)$$

2.2.5. Alternierendes Vektorbündel

Das Alternierende Vektorbündel

$$\begin{aligned}\wedge^m(E', E'')_p &:= \wedge^m(E'_p, E''_p) \\ &= \{f : \underbrace{E'_p \times \cdots \times E'_p}_{m\text{-mal}} \rightarrow E''_p\}\end{aligned}$$

Wobei f multilinear und alternierend ist.

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha p} : \wedge^m(\mathbb{R}^{k'}, \mathbb{R}^{k''}) &\rightarrow \wedge^m(E'_p, E''_p) \\ f &\mapsto ((v_1, \dots, v_m) \mapsto \phi''_{\alpha p}(f^{-1}(\phi_{\alpha p})'(v_1), \dots, f^{-1}(\phi'_{\alpha p})(v_m)))\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $g_{\alpha\beta}$ glatt ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\wedge^1(E', E'') &= \text{Hom}(E', E'') \\ \wedge^1(T\mathcal{M}, \mathbb{R}) &= T^*\mathcal{M}\end{aligned}$$

Definition 2.7 (Bündel-Abbildung)

Seien (E, π, \mathcal{M}) und (E', π', \mathcal{M}') Vektorbündel. Ein paar (f, L) von glatten Abbildungen $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ und $L : E \rightarrow E'$ heißt Bündelabbildung falls:

- $\pi' \circ L = f \circ \pi$
- $L|_{E_p}$ ist \mathbb{R} -linear

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}' \end{array} \quad (2.10)$$

Beispiel 2.8

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ glatte Mannigfaltigkeiten und $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ glatt. Dann ist (f, df) eine Bündel-Abbildung von $T\mathcal{M}$ nach $T\mathcal{M}'$.

Definition 2.9 (Unterbündel)

Sei (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel mit Rang k . Eine Untermannigfaltigkeit $E' \subset E$ ist ein Unterbündel vom Rang k' falls

$$\pi|_{E'} : E' \rightarrow \mathcal{M}, \quad (2.11)$$

ein Vektorbündel ist.

Beispiel 2.10 (Unterbündel)1. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$TS^n \cong \{(p, x) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} | x \perp p\} \subset \underbrace{S^n \times \mathbb{R}^{n+1}}_{\text{triviales Bündel}}$$

ist ein Unterbündel

2. \mathbb{RP}^n mit dem tautologischen Bündel

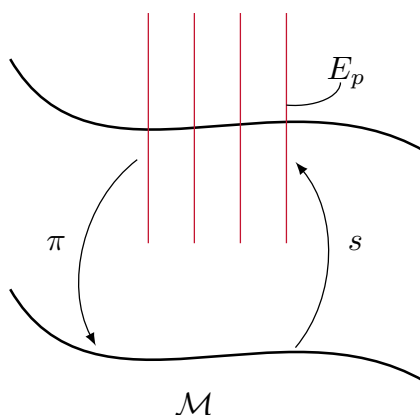
$$\{(l, x) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} | x \in l\} \subset \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$$

ist ein Unterbündel.

Definition 2.11 (Schnitte von Vektorbündeln)

Sei (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel. Eine glatte Abbildung $s : \mathcal{M} \rightarrow E$ heißt *Schnitt von E* , falls $\pi \circ s = \text{id}|_{\mathcal{M}}$. Wir bezeichnen die Schnitte von E mit $\Gamma(E)$.

Sei $U \subset \mathcal{M}$. Ein Schnitt von E über U ist eine Abbildung $s : U \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}_U$.

**Beispiel 2.12 (Schnitte)**

- Nullschnitt

$$\begin{aligned} s : \mathcal{M} &\rightarrow E \\ p &\mapsto 0 \in E_p \end{aligned}$$

- Schnitte von $T\mathcal{M}$ heißen Vektorfelder. Wir bezeichnen die Menge der **Vektorfelder** $V : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ mit $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

2.13 Satz

Der Raum der Schnitte $\Gamma(E)$ ist ein Modul über $\mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Beweis: (Satz 2.13)

Seien $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, so ist $s_1 + s_2 \in \Gamma(E)$

$$(s_1 + s_2)(p) := s_1(p) + s_2(p) \quad (2.12)$$

Sei $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, $s \in \Gamma(E)$, so ist $\phi \circ s \in \Gamma(E)$

$$(\phi s)(p) := \phi(p)s(p). \quad (2.13)$$

□

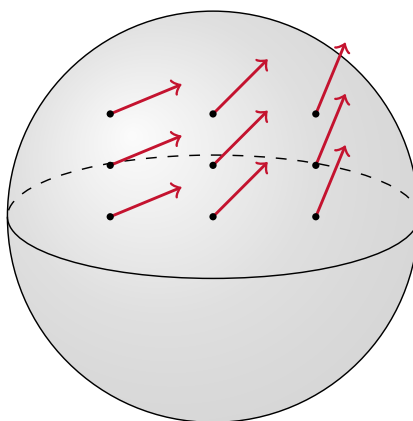


Abbildung 2.3.: Beispiel für ein Vektorfeld

2.15 Lemma

Sei (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel und $p \in \mathcal{M}$. Dann existiert für alle $x \in E_p$ ein Schnitt $s \in \Gamma(E)$, so dass $s(p) = x$

Beweis: (Lemma 2.15)

Wähle eine lokale Trivialisierung von E auf $W \ni p$

$$\phi : W \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(W) = E \Big|_W$$

und eine glatte Funktion $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ mit $\varphi(p) = 1$ und $\text{supp}(\varphi) \subset W$. Sei $\xi \in \mathbb{R}^k$, so dass $\phi(p, \xi) = x$.

Definiere:

$$s(q) = \begin{cases} \phi(q, \varphi(q)\xi) & q \in W \\ 0_q & q \notin W \end{cases}$$

s ist glatt, da folgendes gilt:

- s ist glatt auf W
- s ist 0 auf einer Umgebung von $\mathcal{M} \setminus W$

$$s(p) = (\phi(p), \phi(p)\xi) = \phi(p, \xi) = x$$

□

Definition 2.17 (Lokaler Rahmen)

Sei (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel vom Rang k und $U \subset \mathcal{M}$. Ein Rahmen von E über U ist ein k -Tupel (s_1, \dots, s_k) von glatten Schnitten über U (das heißt $s_i \in \Gamma_i(E)$), so dass für alle $p \in U$ $s_1(p), \dots, s_k(p)$ eine Basis von E_p bilden.

2.18 Satz

Sei (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel vom Rang k .

1. Aus einem lokalen Rahmen folgt eine lokale Trivialisierung. Sei (s_1, \dots, s_k) ein lokaler Rahmen über $U \subset \mathcal{M}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \phi : U \times \mathbb{R}^k &\rightarrow E \Big|_U \\ (p, \xi) &\mapsto \sum_{i=1}^k \xi_i s_i(p), \end{aligned}$$

eine lokale Trivialisierung

2. Aus einer lokalen Trivialisierung folgt ein lokaler Rahmen. Sei $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E \Big|_U$ eine lokale Trivialisierung. Dann ist (s_1, \dots, s_k) ein lokaler Rahmen mit

$$s_i(p) = \phi(p, e_i),$$

wobei $\{e_i\}$ die Standardbasis von \mathbb{R}^k ist.

Beweis: (Teil 1 Satz 2.18)

Es gilt, dass

$$\phi \Big|_p : \{p\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow E \Big|_p$$

ein Isomorphismus ist. Außerdem hat

$$\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E \Big|_U,$$

maximalen Rang.

Für alle p in U existiert eine Umgebung $V \subset U$ von p , so dass die folgende Abbildung eine lokale Trivialisierung ist:

$$\psi_V : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow E \Big|_V.$$

Dann gilt:

$$\psi_V^{-1} \circ \phi(q, \xi) = (q, \underbrace{\psi_q^{-1} \circ \phi_q(\xi)}_{\text{Isomorphismus}}) \quad (2.14)$$

$\psi_V^{-1} \circ \phi : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$ ist ein Diffeomorphismus. Daraus folgt, dass ϕ maximalen Rang auf V und U hat womit folgt, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist. \square

Beweis: (Teil 2 Satz 2.18)

Diese Aussage ist sofort klar, da ϕ_p ein Isomorphismus ist. \square

Lokale Rahmen erlauben es uns mit Schnitten zu rechnen.

Definition 2.21 (Hauptteil)

Sei (s_1, \dots, s_k) ein lokaler Rahmen und ϕ die dazugehörige lokale Trivialisierung. Ferner sei $s \in \Gamma_U(E)$ über $U \subset \mathcal{M}$. Dann existiert eine glatte Abbildung

$$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

so dass

$$s(p) = \sum_{i=1}^k \sigma_i(p) s_i(p) \quad (2.15)$$

$$\phi(p, \sigma(p)) = s(p). \quad (2.16)$$

σ heißt der Hauptteil von s bezüglich ϕ .

Bemerkung: Die Aussagen: σ ist glatt und s ist glatt sind äquivalent.

Sei (t_1, \dots, t_k) ein lokaler Rahmen über V und ψ die dazugehörige lokale Trivialisierung, so dass $U \cap V \neq \emptyset$. Über $U \cap V$ gilt:

$$s_i = \sum_j g_i^j t_j, \quad (2.17)$$

wobei $g_i^j : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$. Setze $g(p) = (g_i^j(p))_{i,j=1}^k$

$$g(p)(t_1(p), \dots, t_k(p)) = (s_1(p), \dots, s_k(p)) \quad (2.18)$$

$$g : U \cap V \ni p \mapsto g(p) \in \text{GL}(E|_p) \quad (2.19)$$

sei $s \in \Gamma_{U \cap V}(E)$ und Hauptteile σ_ϕ, σ_ψ , dann ist

$$\sigma_\phi^i = \sum_{j=1}^k g_i^j \sigma_\psi^j$$

$$\sigma_\phi = g \sigma_\psi$$

$$g : U \cap V \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$$

Definition 2.23 (Pullback)

Sei (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel und $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ eine glatte Abbildung. Der Pullback von E über f ist das Vektorbündel f^*E welches definiert ist durch:

1. $(f^*E)_{p \in \mathcal{N}} = \{(p, x) | x \in E_{f(p)}\}$
2. sei $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U$ lokale Trivialisierung von E

$$f^* \phi : f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (f^*E) \Big|_{f^{-1}(U)} \quad (2.20)$$

$$(p, \xi) \mapsto (p, \phi(f(p), \xi)) \quad (2.21)$$

Definition 2.24 (Schnitt entlang Abbildung)

Ein Schnitt von E entlang von f ist eine glatte Abbildung $s : \mathcal{N} \rightarrow E$, so dass $\pi \circ s = f$.

2.3. Zusammenhang und kovariante Ableitung

Definition 2.25

$$\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M})$$

$$X : \phi \mapsto X(\phi)$$

Wobei

$$X(\phi)(p) := X_p(\phi) \quad (2.22)$$

Definition 2.26 (Lie-Klammern)

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (2.23)$$

$$[X, Y] f := X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (2.24)$$

Zusammen mit der Lie-Klammer ist $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ eine Lie-Algebra.

(Hier bleibt als Übung zu zeigen, dass $[X, Y]$ tatsächlich ein neues Vektorfeld ist.)

Definition 2.27 (Zusammenhang)

Sei (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel vom Rang k . Ein Zusammenhang auf E ist eine Abbildung

$$D : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \quad (2.25)$$

$$(X, s) \mapsto D(X, s) = D_X s \quad (2.26)$$

Wobei folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. D ist tensoriell in X :

$$D_{X_1+X_2} s = D_{X_1} s + D_{X_2} s$$

$$D_{\phi X} s = \phi D_X s$$

2. D ist eine Derivation in s :

$$D_X (s_1 + s_2) = D_X s_1 + D_X s_2$$

$$D_X (\phi s) = X(\phi) s + \phi D_X s$$

Notation: $D_X s$ (Kovariante Ableitung von s in Richtung X)

Wichtiger Spezialfall:

$$E = T\mathcal{M}$$

$$D : \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{\text{tensoriell}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{\text{derivativ}} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

Beispiel 2.28

Sei $E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$ das triviale Bündel mit

$$s : \mathcal{M} \rightarrow E$$

$$p \mapsto (p, \sigma(p))$$

wobei $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, $\sigma_i \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Dann ist der kanonische Zusammenhang gegeben als:

$$(D_X s)(p) = (p, X_p(\sigma_1), \dots, X_p(\sigma_k)) \quad (2.27)$$

Wir benutzen die folgende Notation: $D_X s = X(\sigma)$.

2.29 Lemma

$X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und $X_1(p) = X_2(p)$, dann folgt daraus, dass

$$(D_{X_1} s)(p) = (D_{X_2} s)(p). \quad (2.28)$$

2.30 Lemma

$s_1, s_2 \in \Gamma(\mathcal{M})$ und $s_1 = s_2$ in einer Umgebung von p , daraus folgt, dass

$$(D_X s_1)(p) = (D_X s_2)(p). \quad (2.29)$$

Wir beweisen zuerst das Lemma 2.30.

Beweis: (Lemma 2.30)

Wähle $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ mit $\text{supp } \phi \subseteq U$ und $\phi = 1$ auf einer Umgebung $V \subset U$ von p . Dann gilt

$$\phi s_1 = \phi s_2 \quad (2.30)$$

$$D_X(\phi s_1)(p) = D_X(\phi s_2)(p) \quad (2.31)$$

Für die linke Seite ist

$$D_X(\phi s_1)(p) = \underbrace{X(p)}_{=0} s_1(p) + \underbrace{\phi(p)}_{=1} D_X s_1(p) = D_X s_1(p). \quad (2.32)$$

Das gleiche gilt für die rechte Seite und somit folgt die Aussage:

$$(D_X s_1)(p) = (D_X s_2)(p). \quad \square$$

Als nächstes möchten wir Lemma 2.29 beweisen. Allerdings können wir gleich etwas allgemeineres beweisen wodurch Lemma 2.29 sofort klar wird.

2.32 Lemma

Sei $\mathcal{L} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$ eine tensorielle Abbildung. Tensoriell bedeutet hierbei, dass

$$\mathcal{L}(\phi s) = \phi \mathcal{L}(s), \quad \forall \phi \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \quad (2.33)$$

gilt.

Sei weiterhin $p \in \mathcal{M}$ und $s, \tilde{s} \in \Gamma(E)$ mit $s(p) = \tilde{s}(p)$, dann gilt

$$\mathcal{L}(s)(p) = \mathcal{L}(\tilde{s})(p) \quad (2.34)$$

Lemma 2.29 folgt sofort aus diesem Lemma, da die Abbildung

$$\begin{aligned} D_\bullet s : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \Gamma(E) \\ X &\mapsto D_X s \end{aligned}$$

tensoriell ist.

Beweis: (Lemma 2.32)

Sei U eine Umgebung von p und $\phi = (s_1, \dots, s_k)$ ein lokaler Rahmen auf U . Sei außerdem φ eine Bumpfunktion mit $\text{supp } \varphi \subset U$ und $\varphi(p) = 1$.

Wir schreiben

$$s = \sum_{i=1}^k \sigma_i s_i, \quad \tilde{s} = \sum_{i=1}^k \tilde{\sigma}_i s_i \quad (2.35)$$

mit $\sigma_i(p) = \tilde{\sigma}_i(p)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s)(p) &= \varphi^2(p) \mathcal{L}(s)(p) \\ &= \mathcal{L}(\varphi^2 s)(p) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathcal{L}((\varphi \sigma_i)(\varphi s_i))(p) \\ &= \sum_{i=1}^k \varphi(p) \sigma_i(p) \mathcal{L}((\varphi s_i))(p) \end{aligned}$$

Analog rechnet man mit \tilde{s}

$$\mathcal{L}(\tilde{s})(p) = \sum_{i=1}^k \varphi(p) \tilde{\sigma}_i(p) \mathcal{L}((\varphi s_i))(p). \quad (2.36)$$

Da $\sigma_i(p) = \tilde{\sigma}_i(p)$ und $\varphi(p) = 1$ folgt nun die Aussage

$$\mathcal{L}(s)(p) = \mathcal{L}(\tilde{s})(p). \quad \square$$

Definition 2.34 (Tensorfeld)

Ein Tensorfeld vom Typ (n, s) ist ein glatter Schnitt des Bündels

$$T_s^n(\mathcal{M}) = \left(\bigotimes_{i=1}^n T\mathcal{M} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^s T_s^* \mathcal{M} \right).$$

In anderen Worten: ein Tensorfeld vom Typ (n, s) ist eine Abbildung

$$B : \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{s \text{ mal}} \rightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \cdots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{n \text{ mal}},$$

die tensoriell in jedem Argument ist.

Lemma 2.32 sagt uns, dass jede Abbildung B aus einem Vektorfeld kommt.

2.35 Korollar

Sei B ein Tensorfeld vom Typ (n, s) , dann induziert B für alle p eine s -lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} B_p : T_p \mathcal{M}^s &\rightarrow T_p \mathcal{M}^n \\ (v_1, \dots, v_s) &\mapsto B_p(v_1, \dots, v_s) \end{aligned}$$

Wir wollen nun wieder zu Zusammenhängen zurückkehren.

Beispiel 2.36 (Kanonischer Zusammenhang)

Wir wählen die Koordinaten wie folgt:

$$s(p) = (p, \sigma(p)), \quad s \in \Gamma(\mathcal{M} \times \mathbb{R}^k), \quad (2.37)$$

wobei $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ mit $\sigma_i \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Dann ist der kanonische Zusammenhang gegeben durch:

$$D_X s = (X(\sigma_1), \dots, X(\sigma_k)) \quad (2.38)$$

Sei ω eine 1-Form auf \mathcal{M} mit Werten in Matrizen $\text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R})$. Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \omega &\in \Gamma(\text{Hom}(T\mathcal{M}, \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R}))) \\ \omega_p &: T_p \mathcal{M} \rightarrow \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R}) \\ \omega &= (\omega_{ij})_{i,j=1}^k \end{aligned}$$

ω_{ij} ist eine 1-Form auf \mathcal{M}

$$w_p^{ij} : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definition 2.37 (Zusammenhang über 1-Form)

Mit einer 1-Form kann folgender Zusammenhang definiert werden:

$$(D_X^\omega s)(p) = (p, X_p(\sigma) + \omega_p(X_p)\sigma(p)) \quad (2.39)$$

2.38 Satz

Sei (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel und D ein Zusammenhang auf E . Weiterhin sei ω eine 1-Form mit Werten in $\text{Hom}(E, E)$. Dann ist

$$D_X^\omega s = D_X s + \omega(X)s, \quad (2.40)$$

ein Zusammenhang auf E

Umgekehrt gilt ebenso der folgende Satz:

2.39 Satz

Seien D und D' zwei Zusammenhänge auf E . Dann definiert

$$\omega(X)s = D'_X s - D_X s, \quad (2.41)$$

eine 1-Form mit Werten in $\text{Hom}(E, E)$.

Beispiel 2.40

Sei $E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$. Dann ergibt sich:

$$D_X^\omega s = (p, X(\sigma) + \omega_p(X_p)\sigma_p). \quad (2.42)$$

Aus dem Satz von oben folgt, dass $D_X^\omega s$ alle Zusammenhänge auf E sind. Aus der Lokalisierung folgt

$$\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E \Big|_U.$$

Wir stellen uns die Frage wie wir Zusammenhänge mit einer 1-Form finden können. Dies ist mithilfe von Zusammenhangsformen bezüglich eines lokalen Rahmens möglich. Sei $\phi = (s_1, \dots, s_k)$ ein lokaler Rahmen von E über U und sei $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Zudem sind $D_X s_1, \dots, D_X s_k \in \Gamma(E)$. Diese lassen sich wie folgt darstellen:

$$D_X s_i = \sum_{j=1}^k \omega_{ij}(X) s_j \quad (2.43)$$

Wobei die 1-Form $\omega_{ij}(X) : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und tensoriell in X ist. Es ist $s = \sum_i \sigma_i s_i$. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} D_X s &= \sum (X(\sigma_i) s_i + \sigma_i D_X s_i) \\ &= \sum_j X(\sigma_j) s_j + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \sigma_i \omega_{ij}(X) s_j \\ &= \sum_j \left[X(\sigma_j) + \sum_i \sigma_i \omega_{ij}(X) \right] s_j \end{aligned}$$

Unser nächster Schritt ist es nun die Parallelverschiebung zu definieren. Auf dem Weg dorthin ist unser erstes Ziel zunächst die kovariante Ableitung von Schnitten längs einer Abbildung zu definieren.

1. Zu Schnitten längs einer Abbildung:

$$\begin{array}{ccc}
 & & E \\
 & \nearrow s^{\mathcal{N}} & \downarrow \pi \\
 \mathcal{N} & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}
 \end{array} \quad (2.44)$$

Eine Abbildung $s^{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow E$ heißt Schnitt längs $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ falls:

- i) $s^{\mathcal{N}}$ ist glatt
- ii) Das Diagramm 2.44 kommutiert: $f = \pi \circ s^{\mathcal{N}}$

Notation: $\Gamma_f(E)$

Wichtiger Spezialfall: $\mathcal{N} = I$, das heißt f ist eine Kurve falls $E = T\mathcal{M}$

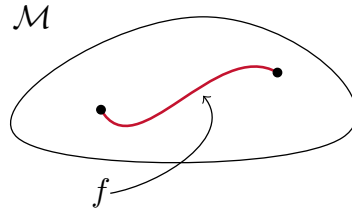


Abbildung 2.4.: Kurve f auf einer Mannigfaltigkeit

Hier sieht das Diagramm dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccc}
 & & T\mathcal{M} \\
 & \nearrow s^I & \downarrow \pi \\
 I & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}
 \end{array} \quad (2.45)$$

2. Wollen $D : \mathfrak{X}(\mathcal{N}) \times \Gamma_f(E) \rightarrow \Gamma_f(E)$.

Definition 2.41 (Kovariante Ableitung längs eines Schnittes)

Sei $\phi = (s_1, \dots, s_k)$ ein lokaler Rahmen von E über U und $s \in \Gamma_f(U)$. Dann ist:

$$s = \sum_{i=1}^k \sigma_i s_i \circ f \quad (2.46)$$

Wir definieren die kovariante Ableitung längs f als:

$$D_X^f s = \sum_{j=1}^k \left(X(\sigma_j) + \sum_{i=1}^k \omega_{ij}(f_* X) \sigma_i \right) s_j \circ f \quad (2.47)$$

$$= X(\sigma) + (f^* \omega)(X) \sigma \quad (2.48)$$

Die Wohldefiniertheit soll als Übung gezeigt werden.

2.42 Satz

Die kovariante Ableitung längs f

$$D^f : \mathfrak{X}(\mathcal{N}) \times \Gamma_f(E) \rightarrow \Gamma_f(E),$$

ist tensoriell im ersten Argument und derivativ im zweiten Argument.

Wenn wir die Schnitte $\Gamma_f(E)$ mit $\Gamma(f^*E)$ identifizieren, dann erhalten wir den zurückgezogenen Zusammenhang

$$f^*D : \mathfrak{X}(\mathcal{N}) \times \Gamma(f^*E) \rightarrow \Gamma(f^*E). \quad (2.49)$$

2.43 Satz

Sei $s^M \in \Gamma(E)$, $q \in \mathcal{N}$ und $v \in T_q\mathcal{N}$. Dann gilt:

$$D_v^f(s^M \circ f) = D_{f^*v}s^M \quad (2.50)$$

Die wichtigste Situation ist hierbei der Fall der Kurven also mit $\mathcal{N} = I$ und $E = T\mathcal{M}$. Hier gilt nämlich

$$D_t s := D_{\frac{c}{\partial t}}^c s. \quad (2.51)$$

Bemerkung: Sei c so gewählt, dass $\dot{c}(t) = 0$, das heißt $c(t) = p$.

Achtung: $D_t s$ kann ungleich Null sein, selbst wenn $\dot{c}(t) = 0$.

Zum Beispiel: $c(t) = p$ und $s \in \Gamma_c(E)$, dann muss $s(t) \in E_p$ nicht konstant sein.

Als nächstes wollen wir nun die kovariante Ableitung längs von Kurven verwenden, um die Parallelverschiebung zu definieren.

Definition 2.45 (Parallelität)

Sei $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ eine glatte Kurve und (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel. Ein Schnitt $s^I \in \Gamma_c(E)$ heißt parallel längs c , falls

$$D_t^c s = 0. \quad (2.52)$$

Bemerkung: Wenn s_1 und s_2 parallel sind, so ist auch $\alpha s_1 + \beta s_2$ ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$) parallel.

In einem lokalen Rahmen bedeutet $D_t^c s = 0$:

$$\dot{\sigma} + \omega(\dot{c})\sigma = 0. \quad (2.53)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

2.47 Lemma

Sei $t_0 \in I$ und $X \in E_{c(t_0)}$ dann existiert genau ein paralleler Schnitt s längs c mit $s(t_0) = x$.

Sei c eine glatte Kurve mit $c(t_0) = p$ und $c(t_1) = q$ ($t_0, t_1 \in I$). Setze $P_c(x) = s(t_1)$ wobei s der eindeutig bestimmte parallele Schnitt längs c mit $s(t_0) = x$ ist.

Definition 2.48 (Parallelverschiebung)

$P_c : E_p \rightarrow E_q$ heißt Parallelverschiebung längs c .

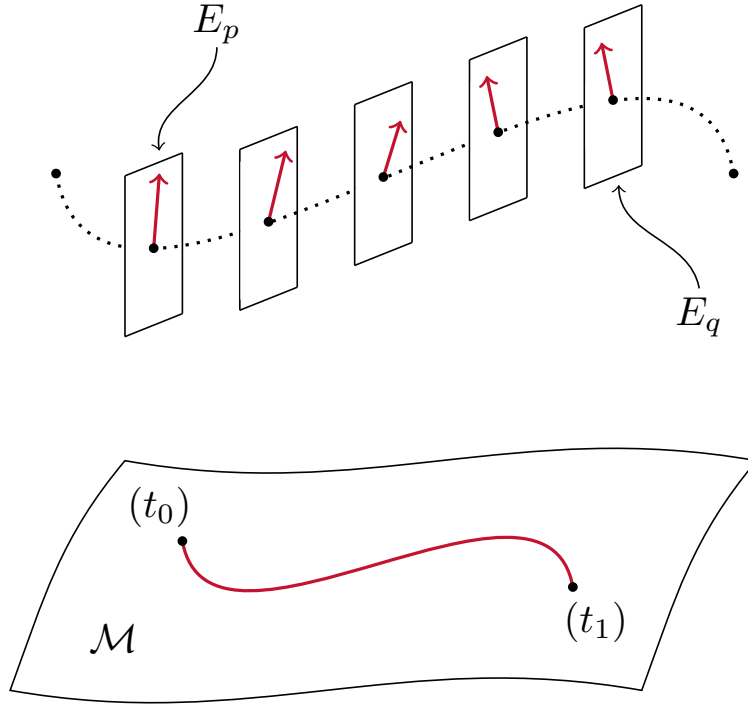


Abbildung 2.5.: Parallelverschiebung

2.49 Lemma

Sei $t_0 \in I$ und seien s_1, \dots, s_k parallele Schnitte längs c . Falls $(s_1^I(t_0), \dots, s_k^I(t_0))$ eine Basis von $E_{c(t_0)}$ ist, so ist $(s_1^I(t), \dots, s_k^I(t))$ eine Basis von $E_{c(t)}$ für alle $t \in I$.

Beweis: (Lemma 2.49)

$$s_i^I(t) = P_c s_i^I(t_0)$$

Da P invertierbar ist folgt die Aussage. □

Definition 2.51 (Paralleler Rahmen)

Ein k -Tupel von Schnitten $\phi = (s_1, \dots, s_k)$ längs c heißt Rahmen von E längs c , falls $(s_1(t), \dots, s_k(t))$ eine Basis von $E_{c(t)}$ für alle $t \in I$ ist. $\phi = (s_1, \dots, s_k)$ heißt paralleler Rahmen, falls alle s_i parallel sind.

Warum sind parallele Rahmen für uns interessant?

Wir betrachten den parallelen Rahmen $\phi = (s_1, \dots, s_k)$ und sei $s \in \Gamma_c(E)$. Das heißt

$$s = \sum_{i=1}^k \sigma_i s_i.$$

Damit erhalten wir für die kovariante Ableitung:

$$D_t s = \sum_{i=1}^k D_t(\sigma_i s_i) \quad (2.54)$$

$$= \sum_{i=1}^k (\partial_t \sigma_i) s_i. \quad (2.55)$$

Bezüglich des parallelen Rahmens ist die kovariante Ableitung also gerade die Standardableitung.

Bemerkung: Parallelverschiebung kann man allgemein längs Stückweiser glatter Kurven c definieren.

2.4. Krümmung

Definition 2.53 (Krümmungstensor)

Der Krümmungstensor eines Zusammenhangs D auf E ist die Abbildung:

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (X, Y, s) &\mapsto R(X, Y)s \end{aligned}$$

Hierbei gilt: $R(X, Y)s = D_X(D_Y s) - D_Y(D_X s) - D_{[X, Y]}s$

Achtung: Die Vorzeichen-Konvention ist in der Literatur im Allgemeinen nicht eindeutig!

2.54 Satz

Der Krümmungstensor ist tensoriell in X, Y & s . Außerdem ist er schiefssymmetrisch in X & Y .

Beweis:

- $R(X, Y) = -R(Y, X)$ trivial \Rightarrow Schiefssymmetrie klar.
- zu zeigen: R ist tensoriell in s , das heißt $R(X, Y)(\varphi s) = \varphi R(X, Y)s$
 - a) $D_X(D_Y(\varphi s)) = D_X(Y(\varphi)s + \varphi D_Y s) = X(Y(\varphi))s + Y(\varphi)D_X s + X(\varphi)D_Y s + \varphi D_X(D_Y s)$
 - b) $-D_Y(D_X(\varphi s)) = -Y(X(\varphi))s - X(\varphi)D_Y s - Y(\varphi)D_X s + \varphi D_Y(D_X s)$
 - c) $-D_{[X, Y]}(\varphi s) = -[X, Y](\varphi)s - \varphi D_{[X, Y]}s$

$$\Rightarrow R(X, Y)\varphi s = \varphi D_X(D_Y s) - \varphi D_Y(D_X s) - \varphi D_{[X, Y]}s = \varphi R(X, Y)s \quad \square$$

- zu zeigen: R ist tensoriell in X .

2.56 Hilfslemma

$$[\varphi X, Y] = \varphi[X, Y] - Y(\varphi)X$$

Beweis:

$$[\varphi X, Y]f = \varphi X(Y(f)) - Y(\varphi X(f)) = \varphi X(Y(f)) - Y(\varphi)X(f) - \varphi Y(X(f)) \quad \square$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 R(\varphi X, Y)s &= D_{\varphi X}(D_Y s) - D_Y(D_{\varphi X} s) - D_{[\varphi X, Y]}s \\
 &= \varphi D_X(D_Y s) - Y(\varphi)D_X s - \varphi D_Y(D_X s) - D_{\varphi[X, Y]}s + D_{Y(\varphi)X}s \\
 &= \varphi R(X, Y)s
 \end{aligned}
 \quad \square$$

2.59 Korollar

$R_p : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \times E_p \rightarrow E_p$ ist punktweise definiert $\forall p \in \mathcal{M}$

Bemerkung: In vielen Büchern wird zunächst der Fall $E = T\mathcal{M}$ diskutiert.

Beispiel 2.61

1) Kanonischer Zusammenhang auf $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$:

$$s \in \Gamma(E) \quad \longleftrightarrow \quad \sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

In diesen Fall ist der Krümmungstensor wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)s &= D_X(D_Y s) - D_Y(D_X s) - D_{[X, Y]}s \\
 &= X(Y(\sigma)) - Y(X(\sigma)) - [X, Y]\sigma \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Definition 2.62

- a) Ein Zusammenhang D auf E mit $R \equiv 0$ heißt flach.
- b) Ein Vektorbündel E mit flachem Zusammenhang heißt flaches Bündel.

Beispiel 2.63

2) Zusammenhang auf $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$ gegeben durch eine 1-Form mit Werten in $\text{Mat}(k \times k, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 D_X^\omega s &= X(\sigma) + \omega(X) \cdot \sigma \\
 &= \sum_{j=1}^k (X(\sigma^j) + \sum_{i=1}^k \sigma^i \omega_i^j(X)) s_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R^\omega(X, Y)s &= D_X^\omega(D_Y^\omega s) - D_Y^\omega(D_X^\omega s) - D_{[X, Y]}^\omega s \\
 &= D_X^\omega(Y(\sigma) + \omega(Y) \cdot \sigma) - D_Y^\omega(X(\sigma) + \omega(X) \cdot \sigma) - [X, Y](\sigma) - \omega([X, Y])\sigma \\
 \text{Übung!} \quad &= X(Y(\sigma)) + X(\omega(Y))\sigma - Y(X(\sigma)) - Y(\omega(X))\sigma + \omega(X)\omega(Y)\sigma \\
 &\quad - \omega(Y)\omega(X)\sigma - [X, Y]\sigma - \omega([X, Y])\sigma \\
 &= \left(\underbrace{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])}_{:= d\omega(X, Y)} - [\omega(X), \omega(Y)] \right) \sigma
 \end{aligned}$$

Hierbei wird d äußeres Differential genannt.

Lineare Zusammenhänge: $E = T\mathcal{M}$

$$\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

Krümmung :

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \end{aligned}$$

Torsion:

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ (X, Y) &\longmapsto T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

2.64 Lemma

T ist tensoriell in X und Y .

Beweis:

$T(X, Y) = -T(Y, X) \longrightarrow$ z.z. T tensoriell in X .

$$\begin{aligned} T(\varphi X, Y) &= \nabla_{\varphi X} Y - \nabla_Y(\varphi X) - [\varphi X, Y] \\ &= \varphi T(X, Y) \end{aligned}$$

□

Definition 2.66

Ein Zusammenhang ∇ heißt symmetrisch, falls $T \equiv 0$.

2.5. Krümmung und Parallelverschiebung

1. Gegeben seien $u, v \in T_p\mathcal{M}$. Dann können wir $R_p(u, v) : E_p \rightarrow E_p$ als lineare Abbildung von E_p nach E_p auffassen.
2. Gegeben sei eine geschlossene ($c(0) = c(1) = p$) Kurve $c : I = [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ (glatt). So liefert $P_c : E_p \rightarrow E_p$ einen Isomorphismus mit:

$$D_t s = 0 \tag{2.56}$$

$$P_c : x \mapsto y. \tag{2.57}$$

Wobei gilt:

$$\begin{aligned} P_c(\lambda x) &= \lambda P_c(x), & P_c(\tilde{s}(0)) &= \tilde{s}(1) = \lambda P_c(s(0)) \\ P_c(\lambda s(0)) &= \tilde{s}(1), & P_c(s(0)) &= s(1). \end{aligned}$$

Dieser Isomorphismus wird Holonomie von D längs c genannt.

Bemerkung: Im allgemeinen hängt die Abbildung P_c vom Weg c ab. Dies gilt allerdings nicht im \mathbb{R}^n , da hier die Krümmung Null ist.

Parallelverschiebung entlang unterschiedlicher geschlossener Kurven mit dem selben Anfangspunkt p liefern im Allgemeinen unterschiedliche Resultate für $P(r)$:

$$P_{c_1}(r) \neq P_{c_2}(r)$$

Notation: Parallelverschiebung P_c entlang c

$$\begin{aligned} c : (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow \mathcal{M}, & \text{Kurve in } \mathcal{M} \\ c(0) = p, \quad c'(0) = x \Big|_p, & & Y \text{ glattes Vektorfeld auf } \mathcal{M} \end{aligned}$$

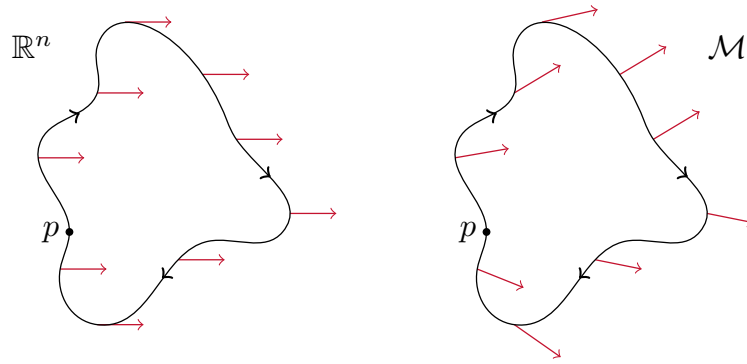
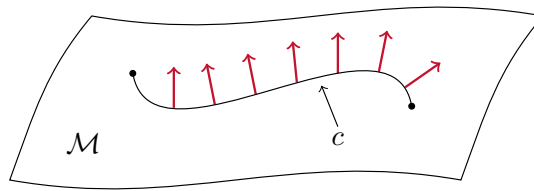


Abbildung 2.6.: Parallelverschiebung auf Kurve c in \mathbb{R}^n vs. auf beliebiger Mannigfaltigkeit \mathcal{M}

Die kovariante Ableitung lässt sich durch Parallelverschiebung ausdrücken. Wir bezeichnen die Parallelverschiebung entlang c mit P_c , wobei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ eine Kurve in \mathcal{M} ist.



Es gelte $c(0) = p$, $c'(0) = X_p$ und Y sei ein glattes Vektorfeld auf \mathcal{M} . Dann gilt:

$$\nabla_{X_p} Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(P_{c(t)}^{-1} Y_{c(t)} - Y_p \right) \quad (2.58)$$

Beweis: (Beweis von Gleichung 2.58)

Für Y , definiert in einer Umgebung von p , ist der Wert $(\nabla_X Y)(p)$ vollständig bestimmt durch Restriktion von Y auf die Kurve c mit $c'(0) = X_p$.

Expandiere Y als Linearkombination paralleler Vektorfelder längs c . Sei $\{\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n\}$ eine Basis von $T_p \mathcal{M}$. Sei $w_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ das parallele Vektorfeld längs c mit $w_i(0) = \hat{w}_i$. Mit anderen

Worten: $\{w_1(t), \dots, w_n(t)\}$ ist eine Basis von $T_{c(t)}\mathcal{M}$.

$$Y = \sum_{i=1}^m a_i w_i$$

Mit Koeffizienten $a_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$.

Betrachte:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(P_{c(t)}^{-1} Y(t) - Y(0) \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\sum_{i=1}^m (a_i(t) - a_i(0)) \cdot w_i(0) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{d}{dt} a_i(t) \right) \Big|_{t=0} w_i(0) \\ &= D_t \left(\sum_{i=1}^m a_i w_i \right) \Big|_{t=0} \\ &= \nabla_X Y \end{aligned}$$

□

Definition 2.69 (Parallele Fortsetzung)

Sei $p \in \mathcal{M}$ und $v \in T_p \mathcal{M}$, dann existiert ein paralleles Vektorbündel längs c mit $X|_p = v$.

$X|_p$ heißt parallele Fortsetzung von v .

Es stellt sich nun die folgende Frage:

Kann man $v \in T_p \mathcal{M}$ zu einem parallelen Vektorfeld in einer Umgebung von p fortsetzen? Also existiert ein Vektorfeld X auf \mathcal{M} in einer Umgebung U von p , sodass $X|_p = v$ und X parallel sind?

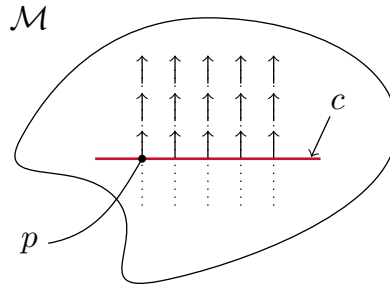


Abbildung 2.7.: Paralleltransport

Gegeben sei

$$\begin{aligned} V : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathcal{M} \\ (t, \tau) &\mapsto V(t, \tau) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein Vektorfeld Z in einer Umgebung von p :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z \Big|_{(t,0)} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z = 0 \quad (2.59)$$

Wir hätten gerne, dass $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = 0$. Es genügt zu zeigen, dass folgendes gilt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = 0$$

2.59 impliziert:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z = 0$$

Es muss deshalb zwangsweise gelten:

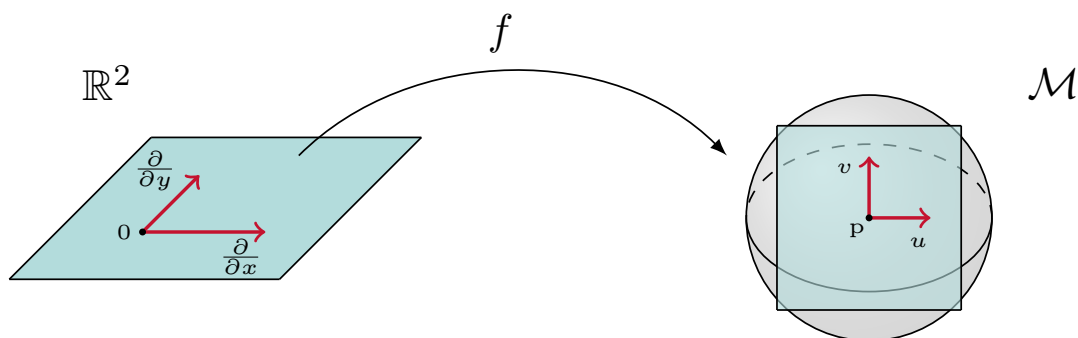
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = 0.$$

Da $[\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial t}] = 0$ gilt, ist

$$R\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial t}\right) Z = 0 \quad (2.60)$$

Das bedeutet also falls $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = 0$, dann gilt $R = 0$. Mit anderen Worten $R = 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Parallelität. Man kann zeigen, dass $R \equiv 0$ auch hinreichend ist.

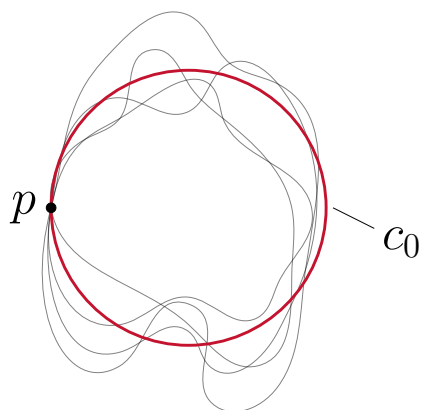
Betrachte nun die folgende Situation:



Sei f glatt und $f(0) = p$ und sei außerdem

$$\begin{aligned} df \Big|_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= f_x(0) = u \\ df \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) &= f_y(0) = v. \end{aligned}$$

Es sei eine Familie von Kurven c_s wobei $0 \leq s \leq 1$ und $c_s(0) = c_s(1) = 0$.

Abbildung 2.8.: Variation der Kurve c_0

P_s ist die Parallelverschiebung längs c_s . Wir definieren

$$\begin{aligned} c : I \times I &\rightarrow \mathcal{M} \\ (s, t) &\mapsto c(s, t) \end{aligned}$$

wie folgt:

$$c(s, t) = \begin{cases} f(4st, 0) & 0 \leq t \leq 1/4 \\ f(s, s(4t - 1)) & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ f(s(3 - 4t), s) & 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ f(0, 4s(1 - t)) & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

2.70 Satz

Sei $p \in \mathcal{M}$, $u, v \in T_p \mathcal{M}$ und $f : U \rightarrow \mathcal{M}$ sei wie oben definiert. P_s sei die Parallelverschiebung längs c_s von $c_s(0) = p$ nach $c_s(1) = 0$. Dann gilt:

$$\partial_s \partial_s P_s(0) = 2 R(u, v) \quad (2.62)$$

3. Riemannsche Mannigfaltigkeiten

3.1. Wiederholung: Symmetrische Bilinearform

Definition 3.1 (Entartung, Index)

- Eine symmetrische Bilinearform $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht entartet, falls:

$$\begin{aligned} B(v, w) &= 0 \\ \Rightarrow v &= 0. \end{aligned}$$

- $\text{Index}(B) = \max\{\dim W \mid W \subset V \text{ ist UR mit } \dim n \text{ und } B|_{W \times W} \text{ ist negativ definit.}\}$

Es existiert eine Basis b_1, \dots, b_n von V , so dass

$$c(s, t) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ -1 & 1 \leq i \leq \text{Index}(B) \\ 1 & \text{Index}(B) + 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (3.1)$$

Definition 3.2 (Bilinearform zurückholen)

Seien V, W \mathbb{R} - Vektorräume und $B_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform. Sei außerdem $\phi : W \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann ist die zurückgeholte Bilinearform:

$$(\phi^* B_V)(w_1, w_2) := B(\phi(w_1), \phi(w_2)) \quad (3.2)$$

Bemerkung:

- $(\phi^* B_V)$ ist eine symmetrische Bilinearform, die entartet sein kann.
- Wenn B_V positiv definit und ϕ injektiv ist, dann folgt daraus, dass $(\phi^* B_V)$ positiv definit ist.

Definition 3.4 (Isometrie)

Seien V, W \mathbb{R} - Vektorräume mit nicht-entarteten Bilinearformen B_V und B_W . $\phi : W \rightarrow V$ heißt Isometrie, falls $(\phi^* B_V) = B_W$.

3.2. Riemannsche Metriken

Definition 3.5 (Riemannsche Metriken)

Eine (Semi-) Riemannsche Metrik auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , ist eine Familie von nicht-entarteten symmetrischen Bilinearformen $(g_p)_{p \in \mathcal{M}}$ auf $T_p \mathcal{M}$, so dass für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ gilt:

$$g_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.3)$$

$$p \mapsto g_p(X_p, Y_p) \quad (3.4)$$

ist glatt in $p \in \mathcal{M}$.

Bemerkung:

- Eine solche Metrik heißt Riemannsch, wenn g_p positiv definit für alle p in \mathcal{M} .
- Eine solche Metrik heißt Lorentz-Metrik, falls $\text{Index}(g_p) = 1$ für alle p in \mathcal{M} .

Zu Semi-Riemannsch: Index potentiell ≥ 1 , aber auch Riemannsche Metriken werden als Semi-Riemannsch bezeichnet.

Mittels Riemannscher Metriken lassen sich die wesentlichen geometrischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten beschreiben. Sie können verwendet werden um Winkel, Distanz bzw. Längen von Kurven zu messen.

Definition 3.7 ((Semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit)

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ausgestattet mit einer (Semi-)Riemannschen Metrik g , wird (Semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit genannt.

Notation: (\mathcal{M}, g)

Wir wollen nun (Semi-)Riemannsche Metrik g in lokalen Koordinaten betrachten. Sei (x, U) eine Karte von \mathcal{M} . Ferner bezeichnen wir mit (X_1, \dots, X_n) den dazugehörigen lokalen Rahmen von $T\mathcal{M}|_U$, das heißt $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dann sind

$$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.5)$$

$$p \mapsto g_{ij}(p) := g \Big|_p (X_i(p), X_j(p)) \quad (3.6)$$

glatte Funktionen und es gilt:

$$g_p \left(X \Big|_p, Y \Big|_p \right) = g_p \left(\sum_i^m \xi^i X_i \Big|_p, \sum_i^m \eta^i X_i \Big|_p \right) \quad (3.7)$$

$$= \sum_{ij} \xi^j \eta^i \underbrace{g \Big|_p (X_j \Big|_p, X_i \Big|_p)}_{g_{ij}(p)} \quad (3.8)$$

Definition 3.8 (Fundamentalmatrix)

$(g_{ij})_{i,j=1}^m$ heißt Fundamentalmatrix von g bezüglich (x, U) .

Bemerkung:

1. Die Matrix $(g_{ij})_{i,j=1}^m$ ist symmetrisch, d.h. $g_{ij} = g_{ji}$ (Folgt aus Symmetrie von g_p).
2. $(g_{ij})_{i,j=1}^m$ ist invertierbar (Folgt aus der Tatsache, dass g_p nicht entartet ist).

Die Inverse Matrix von $(g_{ij})_{i,j=1}^m$ bezeichnen wir mit $(g^{ij})_{i,j=1}^m$

Beispiel 3.10

- a) Sei V ein reeller n -dimensionaler Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine nicht entartete Bilinearform auf V . Für $v, w \in T_p V$ gilt $g_p(v, w) := \langle v, w \rangle$. Sei $X : V \rightarrow V$ glatt (X Vektorfeld), dann gilt:

$$g_p(X(p), Y(p)) = \langle X(p), Y(p) \rangle \quad (3.9)$$

ist glatt. Daraus folgt, dass g eine Semi-Riemannsche Metrik ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} g_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \left\langle \phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \end{aligned}$$

b) Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit

$$\begin{aligned} \phi_p : T_p \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+k} \\ [c] &\mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c(t) \end{aligned}$$

wobei ϕ_p injektiv und linear ist. Dann ist

$$g_p = \phi_p^* \langle \cdot, \cdot \rangle \quad (3.10)$$

positiv definit.

Definition 3.11 (erste Fundamentalform)

Die Metrik 3.10 heißt erste Fundamentalform von $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$

Als nächstes wollen wir die Existenz von Semi-Riemannschen Metriken zeigen.

3.12 Satz

Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit kann mit einer Riemannschen Metrik ausgestattet werden.

Übung: gilt dies auch für Semi-Riemannsche Metriken?

Beweis: (Beweis Satz 3.12)

Sei $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}$ Atlas von \mathcal{M} . Setze

$$(g_\alpha)_{ij} = \delta_{ij}$$

Sei φ_α eine glatte Partition der Eins mit $\text{supp } \varphi_\alpha \subseteq U_\alpha$. Dann setze:

$$g := \sum_{\alpha} \varphi_\alpha g_\alpha.$$

g ist hierbei nach Konstruktion glatt.

Positivität: Sei $v \in T_p \mathcal{M}$, $v \neq 0$, dann gilt:

$$g_p(v, v) = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha(p) g_\alpha \Big|_p (v, v) \geq 0.$$

Es existiert ein α_0 , so dass $\varphi_{\alpha_0}(p) > 0$.

$$\Rightarrow g_p(v, v) \geq \varphi_{\alpha_0}(p) g_{\alpha_0} \Big|_p (v, v) > 0. \quad \square$$

Wichtig: Wir haben in unserem Beweis Wahlen getroffen. Daraus folgt, dass die Metrik g nicht kanonisch ist. Unter Umständen können Metriken sehr verschiedene Eigenschaften haben.

Definition 3.14 (Isometrie)

Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und unsere Daten sind jetzt $(\mathcal{M}_1, g_1), (\mathcal{M}_2, g_2)$.

$$\phi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2, \quad \text{Diffeomorphismus}$$

Wir wollen zusätzlich, dass ϕ die Metriken erhält, also

$$\phi^* g_2 = g_1 \quad (3.11)$$

Das heißt vom Standpunkt der Riemannschen Geometrie sind (\mathcal{M}_1, g_1) und (\mathcal{M}_2, g_2) nicht zu unterscheiden, wenn $\phi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ ein Diffeomorphismus mit

$$\phi^* g_2 = g_1 \quad (3.12)$$

existiert. Eine solche Abbildung heißt **Isometrie**.

Unsere nächste Frage ist: wie verhält sich g_{ij} unter Kartenwechsel?

3.15 Lemma (Transformationsregel)

Seien (x, U) und (y, V) Karten von p . Dann gilt:

$$\begin{aligned} g_{ij}^y &= g(Y_i, Y_j) \\ &= \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial}{\partial y^i} (x^k \circ y^{-1}) \frac{\partial}{\partial y^j} (x^l \circ y^{-1}) g_{kl}^x \end{aligned}$$

Beweis: (Beweis Lemma 3.15)

Wir wissen:

$$Y_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial y^i} (x^k \circ y^{-1}) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} g_{ij}^y &= g(Y_i, Y_j) \\ &= \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial}{\partial y^i} (x^k \circ y^{-1}) \frac{\partial}{\partial y^j} (x^l \circ y^{-1}) \underbrace{g \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right)}_{=g_{kl}^x} \end{aligned} \quad \square$$

Nächstes Ziel: Führe ausgezeichneten Zusammenhang ein. Dazu benötigen wir zunächst ein Hilfslemma. Eine Semi-Riemannsche Metrik g definiert einen Isomorphismus zwischen Tangentialbündel und Kotangentialbündel

$$T\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M} \quad (3.13)$$

$$T_p\mathcal{M} \ni v \mapsto g_p(v, \cdot) \in T_p^*\mathcal{M} \quad (3.14)$$

3.17 Hilfslemma

Auf einer Semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}, g) gibt es eine Eins zu Eins Korrespondenz zwischen Vektorfeldern und 1-Formen

$$\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M}) \quad (3.15)$$

$$x \mapsto g(X, \cdot) \quad (3.16)$$

Beweis: (Beweis Hilfslemma 3.17)

Wir haben bereits einen Faserweisen Isomorphismus

$$T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p^*\mathcal{M}$$

definiert.

Jetzt bleibt die Glattheit zu zeigen, was bedeutet, dass aus X glatt folgt, dass $g(X, \cdot)$ glatt ist. Wir arbeiten in den Karten (x, U) , denn dann ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p \right)$$

eine Basis von $T_p^*\mathcal{M}$. Es gilt $g_p = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, was bedeutet, dass:

$$\begin{aligned} g_p(X, Y) &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j \left(\sum \xi^k X_k, \eta^l X_l \right) \\ &= \sum g_{ij} \xi^k \eta^l \delta_{ik} \delta_{jl} \\ &= \sum g_{ij} x^i x^j \end{aligned}$$

Wir erhalten als $g(X, Y) = \sum g_{ij}$ für $X = \sum \xi^k X_k$ und $Y = \sum \eta^l X_l$ beliebig. Wir schreiben nun auch die 1-Form in lokale Koordinaten:

$$\phi = \sum_j \varphi_j dx^j \tag{3.17}$$

Zu Zeigen: sei $\phi = g(X, \cdot)$, dann sind die Koeffizientenfunktionen glatt.

$$\begin{aligned} \phi(Z) &= \sum_j \varphi_j dx^j \left(\sum_l \eta^l X_l \right) \\ &= \sum_j \varphi_j \eta^l dx^j(X_l) \\ &= \sum_j \varphi_j \eta^j \end{aligned}$$

Nach obiger Rechnung haben wir also

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^m g_{ij} \xi^i. \tag{3.18}$$

Dies ist eine glatte Funktion. □

3.3. Levi-Civita-Zusammenhang

3.19 Satz

Sei (\mathcal{M}, g) eine (Semi-) Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann existiert auf \mathcal{M} ein Zusammenhang mit den folgenden Eigenschaften:

1. D ist Torsionsfrei:

$$D_Y X - D_X Y = [Y, X], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \tag{3.19}$$

2. D ist metrisch:

$$Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (3.20)$$

Dieser Zusammenhang ist eindeutig durch die **Koszulformel** bestimmt:

$$2g(D_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \quad (3.21)$$

$$- g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) \quad (3.22)$$

D heißt **Levi-Civita-Zusammenhang**.

Beweis: (Beweis Satz 3.19)

Zu zeigen:

Die beiden geforderten Eigenschaften bestimmen den Zusammenhang und Koszuformel ist erfüllt.

Die zweite geforderte Eigenschaft impliziert:

$$Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$$

$$Yg(X, Z) = g(D_Y X, Z) + g(X, D_Y Z)$$

$$Zg(X, Y) = g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) &= g(D_X Y + D_Y X, Z) + g(D_X Z - D_Z X, Y) \\ &\quad + g(D_Y Z - D_Z Y, X) \\ &= 2g(D_X Y, Z) - g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$2g(D_X Y, Z) = g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \quad (3.23)$$

$$+ Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \quad (3.24)$$

Definiere $D : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ durch $D(X, Y)$, welches das eindeutig bestimmte glatte Vektorfeld ist, das die Koszulformel erfüllt.

Es bleibt zu zeigen: $D : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ist ein Zusammenhang.

1) D ist tensoriell im ersten Argument:

$$\begin{aligned} 2g(D(\varphi X, Y), Z) &= 2g(D_{\varphi X} Y, Z) \\ &= (\varphi X)(g(Y, Z)) + Y(g(\varphi X, Z)) - Z(g(\varphi X, Y)) \\ &\quad - g(\varphi X, [Y, Z]) - g(Y, [\varphi X, Z]) + g(Z, [\varphi X, Y]) \\ &= (\varphi X)g(Y, Z) + Y(\varphi)g(X, Z) + (\varphi Y)g(X, Z) \\ &\quad - Z(\varphi)g(X, Y) - (\varphi Z)g(X, Y) - \varphi g(X, [Y, Z]) \\ &\quad - \varphi g(Y, [X, Z]) + Z(\varphi)g(X, Y) - \varphi g(Z, [X, Y]) \\ &\quad - Y(\varphi)g(Z, X) \\ &= \varphi g(D_X Y, Z) \end{aligned}$$

2) D ist derivativ im zweiten Argument:

$$\begin{aligned}
 2g(D_X(\varphi Y), Z) &= X(g(\varphi Y, Z)) + (\varphi Y)g(X, Z) - Z(g(X, \varphi Y)) \\
 &= g(X, [\varphi Y, Z]) - g(\varphi Y, [X, Z]) + g(Z, [X, \varphi Y]) \\
 &= (\varphi X)g(Y, Z) + X(\varphi)g(Y, Z) + (\varphi Y)g(X, Z) \\
 &\quad - (\varphi Z)g(X, Y) - Z(\varphi)g(X, Y) - \varphi g(X, [Y, Z]) \\
 &\quad + Z(\varphi)g(X, Y) - \varphi g(Y, [X, Z]) + \varphi g(Z, [X, Y]) \\
 &\quad + X(\varphi)g(Z, Y) \\
 &= 2X(\varphi)g(Y, Z) + 2\varphi g(D_X Y, Z) \quad \square
 \end{aligned}$$

Das nächste Ziel ist die Berechnung von D in lokalen Koordinaten. Sei also eine Karte (x, U) gegeben. Mit x_1, \dots, x_n bezeichnen wir den zugehörigen lokalen Rahmen. ($x_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$)

$$D(x_i, x_j) = D_{x_i} x_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k x_k \quad (3.25)$$

Hierbei bezeichnet man $\Gamma_{ij}^k : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ als **Christoffel-Symbole**.

Sei D nun torsionsfrei, das heißt $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$. Für $X = x_i$ und $Y = x_j$ gilt $[x_i, x_j] = 0$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 D_{x_i} x_j - D_{x_j} x_i &= 0 \\
 \iff \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k x_k - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ji}^k x_k &= 0 \\
 \iff \sum_{k=1}^m [\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k] x_k &= 0
 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ für den Fall der Torsionsfreiheit.

Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang.

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_{x_i} x_j, x_k) &= \frac{1}{2} [x_i(g(x_j, x_k)) + x_j(g(x_i, x_k)) - x_k(g(x_i, x_j))] \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \\
 \nabla_{x_i} x_j &= \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k x_k \quad (3.26) \\
 g(\nabla_X x_j, x_l) &= g\left(\sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k x_k, x_l\right) \\
 &= \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \underbrace{g(x_k, x_l)}_{g_{kl}}
 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir eine Formel zur Berechnung der Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \quad (3.27)$$

4. Geodätische

Geodätische sind Kurven, die das Konzept der Geraden im \mathbb{R}^n auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung ist über Zusammenhänge möglich.

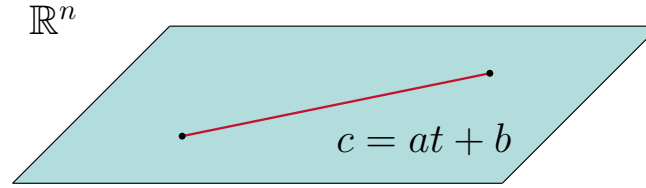


Abbildung 4.1.: Gerade im \mathbb{R}^n

Definition 4.1 (Geodätische)

Sei \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit mit einem linearen Zusammenhang ∇ , $I \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Kurve $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ ist eine Geodätische falls:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{c}(t) = 0 \quad (\nabla_t \dot{c}(t) = 0) \quad (4.1)$$

Dies ist eine Differentialgleichung, wenn wir in lokale Koordinaten übergehen. **In lokalen Karten:**

Sei (x, U) Karte von \mathcal{M} , $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ Geodätische.

$$c^k = x^k \circ c : I \leftarrow \mathbb{R} \quad (4.2)$$

$$\dot{c}(t) = \sum_k \dot{c}^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{c(t)} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_t \dot{c}(t) &= \sum_{k=1}^m \nabla_t (\dot{c}^k(x_k \circ c)) \\ &= \sum_k \ddot{c}^k(t)(x_k \circ c) + \dot{c}^k(t) \nabla_{\dot{c}(t)} x_k \\ &= \sum_k \left(\ddot{c}_k(t) + \sum_{i,j} \dot{c}^i \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k c(t) \right) x_k \circ c \end{aligned}$$

Wir betrachten die Kurve $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Durch auswerten der zuvor hergeleiteten Gleichung erhalten wir:

$$\ddot{c}^k(t) = - \sum_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k \quad (4.4)$$

Wir erhalten also eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese können wir in zwei Gleichungen erster Ordnung umschreiben.

$$\dot{c}^k(t) = \xi^k(t) \quad (4.5)$$

$$\dot{\xi}^k(t) = - \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j \quad (4.6)$$

Auf (Semi-) Riemannschen Mannigfaltigkeiten (\mathcal{M}, g) erhalten wir die Geodätische mithilfe des Levi-Civita Zusammenhanges.

Beispiel 4.2

$$1. (\mathbb{R}^n, g_{\text{Eukl}}), \Gamma_{ij}^k = 0$$

$$\begin{aligned} \ddot{c}^k(t) &= 0, \quad \forall t, k \\ \Rightarrow \dot{c}(t) &= \text{const.} \\ \Rightarrow c(t) &= at + b \end{aligned}$$

$$2. (\mathbb{R}^n, g_{\text{Minkowski}}), \Gamma_{ij}^k = 0$$

$$\Rightarrow c(t) = at + b$$

4.3 Lemma

Sei $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ eine Geodätische, dann folgt daraus, dass

$$\tilde{c}(t) = c(\alpha t + \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ebenfalls eine Geodätische ist.

Beweis: (Beweis Lemma 4.3)

$$\dot{\tilde{c}}^k = \alpha \dot{c}^k(\alpha t + \beta)$$

$$\ddot{\tilde{c}}^k = \alpha^2 \ddot{c}^k(\alpha t + \beta)$$

□

Definition 4.5 (Parametrisierung nach der Bogenlänge)

Sei (\mathcal{M}, g) eine (Semi-) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Kurve $c : I \rightarrow \mathcal{M}$ ist

- parametrisiert nach der Bogenlänge, falls

$$g(\dot{c}, \dot{c}) = 1 \quad (4.7)$$

- proportional zu Bogenlänge parametrisiert, falls

$$g(\dot{c}, \dot{c}) = \alpha > 0, \quad \alpha \text{ const.} \quad (4.8)$$

Übung: Geodätische sind immer proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

Wir brauchen lokale Existenz und Eindeutigkeit für unsere Lösungen.

Erinnerung: Sei $O \in J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$\left. \begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^m \\ V \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \text{offen}$$

und $f : J \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt. Dann existiert für jedes $(u, v) \in U \times V$ ein eindeutiges maximales Intervall $I_{u,v} \subset J$, sodass eine eindeutige Funktion $x_{u,v} : I_{u,v} \rightarrow V$ existiert mit:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{u,v}(t) &= f(t, u, x_{u,v}(t)) \\ x_{u,v}(0) &= v \end{aligned}$$

Ferner ist

$$O = \{(t, u, v) \in J \times U \times V \mid t \in I_{u,v}\}$$

offen und

$$(t, u, v) \mapsto x_{u,v}(t)$$

ist glatt.

Literaturhinweis: *Fundamentals of differential geometry* Kapitel 4

4.6 Satz

Sei \mathcal{M} ein Mannigfaltigkeit mit dem Zusammenhang ∇ .

1. **(Existenz)** Zu jedem $p \in \mathcal{M}$, $v \in T_p\mathcal{M}$ existiert ein I und eine Geodätische

$$c : I \rightarrow \mathcal{M},$$

mit $0 \in I$, $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$

2. **(Eindeutigkeit)** Sind $c_1, c_2 : I_i \rightarrow \mathcal{M}$ Geodätische mit $c_1(0) = c_2(0)$ und $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$, dann folgt:

$$c_1(t) = c_2(t), \quad \forall t \in I_1 \cup I_2$$

3. Gegeben p, v dann existiert ein eindeutiges maximal offenes Intervall $I_v \ni 0$ und maximale Geodätische (Also Geodätische auf dem maximalen Intervall)

$$c_v : I_v \rightarrow \mathcal{M},$$

mit $\dot{c}_v(0) = v$ und $c(0) = \pi(v)$

4. Die Menge

$$O = \{(t, v) \in \mathbb{R} \times T\mathcal{M} \mid t \in I_v\}$$

ist offen und

$$\begin{aligned} c : O &\rightarrow \mathcal{M} \\ (t, v) &\mapsto c_v(t) \end{aligned}$$

ist glatt.

Definition 4.7 (Vollständigkeit)

Ein Zusammenhang auf \mathcal{M} heißt vollständig, falls $O = \mathbb{R} \times T\mathcal{M}$. Das heißt alle Geodätischen sind auf ganz \mathbb{R} definiert.

Eine (Semi-) Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt vollständig falls der Levi-Civita Zusammenhang vollständig ist.

Bemerkung: Ist $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine Geodätische, dann folgt daraus, dass $f \circ c : I \rightarrow \mathcal{N}$ eine Geodätische ist

Beweis:

Übung (Hinweis: Isometrien erhalten Christoffel Symbole). □

Sei $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ein Diffeomorphismus. Die Menge der Fixpunkte von φ ist:

$$\text{Fix}(\varphi) = \{p \in \mathcal{M} | \varphi(p) = p\} \quad (4.9)$$

4.10 Satz

Sei (\mathcal{M}, g) ein (Semi-) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\varphi \in \text{Isom}(\mathcal{M}, g)$. Sei $p \in \text{Fix}(\varphi)$ und $v \in T_p\mathcal{M}$ mit $d\varphi_p(v) = v$. Dann hat die Geodätische

$$c_v : I_v \rightarrow \mathcal{M}, \quad (4.10)$$

die Eigenschaft: $c_v(t) \in \text{Fix}(\varphi)$ für alle $t \in I_v$

Beweis: (Beweis Satz 4.10)

$\varphi \circ c_v(t) = \tilde{c}(t)$ ist eine Geodätische mit

$$\begin{aligned} \tilde{c}(0) &= \varphi(p) = p \\ \dot{\tilde{c}}(0) &= d\varphi_p(v) = v \\ \Rightarrow \tilde{c}(t) &= c_v(t), \quad \forall t \in I \\ \Rightarrow \varphi(c_v(t)) &= c_v(t) \\ \Rightarrow c_v(t) &\in \text{Fix}(\varphi) \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 4.12 (Geodätische auf S^n)

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, x \rangle = 1\} \subset (\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Eukl}}) \quad (4.11)$$

Hier ist $T_p S^n = p^\perp$. Dies wird in Abbildung 4.3 veranschaulicht.

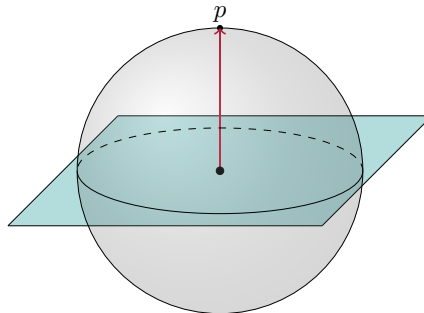


Abbildung 4.2.: Veranschaulichung des Tangentialraumes des S^n am Punkt p

Für $u, v \in p^\perp$ gilt:

$$\langle v, p \rangle = 0$$

$$\langle p, v \rangle = 0$$

$$\langle p, p \rangle = 1$$

Wir haben die Standardmetrik mit:

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle.$$

Sei $A \in O(n+1)$

$$A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$v \mapsto Av$$

Für die Metrik g gilt:

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle$$

$$= \langle Av, Aw \rangle$$

$$= g_{A_p}(A_v, A_w)$$

$$\Rightarrow A \subset \text{Isom}(S^n)$$

Seien $p \in S^n$ und $v \in T_p S^n = p^\perp$. $E = \text{span}\{v, p\} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Ebene. Sei $A_E : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ die Spiegelung an E . Betrachte den Vektor $(p, v, \underbrace{e_3, \dots, e_{n+1}}_{E^\perp})$

$$A_E(p) = p$$

$$A_E(v) = v$$

$$A_E(e_i) = -e_i, \quad \forall i$$

$A_E \in O(n+1) \subset \text{Isom}(S^n)$. $\text{Fix}(A) = E \cup S^n$ ist ein Kreis.

$$c_v : I_v S^n \tag{4.12}$$

$$c_v(t) = \cos(\alpha t)p + \sin(\alpha t) \frac{v}{\|v\|} \tag{4.13}$$

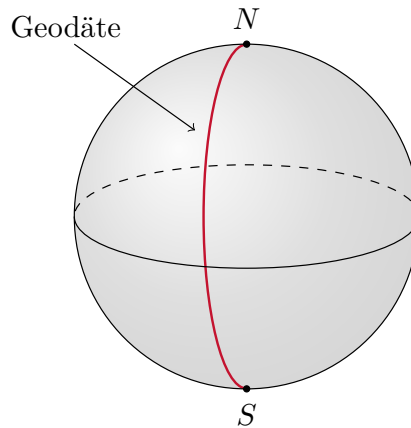


Abbildung 4.3.: Geodäte auf S^n

Mit der Anfangsbedingung $\dot{c}_v(0) = v$ folgt $\alpha = \|v\|$.
Es folgt, dass S^n vollständig ist, da $I_v = \mathbb{R}$.

Übung: Finde Geodätische für den Hyperbolischen Raum H^n .

4.1. Die Exponentialabbildung

Wir betrachten eine Abbildung von $T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, wobei die Mannigfaltigkeit mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ausgestattet ist ($\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \nabla)$). Die Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

1. Für $p \in \mathcal{M}$ bildet \exp eine Umgebung von $0 \in T_p\mathcal{M}$ auf eine Umgebung von p in \mathcal{M} diffeomorph ab.
2. Geraden durch $0 \in T_p\mathcal{M}$ werden isometrisch auf Geodätische durch p abgebildet.

Definition 4.13 (Exponentialabbildung)

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \exp: T_p\mathcal{M} \supset D &\rightarrow \mathcal{M} \\ v &\mapsto c_v(1) \end{aligned}$$

mit $D = \{v \in T\mathcal{M} \mid (1, U) \in 0\}$.

$$\begin{aligned} D_p &= D \cap T_p\mathcal{M} \\ \exp_p : D_p &\rightarrow \mathcal{M} \end{aligned}$$

heißt *Exponentialabbildung*.

Bemerkung: Es lassen sich die folgenden Aussagen treffen:

1. $D \subset T\mathcal{M}$ und $D_p \subset T_p\mathcal{M}$ sind offen und \exp, \exp_p sind glatt.
2. $0 \in D_p : \exp_p(0) = p$
3. $\exp_p(t \cdot v) = c_{t \cdot v}(1) = c_v(t)$
4. D_p ist sternförmig und $0 \in T_p\mathcal{M}$. Das bedeutet:

$$v \in D_p \Rightarrow \alpha v \in D_p \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1$$

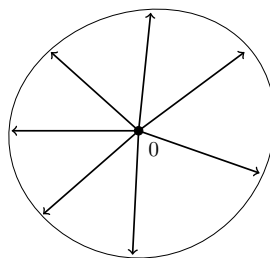


Abbildung 4.4.: Darstellung eines Sterngebietes

4.15 Lemma (Differential der Exponentialabbildung)

Wir wissen bereits: $\exp : D_p \rightarrow \mathcal{M}$ sowie $\exp_p(0) = p$.

Für das Differential der Exponentialabbildung ergibt sich dann:

$$d(\exp_p) : T_0 T_p \mathcal{M} \rightarrow T_p \mathcal{M}$$

$$v \mapsto v$$

das heißt $d(\exp_p)_0 = \text{id}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} d(\exp_p)_0(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(0 + t \cdot v) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c_{t \cdot v}(1) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c_v(t) \\ &= c_v(0) \\ &= v \end{aligned}$$

□

4.17 Korollar

Für alle $p \in \mathcal{M}$ existiert eine Umgebung U von $0 \in T_p \mathcal{M}$ und eine Umgebung V von $p \in \mathcal{M}$, so dass $\exp_p : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist.



Falls (\mathcal{M}, ∇) vollständig ist, dann ist die Exponentialabbildung auf ganz $T\mathcal{M}$ definiert. Wir haben gesehen:

$$(S^n, g) : c_v(t) = \cos(\|v\|t)p + \sin(\|v\|t) \frac{v}{\|v\|}$$

Falls $\|v\| = 2\pi$, dann gilt:

$$\exp_p(v) = c_v(1) = p$$

Daraus folgt, dass \exp nicht injektiv ist, also damit auch kein globaler Diffeomorphismus.

Wir wollen nun wieder zurück zur Behandlung der Geodätischen kommen. Besonders interessieren wir uns jetzt für eine spezielle Eigenschaft der Geodätischen, nämlich dass die Geodätische längenminimierende Kurven sind.

Es sei (\mathcal{M}, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ eine glatte Kurve.

Definition 4.18 (Länge einer Kurve c)

$$\begin{aligned}
L(c) &= \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt \\
&= \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Definition 4.19 (Energie von c)

$$E(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))) dt \tag{4.15}$$

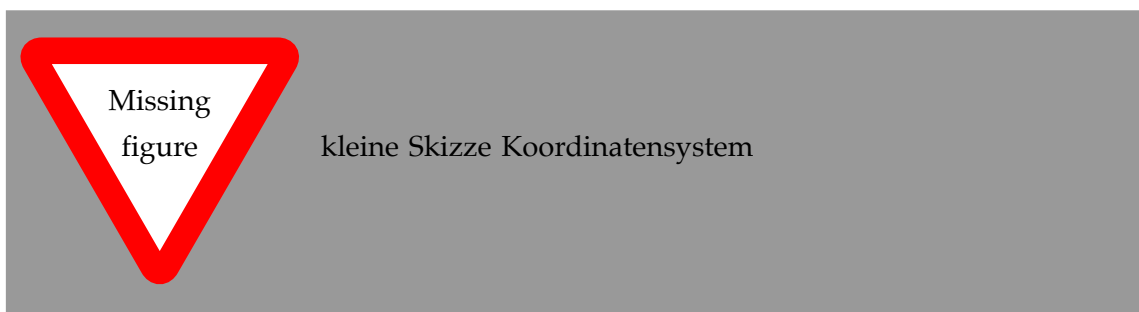
$$= \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2 dt \tag{4.16}$$

Bemerkung: Die Länge der Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung:

$$L(c) = L(c \circ \varphi) \tag{4.17}$$

für Umparametrisierungen:

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$$



Beweis:

$$\begin{aligned}
L(c \circ \varphi) &= \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} (c \circ \varphi)(t) \right\| dt \\
&= \int_a^b \|\dot{c}(\varphi(t))\| \dot{\varphi}(t) dt \quad ; \dot{\varphi}(t) > 0 \\
&= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\dot{c}(s)\| ds \\
&= L(c)
\end{aligned}$$

wobei $s = \varphi(t)$. □

Bemerkung: Die Energie hängt von der Parametrisierung ab!

4.23 Lemma

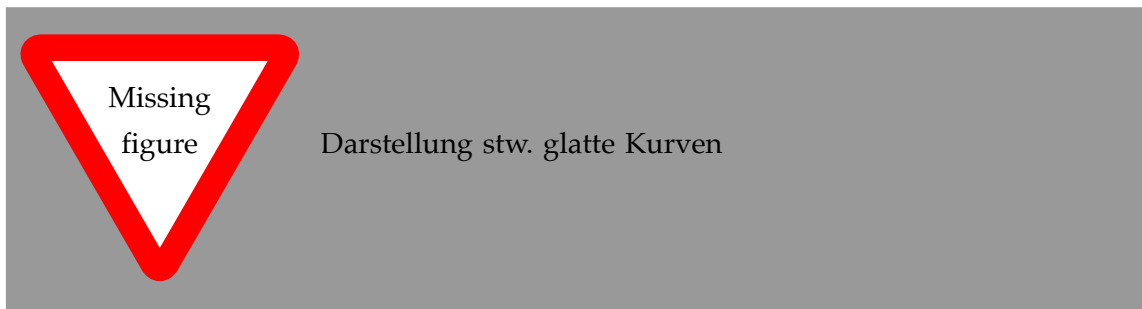
Es gilt die Ungleichung:

$$L(c)^2 \leq 2(b-a)E(c) \quad (4.18)$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Seien nachfolgend $p, q \in \mathcal{M}$.

$\Omega_{p,q}$ = stückweise glatte Kurven von p und q



$$L : \Omega_{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Variation:

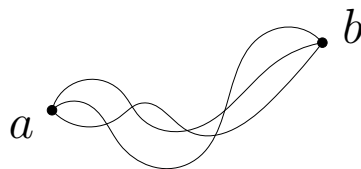


Abbildung 4.5.: Variation einer Kurve mit festem Anfangs- und Endpunkt.

Betrachten wir eine 1-Parameter Familie von Kurven:

$$I \ni s \longmapsto c_s \in \Omega_{p,q}$$

so dass $L(c_s)$ glatt von s abhängt.

$$\left. \partial_s L(c(s)) \right|_{s=0} = 0 \iff c \text{ Geodätische}$$

Definition 4.24 (1-Parameter Variation)

Eine stückweise glatte 1-Parameter Variation von $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : I \times [a, b] &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (s, t) &\longmapsto \mathcal{H}(s, t) \end{aligned}$$

Mit $\mathcal{H}(0, t) = c(t)$ genau so, dass

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$$

existiert, wobei \mathcal{H} glatt auf $I > [t_i, t_{i+1}]$ ist.

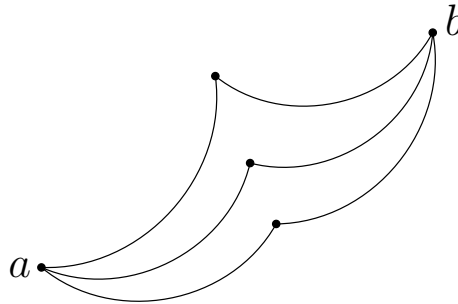


Abbildung 4.6.: Variation einer stückweise glatten Kurven vom Punkt a nach b .

Eine solche Variation heißt **eigentlich**, falls:

$$\mathcal{H}(s, a) = c(a)$$

$$\mathcal{H}(s, b) = c(b)$$

Wir setzen $c_s = \mathcal{H}(s, \cdot)$ sowie $c_0 = c$.

Das Variationsfeld von \mathcal{H} ist:

$$V(\cdot) = \partial_s \mathcal{H}(0, \cdot) = \partial_s \mathcal{H}(s, \cdot) \Big|_{s=0}$$

V ist ein stückweises Vektorfeld längs c .

\mathcal{H} ist eigentlich $\Rightarrow V(a) = V(b) = 0$.



Aussehen des Vektorfelds

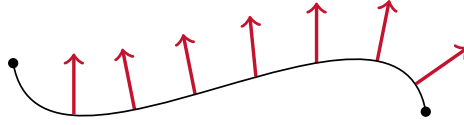
4.25 Lemma

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ eine stückweise glatte Kurve und V ein stückweise glattes Vektorfeld längs c . Dann existiert eine 1-Parameter Variation $\mathcal{H} : I \times [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ von c mit Variationsfeld V und $\mathcal{H}(s, t) = c(t) \forall t$ für die $V(t) = 0$.

Beweis:

$$\mathcal{H}(s, t) = \exp_p c(t)(s(V(t)))$$

□

**Abbildung 4.7.:** Darstellung des Variationsfeldes**4.27 Satz**

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

Sei $\mathcal{H} : I \times [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ eine stückweise glatte 1-Parameter Variation von c , V das Vektorfeld $V = \partial_s \mathcal{H}(0, \cdot)$, $c_s = \mathcal{H}(s, \cdot)$ und $L(s) = L(c(s))$.

Dann ist $L : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatt um $0 \in I$ und die erste Ableitung $\partial_s L(0)$ ist gegeben durch:

$$\partial_s L(0) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \left[g(V, \dot{c}) \Big|_a^b + \sum_{i=0}^{n-1} g(V(t_i), \Delta \dot{c}(t_i)) - \int_a^b g(V, D_t \dot{c}) dt \right]$$

Hierbei gilt $a = t_0 \leq \dots \leq t_m = b$ und

$$\Delta \dot{c}(t_i) = \underbrace{\dot{c}(t_i - 0)}_{\text{von links}} - \underbrace{\dot{c}(t_i + 0)}_{\text{von rechts}}$$

Die Notation bedeutet, dass die Kurve stückweise glatt ist und die Ableitung an den Verbindungspunkten springt. Wir haben also zwei verschiedene Grenzwerte.

Bemerkung: Vor dem Beweis des vorangegangenen Lemmas wollen wir noch einige Bemerkungen machen:

1. $\partial_s L(0)$ hängt nur von V ab und nicht explizit von \mathcal{H} .
2. c glatt \Rightarrow Term $\Delta \dot{c}(t_i) = 0$.
3. c Geodätische $\Leftrightarrow D_t \dot{c} = 0$.

Beweis: (Vorangegangenes Lemma)

$$L(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{c}_s(t)\| dt \quad \text{ist glatt in } s.$$

Berechne die Ableitung:

$$\begin{aligned}
\partial_s L(0) &= \frac{d}{ds} \left[\sum \int \|\dot{c}_s(t)\| dt \right] \Big|_{s=0} \\
&= \sum \int \frac{d}{ds} \|\dot{c}_s(t)\| \Big|_{s=0} dt \\
&= \sum \int \frac{d}{ds} \sqrt{g(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t))} \Big|_{s=0} dt \\
&= \sum \int \frac{1}{2} \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \frac{d}{ds} g(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)) \Big|_{s=0} dt \\
&= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \sum \int \frac{1}{2} \cdot 2 g(D_s \dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)) \Big|_{s=0} dt \\
&= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \sum \int g(D_s \frac{d}{dt} \mathcal{H}(s, t), \frac{d}{dt} \mathcal{H}(s, t)) dt \\
&= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \sum \int g(D_t \frac{d}{ds} \mathcal{H}(s, t), \frac{d}{dt} \mathcal{H}(s, t)) dt \\
&= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \sum \int g(D_t V, \dot{c}(t)) dt \\
&= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \sum \int \left(\frac{d}{dt} g(v(t), \dot{c}) - g(v(t), D_t \dot{c}(t)) \right) dt \quad \square
\end{aligned}$$

4.30 Satz

Eine reguläre Kurve (das heißt $\dot{c}(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$) die stückweise glatt ist, ist eine Geodätische genau dann, wenn folgendes gilt:

1. c ist eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve
2. Die erste Variation der Bogenlänge verschwindet für jede eigentliche Variation von c

Beweis:

1. Sei c eine Geodätische. Daraus folgt, dass c glatt ist und nach der Bogenlänge parametrisiert ist. $\Rightarrow c$ ist regulär und $\nabla_t \dot{c} = 0$. Aus der Gleichung für die Variation der Bogenlänge folgt:

$$\frac{d}{ds} L(c_s) \Big|_{s=0} = [g(v(t), \dot{c}(t))]_a^b + \sum_i g(v(t_i), \Delta \dot{c}(t)) = 0$$

2. Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert und $\partial_s L(0) = 0$ (das heißt $\frac{d}{ds} L(c_s) \Big|_{s=0} = 0$) für jede eigentliche Variation von c .

Betrachte $V = \varphi \nabla_t \dot{c}$. V ist dann ein stückweise glattes Variationsfeld längs c mit $V(t) = 0$ ($t \in [a, t_i] \cup (t_{i+1}, b]$) Bilde eigentliche Variation c_s von c mit Variationsfeld V .

$$0 = \partial_s L(0) = - \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\varphi \nabla_t \dot{c}, \nabla_t \dot{c}) dt \quad (4.19)$$

$$= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi \|\nabla_t \dot{c}\| dt \quad (4.20)$$

Daraus folgt, dass $\|\nabla_t \dot{c}\| = 0$. Damit folgt, dass $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ eine Geodätische ist.

Wir wollen nun noch ein Argument angeben, warum Gleichung 4.19 verschwindet. Setze $f(t_i) = \dot{c}(t_i - 0) - \dot{c}(t_i + 0)$ und betrachte das parallele Vektorfeld F längs c . Setze $V = \varphi F$ und betrachte die zugehörige Einparameter Variation von c . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_s L(0) = g(v(t_i), \dot{c}(t_i - 0) - \dot{c}(t_i + 0)) \\ &= \varphi(t_i) g(f(t_i), f(t_i)) \\ f(t_i) &= \dot{c}(t_i - 0) - \dot{c}(t_i + 0) = 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

□

4.2. (\mathcal{M}, g) als metrischer Raum

Ziel ist es jetzt zu zeigen, dass (\mathcal{M}, d) ein metrischer Raum ist, wobei d eine geeignet definierte Distanzfunktion ist. Um dieses Ziel zu erreichen, benötigen wir zunächst ein paar Überlegungen zur Exponentialabbildung.

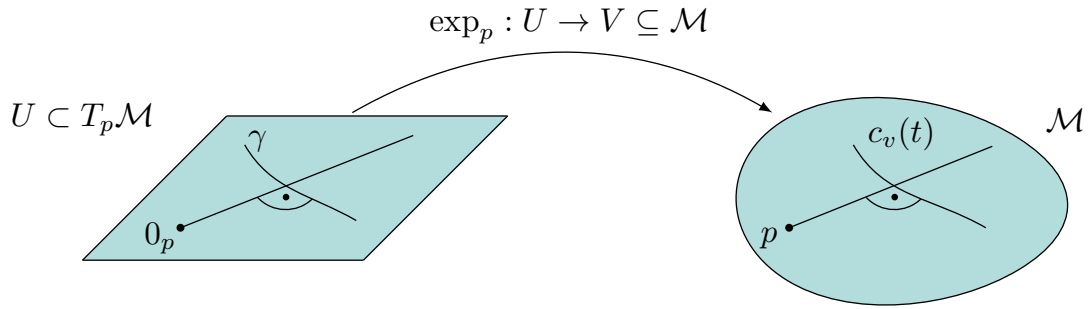


Abbildung 4.8.: Die Exponentialabbildung erhält Orthogonalität

In Abbildung 4.8 ist zu sehen, dass der Strahl tv auf radiale Geodätische $c_v(t) = \exp_p(tv)$ abgebildet wird durch die Exponentialabbildung. \exp_p erhält Orthogonalität zu den radialen Richtungen. Dies nennt man **radiale Isometrie**.

4.32 Lemma (Gaußlemma)

Sei $p \in \mathcal{M}$, $v \in T_p \mathcal{M}$ und $c_v(t) = \exp_p(tv)$ auf $[0, b]$ definiert. Dann ist \exp_p in einer offenen Umgebung von $\{tv | t \in [a, b]\} \subset T_p \mathcal{M}$ definiert und es gilt:

$$\begin{aligned} a) \quad d\left(\exp_p \Big|_{tv}\right)(v) &= \dot{c}_v(t) \\ b) \quad \text{Für } \eta \in T_{tv}(T_p \mathcal{M}) \cong T_p \mathcal{M} \text{ gilt:} \\ g(d(\exp_p)_{tv}(\eta), d(\exp_p)_{tv}(v)) &= g(\eta, v) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Beweis: (Beweis Gaußlemma 4.32)

zu a):

$$\begin{aligned} d\left(\exp_p \Big|_{tv}\right)(v) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \underbrace{\exp_p(tv + sv)}_{c_v(t+s)} \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c_v(t+s) \\ &= \dot{c}_v(t) \end{aligned}$$

zu b):

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $t = 1$ (da $c_{tv}(1) = c_v(t)$). Ferner betrachten wir die Variation H von c_v :

$$\begin{aligned} H &: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} \\ H(s, t) &= \exp_p(t(v + s\eta)) \end{aligned}$$

$V(t)$ sei das zugehörige Variationsfeld mit

$$V(t) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} H(s, t)$$

Außerdem ist $c_s(t) = \exp_p(t(v + s\eta))$.

$$L(c_s) = \sqrt{g(v + s\eta, v + s\eta)}$$

$$\Rightarrow \partial_s L(0) = \frac{1}{\|v\|} g(v, \eta) \quad (4.23)$$

Wir können $\partial_s L(0)$ auch mittels der ersten Variation der Bogenlänge berechnen.

$$\begin{aligned} \partial_s L(0) &= \left. \frac{1}{\|v\|} g(v(t), \dot{c}_v(t)) \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{\|v\|} (g(v(1), \dot{c}_v(1)) - g(v(0), \dot{c}_v(0))) \\ &= \frac{1}{\|v\|} (g(d(\exp_p) \Big|_v (\eta), \dot{c}_v(1)) - g(v(0), \dot{c}_v(0))) \end{aligned}$$

Die Gleichungen 4.23 und 4.33 implizieren die Behauptung, falls

$$g(v(0), \dot{c}_v(0)) = 0$$

ist.

Nach a) können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\eta \perp v$ ist (Warum?). Das heißt:

$$\begin{aligned} 0 &= g(\eta, v) = g(\eta, \dot{c}_v(0)) \\ &= g(v(0), \dot{c}_v(0)) \end{aligned} \quad \square$$

Definition 4.34 (Distanzfunktion)

Seien $p, q \in \mathcal{M}$, so ist

$$d(p, q) := \inf \{ L(c) \mid c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M} \text{ Stückweise glatt mit } c(a) = p \text{ und } c(b) = q \} \quad (4.24)$$

die Distanzfunktion.

Beispiel 4.35

Im \mathbb{R}^2 wäre die Distanz zwischen den Punkten p und q die Länge der roten Kurve (Gerade) in Abbildung 4.5

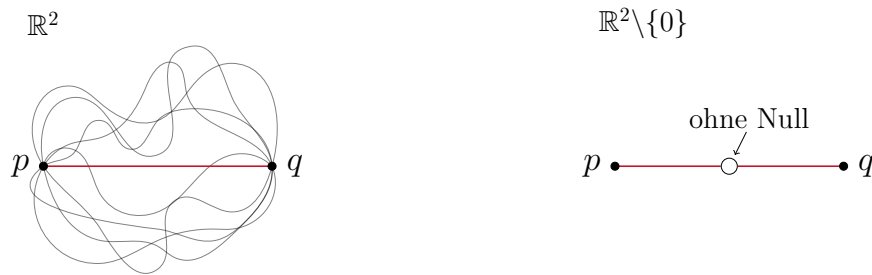


Abbildung 4.9.: Kürzeste Strecke im \mathbb{R}^2 und Spezialfall ohne Null

Bemerkung:

- Infimum muss nicht angenommen werden (Beispiel: $\mathbb{R}^2/0$)
- Die Kürzeste Strecke ist im Allgemeinen nicht eindeutig.

4.37 Satz ((\mathcal{M}, d) als metrischer Raum)

(\mathcal{M}, d) ist ein metrischer Raum, das bedeutet:

1. $d(p, q) = d(q, p)$
2. $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
3. $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$

Außerdem ist $d : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ stetig und die von d induzierte Topologie ist die ursprüngliche Topologie auf \mathcal{M} .

Für den Beweis des Satzes benötigen wir ein Hilfslemma.

4.38 Lemma

Sei $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(0) = \{v \in T_p\mathcal{M} \mid \|v\| < \varepsilon\} \subseteq T_p\mathcal{M}$. Sei außerdem ε klein genug, so dass $\exp_p|_{B_\varepsilon(0)}$ ein Diffeomorphismus ist. Setze $B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0)) \subseteq \mathcal{M}$.

1. Dann ist $\forall v \in B_\varepsilon(0)$ die Geodätische c_v die bis auf Umparametrisierungen eindeutige, kürzeste Verbindung von p nach $q = \exp_p(v)$.
2. Sei $q \notin B_\varepsilon(p)$. Dann gilt für jede Kurve c von p nach q : $L(c) < \varepsilon$.

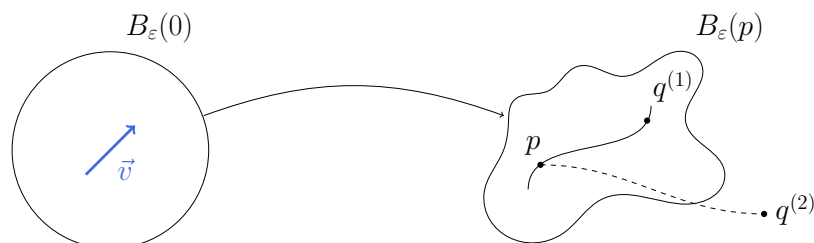


Abbildung 4.10.: Graphische Darstellung der zweiten Aussage des Lemmas

Beweis:

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q = \exp_p(v)$ wobei für das Bild von c gilt: $\text{Im}(c) \subset B_\varepsilon(p)$. Setze:

$$\begin{aligned}\bar{c}(t) &= \exp_p^{-1}(c(t)) \\ s(t) &= \|\bar{c}(t)\| \\ y(t) &= \frac{\bar{c}(t)}{\|\bar{c}(t)\|} \quad t \neq a \\ \bar{v}(x) &= \frac{x}{\|x\|} \quad \text{auf } T_p\mathcal{M} \\ v(q) &= \mathbf{d}\left(\exp_p(\bar{v}(\exp_p^{-1}(q)))\right)\end{aligned}$$

Aus diesen Definitionen folgt direkt:

1. $\|\bar{v}\| = 1$ (trivial)
2. $\|v\| = 1$ (folgt aus dem Gaußlemma 4.32)
3. $\dot{c}(t) = \dot{s}(t)y(t) + s(t)\dot{y}(t) = \dot{s}(t)\bar{v}(\bar{c}(t)) + s(t)\dot{y}(t)$

Es folgt:

$$\begin{aligned}g(v(c(t)), \dot{c}(t)) &= g(\mathbf{d}\exp_p(\bar{v}(\bar{c}(t))), \mathbf{d}\exp_p(\dot{c}(t))) \\ &\stackrel{4.32}{=} g(\bar{v}(\bar{c}(t)), \dot{c}(t)) \\ &\stackrel{(3)}{=} g(\bar{v}(c(t)), \dot{s}(t)\bar{v}(\bar{c}(t))) \\ &\stackrel{(1)}{=} \dot{s}(t)\end{aligned}$$

Also folgt für die Länge $L(c)$ der Kurve:

$$L(c) \stackrel{(2)}{=} \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \cdot \underbrace{\|v(c(t))\|}_{=1} dt \quad (4.25)$$

Denn:

$$\begin{aligned}L(c) &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \int_a^b g(\dot{c}(t), v(c(t))) dt = \int_a^b \dot{s}(t) dt \\ &= s(b) - s(a) \\ &= \|\bar{c}(b)\| - \|\bar{c}(a)\| \\ &= \|v\| \\ &= L\left(c_v \Big|_{[0,1]}\right)\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\dot{c}(t)$ parallel zu $v(c(t))$ ist für alle t . Dies ist äquivalent zu der Aussage $\dot{c}(t)$ ist parallel zu $\bar{v}(\bar{c}(t))$.

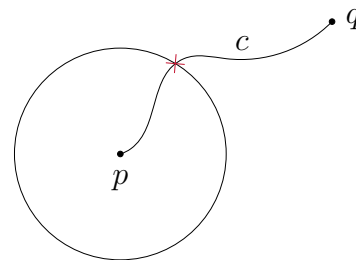
Das bedeutet, dass c eine Umparametrisierung von c_v ist.

Sei nun $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ eine beliebige, stückweise glatte Kurve von p nach q .

Setze:

$$\begin{aligned}a_0 &= \max\{t \mid c(t) = p\} \\ b_0 &= \min\{t \mid c(t) \in \exp(\partial B_\varepsilon(0))\}\end{aligned}$$

oder $b_0 = b$, wenn c schon komplett in B_ε liegt.



Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} L(c) &\geq L(c|_{[a_0, b_0]}) \\ &\geq L(c_v|_{[0, 1]}) = \|v\| \end{aligned} \quad (4.26)$$

mit Gleichheit wenn $c \equiv c_{[a_0, b_0]}$ eine Umparametrisierung von $c_v|_{[0, 1]}$ ist. Dies beweist Aussage (1). Außerdem folgt aus $\|v\| \geq \varepsilon$, falls $q \neq B_\varepsilon(p)$ die Aussage (2). \square

Mit diesem Wissen wollen wir nun den zuvor vorgestellten Satz beweisen.

Beweis: (Satz 4.37)

Die ersten beiden Aussagen sind recht offensichtlich wahr.

- $d(p, q) \geq 0$ ist klar!

Es gilt $d(p, q) = 0 \forall p \in \mathcal{M}$ für die konstante Kurve die Länge null hat.

Sei $d(p, q) = 0$. Wir nehmen $p \neq q$ an. Wähle $r > 0$, so dass $\exp_p|_{B_r(0)}$ ein Diffeomorphismus ist und betrachten $q \notin \exp_p(B_r(0))$.

Gemäß des Hilfslemmas hat jede Kurve von p nach q mindestens die Länge r .

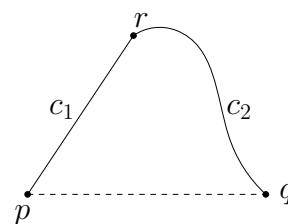
Daraus folgt:

$$d(p, q) > r > 0 \quad \nexists$$

- $d(p, q) = d(q, p)$ ist ebenfalls klar! (Laufe die Kurve rückwärts ab)
- Dreiecksungleichung:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle c_1 und c_2 so, dass:

$$\begin{aligned} L(c_1) &\leq d(p, r) + \varepsilon \\ L(c_2) &\leq d(r, q) + \varepsilon \end{aligned}$$



Die Kurve $c = c_1 \star c_2$ sei nun diejenige Kurve, die durch c_1 und c_2 gegeben ist.

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq L(c) = L(c_1) + L(c_2) \\ &= d(p, r) + d(r, q) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Dies zeigt für alle $\varepsilon > 0$ die Dreiecksungleichung.

- Die Metrik induziert die ursprüngliche Topologie $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$

Sei die Umgebung U offen, das heißt $U \in \mathcal{T}$. Die Notation U offen^d bedeutet offen bezüglich d . Wir wollen zeigen, dass U offen^d impliziert, dass $U \in \mathcal{T}$.

Sei U offen^d, das heißt für jedes $p \in U \exists r(p) > 0$, so dass $B_{r(p)} \subseteq U$.
Dann gilt:

$$B_{r(p)}(p) = \exp_p(B_{r(p)}(0))$$

falls $r(p)$ **hinreichend klein** ist. Was dies genau bedeutet soll mit der Definition, die nach Beendigung des Beweises folgt geklärt werden.

Da \exp_p ein Diffeomorphismus ist und $B_{r(p)}(0)$ offen, folgt:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow B_{r(p)}(p) \text{ ist offen} \\ &\Rightarrow U = \bigcup_{p \in U} B_{r(p)}(p) \text{ ist offen} \end{aligned}$$

Die Umkehrung folgt sehr ähnlich und wird deshalb an dieser Stelle nicht vorgerechnet. □

Definition 4.41 (Injektivitätsradius)

Wir definieren den Injektivitätsradius in p als:

$$\text{injrad}(p) = \sup\{r \mid \exp_p \Big|_{B_r(0)} : B_r(0) \longrightarrow \exp_p(B_r(0)) \text{ Diffeomorphismus}\} \quad (4.27)$$

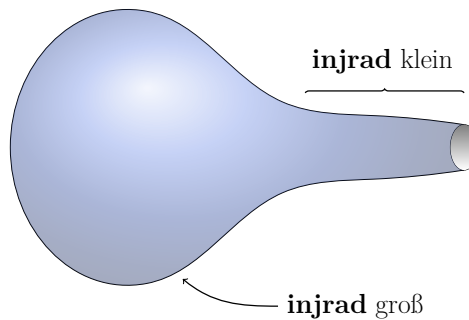


Abbildung 4.11.: Darstellung der Bedeutung des Injektivitätsradius

Damit erhalten wir ein Kriterium für die im im Beweis des vorangegangenen Satzes verwendete Forderung nach "hinreichender Kleinheit":

$$r(p) \text{ hinreichend klein} \Leftrightarrow r(p) \leq \text{injrad}(p) \quad (4.28)$$

4.42 Lemma

d ist stetig.

Beweis:

Zunächst zeigen wir, dass $d(p, -)$ stetig in p ist.

Sei $U \subset \mathcal{M}, V \subset T_p \mathcal{M}$ so, dass $\exp_p : V \longrightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist.

Sei $p_n \in \mathcal{M}$ eine Folge mit $p_n \rightarrow p$. Dann gibt es $v_n \in T_p \mathcal{M}$ mit $v_n \rightarrow 0$ so, dass $\exp_p(v_n) = p_n$.

Wir erhalten:

$$d(p, p_n) \leq \int_0^1 \|\dot{c}_{v_n}(t)\| dt = \|v_n\| \longrightarrow 0 \quad \square$$

- $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Seien $p_n \rightarrow p$ und $q_n \rightarrow q$ Folgen in \mathcal{M} . Dann gilt:

$$|d(p, q) - d(p_n, q_n)| \stackrel{(*)}{\leq} d(p, p_n) + d(q, q_n) \longrightarrow 0.$$

Die Abschätzung $(*)$ gilt da: $d(p, q) \leq d(p, p_n) + d(p_n, q_n) + d(q_n, q)$.

Im Folgenden ist \mathcal{M} immer eine Zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition 4.44 (Geodätisch Vollständig)

Sei $p \in \mathcal{M}$, dann heißt \mathcal{M} geodätisch vollständig in p , falls \exp_p auf ganz $T_p\mathcal{M}$ definiert ist, das heißt alle Geodätischen durch p auf ganz \mathbb{R} definiert sind.

Beispiel 4.45

1. $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Eukl}})$ ist geodätisch vollständig
2. $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ ist nicht geodätisch vollständig

4.3. Satz von Hopf-Rinow

4.46 Satz (von Hopf-Rinow)

Sei \mathcal{M} wie oben eine Zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ferner sei $p \in \mathcal{M}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) \mathcal{M} ist geodätisch vollständig im Punkt p
- ii) \mathcal{M} ist geodätisch vollständig in allen Punkten $q \in \mathcal{M}$
- iii) $\overline{B}_r(p)$ sind kompakt für alle $r > 0, r \in \mathbb{R}$
- iv) $B_r(q)$ sind kompakt für alle $r \in \mathbb{R}_+$ und alle $q \in \mathcal{M}$
- v) (\mathcal{M}, d) ist ein vollständiger metrischer Raum, d.h. alle Cauchy-Folgen konvergieren

Jeder der Bedingungen i) - v) impliziert die folgende Aussage:

- vi) Jeder Punkt $q \in \mathcal{M}$ lässt sich mit p durch eine minimale Geodätische verbinden.

Bemerkung: Aussage vi) ist schwächer als die Aussage i) - v) (Vergleich: Beispiel 4.45)

Definition 4.48 (Vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit)

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , die i) - v) erfüllt, heißt vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.

4.49 Korollar

Jede kompakte Mannigfaltigkeit ist vollständig.

Beweis: (Korollar 4.49)

Es genügt iii) von Satz 4.46 zu zeigen.

$\overline{B}_r(p) \subset \mathcal{M}$ abgeschlossen und da \mathcal{M} kompakt folgt, dass $\overline{B}_r(p)$ kompakt ist. □

Beweis: (Satz von Hopf-Rinow 4.46)

Die Beweisstruktur ist in der Abbildung 4.12 zu sehen

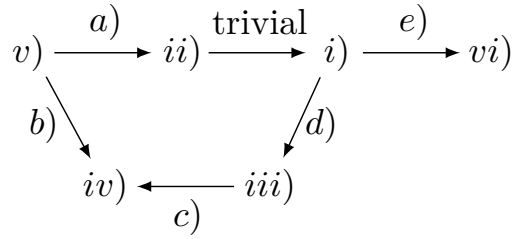


Abbildung 4.12.: Beweisstruktur für den Satz von Hopf-Rinow

zu a):

Sei $c : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathcal{M}$ eine Geodätische mit maximalen Definitionsbereich. O.B.d.A nehmen wir an, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Wir wollen Beweis per Widerspruch führen, das heißt wir nehmen an, dass $\beta < \infty$ (Der Fall $\alpha > -\infty$ wir analog durchgeführt). Dann gilt für eine Folge $t_i \in (\alpha, \beta)$ mit $t_i \rightarrow \beta$ für $i \rightarrow \infty$.

$$d(c(t_i), c(t_j)) \leq L(c|_{[t_i, t_j]}) = |t_i - t_j|$$

Folglich ist $(c(t_i))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (\mathcal{M}, d) . Da (\mathcal{M}, d) vollständig ist folgt, dass $q \in \mathcal{M}$ existieren mit $c(t_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} q$.

Behauptung:

q hängt nicht von der Wahl der Folge t_i ab.

Beweis: (Behauptung)

Sei $(\tilde{t}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine zweite solche Folge mit $\tilde{q} = \lim_{i \rightarrow \infty} c(\tilde{t}_i)$ dann definieren wir:

$$\hat{t}_i = \begin{cases} t_j & i = 2j \\ \tilde{t}_j & i = 2j + 1 \end{cases} \quad (4.29)$$

Die Folge $c(\hat{t}_i)$ ist eine Cauchy Folge mit Häufungspunkten q und \tilde{q} . □

Fortsetzung Beweis

Mit anderen Worten: wir erhalten eine stetige Fortsetzung $\bar{c} : (\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{M}$ von c durch

$$\bar{c}(t) = \begin{cases} c(t) & t \in (\alpha, \beta) \\ q & t = \beta \end{cases}$$

Behauptung:

\bar{c} besitzt eine stetige Fortsetzung auf $(\alpha, \beta]$.

Beweis: (Behauptung)

Sei $x : U \rightarrow V$ eine Karte von \mathcal{M} um q mit $x(q) = 0$. Ferner wähle $r > 0$ so, dass $\overline{B}_r(0) \subset V$. Da $\overline{B}(0)$ kompakt ist, existieren Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$ so, dass

$$1. \quad |\Gamma_{ij}^k| \leq c_1, \forall y \in \overline{B}_r(0)$$

$$2. \|a\|_{\max} \leq c_2 \left\| \sum_j a^j \frac{\partial}{\partial x_j} x^{-1}(y) \right\|_g \text{ für alle } a \in \mathbb{R}^n \text{ und } y \in \overline{B}_r(0)$$

$$3. \left| \frac{\partial \Gamma_{ij}^k(y)}{\partial x_i} \right| \leq c_3 \text{ für alle } y \in \overline{B}_r(0)$$

Setze $c_k = x_k \circ c$ und $a_k = \dot{c}_k$. Dann gilt aufgrund der Geodätengleichung:

$$\dot{a}_k = \ddot{c}_k = - \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{c}_i \dot{c}_j \quad (4.30)$$

$$= - \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k a_i a_j \quad (4.31)$$

Dies impliziert:

$$\begin{aligned} |\dot{a}_k| &\leq \sum_{ij} |\Gamma_{ij}^k a_i a_j| \\ &\leq n^2 c_1 \|a\|_{\max}^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|\dot{a}\|_{\max} &\leq n^2 c_1 \|a\|_{\max}^2 \\ &\leq c_1 c_2^2 \|\dot{c}\|_g^2 =: c_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|a(t_i) - a(t_j)\|_{\max} &= \left\| \int_{t_i}^{t_j} \dot{a}(t) dt \right\| \\ &\leq \int_{t_i}^{t_j} \|\dot{a}\|_{\max}(t) dt \\ &\leq c_4 |t_i - t_j| \end{aligned}$$

Das heißt die $a(t_i)$ bilden eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n . Daraus folgt dass ein A in \mathbb{R}^n existiert mit $\lim_{i \rightarrow \infty} a(t_i) = A$. Wie oben ist A unabhängig von der Wahl von (t_i) . Daher erhalten wir eine stetige Fortsetzung.

$$\bar{a}(t) = \begin{cases} a(t) & t \in (\alpha, \beta) \\ A & t = \beta \end{cases} \quad \square$$

Fortsetzung Beweis

Die Differentiation der Geodätengleichung liefert:

$$\ddot{a}_k = - \sum_{ij} \left(\sum_l \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x_l} a_l a_i a_j + 2 \Gamma_{ij}^k \dot{a}_i \dot{a}_j \right)$$

Dies impliziert:

$$\begin{aligned} \|\ddot{a}\|_{\max} &\leq n^3 c_3 \|a\|_{\max}^3 + 2n^2 c_1 \|\dot{a}\|_{\max} \|a\|_{\max} \\ &\leq n^3 c_3 c_2^3 + 2n^2 c_1 c_4 c_2 =: c_5 \end{aligned}$$

wie oben bilden $(\dot{a}(t_i))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n . Die Fortsetzung \bar{c} ist somit eine C^2 -Kurve. Sei $\tilde{c} : (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ eine Lösung der Geodätengleichung mit $\tilde{c}(\beta) = \bar{c}(\beta)$ und $\dot{\tilde{c}}(\beta) = \dot{\bar{c}}(\beta)$. Aus der Eindeutigkeit von Geodätischen folgt, dass \tilde{c} und \bar{c} auf ihrem gesamten Definitionsbereich übereinstimmen. Wir erhalten also eine Fortsetzung von c auf $(\alpha, \beta + \varepsilon)$. Dies ist allerdings ein Widerspruch zur Maximalität von β .

zu b):

Seien alle abgeschlossenen Bälle in \mathcal{M} kompakt. Sei $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathcal{M} . Zu zeigen: (p_i) konvergiert.

Da alle Cauchy-Folgen beschränkt sind existiert ein $R > 0$, so dass $p_i \in \bar{B}_R(p)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von $\bar{B}_R(p)$ hat $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt. Daraus folgt, dass (p_i) konvergiert.

zu c):

Sei $q \in \mathcal{M}$ beliebig und $R > 0$. Setze $r = R + d(p, q)$. Dann gilt $\bar{B}_R(q) \subset \bar{B}_r(p)$, denn für $x \in \bar{B}_R(q)$ gilt

$$d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) \leq R + d(p, q) = r.$$

Da $B_R(q)$ abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\bar{B}_r(p)$ ist folgt, dass $\bar{B}_R(q)$ kompakt ist.

zu d):

Sei $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\bar{B}_r(p)$. Zu zeigen: (p_i) hat eine konvergente Teilfolge. Wir nehmen an $(i) \Rightarrow (vi)$ gilt. Dann existiert eine minimale Geodätische c_i mit $c_i(0) = p$ und $c_i(t_i) = p_i$ für geeignete t_i und $i \in \mathbb{N}$. Wie immer nehmen wir o.B.d.A an, dass c_i nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann gilt:

$$t_i = L(c_i [0, t_i]) = d(p, p_i) \leq r$$

Weiterhin gilt, dass $\dot{c}_i(0)$ Einheitsvektoren in $T_p \mathcal{M}$ sind. Da $S^{n-1} \subset T_p \mathcal{M}$ kompakt ist, existiert eine Teilfolge so, dass $\dot{c}_i \rightarrow v \in S^{n-1} \subset T_p \mathcal{M}$. Ferner ist $t_i \in [0, r]$. Das heißt nach abermaligen Übergang zu einer Teilfolge konvergieren auch $t_i \rightarrow T \in [0, r]$. Setze $q := \exp_p(Tv)$. Dann gilt aber:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} p_i &= \lim_{i \rightarrow \infty} \exp_p(t_i \dot{c}_i(0)) \\ &= \exp_p(\lim_{i \rightarrow \infty} t_i \dot{c}_i(0)) \\ &= \exp_p(T \cdot v) \\ &= q \end{aligned}$$

zu e):

Sei $q \in \mathcal{M}$. Wir wissen: es existiert eine minimierende Geodätische von p nach q , falls $q \in B_{\text{injr}(p)}(p)$. O.B.d.A. sei $q \notin B_{\text{injr}(p)}(p)$ sonst sind wir fertig. Seien c_k C^1 Kurven von p nach q mit $L(c_k) = d(p, q) + \varepsilon_k$ mit $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Wähle nun $r_0 \in (0, \text{injr}(p))$. Dann gilt:

$$S_{r_0} := \exp_p(S^{n-1}(r_0))$$

ist kompakt. Bezeichne mit \dot{q}_k den ersten Schnittpunkt von c_k mit $S_{r_0}(p)$. Dann existiert eine konvergente Teilfolge von (q_n) . Diese sei wieder mit (q_k) bezeichnet und $\bar{q} = \lim q_k \in S_{r_0}(0)$. Es

gilt:

$$d(p, q) \leq d(p, q_k) + d(q_k, p) \leq d(p, q) + \varepsilon_k$$

Im Limes von $k \rightarrow \infty$ gilt dann:

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq d(p, \bar{q}) + d(\bar{q}, q) \leq d(p, q) \\ \Rightarrow d(p, q) &= d(p, q) + d(\bar{q}, q) \end{aligned}$$

Sei γ die eindeutige minimierende Geodätische die p und \bar{q} verbindet. Aufgrund von (i) lässt sich γ auf $[0, d(p, q)]$ fortsetzen.

Es bleibt zu zeigen: γ ist minimierende Geodätische von p nach q . Setze dazu

$$I := \{t \in [0, d(p, q)] \mid d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) = d(p, q)\}.$$

Zu zeigen: $t_0 = d(p, q)$, denn dann gilt:

$$\begin{aligned} d(\gamma(t_0), q) &= d(p, q) - d(\gamma(t_0), p) \\ &= d(p, q) - t_0 = 0 \end{aligned}$$

und das impliziert $\gamma(t_0) = q$ und γ ist minimierende Geodätische zwischen p und q .

Wir nehmen an, dass $t_0 < d(p, q)$. Setze $q' = \gamma(t_0)$. Wähle $r_1 \in (0, d(p, q) - t_0)$ so, dass $B_{r_1}(q')$ eine normale Koordinatenumgebung ist. Dann existiert ein $\bar{q}' \in \partial B_{r_1}(q')$ mit $d(q', q) = d(q', \bar{q}') + d(\bar{q}', q)$. Sei nun ein minimierende Geodätische mit $\gamma_1(t_0) = q'$ und $\gamma_1(t_0 + r_1) = \bar{q}'$. Dann folgt

$$\begin{aligned} d(p, q') &\leq d(p, q') + d(q, \bar{q}') \leq d(p, \bar{q}') \\ \Rightarrow d(p, \bar{q}') &= d(p, q') + d(q', \bar{q}') \end{aligned}$$

Die Kurve $\gamma|_{[0, t_0]} \cup \gamma_1|_{[t_0, t_0 + r_1]}$ ist kürzeste Verbindung. Daraus folgt $t_0 + r_1 \in I$. Dies ist ein Widerspruch. \square

5. Krümmung 2.0

5.1. Schnittkrümmung

Zur Erinnerung:

$$R(X, Y)Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]}Z \quad (5.1)$$

wobei D ein gegebener Zusammenhang auf \mathcal{M} ist.

Wir wollen nun Riemannsche Mannigfaltigkeiten betrachten. Sei (M, g) gegeben. Das bedeutet es existiert ein Levi-Civita-Zusammenhang auf \mathcal{M} .

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit hat der Krümmungstensor mehr Symmetrien und wir können einfacher geometrische Krümmungsbegriffe definieren.

5.1 Satz

Seien X, Y, U und $V \in V(\mathcal{M})$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
2. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
3. $g(R(X, Y)U, V) = -g(R(X, Y)V, U)$
4. $g(R(X, Y)U, V) = g(R(U, V)X, Y)$

Beweis:

Wir beginnen zunächst einmal mit dem Beweis der dritten Aussage:

$$g(R(X, Y)U, V) + g(R(X, Y)V, U) \stackrel{!}{=} 0$$

Dies ist analog zur Aussage:

$$g(\nabla_X(\nabla_Y U) - \nabla_Y(\nabla_X U) - \nabla_{[X, Y]}U, V) + g(\nabla_X(\nabla_Y V) - \nabla_Y(\nabla_X V) - \nabla_{[X, Y]}V, U) \stackrel{!}{=} 0$$

Wir benutzen: $0 = X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f)$ für $f = g(U, V)$.

Dann folgt direkt:

$$\begin{aligned} Y(g(U, V)) &= g(\nabla_Y U, V) + g(U, \nabla_Y V) \\ X(Y(g(U, V))) &= g(\nabla_X(\nabla_Y U), V) + g(\nabla_Y U, \nabla_X V) + g(\nabla_X U, \nabla_Y V) + g(U, \nabla_X(\nabla_Y V)) \\ [X, Y]g(U, V) &= g(\nabla_{[X, Y]}U, V) + g(U, \nabla_{[X, Y]}V) \end{aligned}$$

Das Einsetzen der Identitäten liefert uns schlussendlich:

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_X(\nabla_Y U), V) + g(\nabla_X(\nabla_Y V), U) + g(\nabla_Y U, \nabla_X V) + g(\nabla_X U, \nabla_Y V) \\ &\quad - g(\nabla_Y(\nabla_X U), V) - g(\nabla_Y(\nabla_X V), U) - g(\nabla_Y U, \nabla_X V) - g(\nabla_X U, \nabla_Y V) \\ &\quad - g(\nabla_{[X, Y]}U, V) - g(U, \nabla_{[X, Y]}V) \\ &= g(R(X, Y)U, V) + g(R(X, Y)V, U) \end{aligned}$$

Wir setzen den Beweis fort. Nun folgt die vierte Aussage:

$$\begin{aligned}
 a) \quad g(\mathbf{R}(X, Y)U, V) &\stackrel{(1)}{=} -g(\mathbf{R}(Y, X)U, V) \\
 &= g(\mathbf{R}(X, U)Y, V) + g(\mathbf{R}(U, Y)X, V) \\
 b) \quad g(\mathbf{R}(X, Y)U, V) &\stackrel{(3)}{=} -g(\mathbf{R}(X, Y)V, U) \\
 &\stackrel{(2)}{=} g(\mathbf{R}(Y, V)X, U) + g(\mathbf{R}(V, X)Y, U)
 \end{aligned}$$

Insgesamt liefern uns die Identitäten a) und b) zusammen:

$$\begin{aligned}
 2g(\mathbf{R}(X, Y)U, V) &= g(\mathbf{R}(X, U)Y, V) + g(\mathbf{R}(U, Y)X, V) + g(\mathbf{R}(Y, V)X, U) + g(\mathbf{R}(V, X)Y, U) \\
 &= g(\mathbf{R}(U, X)V, Y) + g(\mathbf{R}(X, V)U, Y) + g(\mathbf{R}(Y, U)V, X) + g(\mathbf{R}(V, Y)U, X) \\
 &= 2g(\mathbf{R}(U, V)X, Y) \quad \square
 \end{aligned}$$

Definition 5.3

Nachfolgend treffen wir die Konvention:

$$\mathbf{R}(X, Y, U, V) = g(\mathbf{R}(X, Y)U, V) \quad (5.2)$$

Wir setzen nun für alle $X, Y \in T_p\mathcal{M}$:

$$k(X, Y) = \mathbf{R}(X, Y, Y, X) \quad (5.3)$$

5.4 Satz

Der Krümmungstensor \mathbf{R} ist eindeutig durch k bestimmt.

Beweis:

Zunächst einmal betrachten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 3\mathbf{R}(X, Y)Z &= \mathbf{R}(X, Y+Z)(Y+Z) - \mathbf{R}(X, Y)Y - \mathbf{R}(X, Z)Z \\
 &\quad - \mathbf{R}(Y, X+Z)(X+Z) + \mathbf{R}(Y, X)X - \mathbf{R}(Y, Z)Z \quad (\dagger)
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den zweiten Teil:

$$2g(\mathbf{R}(X, Y)Y, Z) = k(X+Z, Y) - k(X, Y) - k(Z, Y) \quad (5.4)$$

Es folgt insgesamt mit Hilfe der ersten und zweiten Gleichung:

$$6g(\mathbf{R}(X, Y)Z, W) = 2g(\dagger, W) = 18 \text{ Terme in } k \quad (5.5)$$

□

Problem: k hängt von der Wahl von X und Y ab. Wir wollen ein Objekt definieren, welches lediglich von der von X und Y aufgespannten Ebene abhängt.

Sei $\tilde{X} = aX + bY$ sowie $\tilde{Y} = cX + dY$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 k(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= g(\mathbf{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Y}, \tilde{X}) \\
 &= (ad - bc)^2 g(\mathbf{R}(X, Y)Y, X) \\
 &= (ad - bc)^2 k(X, Y) \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Wir müssen k mit einer Größe skalieren, welche sich auf die gleiche Weise transformiert:

$$k_1(X, Y) = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 \quad (5.7)$$

Denn dann gilt nämlich:

$$k_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (ad - bc)^2 k_1(X, Y) \quad (5.8)$$

Definition 5.6 (Schnittkrümmung)

Sei $\sigma \subset T_p \mathcal{M}$ eine Ebene. Die Schnittkrümmung von ∇ ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{K}(\sigma) = \frac{k(X, Y)}{k_1(X, Y)} = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \quad (5.9)$$

für alle Basen (X, Y) von σ .

5.7 Satz

Die Schnittkrümmungen von allen Ebenen in $T_p \mathcal{M}$ bestimmen R_p . Analog liefert uns die Aussage, dass für bekanntes R alle \mathcal{K} bekannt sind und umgekehrt.

5.2. Ricci-Krümmung

Die Ricci-Krümmung ist eine wichtige "Vereinfachung" des Krümmungstensors.

Zunächst, als Vorbereitung, definieren wir den **Ricci-Tensor**:

$$\text{ric}_p(Y, Z) := \text{tr}(R(-, Y)Z) \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

das heißt bezüglich einer Orthonormalbasis von $T_p \mathcal{M}$, welche wir mit E_i bezeichnen gilt:

$$\text{ric}_p(Y, Z) = \sum_{i=1}^n g_p(R(E_i, Y)Z, E_i) \quad (5.11)$$

Definition 5.8 (Ricci-Krümmung)

Für einen Vektor $Y \in T_p \mathcal{M}$ ist die **Ricci-Krümmung in Richtung Y** definiert als:

$$\text{Ricci}(Y) = \frac{\text{ric}_p(Y, Y)}{g_p(Y, Y)} \quad (5.12)$$

Durch Anwendung der Bianchi-Identität erhalten wir die nützliche Eigenschaft:

$$\text{ric}(X, Y) = \text{ric}(Y, X) \quad (5.13)$$

5.3. Skalarkrümmung

Die Kenntnis des Riemann-Tensors R liefert wie bereits zuvor erwähnt alle Schnittkrümmungen \mathcal{K} und umgekehrt. Aus den \mathcal{K} erhalten wir dann die Ricci-Krümmung und schließlich die Skalarkrümmung Scal .

Diese ist eine Abbildung $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, welche wir wie folgt definieren:

$$\text{Scal}(p) = s(p) = \text{tr}(\text{Ricci}_p) \quad (5.14)$$

Also erhalten wir bezüglich einer Orthonormalbasis E_i von $T_p\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}\text{Scal}(p) &= \sum_{i,j=1}^n g(\mathbf{R}(E_i, E_j)E_j, E_i) \\ &= \sum_i \text{Ricci}(E_i)\end{aligned}\quad (5.15)$$

5.4. Satz von Bonnet-Myers

Unser nächstes Ziel wird es sein den Satz von Bonnet-Myers zu beweisen. Als Vorbereitung hierfür benötigen wir die zweite Variation der Energie.

Zur Erinnerung: Ist c_s eine glatte Variation von $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ mit Variationsfeld ξ , dann ist die erste Variation der Energie, wie folgt gegeben:

$$\left. \frac{d}{ds} E(c_s) \right|_{s=0} = - \int_a^b \langle \xi, D_t \dot{c} \rangle dt + \langle \xi, \dot{c} \rangle \Big|_a^b \quad (5.16)$$

5.9 Satz (Zweite Variation der Energie)

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ eine Geodätische und c_s eine Variation von c , mit Variationsfeld ξ . Dann gilt:

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} E(c_s) \right|_{s=0} = \int_a^b \langle D_t \frac{\partial c_s}{\partial s}, \frac{\partial c_s}{\partial s} \rangle dt \quad (5.17)$$

Beweis:

Wir wissen bereits:

$$\left. \frac{d}{ds} E(c_s) \right|_{s=0} = \int_a^b \langle D_t \frac{\partial c_s}{\partial s}, \frac{\partial c_s}{\partial s} \rangle dt$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^2}{ds^2} E(c_s) \right|_{s=0} &= \int_a^b \langle D_s D_t \frac{\partial c_s}{\partial s}, \frac{\partial c_s}{\partial s} \rangle + \langle D_t \xi, D \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0} \rangle dt \\ &= \int_a^b \underbrace{\langle D_t D_s \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \rangle}_{*} + \int_a^b \langle \mathbf{R}(\xi, \dot{c})\xi, \dot{c} \rangle + \int_a^b \langle D_t \xi, D_t \xi \rangle dt\end{aligned}$$

Betrachte *:

$$\begin{aligned}* &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle D_s \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \rangle - \underbrace{\langle D_s \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, D_t \dot{c} \rangle}_{=0, \text{ da } c \text{ Geodätische}} \right) dt \\ &= \left. \langle D_s \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \rangle \right|_a^b \\ &= 0\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, da wir Variation mit festen Endpunkten betrachten. \square

Definition 5.11 (Durchmesser)

Sei \mathcal{M} eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\text{diam}(\mathcal{M}) := \sup \{ d(p, q) | p, q \in \mathcal{M} \} \in (0, \infty] \quad (5.18)$$

der Durchmesser von \mathcal{M} .

5.12 Satz (Satz von Bonnet-Myers)

Sei \mathcal{M} eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ferner sei $\kappa > 0$ so, dass $\text{ric} \leq \kappa(n-1)g$ ist (Das heißt $\text{ric}(\xi, \eta) \geq \kappa(n-1)g(\xi, \eta)$). Dann ist \mathcal{M} kompakt und es gilt

$$\text{diam}(\mathcal{M}) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \quad (5.19)$$

Beweis:

Beweis von Satz 5.12 Seien $p, q \in \mathcal{M}$ mit $p \neq q$. Da \mathcal{M} Vollständig ist, liefert der Satz von Hopf-Rinow die Existenz einer minimalen nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $\gamma : [0, s] \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(s) = q$. Sei $e \in T_p\mathcal{M}$ mit $e \perp \dot{\gamma}(0)$ und $\|e\| = 1$. Sei $e(t)$ das längs γ parallel fortgesetzte Vektorfeld. Setze $\xi(t) := \sin(\frac{\pi}{\delta}t)e(t)$. Ferner sei $\gamma_s(t)$ eine Variation von γ mit festen Endpunkten und Variationsfeld $\xi(t)$ (z.B. $\gamma_s(t) = \exp(s\xi(t))$). Da γ eine minimale Geodätische ist (nach Konstruktion) gilt:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(\gamma_s) = 0$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \\ &= \int_0^\delta \left(\|D_t \xi\|^2 - \langle R(\xi, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, \xi \rangle \right) dt \\ &= \int_0^\delta \left(\left\| \frac{\pi}{\delta} \cos\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) e(t) \right\|^2 - \sin^2\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) \langle R(e, \dot{\gamma})e \rangle \right) dt \\ &= \int_0^\delta \left(\frac{\pi^2}{\delta^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) k(e, \dot{\gamma}) \right) dt \end{aligned}$$

Wenn e_1, \dots, e_{n-1} eine Orthonormalbasis von $\dot{\gamma}(0)^\perp$ ist, so liefert obige Gleichung mit $e = e_j$ nach Summation über j :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\delta \left((n-1) \frac{\pi^2}{\delta^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) \text{ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \right) dt \\ &\leq \int_0^\delta \left((n-1) \frac{\pi^2}{\delta^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{\delta}t\right) (n-1)k \right) dt \\ &= (n-1) \frac{\pi^2 - k\delta^2}{2\delta} \end{aligned}$$

Durch umformen erhält man

$$\delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \Rightarrow \text{diam } \mathcal{M} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \quad (5.20)$$

Da die Mannigfaltigkeit vollständig und beschränkt ist folgt, dass sie kompakt ist. \square

Bemerkung: Aus $k \geq \kappa$ folgt $\text{ric} \geq \kappa(n-1)g$, daher gilt die Aussage von Bonnet-Myers auch für $k \geq \kappa$.

5.5. Jacobi-Felder

Definition 5.15 (Geodätische Variation)

Eine Variation von Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ heißt geodätische Variation, falls:

$$t \mapsto c_s(t) := c(s, t)$$

eine Geodätische ist für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Sei $\xi(t) = \frac{\partial c(0, t)}{\partial s}$ das zugehörige Variationsfeld, dann gilt:

$$\begin{aligned} D_t^2 \xi(t) &= D_t D_t \frac{\partial}{\partial s} c(s, t) \Big|_{s=0} \\ &= D_t D_s \frac{\partial}{\partial t} c(s, t) \Big|_{s=0} \\ &= \underbrace{D_s D_t \frac{\partial}{\partial t} c(s, t) \Big|_{s=0}}_{=0, \text{ da Geodätische Variation}} + R \left(\frac{\partial c(0, t)}{\partial t}, \frac{\partial c(0, t)}{\partial s} \right) \frac{\partial c(0, t)}{\partial t} \\ &= R(\dot{c}_0(t), \xi(t)) \dot{c}_0(t) \end{aligned}$$

Definition 5.16 (Jacobi-Gleichung)

Die Gleichung

$$D_t^2 \xi = R(\dot{c}_0, \xi) \dot{c}_0 \tag{5.21}$$

heißt **Jacobi-Gleichung** und Lösungen davon heißen **Jacobi-Felder**. Mit anderen Worten: Variationsfelder von geodätischen Variationen sind Jacobi-Felder.

5.17 Satz

Sei $c_0 : I \rightarrow \mathcal{M}$ eine Geodätische und $t_0 \in I$. Dann gilt für alle $\xi, \eta \in T_{c(t_0)} \mathcal{M}$ existiert genau ein Jacobi-Feld J längs c mit $J(t_0) = \xi$ und $D_t J(t_0) = \eta$

Beweis: (Beweis Satz 5.17)

Sei $e_i(t_0)$ $i \in \{1, m\}$ eine Orthonormalbasis von $T_{c(t_0)} \mathcal{M}$. Setze diese mittels Parallelverschiebung längs c zu $e_i(t)$ fort. Schreibe

$$J(t) = \sum_{j=1}^n v^j(t) e_j(t)$$

Dann gilt

$$D_t^2 J(t) = \sum_{j=1}^n \ddot{v}^j(t) e_j(t)$$

Ferner gilt:

$$R(\dot{c}(t), e_j(t)) \dot{c}(t) = \sum_{k=1}^n a_j^k(t) e_k(t)$$

Da J Jacobifeld gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \ddot{v}^j(t) e_j(t) &= \sum_{j,k=1}^n a_j^k v^j e_k \\ \Rightarrow \ddot{v}^i &= \sum_j a_j^i v^j\end{aligned}$$

Dies ist ein lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Daraus folgt es existieren Lösungen, welche eindeutig durch Anfangswert und Anfangsgeschwindigkeit gegeben sind. \square

Beispiel 5.19

- \mathcal{M} flach, d.h. $R = 0$. Dann gilt:

$$D_t^2 J = 0$$

Jacobifelder sind dann von der Form:

$$J = \xi(t) + t\eta(t)$$

wobei ξ und η parallel längs c sind.

- c Geodätische, dann ist $J(t) = (a + bt)\dot{c}(t)$ ein Jacobifeld längs c , da $D_t^2 J(t) = 0$

$$\Rightarrow R(\dot{c}, J)\dot{c} = (a + bt)R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0$$

5.20 Lemma

Sei $J : I \rightarrow T\mathcal{M}$ ein Jacobifeld längs c (Geodätische). Dann gilt $J(t_0) \perp \dot{c}(t_0)$ und $D_t J(t_0) \perp \dot{c}(t_0)$. Daraus folgt $J(t) \perp \dot{c}(t)$ und $D_t J(t) \perp \dot{c}(t) \forall t \in I$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle D_t J, \dot{c} \rangle &= \langle D_t^2 J, \dot{c} \rangle + \underbrace{\langle D_t J, D_t \dot{c} \rangle}_{=0} \\ &= \langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, \dot{c} \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\langle D_t J, \dot{c} \rangle = 0$$

Da $\frac{d}{dt} \langle J, \dot{c} \rangle = \langle D_t J, \dot{c} \rangle = 0$ folgt auch, dass $\langle J, \dot{c} \rangle = 0$. \square

Definition 5.22 (Verallgemeinerte Sinus- und Kosinusfunktion)

Für $k \in \mathbb{R}$, dann definieren wir die verallgemeinerte Sinusfunktion bzw Kosinusfunktion durch:

$$s_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}t) & k > 0 \\ t & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sinh(\sqrt{|k|}t) & k < 0 \end{cases}$$

$$c_k(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{k}t) & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ \cosh(\sqrt{k}t) & k < 0 \end{cases}$$

Diese Funktionen haben die folgenden Eigenschaften:

- $ks_k^2 + c_k^2 = 1$
- $s'_k = c_k$
- $c'_k = -ks_k$
- $s_k(0) = 0$
- $c_k(0) = 1$

Beispiel 5.23

Sei (\mathcal{M}, g) mit konstanter Schnittkrümmung $k = \kappa$, c eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische und ξ ein paralleles Vektorfeld längs c mit $\xi \perp c$. Setze $J(t) = (as_k(t) + bc_k(t))\xi(t)$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} D_t^2 J(t) &= (a\ddot{s}_k(t) + b\ddot{c}_k(t))\xi(t) \\ &= (-aks_k(t) - bkc_k(t))\xi(t) \\ &= -kJ(t) \end{aligned}$$

Für $R(\alpha, \eta)\chi = k(\langle \eta, \chi \rangle \alpha - \langle \alpha, \chi \rangle \eta)$ folgt:

$$\begin{aligned} R(\dot{c}, J)\dot{c} &= (as_k(t) + bc_k(t))R(\dot{c}, \xi)\dot{c} \\ &= (as_k + bc_k)k(\underbrace{\langle \xi, \dot{c} \rangle}_{=0}\dot{c} - \underbrace{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle}_{=1}\xi) \\ &= -k(as_k + bc_k)\xi \\ &= -kJ \end{aligned}$$

5.24 Lemma

Sei $\text{Jac}_\gamma \mathcal{M}$ der Vektorraum der Jacobifelder entlang γ , wobei \mathcal{M} eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Dann gilt:

- a) $\dim(\text{Jac}_\gamma \mathcal{M}) = 2n$
- b) $\{J \in \text{Jac}_\gamma \mathcal{M} | J \perp \gamma'\}$ ist $(2n - 2)$ -dimensionaler Vektorraum
- c) $\{J \in \text{Jac}_\gamma \mathcal{M} | J \perp \gamma', J(0) = 0\}$ ist $(n - 1)$ -dimensionaler Vektorraum

Ferner gilt: $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = at + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis:

J ist eindeutig durch Anfangsbedingungen $(J(0), J'(0)) \in \mathbb{R}^{2n}$ bestimmt.

Behauptung: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \langle J(t), \gamma'(t) \rangle$ ist linear.

Beweis der Behauptung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle J(t), \gamma'(t) \rangle &= \langle D_t J(t), \gamma'(t) \rangle + \underbrace{\langle J(t), D_t \gamma'(t) \rangle}_{=0} \\ &= \langle J'(t), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

Wobei wir $J'(t) := D_t J(t)$ definieren.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \langle J(t), \gamma'(t) \rangle &= \langle J''(t), \gamma'(t) \rangle \\ &= -\langle R(J, \gamma') \gamma', \gamma' \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

In der vorletzten Gleichung wurde die Jacobi-Gleichung verwendet. Daraus folgt, dass $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = at + b$ gilt, wobei $b = \langle J(0), \gamma'(0) \rangle$ und $a = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle$.

zu b)

Aus $\langle J, \gamma' \rangle = 0$ folgt $a = b = 0$. Das heißt die Bedingung beschreibt einen Untervektorraum der Kodimension 2 im $2n$ -dimensionalen Raum.

zu c)

Wenn zusätzlich $J(0) = 0$ gilt folgt $b = 0$. Daher hat man einen Untervektorraum der Kodimension 1 im n -dimensionalen Raum der Anfangsbedingung $J'(0)$. \square

5.26 Lemma

Sei γ eine Geodätische $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathcal{M}$. Sei außerdem J ein Jacobifeld entlang γ mit $J(0) = 0$, $J'(0) = w \in T_p \mathcal{M}$. Dann gilt:

$$J(t) = t \, d \left(\exp_p \right)_{tv} (w)$$

5.27 Satz

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ eine Geodätische. Sei ξ ein glattes Vektorfeld längs γ . Dann gilt ξ ist ein Jacobifeld $\leftrightarrow \xi$ ist Variationsfeld einer Geodätischen Variation.

Beweis:

" \Leftarrow " bereits bewiesen.

" \Rightarrow "

Wähle $t_0 \in I = [a, b]$ und eine glatte Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ mit $c(0) = \gamma(t_0)$ und $\dot{c}(0) = \xi(t_0)$. Sei η_1/η_2 das parallele Vektorfeld längs c/γ mit $\eta_1(0) = \gamma'(t_0)$ bzw. $\eta_2(0) = D_t \xi(t_0)$. Setze $\eta(s) = \eta_1(s) + s\eta_2(s)$ und $\gamma(s, t) = \exp_{c(s)}(\eta(s)(t - t_0))$.

Bemerkung: $\gamma(s, t)$ ist für $\|s\|$ klein genug für alle t in $[a, b]$ definiert.

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \gamma(0, t) &= \exp_{c(0)}(\eta_1(0)(t - t_0)) \\ &= \exp_{c(0)}(\dot{\gamma}(t_0)(t - t_0)) \\ &= \exp_{\gamma(t_0)}(\dot{\gamma}(t_0)(t - t_0)) \\ &= \gamma(t) \end{aligned}$$

Sei nun $J(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}$, dann ist J ein Jacobifeld. Zeige nun:

- $J(t_0) = \xi(t_0)$
- $J'(t_0) = D_t \xi(t_0)$

Erster Teil:

$$\begin{aligned} J(t_0) - \frac{\partial \gamma}{\partial s} &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_{c(s)}(0) \\ &= \dot{c}(0) \\ &= \xi(t_0) \end{aligned}$$

Zweiter Teil:

$$\begin{aligned}
 J'(t_0) &= D_t \frac{\partial \gamma}{\partial s} \\
 &= D_s \frac{\partial \gamma}{\partial t} \\
 &= D_s \eta(0) \\
 &= \eta_2(0) \\
 &= D_t \xi(t_0)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, nun $\xi = J$ und daher ist ξ das Variationsfeld einer geodätischen Variation. \square

Definition 5.30 (Konjugierte Punkte)

Sei $p \in \mathcal{M}$ $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathcal{M}$ Geodätische mit $\gamma(0) = p$. Ferner sei $t_0 \in [0, a]$. Dann heißt $\gamma(t_0)$ konjugiert zu p entlang γ , falls ein Jacobifeld J entlang γ existiert mit $J \neq 0$ und $J(0) = J(t_0) = 0$.

Fakt: Es gilt für das J aus der Definition $J \perp \gamma'$.

Beweis:

$$\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = at + b$$

$$J(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$J(t_0) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow J \perp \gamma \quad \square$$

5.32 Lemma

Sei $p \in \mathcal{M}$ und $v \in T_p \mathcal{M}$. Dann gilt

$$(\mathrm{d} \exp_p)_{tv} : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{\gamma_v(t)} \mathcal{M}$$

ist genau dann ausgeartet, wenn p und $\gamma_v(t)$ zueinander entlang γ_v konjugiert sind.

Beweis:

Wir wissen, dass $J_w(t) = t(\mathrm{d} \exp_p)_{tv}(w)$ ist ein Jacobifeld längs $\gamma_v(t)$ mit $J_w(0) = 0$ und $J'_w(0) = w$. Damit gilt:

$$(\mathrm{d} \exp_p)_{tv} \text{ ist ausgeartet} \Leftrightarrow w \in T_p \mathcal{M}, w \neq 0, \text{ dann ist } (\mathrm{d} \exp_p)|_{tv} w = 0$$

$$\Leftrightarrow J_w(t) = 0 \text{ und } J_w(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow p \text{ und } \gamma_v(t) \text{ sind konjugiert zueinander.} \quad \square$$

Beispiel 5.34

1. Auf $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$ existieren keine konjugierten Punkte.

$J \in V_{\gamma_v}(\mathbb{R}^n)$ mit $J(0) = 0$ und $J'(0) = w \perp v$ ist gegeben durch $J(t) = tW(t)$ wobei $W(t)$ durch Parallelverschiebung aus $w \neq 0$ erhalten wird.

$$\Rightarrow J(t) \neq 0, \text{ für } t \neq 0$$

2. Seien $x, y \in S^n$, dann sind x und y konjugiert zueinander genau dann, wenn $x = -y$ gilt.

Sei $k = 1$, J mit $J(0) = 0$ und $J'(0) = w \perp v$ ist gegeben durch:

$$J(t) = \sin(t)W(t)$$

$W(t)$ Parallelverschiebung entlang γ_v von $w \in T_p \mathcal{M}$.

$$\Rightarrow J(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pi n, \text{ wobei } n \text{ eine natürliche Zahl ist.}$$

Ziel: Nutze Jacobifelder um Aussagen über den Verlauf von Geodätischen zu erhalten.

5.35 Lemma

Sei (\mathcal{M}, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathcal{M}$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Sei ferner $w \in T_p\mathcal{M}$ mit

- $\langle w, w \rangle = 1$
- $\langle v, v \rangle = 1$
- $\langle v, w \rangle = 0$

Sei J das Jacobifeld längs γ mit $J(0) = 0$ und $J'(0) = w$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|J(t)\| &= \sqrt{\langle J(t), J(t) \rangle} \\ &= t - \frac{1}{6} \underbrace{k_p}_{\in \text{span}(v, w)} t^3 + \mathcal{O}(t^5)\end{aligned}$$

Beweis:

Betrachte Taylorentwicklung von

$$f(t) = \langle J(t), J(t) \rangle$$

im Punkt $t = 0$.

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)t^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)t^4 + \mathcal{O}(t^5)$$

- $f(0) = 0$
- $f'(t) = 2\langle J'(t), J(t) \rangle$
- $f'(0) = 0$
- $f''(t) = 2\langle J''(t), J(t) \rangle + 2\langle J'(t), J'(t) \rangle$
- $f''(0) = 2\langle J'(0), J'(0) \rangle = 2\langle w, w \rangle = 2$
- $f^{(3)}(t) = 2\langle J^{(3)}(t), J(t) \rangle + 2\langle J''(t), J'(t) \rangle + 2\langle J'(t), J''(t) \rangle + 2\langle J', J'' \rangle$
- $f^{(3)}(0) = 6\langle J'', J' \rangle = -6\langle R(J(0), \gamma'(0))\gamma'(0), J'(0) \rangle = 0$
- $f^{(4)}(0) = \gamma\langle J^{(3)}, J'(0) \rangle + 6\langle J''(0), J''(0) \rangle$

Es gilt $f^{(4)}(0) = -\gamma k_{\text{span}(v, w)}(p)$. Man erhält insgesamt:

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}k_{\text{span}(v, w)}(p)t^4 + \mathcal{O}(t^6) \quad (5.22)$$

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6}k_{\text{span}(v, w)}(p)t^3 + \mathcal{O}(t^5) \quad (5.23)$$

$$(5.24)$$

□

Folgerung:

- Für $R = 0$ folgt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k > 0$. Somit gilt: $\|J(t)\| = t$.
- Sei $\underbrace{k_{\text{span}(v, w)}(p)}_{=:c} < 0$, dann folgt $\|J(t)\| = t + |c|t^3$
- Sei $c > 0$, dann hat $\|J(t)\| = t - |c|t^3$ ein lokales Maximum ("Geodätische laufen zusammen")

6. Elementare Differentialgeometrie

6.1. Raumkurven

Wir wollen uns in diesem Kapitel genauer mit elementaren Konzepten der Differentialgeometrie befassen. Wir beginnen zunächst einmal mit der Theorie der Raumkurven und deren Eigenschaften. Wir werden sehen, dass die Konstruktion von Kurven bei bekannter Krümmung und Torsion möglich ist. Zuerst wollen wir die wichtigsten Definitionen die grundlegend für das Verständnis der Theorie der Raumkurven sind einführen.

Definition 6.1

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, also $\|T(s)\| = \|\dot{c}(s)\| = 1 \forall s \in I$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Die Krümmung von c ist $\mathcal{K} = \|\dot{T}(s)\| = \|\ddot{c}(s)\|$
2. Falls $\mathcal{K}(s) \neq 0$ definieren wir den Hauptnormalenvektor \mathcal{N} sowie den Binormalenvektor \mathcal{B} wie folgt:

$$\mathcal{N}(s) = \frac{\dot{T}(s)}{\|\dot{T}(s)\|} = \frac{1}{\mathcal{K}(s)} \cdot \dot{T}(s) \quad (6.1)$$

$$\mathcal{B}(s) = T(s) \times \mathcal{N}(s) \quad (6.2)$$

Bemerkung: Das begleitende Dreibein ist nur an Punkten $s \in I$ mit $\mathcal{K}(s) \neq 0$ definiert!

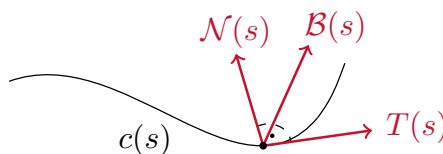


Abbildung 6.1.: Visualisierung des begleitenden Dreibeins

Wir präsentieren nachfolgend einige fundamentale **Fakten**:

1. $\mathcal{N} \perp T$ und $\dot{T} \perp T$, analog zum 2D-Fall.
2. $\mathcal{B} \perp T$ und $\mathcal{B} \perp \mathcal{N}$. Außerdem sind die Vektoren normiert: $\|T\| = \|\mathcal{N}\| = \|\mathcal{B}\| = 1$.
3. Das Tripel $(T(s), \mathcal{N}(s), \mathcal{B}(s))$ bildet eine positiv orientierte Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 .
4. $\mathcal{K} \geq 0$.
Liegt die Kurve c beispielsweise in der x - y -Ebene, dann ist \mathcal{K} der Betrag der 2D-Krümmung. Demnach ist \mathcal{K} ein Maß dafür, ob c in einer Ebene liegt.

Definition 6.3 (Torsion oder Verwindung)

Wir definieren die Torsion oder auch Verwindung einer Raumkurve wie folgt:

$$\tau = \langle \dot{\mathcal{N}}(s), \mathcal{B}(s) \rangle \quad (6.3)$$

- Die Torsion τ ist die Größe des Anteils von $\dot{\mathcal{N}}(s)$, welcher aus der T - \mathcal{N} -Ebene herausragt.
- Falls c in der T - \mathcal{N} -Ebene verläuft, gilt $\tau = 0$ und umgekehrt.

6.4 Satz (Frenet-Gleichungen)

Die zentralen Gleichungen der Theorie der Raumkurven, die Frenet-Gleichungen haben die folgende Form:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K} & 0 \\ -\mathcal{K} & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Hier werden T, \mathcal{N} und \mathcal{B} als Zahlen ausgeschrieben.

Beweis:

1. Zeile:

$$\dot{T} = \mathcal{K}\mathcal{N} \quad \text{aus der Definition von } \mathcal{N}$$

2. Zeile:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \langle \mathcal{N}, \mathcal{N} \rangle = 2 \langle \dot{\mathcal{N}}, \mathcal{N} \rangle \\ 0 &= \frac{d}{ds} \langle \mathcal{N}, T \rangle = \langle \dot{\mathcal{N}}, T \rangle + \langle \mathcal{N}, \dot{T} \rangle \\ \Rightarrow \langle \dot{\mathcal{N}}, T \rangle &= -\langle \mathcal{N}, \dot{T} \rangle = \langle \mathcal{N}, \mathcal{K}\mathcal{N} \rangle = -\mathcal{K} \\ \langle \dot{\mathcal{N}}, \mathcal{B} \rangle &= \tau \end{aligned}$$

3. Zeile:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle \mathcal{B}, T \rangle &= \frac{d}{ds} \langle \mathcal{B}, \mathcal{B} \rangle = \frac{d}{ds} \langle \mathcal{B}, \mathcal{N} \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle \dot{\mathcal{B}}, T \rangle &= -\langle \mathcal{B}, \dot{T} \rangle = -\langle \mathcal{B}, \mathcal{K}\mathcal{N} \rangle = 0 \\ \langle \dot{\mathcal{B}}, \mathcal{N} \rangle &= -\langle \mathcal{B}, \dot{\mathcal{N}} \rangle = -\tau \end{aligned}$$

□

Auch hier erlauben wir uns einige **Bemerkungen:**

- \mathcal{B} ist senkrecht zur Schmiegeebene $\text{span}\{\mathcal{N}, T\}$ an c .
- Taylorentwicklung von c um $s_0 \in I$ liefert:

$$\begin{aligned} c(s) &= c(s_0) + (s - s_0)\dot{c}(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\ddot{c}(s_0) + \mathcal{O}((s - s_0)^3) \\ &= c(s_0) + (s - s_0)T(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\mathcal{K}(s_0)\mathcal{N}(s_0) + \mathcal{O}((s - s_0)^3) \end{aligned}$$

- c berührt die Tangente in s_0 in 1. Ordnung, \mathcal{K} beschreibt die Änderungsrate des Tangentialvektors.
- c berührt die Schmiegeebene in s_0 in 2. Ordnung, τ beschreibt die Änderungsrate der Schmiegeebene.

6.6 Satz (Hauptsatz der Kurventheorie)

Seien $b > 0$, $\mathcal{K} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{K}(s) > 0 \forall s \in [0, b]$ und $c_0, T_0, \mathcal{N}_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $\|T_0\| = \|\mathcal{N}_0\| = 1$ sowie $T_0 \perp \mathcal{N}_0$ gegeben.

Dann existiert genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Krümmung \mathcal{K} , Torsion τ und $c(0) = \xi_0$, $\dot{c}(0) = T_0$ sowie $\ddot{c}(0) = \mathcal{K}(0)\mathcal{N}_0$.

Beweis:

Sei

$$K(s) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}(s) & 0 \\ -\mathcal{K}(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Dann existiert genau eine differenzierbare Funktion $F : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\dot{F} = K$ sowie

$$F(0) = \begin{pmatrix} T_0 \\ \mathcal{N}_0 \\ T_0 \times \mathcal{N}_0 \end{pmatrix}$$

Dies folgt aus dem Existenz- und Eindeigkeitssatz von Lösungen linearer Differentialgleichungen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F F^\top &= \dot{F}(s) F(s)^\top + F(s) \dot{F}(s)^\top \\ &= K(s) F(s) F(s)^\top + F(s) F(s)^\top K(s)^\top \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit $X(s) = F(s) F(s)^\top$ die eindeutige Lösung der Differentialgleichung:

$$\dot{X} = KX + XK^\top$$

mit $X(0) = F(0) F(0)^\top = \mathbb{1}$.

Aber $X(s) = \mathbb{1}$ ist auch eine Lösung von $\dot{X} = KX + XK^\top$, weil $K + K^\top = 0$.

Daraus folgt: $\mathbb{1} = F(s) F(s)^\top$. Außerdem wissen wir dadurch: $\det(F(s)) \in \{-1, +1\}$. Für die Stetigkeit benutzen wir

$$\det(F(s)) = \det(F(0)) = \mathbb{1} \Rightarrow F(s) \in \text{SO}(3) \quad \forall s \in [0, b]$$

Seien T, \mathcal{N} und \mathcal{B} die Komponenten von F , also $F = (T, \mathcal{N}, \mathcal{B})^\top$. Sei $c(s) = c_0 + \int_0^s T(t) dt$. Sei $(T', \mathcal{N}', \mathcal{B}')$ das begleitende Dreibein von c .

- $T'(s) = \dot{c}(s) = T(s)$.
- $\mathcal{K}(s) = \left\| \dot{T}'(s) \right\| = \left\| \dot{T}(s) \right\| = \|\mathcal{K}(s)\mathcal{N}(s)\| = |\mathcal{K}(s)| = \mathcal{K}(s)$.
- $\mathcal{N}'(s) = \frac{1}{\mathcal{K}'(s)} \cdot \dot{T}'(s) = \frac{1}{\mathcal{K}'(s)} \cdot T(s) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\mathcal{K}(s)} \mathcal{K}(s) \mathcal{N}(s) = \mathcal{N}(s)$.

- $\mathcal{B}'(s) = T'(s) \times \mathcal{N}'(s) = T(s) \times \mathcal{N}(s)$, weil $(T, \mathcal{N}, \mathcal{B})$ positiv orientierte ONB ist.
- $\tau'(s) = \langle \dot{\mathcal{N}}'(s), \mathcal{B}'(s) \rangle = \langle \dot{\mathcal{N}}(s), \mathcal{B}(s) \rangle = \langle -\mathcal{K}(s)T(s) + \tau(s)\mathcal{B}(s), \mathcal{B}(s) \rangle = \tau(s)$
- $c(0) = c_0, \dot{c}(0) = T(0), \ddot{c}(0) = \dot{T}'(0) = \dot{T}(0) = \mathcal{K}(0)\mathcal{N}(0) = \mathcal{K}(0)\mathcal{N}_0$

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen:

Die Kurve c ist eindeutig bestimmt durch c_0 und T und T sowie \mathcal{N} und \mathcal{B} sind eindeutig durch $T_0, \mathcal{N}_0, \mathcal{B}_0$ und die Frenet-Gleichungen festgelegt. \square

Wir wollen die neuen Konzepte auf **höhere Dimensionen** verallgemeinern:

Definition 6.8 (Frenet-Kurven)

Eine Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Frenet-Kurve, wenn $\dot{c}, \ddot{c}, c^{(3)} \dots c^{(n-1)}$ an jedem Punkt in I linear unabhängig sind.

In drei Dimensionen bedeutet das, dass für alle Frenet-Kurven die Krümmung $\mathcal{K} \neq 0 \quad \forall s \in I$ ist. Das begleitende n -Bein $e_1, \dots, e_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ erhält man mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens für $\dot{c}, \ddot{c}, c^{(3)} \dots c^{(n-1)}$:

$$e_i = \frac{c^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \langle c^{(i)}, e_j \rangle e_j}{\left\| c^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \langle c^{(i)}, e_j \rangle e_j \right\|} \quad (6.5)$$

e_n ist der eindeutige Vektor der $e_1(s), \dots, e_n(s)$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis macht.

Die Frenet-Krümmungen \mathcal{K}_i lauten:

$$\mathcal{K}_i(s) = \langle e_1(s), \dots, e_{i+1}(s) \rangle \quad (6.6)$$

Es gelten die n -dimensionalen Frenet-Gleichungen:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Es gilt außerdem der Hauptsatz der Kurventheorie:

Gegeben $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{n-1} > 0$ sowie die positiv orientierte Orthonormalbasis (e_1^0, \dots, e_n^0) .

Dann existiert genau eine Frenet-Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit zugehörigen Frenet-Krümmungen $(\mathcal{K}_i)_{i=1, \dots, n-1}$ und dem Frenet- n -Bein (e_1^0, \dots, e_n^0) an der Stelle $0 \in I$.

6.2. Flächen

Definition 6.9

Sei $n \leq N$ mit $n, N \in \mathbb{N}$. $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ heißt n -dim Untermannigfaltigkeit, falls $\forall p \in \mathcal{M} \exists U \subset \mathcal{M}$ offen und $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ Homöomorphismus, so dass

- $\varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt
- $D\varphi|_{\tilde{u}}$ ist injektiv $\forall \tilde{u} \in \tilde{U}$

Die Abbildung $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ heißt *Parametrisierung*.

Achtung: φ^{-1} sind Karten und nicht φ !

Definition 6.10

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dim Untermannigfaltigkeit mit $p \in \mathcal{M}$. Dann ist der Tangentialraum definiert als:

$$T_p\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \text{ Kurve } \gamma : I \rightarrow \mathcal{M}, \dot{\gamma}(0) = x\} \quad (6.8)$$

Wobei $I \subset \mathbb{R}$ offen ist und $0 \in I$.

6.11 Satz

1. $T_p\mathcal{M}$ ist n -dim Untervektorraum von \mathbb{R}^n

2. Sei $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ eine lokale Parametrisierung, $p \in \mathcal{M}$ $\tilde{u}_0 \in \tilde{U}$, so dass $\varphi(\tilde{u}_0) = p$

Dann gilt:

$T_p\mathcal{M} = \text{Bild } D\varphi|_{\tilde{u}_0}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{u}^1}|_{\tilde{u}_0}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{u}^n}|_{\tilde{u}_0}$ bilden Basis von $T_p\mathcal{M}$

Definition 6.12 (Erste Fundamentalform)

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ n -dim Untermannigfaltigkeit mit $p \in \mathcal{M}$. Dann ist die erste Fundamentalform:

$$g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.9)$$

definiert durch $g_p(x_p, y_p) = \langle x_p, y_p \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Beispiel 6.13

a) Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta)$$

$$\text{Somit erhalt man } g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Nun beschäftigen wir uns speziell mit Flächen. Hierbei interessiert uns besonders die Krümmung von Flächen.

Definition 6.14 (Einheitsnormalenvektorfeld)

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dim Untermannigfaltigkeit (Also eine Fläche) und $p \in \mathcal{M}$. $N(p) \in \mathbb{R}^3$ heißt Einheitsnormalenvektor zu \mathcal{M} in p genau dann, wenn $\|N(p)\| = 1$ und $N(p) \perp T_p\mathcal{M}$ ist.

Das Einheitsnormalenvektorfeld ist die glatte Abbildung $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $N(p)$ Einheitsvektor fur alle p .

Bemerkung: • Es existieren immer genau zwei Einheitsvektorfelder. Wenn eine Parametrisierung φ gegeben ist, dann sind die Einheitsnormalenvektorfelder wie folgt gegeben:

$$N(p) = \pm \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right\|} \quad (6.10)$$

- Es muss nicht immer ein Einheitsnormalenvektorfeld geben (siehe Möbiusband)

Definition 6.16

\mathcal{M} heißt orientierbar, falls ein Einheitsnormalenvektorfeld existiert.

Die Weingartenabbildung (shape operator) ist ein Maß für die Krümmung. Sie ist die Änderungsgeschwindigkeit des Tangentialraumes. Der Tangentialraum wird durch Einheitsvektoren beschrieben. Mit anderen Worten wir wollen wissen: wie ändert sich der Einheitsnormalenvektor, wenn man in Richtung eines Tangentialvektors geht. Sei X die Änderungsrichtung, also $X \in T_p\mathcal{M}$. Das heißt wir sind an $dN_p(X)$ interessiert.

Definition 6.17 (Weingartenabbildung)

Sei \mathcal{M} eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenvektorfeld N . Dann ist Weingartenabbildung zu $p \in \mathcal{M}$:

$$w_p(X) = -dN_p(X) \quad (6.11)$$

Bemerkung: $w_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$, denn $\|N(p)\| = 1$. Daraus folgt $N(p) \in S^2 \forall p$. Daraus folgt $N : \mathcal{M} \rightarrow S^2$ und schließlich gilt:

$$dN_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{N(p)}S^2 = N(p)^\perp = T_p\mathcal{M}$$

Bemerkung: Alternative Definition der Weingartenabbildung: Sei $p \in \mathcal{M}$ und $X \in T_p\mathcal{M}$. Wähle eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann ist

$$w_p(X) = -\left. \frac{d}{dt} N(\gamma(t)) \right|_{t=0} \quad (6.12)$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von γ .

Bemerkung: Es gilt:

$$w\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}\right) = -\frac{\partial N}{\partial u^i}$$

Denn wenn man $\gamma(t) = \varphi(u + te)$ wählt, gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} N(\varphi(u + te)) = \frac{dN}{du^i}$$

Beispiel 6.21

a) Sei $\mathcal{M} = xy$ -Ebene. Dann gilt

$$w_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $p \in \mathcal{M}$

- Sei \mathcal{M} der Zylinder. Wir wählen $\varphi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ als Parametrisierung.

$$\begin{aligned} w\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial N}{\partial z} = 0 \\ w\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) &= -\frac{\partial N}{\partial \theta} = (\sin(\theta), \cos(\theta), 0) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\text{Daraus folgt } w = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.22 Satz

w_p ist selbstadjungiert bezüglich g_p , das heißt für alle $p \in \mathcal{M}$ gilt:

$$g_p(X_p, w_p(Y_p)) = g_p(w_p(Y_p), X_p)$$

für alle $X_p, Y_p \in T_p\mathcal{M}$

Beweis:

g_p ist bilinear daher reicht es die Gleichung für eine Basis zu zeigen

$$\begin{aligned} g(X, wY) &= g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}, w\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^j}\right)\right) \\ &= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u^i}, \underbrace{w\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^j}\right)}_{-\frac{\partial N}{\partial u^j}} \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u^i}, \frac{\partial N}{\partial u^j} \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i \partial u^j}, N \right\rangle \\ &= g\left(w\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\right), \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial\varphi}{\partial u^i}, N \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u^i}, \frac{\partial N}{\partial u^j} \right\rangle = 0 \quad (6.13)$$

□

6.2.1. Zweite Fundamentalform

Wir wollen Krümmung von \mathcal{M} mithilfe von Kurven beschreiben die in \mathcal{M} verlaufen. Die Kurven die wir betrachten seien von der Form $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X$.

Betrachte: $\ddot{\gamma}(0)$

Problem: Falls wir $\ddot{\gamma}(0)$ als Maß für die Krümmung von \mathcal{M} im Punkt p in Richtung X auffassen, dann hängt Krümmung von der Wahl von γ ab.

Betrachte stattdessen: $\langle \ddot{\gamma}, N(p) \rangle$.

Definition 6.24 (Normalenkrümmung)

$$\kappa_N = \langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle \quad (6.14)$$

heißt Normalenkrümmung von γ in p .

6.25 Satz

$$\kappa_N = g_p(X_p, w_p(X_p)) \quad (6.15)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\gamma}(t), N(\gamma(t)) \rangle &= 0, \quad \forall t \\ \Rightarrow \langle \ddot{\gamma}(t), N(\gamma(t)) \rangle + \left\langle \dot{\gamma}(t), \frac{d}{dt} N(\gamma(t)) \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Setze $t = 0$:

$$\kappa_N + \langle X_p, -w_p(X_p) \rangle = 0 \quad (6.16)$$

□

Definition 6.27 (Zweite Fundamentalform)

Die zweite Fundamentalform von \mathcal{M} in p ist:

$$\pi_p(X_p, Y_p) := g_p(X_p, w_p(Y_p)) \quad (6.17)$$

Bemerkung: Die zweite Fundamentalform ist eine Symmetrische Bilinearform.

Definition 6.29 (Hauptkrümmung)

Die Hauptkrümmung von \mathcal{M} in p ist:

$$\kappa_1 = \min \pi_p(X, X) \quad (6.18)$$

$$\kappa_2 = \max \pi_p(X, X) \quad (6.19)$$

Dies sind die Eigenwerte der Weingartenabbildung. X heißen Hauptkrümmungsrichtungen.

Anhang

A. Wiederholungen und Exkurse

A.1. Tensoren & Tensorrechnung

In diesem Abschnitt seien grundsätzlich alle V endlichdimensionale Vektorräume.

$$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k, W) = \text{Menge aller multilinearen Abbildungen} \\ V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \longrightarrow W$$

A.1 Satz

Für diesen Fall existiert ein Isomorphismus

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_k \cong \mathcal{L}(V_1^*, \dots, V_k^*, \mathbb{R})$$

Bemerkung:

$$V^{**} \cong V \\ V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^* \cong \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k, \mathbb{R})$$

Definition A.3

Ein kovarianter k -Tensor auf V ist ein Element in $\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k\text{-mal}}$, das heißt es handelt sich um eine multilineare Abbildung: $V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

Beispiel: Die Determinante ist ein kovarianter k -Tensor in \mathbb{R}^k .

Definition A.4

Ein kontravarianter k -Tensor auf V ist ein Element in $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-mal}}$, das heißt es handelt sich um eine multilineare Abbildung: $V^* \times \dots \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$

Typischerweise treten gemischte Tensoren auf, das heißt Elemente in:

$$T^{(n,l)} V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{l\text{-mal}}$$

Tensoren auf Mannigfaltigkeiten

$$T^{(r,s)} T\mathcal{M} := \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T^{(r,s)}(T_p \mathcal{M})$$

Definition A.5

Ein Tensorfeld vom Typ (r, s) ist ein Schnitt von $T^{(r,s)} T\mathcal{M}$.

Übung: Bestimmen sie den Typ der folgenden Tensoren:

- Vektorfelder
- 1-Formen
- Torsion
- Krümmungstensor

A.2. Explizite Rechnungen in Koordinaten

In diesem Abschnitt wollen wir anhand zweier Beispiele explizite Rechnungen in Koordinaten ausführen.

Wir beginnen zunächst mit der Euklidischen Metrik auf \mathbb{R}^2 :

$$g = dx^2 + dy^2 \quad (\text{A.1})$$

Wir wollen eine Koordinatentransformation in ebene Polarkoordinaten durchführen:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow r \cdot \cos \varphi \\ y &\longrightarrow r \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Wir erhalten demnach mit Hilfe der Transformationsregel:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$$

Damit folgt für unsere neue Metrik g_{Polar} die Darstellung:

$$\begin{aligned} g_{\text{Polar}} &= dx \otimes dx + dy \otimes dy \\ &= (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \otimes (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \\ &\quad + (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) \otimes (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) \\ &= \cos^2 \varphi dr \otimes dr - r \sin \varphi \cos \varphi dr \otimes d\varphi \\ &\quad - r \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \otimes dr + r^2 \sin^2 \varphi d\varphi \otimes d\varphi \\ &\quad + \sin^2 \varphi dr \otimes dr + r \sin \varphi \cos \varphi dr \otimes d\varphi \\ &\quad + r \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \\ &= dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi \end{aligned}$$

Die Darstellung der ersten Fundamentalform ergibt sich demnach zu:

$$(g_{ij})_{\text{Polar}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

A.2.1. Christoffel-Symbole

Wir wollen nun mit dieser Erkenntnis einige Christoffel-Symbole für verschiedene Metriken explizit ausrechnen.

Zunächst einmal betrachten wir wieder die **euklidische Metrik** auf \mathbb{R}^2 :

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \text{diag}(1, 1)$$

In diesem Fall verschwinden alle Christoffel-Symbole, da der \mathbb{R}^2 , allgemeiner auch der \mathbb{R}^n keine Krümmung besitzt, also *flach* ist. Wir erhalten:

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j, k$$

Dies bedeutet, dass die kovariante Ableitung gleich der "gewöhnlichen" Ableitung ist, was wir auch erwarten.

Kommen wir nun zu der zuvor hergeleiteten Metrik für die **ebenen Polarkoordinaten**:

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

Wir erhalten $\frac{\partial}{\partial \varphi} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ und damit schließlich:

$$\begin{aligned} \nabla_{(\frac{\partial}{\partial \varphi})} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \nabla_{(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y})} (-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}) \\ &= (-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}) (-y \frac{\partial}{\partial x}) + (-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}) (x \frac{\partial}{\partial y}) \\ &= -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial x} \\ &= r \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen berechnen wir nun explizit die Christoffel-Symbole:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} (1(0 + 0 - 0) + 0 \dots) = 0 \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} (r^{-2} \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{22}}{\partial r} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi}) = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis erhalten wir analog wie zuvor:

$$\begin{aligned} \nabla_{(\frac{\partial}{\partial \varphi})} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= -r \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Zuletzt wollen wir uns eine etwas kompliziertere Metrik auf dem \mathbb{R}^3 anschauen:

$$(\mathbb{R}^3, g = (1 + x^2) dx \otimes dx + dy \otimes dy + e^z dz \otimes dz)$$

Daraus folgt direkt für die erste Fundamentalform und ihr Inverses:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \text{diag}((1 + x^2), 1, e^z) \\ g_{ij}^{-1} &= \text{diag}((1 + x^2)^{-1}, 1, e^{-z}) \end{aligned}$$

Wir berechnen damit wieder die Christoffel-Symbole mit der bekannten Formel:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

Betrachten wir beispielsweise Γ_{12}^3 fällt auf, dass:

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^3 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 g^{3l} (\partial_1 g_{2l} + \partial_2 g_{1l} - \partial_l g_{12}) \\ &= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{13} - \partial_3 g_{12}) \\ &= 0, \text{ da } g \text{ diagonal ist.}\end{aligned}$$

Man findet:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \underbrace{(2 \cdot \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11})}_{= \partial_1 g_{11}} \\ &= \frac{1}{2} (1 + x^2)^{-1} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{1 + x^2}\end{aligned}$$

außerdem berechnet man: $\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}$.

Alle anderen Christoffel-Symbole sind null!

A.2.2. Parallelverschiebung

Auch für das in der Vorlesung eingeführte Konzept der Parallelverschiebung wollen wir nachfolgend ein explizites Beispiel liefern.

Sei $\gamma(t)$ die Kurve, die durch die Gleichungen $x = t, y = t$ und $z = t$ definiert wird. Grundlage der Berechnung ist die zuvor bereits verwendete Metrik

$$g = (1 + x^2) dx \otimes dx + dy \otimes dy + e^z dz \otimes dz$$

Wie sieht der Paralleltransport entlang γ aus?

Der Anfangsvektor sei $(v_1(0), v_2(0), v_3(0))^T$. Die Formel für den Paralleltransport lautet:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} v^k = 0$$

Komponentenweises Einsetzen unter Berücksichtigung der im vorherigen Abschnitt berechneten Christoffel-Symbole liefert ein System aus drei Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{cases} \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{t}{1+t^2} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=1} v_1(t) = 0 \\ \frac{dv_2(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dv_3(t)}{dt} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{=1} v_3(t) = 0 \end{cases}$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen ergeben sich zu:

$$\begin{cases} v_1(t) &= \frac{v_1(0)}{\sqrt{1+t^2}} \\ v_2(t) &= v_2(0) \\ v_3(t) &= v_3(0)e^{-\frac{t}{2}} \end{cases}$$

Seien $v(0) = (v_1(0), v_2(0), v_3(0))^T$ sowie $w(0) = (w_1(0), w_2(0), w_3(0))^T$ gegeben, dann gilt für die Vektorfelder, welche durch den Paralleltransport entlang γ entstehen:

$$g(v(t), w(t)) = \underbrace{\sum_{i=1}^3 v_i(0)w_i(0)}_{\text{const.}}$$

Es ergibt sich schlussendlich:

$$xg(v, w) = g(\nabla_x v, w) + g(v, \nabla_x w) = 0.$$

A.3. Riemannsche Normalkoordinaten

Wir lernen in diesem Exkurs einen neuen Satz an Koordinaten, die sog. **Riemannschen Normalkoordinaten** kennen.

Die Idee liegt darin, den lokalen Diffeomorphismus

$$\exp_p : V \longrightarrow U$$

zu verwenden, um spezielle, an die Geometrie angepasste Koordinaten zu definieren.

Für $p \in \mathcal{M}$ sein $E_1, E_2; \dots E_n$ eine Orthonormalbasis von $T_p\mathcal{M}$, das heißt:

$$g \Big|_p (E_i, E_j) = \delta_{ij}$$

Dies impliziert:

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_p\mathcal{M} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i E_i \end{aligned}$$

ist ein linearer Diffeomorphismus.

Dann ist: $E^{-1} \circ \exp_p^{-1} : U \longrightarrow E^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, also eine Karte für \mathcal{M} .

Definition A.6

Die so erhaltenen Karten heißen **Riemannsche Normalkoordinaten**.

A.7 Satz

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in \mathcal{M}$ und seien (x, U) die Riemannschen Normalkoordinaten von p . Dann gelten für:

$$\begin{aligned} g_{ij} : U &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{erste Fundamentalform} \\ \Gamma_{ij}^k : U &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{Christoffel-Symbole} \end{aligned}$$

die folgenden Aussagen:

1. $x(p) = 0$
2. $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$
3. $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$

Beweis:

$$1. \ x(p) = E^{-1} \circ \overbrace{\exp_p^{-1}}^{=0} = E^{-1}(0) = 0$$

$$\begin{aligned} 2. \ g_{ij}(p) &= g_p(x_i, x_j) = g_p(\overbrace{d(\exp \circ E)}^{=x^{-1}} \Big|_{(e_i)}, d(\exp \circ E) \Big|_0(e_j)) \\ &= g_p(d(\exp) \Big|_0 E_i, d(\exp) \Big|_0 E_j) \\ &= g_p(E_i, E_j) \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

3. $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $c(\lambda) = \exp_p(tE_v)$ eine Geodätische mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = E_v$.
Also erfüllt c die Geodätengleichung ($\nabla_t \dot{c} = 0$)

$$0 = \ddot{c}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) \quad \forall k$$

Es gilt aber:

$$\begin{aligned} c^k(t) &= x^k(c(t)) = t \cdot v^k \\ \dot{c}^k(t) &= v^k \\ \ddot{c}^k(t) &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$0 = \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(0) v^i v^j \quad (\star)$$

Setze nun:

$$\begin{aligned} \beta(v, w) &:= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0) v^i w^j = \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ji}^k(0) v^i w^j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0) v^j w^i = \beta(w, v) \end{aligned}$$

Damit folgt direkt:

- $\beta(v, v) = 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$
- $\beta(v, w) = 0 \ \forall v, w \in \mathbb{R}^n$
- $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$

□

Einfacher Trick:

$$\begin{aligned}\beta(x + y, x + y) &= \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) \\ &= \underbrace{\beta(x, x)}_{=0} + \underbrace{\beta(y, y)}_{=0} + 2\beta(x, y)\end{aligned}$$

Daraus folgt direkt: $\beta(x, y) = 0$. Man nennt dies das **Polarisationsargument**.

Abbildungsverzeichnis

1.1. Offene Menge	3
1.2. Hausdorff'sche Eigenschaft	4
1.3. Kartenwechsel	5
1.4. Visualisierung des Hilfslemmas (1.20) ("bump function")	8
1.5. Veranschaulichung von Hilfslemma 1.28	10
2.1. Darstellung des Tangentialbündels eines Kreises	17
2.2. Veranschaulichung eines Vektorbündels	17
2.3. Beispiel für ein Vektorfeld	24
2.4. Kurve f auf einer Mannigfaltigkeit	31
2.5. Parallelverschiebung	33
2.6. Parallelverschiebung auf Kurve c in \mathbb{R}^n vs. auf beliebiger Mannigfaltigkeit \mathcal{M}	37
2.7. Paralleltransport	38
2.8. Variation der Kurve c_0	40
4.1. Gerade im \mathbb{R}^n	48
4.2. Veranschaulichung des Tangentialraumes des S^n am Punkt p	51
4.3. Geodäte auf S^n	52
4.4. Darstellung eines Sterngebietes	53
4.5. Variation einer Kurve mit festem Anfangs- und Endpunkt.	56
4.6. Variation einer stückweise glatten Kurven vom Punkt a nach b	57
4.7. Darstellung des Variationsfeldes	58
4.8. Die Exponentialabbildung erhält Orthogonalität	60
4.9. Kürzeste Strecke im \mathbb{R}^2 und Spezialfall ohne Null	62
4.10. Graphische Darstellung der zweiten Aussage des Lemmas	62
4.11. Darstellung der Bedeutung des Injektivitätsradius	65
4.12. Beweisstruktur für den Satz von Hopf-Rinow	67
6.1. Visualisierung des begleitenden Dreibeins	82