

Differentialgeometrie I

gehalten von Dr. Anna Siffert
im Sommersemester 2018

an der
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg



In L^AT_EX gesetzt von
Thomas Ackermann & Mathieu Kaltschmidt

aktueller Stand: 22. Mai 2018

Differentialgeometrie I

Dr. Anna Siffert



UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Vorwort

Bei diesen Vorlesungsnotizen handelt es sich um kein offizielles Skript, sondern lediglich um die Umsetzung des Vorlesungsmitschriebs in \LaTeX .

Für die Vollständigkeit & Richtigkeit des Inhalts wird deshalb **keine Gewährleistung** übernommen.

Bei Fragen, Korrekturen und Verbesserungsvorschlägen freuen wir uns über eine Nachricht.¹

Die Dozentin Frau Dr. Siffert empfiehlt die nachfolgende Literatur zur Vertiefung des in der Vorlesung behandelten Stoffs:

Eine Inhaltsübersicht der in der Vorlesung behandelten Themen befindet sich auf der nächsten Seite.

¹Mail an M.Kaltschmidt@stud.uni-heidelberg.de oder T.Ackermann@stud.uni-heidelberg.de

Inhaltsverzeichnis

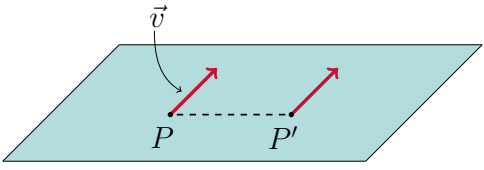
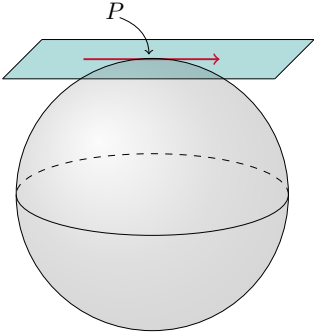
Vorwort	ii
1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	1
1.1 Definitionen	1
1.2 Tangentialraum	6
2 Vektorbündel	15
2.1 Tangentialbündel	15
2.2 Vektorbündel	16
2.2.1 Direkte Summe (Whitney-Summe)	20
2.2.2 Tensorbündel	20
2.2.3 Homomorphismenbündel	21
2.2.4 Duales Bündel	21
2.2.5 Alternierendes Vektorbündel	21
2.3 Zusammenhang und kovariante Ableitung	27
Abbildungsverzeichnis	I

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Worum geht es in der Differentialgeometrie?

Die zentralen Objekte der Differentialgeometrie sind Mannigfaltigkeiten. Das Ziel ist es, Analysis und Geometrie auf solchen Mannigfaltigkeiten zu betreiben.

Wir beginnen zunächst einmal mit einer kurzen Gegenüberstellung der bereits bekannten Konzepte aus dem \mathbb{R}^n mit den korrespondierenden Begriffen der Differentialgeometrie, welche wir in den kommenden Vorlesungen noch genauer kennenlernen werden.

	
\mathbb{R}^n	\mathcal{M}
Parallelverschiebung	Begriff des Zusammenhangs
Gerade = kürzeste Verbindung	Konzept der Geodätischen
flacher Raum	gekrümmter Raum
Skalarprodukt	Riemannsche Metrik

1.1 Definitionen

Um differenzierbare Mannigfaltigkeiten definieren zu können wiederholen wir zunächst die Definition eines topologischen Raumes.

Erinnerung: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, wenn $\forall p \in U \exists \varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(p) \subset U$. Dieser Begriff von Offenheit heißt *euklidische Topologie* und erfüllt:

- i) \emptyset, \mathbb{R}^n offen
- ii) $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow U \cap V$ offen in \mathbb{R}^n
- iii) $U_i, i \in I$ offen in $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen

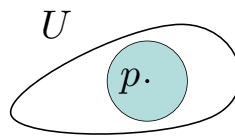


Abbildung 1.1: Offene Menge

Definition 1.1 (Topologischer Raum)

Ein topologischer Raum ist eine Menge X zusammen mit einer Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$, sodass:

- i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- ii) $U, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$
- iii) $U_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Beispiel 1.2

- a) $(X, \mathcal{O} = \mathcal{P}(X))$
- b) $N \subset X$ Teilmenge. Dann ist auch (N, \mathcal{O}_1) ein topologischer Raum, wobei \mathcal{O}_1 wie folgt gegeben ist:

$$V \in \mathcal{O}_1 \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{O}, \text{ sodass } V = N \cap U$$

Teilmengen topologischer Räume sind topologische Räume.

Definition 1.3 (Topologische Mannigfaltigkeiten)

Eine topologische Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum \mathcal{M} der Dimension n mit folgenden Eigenschaften:

- i) \mathcal{M} ist hausdorffsch. Das heißt $\forall p, q \in \mathcal{M}$ mit $p \neq q \exists$ zwei disjunkte, offene Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni q$ wobei $U, V \in \mathcal{O}$

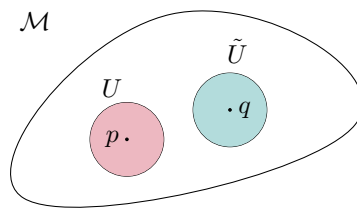


Abbildung 1.2: Hausdorff'sche Eigenschaft

ii) **2. Abzählbarkeitsaxiom**

\mathcal{M} hat eine abzählbare Basis der Topologie, das heißt es existieren abzählbar viele Mengen $\{U_1, \dots, U_k, \dots\}$ offener Teilmengen mit $U_i \in \mathcal{O}$, sodass $\forall p \in \mathcal{M}$ und alle Umgebungen U von p gibt es ein K sodass $p \in U_k \subseteq U$.

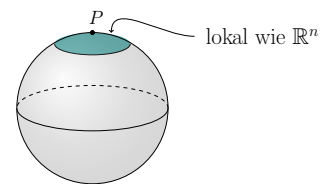
iii) \mathcal{M} ist homöomorph zu \mathbb{R}^n , das heißt $\forall p \in \mathcal{M}$ existiert eine Umgebung U von p und ein **Homöomorphismus** $X : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen).

Definition 1.4 (Karte, Atlas)

Das Paar (X, U) heißt **Karte** von \mathcal{M} um p .

Eine Menge $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}\}$ von Karten heißt **Atlas** von \mathcal{M} , falls

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \mathcal{M} \quad (1.1)$$



Topologische Mannigfaltigkeiten sind die Grundbausteine. Nun wollen wir auf diesen Mannigfaltigkeiten Geometrie betreiben. Dafür benötigen wir mehr Struktur. Wir wollen die differenzierbare Struktur des \mathbb{R}^n auf unseren Mannigfaltigkeiten "holen".

Definition 1.5 (Kartenwechsel)

Seien x_α und x_β zwei Karten, dann ist der Kartenwechsel wie folgt definiert:

$$x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

Dies ist ein Homöomorphismus.

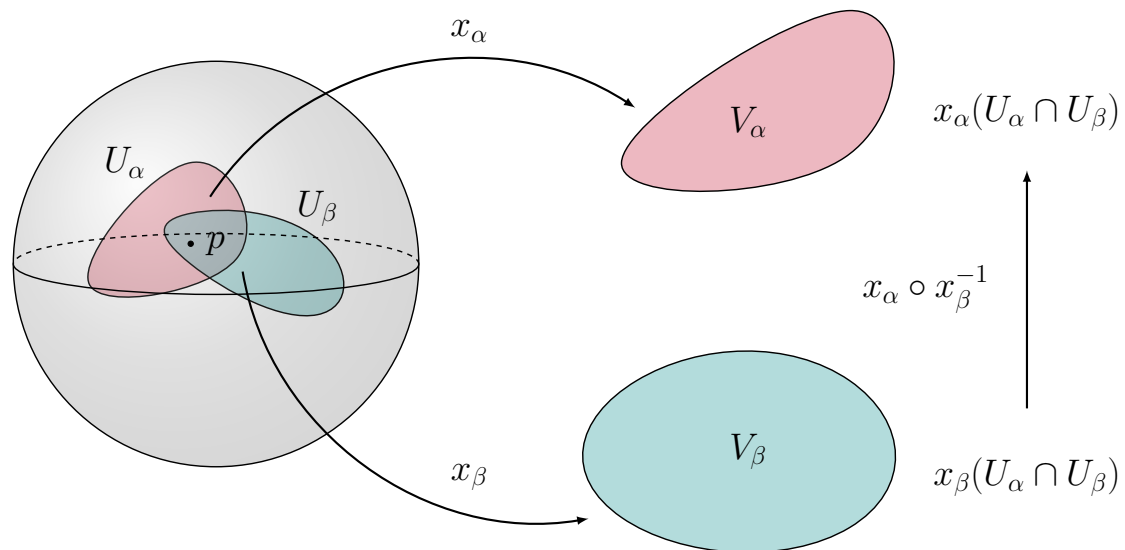


Abbildung 1.3: Kartenwechsel

Nun wollen wir, dass $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ Diffeomorphismen sind.

Definition 1.6

Sei \mathcal{M} eine topologische Mannigfaltigkeit.

- a) Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha)\}$ auf \mathcal{M} heißt C^∞ -Atlas, falls alle Kartenwechsel $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ mit $\alpha, \beta \in A$ C^∞ -Diffeomorphismen sind.
- b) Sei \mathcal{A} ein C^∞ -Atlas von \mathcal{M} .
Eine Karte (x, U) ist verträglich mit \mathcal{A} , falls $x \circ x^{-1}$ ein C^∞ -Diffeomorphismus ist.

Gegeben ein C^∞ -Atlas, so kann man diesen zu einem maximalen C^∞ -Atlas vervollständigen. Maximal bedeutet hierbei, dass der Atlas nicht strikt in einem anderen enthalten ist.

Definition 1.7 (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)

Eine differenzierbare Struktur auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M ist ein maximaler C^∞ -Atlas. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur.

Bemerkung: Man kann auch eine topologische Mannigfaltigkeit definieren, ohne das 2. Abzählbarkeitsaxiom zu fordern.

Aber: Dann bekommt man Mannigfaltigen mit ganz anderen Eigenschaften als diejenigen, die wir betrachten wollen.

Wichtig: Hausdorffsch + 2. Abzählbarkeitsaxiom \Rightarrow parakompakt, d. h. jede offene Überdeckung hat eine lokale Verfeinerung.

(V_j) heißt Verfeinerung von (U_j) , falls $\forall V_j \exists U_j$ mit $V_j \subseteq U_j$

Lokal endlich: $\forall p \in X \exists$ Umgebung U , die nur endlich viele U_i trifft

Parakompakt $\Rightarrow \exists$ Partition der Eins f mit

$$f_i : V_i \subseteq X \rightarrow [0, 1], \sum_{i \in I} f_i(x) = 1$$

Beispiel 1.9

Metrische Räume sind parakompakt.

Beispiel 1.10 (differenzierbare Mannigfaltigkeiten)

1. \mathbb{R}^n mit Atlas $\mathcal{A} = \{(\text{id}, \mathbb{R}^n)\}$

2. V Vektorraum, B Basis mit $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, Atlas $\mathcal{A} = \{(\chi_B, V)\}$

$$\begin{aligned} \chi_B : V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ v = \sum_{i=1}^n a_i v_i &\mapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i \end{aligned}$$

wobei (e_1, \dots, e_n) die Standardbasis ist.

3. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, (χ_U, U) mit $\chi_U = \text{id}|_U$, $V \subseteq M^n$, M differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\mathcal{A} = \{(\chi_X, U)\}$ Atlas von M

$\mathcal{A}_V = \{(\chi_V, U_V)\}$ wobei $(\chi_V, U_V) = (\chi_{U \cap V}, U \cap V)$

4. $M_1 = S^1$, $M_2 = \mathbb{R}$, $M_1 \times M_2 = \text{"unendlicher Zylinder"}$

Seien $M_1^{n_1}, M_2^{n_2}$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so ist $M_1 \times M_2$ ebenfalls eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + n_2$.

Atlas $\mathcal{A} = \{(x \times y, U \times V)\}$, wobei

$(x, U) = \text{Karte von } M_1$

$(y, V) = \text{Karte von } M_2$



$$(x \times y)(p_1, p_2) = (x(p_1), y(p_2))$$

5. $S_R^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = R^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

- Teilraumtopologie: $U \subset S_R^n$ offen $\Leftrightarrow \exists U' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen mit $U = U' \cap S_R^n$
- Atlas: Wir brauchen zwei Karten. Einmal für den Nord- und einmal für den Südpol (haben unterschiedliche Orientierung).
Nordpol (N):

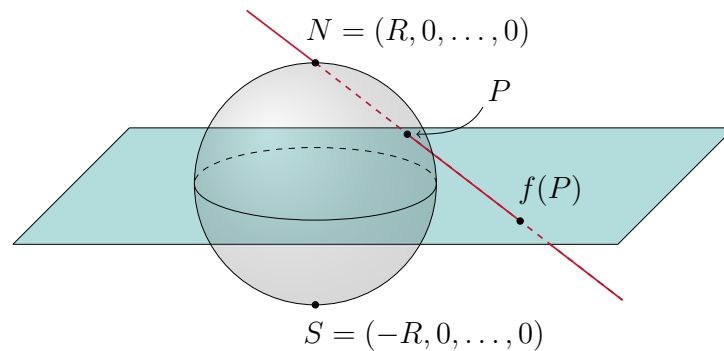
$$f_N : S_R^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

$$f_N(x_0, \dots, x_n) = \frac{R}{R - x_0}(x_1, \dots, x_n) \quad (1.4)$$

Analog für den Südpol (S):

$$f_S : \mathcal{M}_s \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

→ Zwei Karten f_N und f_S ("Stereographische Projektionen").



Bemerkung: N mit der Teilraumtopologie und dem Atlas $\mathcal{A}_N = \{(\chi|_U, U \cap N)\}$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 1.12

Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Einbettung ist eine differenzierbare Abbildung

$$f : N \rightarrow M$$

sodass

1. $f(N) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit
2. $f : N \rightarrow f(N)$ Diffeomorphismus

1.2 Tangentialraum

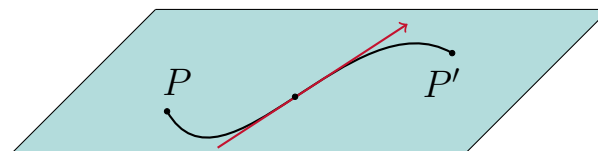
Definition 1.13

1. Ein Tangentialvektor an M im Punkt $p \in M$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$v : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

2. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p heißt Tangentialraum von M in p : $T_p M$ ist ein Vektorraum.



1.14 Hilfslemma (Existenz einer Glockenfunktion)

Sei $U \subseteq M$ offen, $p \in U$. Dann $\exists \varphi \in \mathcal{F}(M)$, s. d.

1. $\text{supp } \varphi \subseteq U$
2. φ auf einer Umgebung $U' \subset U$ von p ist

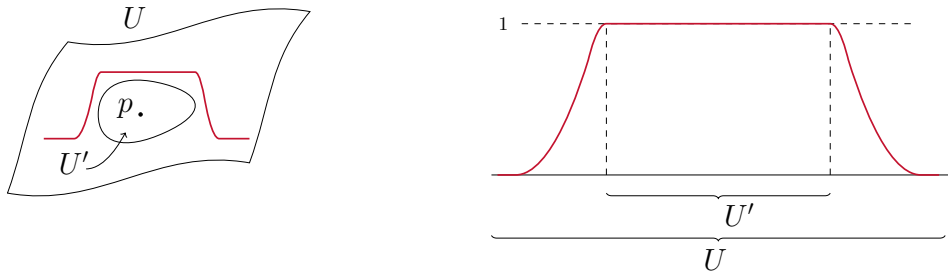


Abbildung 1.4: Visualisierung des Hilfslemmas (1.14) ("bump function")

Beweis:

Sei (x, U) eine Karte um φ , $\varepsilon > 0$, s. d. $B_{2\varepsilon}(x(p)) \subset V \subset \mathbb{R}^n$ und wähle $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left. \begin{array}{l} \text{supp}(\varphi) \subset B_{2\varepsilon}(x(p)) \\ \varphi = 1 \text{ auf } B_{\varepsilon} \end{array} \right\} \text{ Resultat aus Analysis}$$

$$\text{Setze } \varphi(q) = \begin{cases} \psi(x(q)) & \text{für } q \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

□

1.16 Satz (Eigenschaften des Tangentialraums)

Für $v \in T_p M$ gilt:

1. $v(\text{konstante Funktion}) = 0$
2. Falls $f = g$ in einer Umgebung von p , so gilt $v(f) = v(g)$

"Lokalisierung von Tangentialvektoren"

Beweis: (zu 2)

Wähle φ wie im Hilfslemma, wobei U so gewählt ist, dass $\varphi f = \varphi g$ auf U ist. Nun gilt:

$$\begin{aligned} v(\varphi f) &= v(\varphi)f(p) + \varphi(p)v(f) \\ &= v(\varphi)f(p) + v(f) \\ v(\varphi g) &= v(\varphi)g(p) + v(g) \end{aligned}$$

Dann folgt $v(\varphi f) = v(\varphi g) \Leftrightarrow v(f) = v(g)$.

□

Beweis: (zu 1)

$v(\lambda f) = \lambda v(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

zz: $v(1) = 0$. Aufgrund von $v(\lambda) = \lambda v(1)$ genügt es zu zeigen, dass $v(1) = 0$. Dies folgt aus der Produktregel

$$v(1) = v(1 * 1) = 1v(1) + v(1)1 = 2v(1) \Rightarrow v(1) = 0 \quad \square$$

Jede Karte liefert eine spezielle Basis von $T_p\mathcal{M}$.

Definition 1.19

Sei (x, U) eine Karte von \mathcal{M} um p . Definiere Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ ($i = 1, \dots, m$) wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p(f) := \partial_i(f \circ x^{-1})\big|_{x(p)} \quad (1.6)$$

Hierbei bedeutet ∂_i die i -te partielle Ableitung.

1.20 Satz

Die Tangentialvektoren $(\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\big|_p)$ bilden eine Basis des $T_p\mathcal{M}$. Jeder Tangentialvektor lässt sich schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^m v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p = \sum_{i=1}^m \xi \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p. \quad (1.7)$$

Beweis: (Satz 1.20 Teil 1)

Es gilt die lineare Unabhängigkeit:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p(x^j) = \delta_{ij} \quad (1.8)$$

Jetzt muss noch gezeigt werden, dass $(\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\big|_p)$ ein Erzeugendensystem für $T_p\mathcal{M}$ ist. Dafür benötigen wir allerdings zunächst ein Hilfslemma. \square

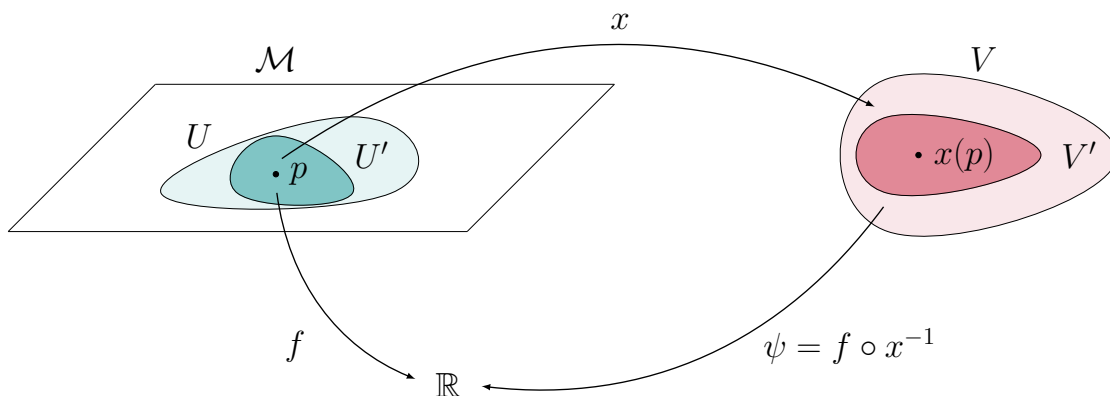
1.22 Hilfslemma

Sei $f : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann existiert eine Umgebung $U' \subset U$ von p ($p \in U'$) und eine glatte Funktion $f_i : U' \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^m (x_i - x_i(p)) f_i. \quad (1.9)$$

Wobei $f_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p(f)$.

Beweis:



Nach der Abbildung gilt:

$$\psi(U) - \psi(U_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \psi(tU + (1-t)U_0) dt \quad (1.10)$$

Hierbei ist $U = x(q)$ mit $q \in \mathcal{M}$ und $U_0 = x(p)$.

$$\psi(U) - \psi(U_0) = \sum_i (U^i - U_0^i) \underbrace{\int_0^1 \frac{d\psi}{dU^i} dt}_{:= \psi_i(U)} \quad (1.11)$$

Setze $f_i = \psi_i \circ x : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. f_i ist glatt und es gelten folgende Eigenschaften nach Definition:

- $\psi(U) - \psi(U_0) = \psi(x(q)) - \psi(x(p)) = f(q) - f(p)$
- $U^i = x^i(q)$
- $U_0^i = x^i(p)$
- $\psi_i(U) = \psi_i(x(1)) = f_i(q)$

Diese Eigenschaften können wir nun wie folgt verwenden:

$$f(q) - f(p) = \sum_{i=1}^n (x_i(q) - x_i(p)) f_i(q) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f) = \partial_i \underbrace{(f \circ x^{-1})}_{\psi} \Big|_{x(p)} \quad (1.13)$$

$$= \partial_i \psi \Big|_{x(p)} \quad (1.14)$$

$$= \psi_i(x(p)) = f_i(p) \quad (1.15)$$

Da $\psi(U) = \psi(U_0) + \sum_i (U^i - U_0^i) \psi_i(U)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial U_i} \psi|_{x(p)} = \psi_i(U)|_x(p) = \psi(x(p)) \quad (1.16)$$

Und somit gilt schließlich $f_i(p) = \frac{\partial}{\partial U_i}|_p(f)$. \square

Nun können wir unseren Beweis fortführen.

Beweis: (Satz 1.20 Teil 2)

$$v(f) = v(f(p) + \sum_i (x_i - x_i(p)) f_i) \quad (1.17)$$

$$= v(f(p)) + \sum_i v(x_i - x_i(p)) f_i \quad (1.18)$$

Benutze Produktregel

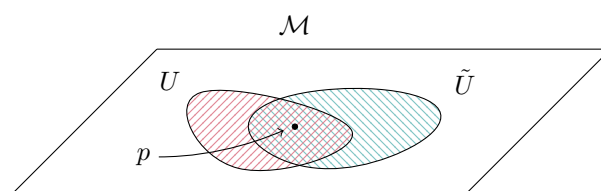
$$v(f) = \sum_i \underbrace{((x_i(p) - x_i(p))v(f_i))}_{=0} + \underbrace{v(x_i - x_i(p)) f_i}_{=v(x_i)} \quad (1.19)$$

$$= \sum_i v(x_i) f_i \quad (1.20)$$

$$= \sum_i v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p f \quad (1.21) \quad \square$$

1.25 Satz (Transformationsregel)

Seien (x, U) und (\tilde{x}, \tilde{U}) zwei Karten um $p \in \mathcal{M}$.



Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}|_p = \sum_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}|_p(x_j)}_{\in \mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_j}|_p \quad (1.22)$$

(In der lineare Algebra hatten Transformation die ähnliche Gestalt: $\tilde{v}_i = \sum_j a_{ij} v_j$)

Definition 1.26 (Differential, Ableitung)

Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ glatt. Das **Differential (Ableitung)** von f in p ist die lineare Abbildung:

$$df|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N} \quad (1.23)$$

$$v \mapsto df|_p(v), \quad (1.24)$$

welche definiert ist durch:

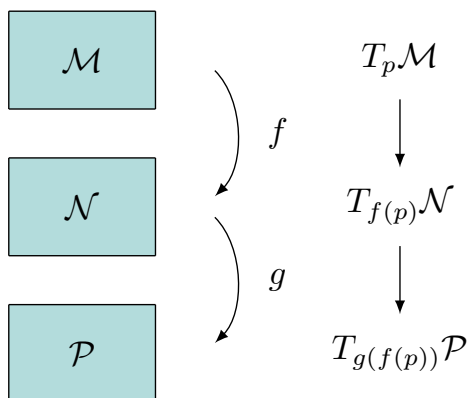
$$\underbrace{df|_p(v)}_{\in T_{f(p)}\mathcal{N}} \underbrace{(\phi)}_{\in \mathcal{F}(\mathcal{M})} = \underbrace{v(\phi \circ f)}_{\in \mathcal{F}(\mathcal{N})}, \quad \forall p \in \mathcal{F}(\mathcal{N}) \quad (1.25)$$

Fakt: $df|_p$ ist linear.

1.27 Satz (Kettenregel)

Seien $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ und $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ glatte Abbildungen. Dann gilt:

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \circ df|_p \quad (1.26)$$



Beweis: (Satz 1.27)

$$d(g \circ f)|_p(v(\phi)) = v(\phi \circ g \circ f) \quad (1.27)$$

$$= df|_p(v)(\phi \circ g) \quad (1.28)$$

$$= dg|_{f(p)} \circ df|_p(v)(\phi) \quad (1.29)$$

□

1.29 Satz

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ glatt und sei (x, U) eine Karte von \mathcal{M} um p und (y, V) eine Karte von \mathcal{N} um p . Setze $f_j = y_j \circ f$ mit $f_j : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\underbrace{df|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right)}_{\in T_{f(p)}\mathcal{M}} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p(f_j)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{f(p)}}_{\in T_{f(p)}\mathcal{N}} \quad (1.30)$$

Definition 1.30 (regulärer Wert/Punkt, Submersion, Immersion)

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ glatt und es gelte $\dim \mathcal{M} = m$, $\dim \mathcal{N} = n$.

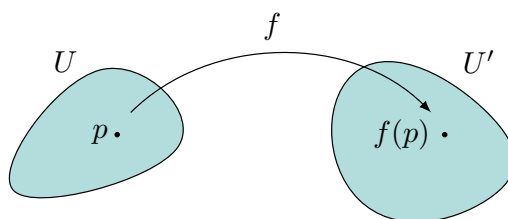
1. Rang f in p ist $\text{Rang } df|_p$.
2. $p \in \mathcal{M}$ heißt regulärer Punkt ($\in \mathcal{M}$) $\Leftrightarrow \text{Rang } df|_p = \dim \mathcal{N}$.
3. $q \in \mathcal{N}$ heißt regulärer Wert ($\in \mathcal{N}$) $\Leftrightarrow \forall p \in f^{-1}(q)$ sind reguläre Punkte.
4. f heißt Submersion $\Leftrightarrow f$ surjektiv und alle $p \in \mathcal{M}$ reguläre Punkte sind.
5. f heißt Immersion $\Leftrightarrow df|_p$ injektiv für alle $p \in \mathcal{M}$

1.31 Satz (Umkehrsatz)

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ glatt. Sei $df|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$ ein Isomorphismus, dann existiert eine Umgebung U um p und eine Umgebung U' um $f(p)$, so dass

$$f|_U : U \rightarrow U' \quad (1.31)$$

ein Diffeomorphismus ist.



Beweis: (Satz 1.31)

Nutze Karten um dies auf den euklidischen Fall zu führen.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \\
 \downarrow x & & \downarrow y \\
 V \subseteq \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\phi} & V \subseteq \mathbb{R}^m
 \end{array} \tag{1.32}$$

Seien (x, U) und (y, U') Karten von \mathcal{M} und \mathcal{N} um p und $f(p)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt: $f(U) \subset U'$. Dann ist ϕ eine glatte Abbildung deren Differential $d\phi|_{x(p)}$ invertierbar ist. Umkehrsatz im \mathbb{R}^n auf ϕ anwenden: Es existieren Umgebungen \hat{V} von $x(p)$ und \hat{V}' von $y(f(p)) = \phi(x(p))$, so dass $\hat{\phi}|_{\hat{V}}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist

$$f|_{x^{-1}(\hat{V})} : x^{-1}(\hat{V}) \rightarrow y^{-1}(\hat{V}') \tag{1.33}$$

ein Diffeomorphismus.

$$\phi = y \circ f \circ x^{-1} \Rightarrow f = y^{-1} \circ \phi \circ x \tag{1.34}$$

□

1.33 Satz (Satz über implizite Funktionen)

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ glatt und es gelte $\dim \mathcal{M} = m$, $\dim \mathcal{N} = n$.

1. Sei $\text{Rang}_p f = r$. Dann existiert zu jeder Karte (y, U') um $f(p)$ eine Karte (x, U) um p , so dass

$$y \circ f \circ x^{-1}(U_1, \dots, U_m) = (U_1, \dots, U_r, \phi_{r+1}(U), \dots, \phi_n(U)). \tag{1.35}$$

Falls $y(f(p)) = 0$, so kann man x so wählen, dass $x(p) = 0$ und $\phi_j(0) = 0$ ($\forall j > r$).

2. Sei $\text{Rang } f = r$ auf einer Umgebung von p . Dann gibt es Karten (x, U) , (y, U') , so dass

$$y \circ f \circ x^{-1}(U_1, \dots, U_m). \tag{1.36}$$

Beweis: (Satz 1.33 Teil 1)

Wähle Karten und modifiziere diese geschickt. Sei (y, U') eine Karte von \mathcal{N} um $f(p)$. Sei (\hat{x}, U) eine Karte von \mathcal{M} um p mit $\hat{x}(p) = 0$. Setze

$$\hat{A} = (\hat{A})_{ij} = (\partial_i \hat{\phi}_j), \tag{1.37}$$

mit $\phi \circ y \circ f \circ x^{-1}$. Da $\text{Rang}_p f = r$, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$\det \tilde{A} \neq 0. \quad (1.38)$$

Wobei hier nun $\tilde{A} = (\hat{A}_{ij})_{1 \leq i \leq r}$. Setze

$$x_i = \begin{cases} y_i \circ f & 1 \leq i \leq r \\ \hat{x}_i & \text{falls } r+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (1.39)$$

Dann gilt $x(p) = 0$ und

$$\partial_i(x_j \circ \hat{x}^{-1})(0) = \begin{pmatrix} \partial_i \hat{\phi}_j(0) & \star \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Daraus folgt, dass $\text{Rang } x = m = \dim \mathcal{M}$ im Punkt p . Mit Hilfe des Umkehrsatzes folgt, dass x ein lokaler Diffeomorphismus ist und eine Umgebung U um den Punkt p existiert und eine Umgebungen V von 0 in \mathbb{R}^n , sodass $x : \mathcal{M} \rightarrow V$ eine Karte ist und

$$\phi(U_1, \dots, U_m) = y \circ f \circ x^{-1}(U_1, \dots, U_m) \quad (1.41)$$

$$= (U_1, \dots, U_r, \phi_{r+1}(U), \dots, \phi_m(U)). \quad (1.42)$$

Wobei ϕ_k glatt auf U^i sind mit $\phi_i(0) = 0$. Betrachte die Jacobi-Matrix:

$$A_{ij} = (\partial_i \phi_j)_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \star & \partial_i \phi_i \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Da $\text{Rang } \phi = r$ in einer Umgebung von $U = 0$ hat folgt:

$$\partial_i \phi_j \quad \forall i, j > r. \quad (1.44)$$

□

1.35 Korollar

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ mit $\dim \mathcal{M} = m$ und $\dim \mathcal{N} = n$ glatt, dann gilt:

1. Sei $q \in \mathcal{N}$ ein regulärer Wert, so ist

$$\mathcal{H} = f^{-1}(q) = \{p \in \mathcal{M} \mid f(p) = q\} \quad (1.45)$$

eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - n$.

2. Sei f linear in einer Umgebung von $\mathcal{H} = f^{-1}(q)$ vom Rang r , so ist \mathcal{H} eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - r$. Der Tangentialraum $T_p \mathcal{H}$ ist isomorph zu

$$\ker df|_p \subseteq T_p \mathcal{M}, \quad \forall p \in \mathcal{H}. \quad (1.46)$$

2 Vektorbündel

2.1 Tangentialbündel

Wir wollen nun alle Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} gemeinsam betrachten.

$$T\mathcal{M} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M} = \{(p, V) | p \in \mathcal{M}, v \in T_p\mathcal{M}\} \quad (2.1)$$

Wir wollen nun die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Das heißt wir müssen eine Topologie und eine C^∞ -Struktur auf $T\mathcal{M}$ definieren.

$$\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \quad (2.2)$$

$$(p, V) \mapsto p \quad (2.3)$$

Sei (x, U) eine Karte von \mathcal{M}^m . Dann definieren wir eine Karte (\bar{x}, \bar{U}) von $T\mathcal{M}$ wie folgt:

$$\bar{U} = \pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{p \in U} T_p\mathcal{M} \quad (2.4)$$

$$\bar{x} : \bar{U} \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m} \quad (2.5)$$

$$(p, V) \mapsto (x(p), \xi) \quad (2.6)$$

Wobei $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m) \in \mathbb{R}^m$ gegeben ist durch:

$$v = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \quad \forall p \in U. \quad (2.7)$$

Wir haben noch keine Topologie auf $T\mathcal{M}$ definiert, das heißt \bar{x} ist nur eine bijektive Abbildung zwischen Mengen. Wir können allerdings nicht sagen ob es ein Homöomorphismus oder ein Diffeomorphismus ist. Allerdings können wir Kartenwechsel betrachten.

Seien (\bar{x}, \bar{U}) und (\bar{y}, \bar{U}') zwei Karten. Betrachte die Abbildungen:

$$\bar{y} \circ \bar{x}^{-1} \circ \underbrace{x(\bar{U} \cap \bar{U}')}_{x(U \cap U') \times \mathbb{R}^m} \rightarrow \underbrace{\bar{y}(\bar{U} \cap \bar{U}')}_{y(U \cap U') \times \mathbb{R}^m} \quad (2.8)$$

$$(x, \xi) \mapsto (y \circ x^{-1}(U), \eta) \quad (2.9)$$

Wobei $\eta = d(y \circ x^{-1})|_U \xi$.

Da $y \circ x^{-1}$ Diffeomorphismus ist, ist $\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}$ ein Isomorphismus. Nun können wir die

Topologie auf $T\mathcal{M}$ definieren. $O \subset T\mathcal{M}$ offen, falls $\bar{x}(O \cap \bar{U})$ offen in $V \times \mathbb{R}^m$ ist für alle Karten $(x, U) \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ (bzw $(\bar{x}, \bar{U}) \in \mathcal{A}_{T\mathcal{M}}$)

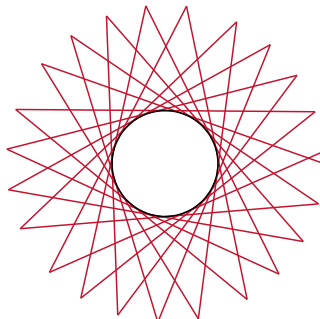


Abbildung 2.1: Darstellung des Tangentialbündel eines Kreises

2.1 Satz

$T\mathcal{M}$ mit dieser Topologie ist eine topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}_{T\mathcal{M}}$ eine differenzierbare Struktur.

2.2 Vektorbündel

$T\mathcal{M}$ hat die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit. Allerdings hat es noch mehr, nämlich die eines Vektorbündels, was wir nun definieren.

Definition 2.2 (Vektorbündel)

Sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein \mathbb{R} -Vektorbündel vom Rang k über \mathcal{M} ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer glatten surjektiven Abbildung:

$$\pi : E \rightarrow \mathcal{M}, \quad (2.10)$$

so dass:

1. $\forall p \in \mathcal{M}$ hat $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$ die Struktur eines \mathbb{R} -Vektorraums der Dimension k . E_p heißt Faser von E über p .
2. Für alle p in \mathcal{M} existiert eine Umgebung U von p in \mathcal{M} und ein Diffeomorphismus. Für diesen gilt:
 - $\pi \circ \phi = pr_1$
 - Für alle $q \in U$ ist die Abbildung

$$\phi|_q : \{q\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow E_q \quad (2.11)$$

$$\{q, \xi\} \mapsto \phi_q(\xi) := \phi(q, \xi) \quad (2.12)$$

ϕ heißt lokale Trivialisierung von E .

$$\begin{array}{ccc}
 \phi : U \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\quad} & \pi^{-1}(U) \\
 & \searrow \scriptstyle pr_1 & \swarrow \scriptstyle \pi \\
 & U &
 \end{array} \tag{2.13}$$

Bemerkung: Ein Vektorbündel ist ein Tripel (π, E, \mathcal{M}) aber wir schreiben oft nur E . Hierbei wird E Totalraum und \mathcal{M} Basis genannt.

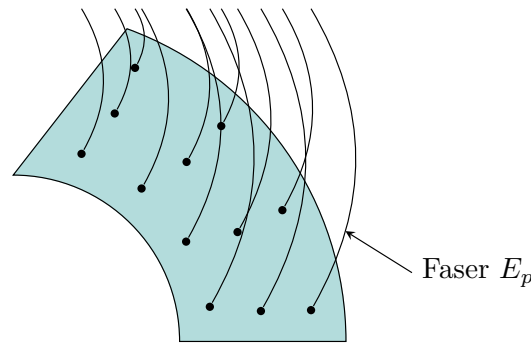


Abbildung 2.2: Veranschaulichung eines Vektorbündels

Beispiel 2.4

1. Triviales Bündel:

$$E = \mathcal{N} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{M} \tag{2.14}$$

$$(p, \xi) \mapsto p \tag{2.15}$$

2. Tangentialbündel

$$\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \tag{2.16}$$

$$(p, V) \mapsto V \tag{2.17}$$

3. Tautologisches Bündel

$$\mathcal{M} = \mathbb{RP}^n \tag{2.18}$$

$$E = \{(l, x) | l \in \mathbb{RP}^n, x \in l \subset \mathbb{R}^{n+1}\} \tag{2.19}$$

$$\pi : E \rightarrow \mathcal{M} = \mathbb{RP}^n \tag{2.20}$$

$$(l, x) \mapsto l \tag{2.21}$$

Behauptung: Dies ist ein Vektorbündel vom Rang 1. Vektorraumstruktur auf E_l :

$$(l, x) + (l, y) := (l, x + y) \quad (2.22)$$

$$k(l, x) := (l, kx) \quad (2.23)$$

Nun wollen wir uns damit beschäftigen wie wir Vektorbündel konstruieren können. Angenommen uns wäre das folgende gegeben:

1. E_p (mit $p \in \mathcal{M}$) eine Familie von Vektorräumen der Dimension k
2. $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von \mathcal{M}
3. $\forall \alpha \in A, p \in U_\alpha$ gibt es den folgenden Isomorphismus:

$$\phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k \rightarrow E_p \quad (2.24)$$

Setze

$$E = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} E_p \quad (2.25)$$

$$\pi : E \rightarrow \mathcal{M} \quad (2.26)$$

$$(p, V) \mapsto p \quad (2.27)$$

$$\phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_{U_\alpha} \quad (2.28)$$

$$(p, \xi) \mapsto (p, \phi_{\alpha,p}(\xi)). \quad (2.29)$$

Nun stellt sich die Frage unter welchen Voraussetzungen (π, E, \mathcal{M}) ein Vektorbündel ist.

2.5 Lemma

Sei \mathcal{M} eine glatte Mannigfaltigkeit, E eine Menge und die Abbildung $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ surjektiv. Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von \mathcal{M} zusammen mit bijektiven Abbildungen

$$\phi_\alpha^{-1} = \varphi : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k, \quad (2.30)$$

die $\text{pr}_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$ erfüllen, so dass wann immer $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dann ist

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k, \quad (2.31)$$

von der Form:

$$(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(p, v) = (p, \tau(p)v) \quad (2.32)$$

mit einer glatten Abbildung $\tau : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$. Dann existiert eine eindeutige Struktur als glattes k -dim Vektorbündel über \mathcal{M} für die φ_α^{-1} lokale Trivialisierungen sind.

Beweis: (Lemma 2.5)

Sei $p \in \mathcal{M}$. Setze $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$. Falls $p \in U_\alpha$, dann ist

$$\varphi_\alpha|_p : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k. \quad (2.33)$$

Definiere eine Vektorraumstruktur auf E_p durch die Forderung, dass die Abbildung $\varphi_\alpha|_p$ ein Isomorphismus ist. Durch verkleinern von U_α und hinzunahme von weiteren offenen Mengen kann man annehmen, dass jedes U_α diffeomorph zu $\bar{U}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$ ist. Verknüpfung von φ_α mit einem solchen Diffeomorphismus liefert eine Bijektion:

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \bar{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k. \quad (2.34)$$

Diese nutzen wir als Karte für E . Wegen Gleichung 2.32 bekommen wir eine glatte Struktur auf E . \square

Sei (x, U) Karte von \mathcal{M} , $p \in U$, $v \in T_p\mathcal{M}$.

$$v = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \quad (2.35)$$

Definiere:

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m \quad (2.36)$$

$$v \mapsto (p, V) \quad (2.37)$$

Dort wo (x) und (\bar{x}) überlappen.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \left(\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_p \quad (2.38)$$

$$v = \sum_{j=1}^m \xi_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_p = \sum_{j=1}^m \xi_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_p \quad (2.39)$$

$$= \sum_{i,j} \xi_i \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_p \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow \bar{\xi}_j = \sum_i v_i \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \quad (2.41)$$

$$\varphi \circ \varphi^{-1}(x, v) = (x, \bar{v}) = (x, \tau(x), v) \quad (2.42)$$

Wobei nun $\tau(x)$ gegeben ist durch $\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i}$ Im Folgenden werden nun einige Beispiele für Vektorbündel angegeben.

2.2.1 Direkte Summe (Whitney-Summe)

Es seien zwei Vektorbündel gegeben:

$$\pi : E \rightarrow \mathcal{M} \quad (2.43)$$

$$\pi' : E' \rightarrow \mathcal{M}' \quad (2.44)$$

mit Rang k bzw. k' . Dann existiert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung, sodass für alle $\alpha \in A$ und alle $p \in U_\alpha$ folgendes gilt:

$$\phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k \rightarrow E_p, \quad g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}(k, \mathbb{R}) \quad (2.45)$$

$$\phi'_{\alpha,p} : \mathbb{R}^{k'} \rightarrow E'_p, \quad g'_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}(k', \mathbb{R}) \quad (2.46)$$

Wir definieren:

$$\mathcal{E}_p := E_p \oplus E'_p \quad (2.47)$$

$$\mathcal{E} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{E}_p \quad (2.48)$$

$$\Phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{k'} \rightarrow E_p \oplus E'_p \quad (2.49)$$

$$(v, w) \mapsto (\phi_{\alpha,p}(v), \phi'_{\alpha,p}(w)) \quad (2.50)$$

$$G_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}(k + k', \mathbb{R}) \quad (2.51)$$

$$p \mapsto \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(p) & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta}(p) \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

\mathcal{E} ist nun ein Vektorbündel. Wir nennen \mathcal{E} die Whitney-Summe von E und E' und schreiben:

$$\mathcal{E} = E \oplus E'. \quad (2.53)$$

2.2.2 Tensorbündel

Es seien E' und E'' Vektorbündel über \mathcal{M} und (U_α) sei wie oben definiert.

$$(E' \oplus E'')_p := E'_p \oplus E''_p \quad (2.54)$$

$$\phi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^{k''} \rightarrow E'_p \oplus E''_p \quad (2.55)$$

$$(v, w) \mapsto \phi'_{\alpha,p}(v) \oplus \phi''_{\alpha,p}(w) \quad (2.56)$$

Wir erhalten zusammen die folgende Übergangsmatrix:

$$g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta}(p) \oplus g''_{\alpha\beta}(p) \quad (2.57)$$

Diese Abbildung ist glatt und somit ergibt sich somit ein neues Vektorbündel.

2.2.3 Homomorphismenbündel

Es seien die Daten wie eben schon gegeben. Das Homomorphismenbündel

$$\text{Hom}_p := \text{Hom}(E'_p, E''_p) \quad (2.58)$$

ist wie folgt gegeben:

$$\phi_{\alpha p} : \text{Hom}(\mathbb{R}^{k'}, \mathbb{R}^{k''}) \rightarrow \text{Hom}(E'_p, E''_p) \quad (2.59)$$

$$f \mapsto \phi_{\alpha p} \circ f \circ (\phi'_{\alpha p})^{-1} \quad (2.60)$$

2.2.4 Duales Bündel

Sei ein Vektorbündel (π, E, \mathcal{M}) gegeben. Wir wollen nun das sogenannte duale Vektorbündel konstruieren. Hierbei führen wir folgende Notation ein $E^* = \text{Hom}(E, \mathbb{R})$. Hierbei ist \mathbb{R} das triviale Vektorbündel vom Rang 1. Ein wichtiges Beispiel ist hierbei das Kotangentialbündel $T^*\mathcal{M} = \text{Hom}(T\mathcal{M}, \mathbb{R})$. $T_p^*\mathcal{M}$ heißt der Kotangentialraum.

Sei $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung.

$$df|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \quad (2.61)$$

Es gilt $df|_p \in T_p^*\mathcal{M} \subset T^*\mathcal{M}$. Sei $x : U \rightarrow x(U)$ eine Karte

$$dx|_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.62)$$

Die so definierten Differentiale $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ bilden eine Basis für $T_p^*\mathcal{M}$.

- $dx^i|_p$ heißen Kotangentialvektoren
- $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ heißen Tangentialvektoren

Seien (x, U) und (y, U') zwei Karten um p .

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_j a_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}|_p, \quad a_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \quad (2.63)$$

$$dx^k = \sum_l b_l^k dy^l|_p = \sum_l \frac{\partial x^k}{\partial y^l} dy^l|_p \quad (2.64)$$

2.2.5 Alternierendes Vektorbündel

Das Alternierende Vektorbündel

$$\wedge^m(E', E'')_p := \wedge^m(E'_p, E''_p) \quad (2.65)$$

$$= \{f : \underbrace{E'_p \times \dots \times E'_p}_{n\text{-mal}} \rightarrow E''_p\} \quad (2.66)$$

Wobei f multilinear und alternierend ist.

$$\phi_{\alpha p} : \wedge^n(\mathbb{R}^{k'}, \mathbb{R}^{k''}) \rightarrow \wedge^n(E'_p, E''_p) \quad (2.67)$$

$$f \mapsto ((v_1, \dots, v_n) \mapsto \phi''_{\alpha p}(f(\phi_{\alpha p})^{-1}(v_1), \dots, f(\phi_{\alpha p})^{-1}(v_n))) \quad (2.68)$$

Es bleibt zu zeigen, dass $g_{\alpha\beta}$ glatt ist.

Es gilt

$$\wedge^1(E', E'') = \text{Hom}(E', E'') \quad (2.69)$$

$$\wedge^1(T\mathcal{M}, \mathbb{R}) = T^*\mathcal{M} \quad (2.70)$$

Definition 2.7 (Bündel-Abbildung)

Seien (π, E, \mathcal{M}) und (π', E', \mathcal{M}') Vektorbündel. Ein paar (f, L) von glatten Abbildungen $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ und $L : E \rightarrow E'$ heißt Bündelabbildung falls:

- $\pi' \circ L = f \circ \pi$
- $L|_{E_p}$ ist \mathbb{R} -linear

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}' \end{array} \quad (2.71)$$

Beispiel 2.8

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ glatte Mannigfaltigkeiten und $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ glatt. Dann ist (f, df) eine Bündel-Abbildung von $T\mathcal{M}$ nach $T\mathcal{M}'$.

Definition 2.9 (Unterbündel)

Sei (π, E, \mathcal{M}) ein Vektorbündel mit Rang k . Eine Untermannigfaltigkeit $E' \subset E$ ist ein Unterbündel vom Rang k' falls

$$\pi|_{E'} : E' \rightarrow \mathcal{M}, \quad (2.72)$$

Ein Vektorbündel ist.

Beispiel 2.10 (Unterbündel)

1. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$TS^n \cong \{(p, x) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} | x \perp p\} \subset \underbrace{S^n \times \mathbb{R}^{n+1}}_{\text{triviales Bündel}} \quad (2.73)$$

ist ein Unterbündel

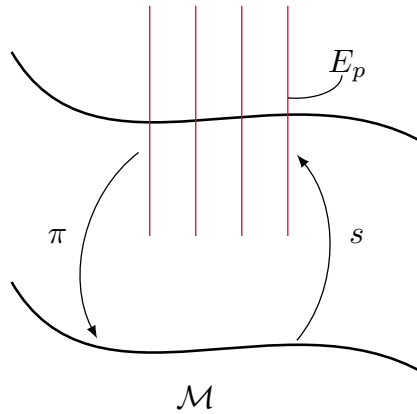
2. \mathbb{RP}^n mit dem tautologischen Bündel

$$\{(l, x) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} | x \in l\} \subset \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \quad (2.74)$$

ist ein Unterbündel.

Definition 2.11 (Schnitte von Vektorbündeln)

Sei (π, E, \mathcal{M}) ein Vektorbündel. Eine glatte Abbildung $s : \mathcal{M} \rightarrow E$ heißt Schnitt von E , falls $\pi \circ s = \text{id}|_{\mathcal{M}}$. Wir bezeichnen die Schnitte von E mit $\Gamma(E)$. Sei $U \subset \mathcal{M}$. Ein Schnitt von E über U ist eine Abbildung $s : U \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}_U$.



Beispiel 2.12 (Schnitte)

- Nullschnitt

$$s : \mathcal{M} \rightarrow E \quad (2.75)$$

$$p \mapsto 0 \in E_p \quad (2.76)$$

- Schnitte von $T\mathcal{M}$ heißen Vektorfelder. Wir bezeichnen die Vektorfelder $V : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ mit $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

2.13 Satz

Der Raum der Schnitte $\Gamma(E)$ ist ein Modul über $\mathcal{F}(\mathcal{M})$.

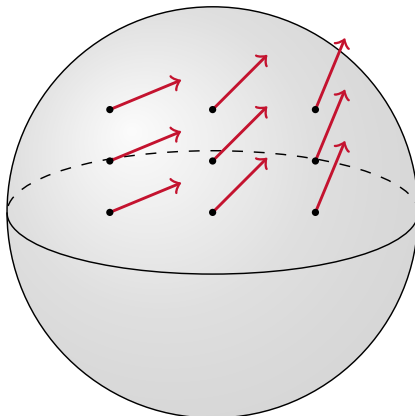


Abbildung 2.3: Beispiel für ein Vektorfeld

Beweis: (Satz 2.13)

Seien $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, so ist $s_1 + s_2 \in \Gamma(E)$

$$(s_1 + s_2)(p) := s_1(p) + s_2(p) \quad (2.77)$$

Sei $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, $s \in \Gamma(E)$, so ist $\phi \circ s \in \Gamma(E)$

$$(\phi \circ s)(p) := \phi(p)s(p). \quad (2.78)$$

□

2.15 Lemma

Sei (π, E, \mathcal{M}) ein Vektorbündel und $p \in \mathcal{M}$. Dann gilt für alle $x \in E_p$ existiert ein Schnitt $s \in \Gamma(E)$, so dass $s(p) = x$

Beweis:

Wähle eine lokale Trivialisierung von E auf $W \ni p$

$$\phi : W \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(W) = E|_W \quad (2.79)$$

und eine glatte Funktion $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ mit $\varphi(p) = 1$ und $\text{supp}(\varphi) \subset W$. Sei $\xi \in \mathbb{R}^k$, so dass $\phi(p, \xi) = x$. Definiere:

$$s(q) = \begin{cases} \phi(q, \varphi(q)\xi) & q \in W \\ 0_q & q \notin W \end{cases} \quad (2.80)$$

s ist glatt, da folgendes gilt:

- s ist glatt auf W
- s ist 0 auf einer Umgebung von $\mathcal{M} \setminus W$

$$s(p) = (\varphi(p), \varphi(p)\xi) = \varphi(p\xi) = x \quad (2.81)$$

□

Definition 2.17 (Lokaler Rahmen)

Sei (π, E, \mathcal{M}) ein Vektorbündel vom Rang k und $U \subset \mathcal{M}$. Ein Rahmen von E über U ist ein k -Tupel (s_1, \dots, s_k) von glatten Schnitten über U (das heißt $s_i \in \Gamma_i(E)$), so dass für alle $p \in U$ $s_1(p), \dots, s_k(p)$ eine Basis von E_p bilden.

2.18 Satz

Sei (π, E, \mathcal{M}) ein Vektorbündel vom Rang k .

1. Aus einem lokalen Rahmen folgt eine lokale Trivialisierung. Sei (s_1, \dots, s_k) ein lokaler Rahmen über $U \subset \mathcal{M}$. Dann ist

$$\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U \quad (2.82)$$

$$(p, \xi) \rightarrow \sum_{i=1}^k \xi_i s_i(p), \quad (2.83)$$

eine lokale Trivialisierung

2. Aus einer lokalen Trivialisierung folgt ein lokaler Rahmen. Sei $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U$ eine lokale Trivialisierung. Dann ist (s_1, \dots, s_k) ein lokaler Rahmen mit

$$s_i(p) = \phi(p, e_i). \quad (2.84)$$

Wobei $\{e_i\}$ die Standardbasis von \mathbb{R}^k ist.

Beweis: (Teil 1 Satz 2.18)

Es gilt, dass

$$\phi|_p : \{p\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_p \quad (2.85)$$

ein Isomorphismus ist. Außerdem hat

$$\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U, \quad (2.86)$$

maximalen Rang. Für alle p in U existiert eine Umgebung $V \subset U$ von p , so dass die folgende Abbildung eine lokale Trivialisierung ist:

$$\psi_V : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_V. \quad (2.87)$$

Dann gilt:

$$\psi_V^{-1} \circ \phi(q, \xi) = (q, \underbrace{\psi_q^{-1} \circ \phi_q(\xi)}_{\text{Isomorphismus}}) \quad (2.88)$$

$\psi_V^{-1} \circ \phi : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$ ist ein Diffeomorphismus. Daraus folgt, dass ϕ maximalen Rang auf V und U hat womit folgt, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist. □

Beweis: (Teil 2 Satz 2.18)

Diese Aussage ist sofort klar, da ϕ_p ein Isomorphismus ist. \square

Lokale Rahmen erlauben es uns mit Schnitten zu rechnen.

Definition 2.21 (Hauptteil)

Sei (s_1, \dots, s_k) ein lokaler Rahmen und ϕ die dazugehörige lokale Trivialisierung. Ferner sei $s \in \Gamma_U(E)$ über $U \subset \mathcal{M}$. Dann existiert eine glatte Abbildung

$$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad (2.89)$$

so dass

$$s(p) = \sum_{i=1}^k \sigma_i(p) s_i(p) \quad (2.90)$$

$$\phi(p, \sigma(p)) = s(p). \quad (2.91)$$

σ heißt der Hauptteil von s bezüglich ϕ .

Bemerkung: Die Aussagen σ ist glatt und s ist glatt sind äquivalent.

Sei (t_1, \dots, t_k) ein lokaler Rahmen über V und ψ die dazugehörige lokale Trivialisierung, so dass $U \cap V \neq \emptyset$. Über $U \cap V$ gilt:

$$s_i = \sum_j g_i^j t_j, \quad (2.92)$$

wobei $g_i^j : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$. Setze $g(p) = (g_i^j(p))_{i,j=1}^k$

$$g(p)(t_1(p), \dots, t_k(p)) = (s_1(p), \dots, s_k(p)) \quad (2.93)$$

$$g : U \cap V \ni p \rightarrow g(p) \in \text{GL}(E|_p) \quad (2.94)$$

sei $s \in \Gamma_{U \cap V}(E)$ und Hauptteile σ_ϕ, σ_ψ , dann ist

$$\sigma_\phi^i = \sum_{j=1}^k g_i^j \sigma_\psi^j \quad \sigma_\phi = g \sigma_\psi \quad g : U \cap V \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R}) \quad (2.95)$$

Definition 2.23 (Pullback)

Sei $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ ein Vektorbündel und $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ eine glatte Abbildung. Der Pullback von E über f ist das Vektorbündel f^*E welches definiert ist durch:

1. $(f^*E)_{p \in \mathcal{N}} = \{(p, x) | x \in E_{f(p)}\}$
2. sei $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U$ lokale Trivialisierung von E

$$f^* \phi : f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (f^*E)|_{f^{-1}(U)} \quad (2.96)$$

$$(p, \xi) \mapsto (p, \phi(f(p), \xi)) \quad (2.97)$$

Definition 2.24

Ein Schnitt von E entlang von f ist eine glatte Abbildung $\delta : \mathcal{N} \rightarrow E$, so dass $\pi \circ \delta = f$.

2.3 Zusammenhang und kovariante Ableitung

Definition 2.25 (Lie-Klammern)

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (2.98)$$

$$[x, y]f := x(y(f)) - y(x(f)) \quad (2.99)$$

Hier bleibt als Übung zu zeigen, dass $[x, y]$ tatsächlich ein neues Vektorfeld ist. Zusammen mit der Lie-Klammer ist $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ eine Lie-Algebra.

Definition 2.26 (Zusammenhang)

Sei (π, E, \mathcal{M}) ein Vektorbündel vom Rang k . Ein Zusammenhang auf E ist eine Abbildung

$$D : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \quad (2.100)$$

$$(x, s) \mapsto D(x, s) = D_x s \quad (2.101)$$

Wobei folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. D ist tensoriell in x :

$$D_{x_1+x_2} s = D_{x_1} s + D_{x_2} s \quad (2.102)$$

$$D_{\phi x} s = \phi D_x s \quad (2.103)$$

2. D ist eine Derivation in s :

$$D_x(s_1 + s_2) = D_x s_1 + D_x s_2 \quad (2.104)$$

$$D_x(\phi s) = x(\phi)s + \phi D_x s \quad (2.105)$$

Wir führen hier die folgende Notation ein: $D_x s$ heißt die kovariante Ableitung von s in Richtung x . Es gibt bei der kovarianten Ableitung den folgenden Spezialfall:

$$E = T\mathcal{M} \quad (2.106)$$

$$D : \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{\text{tensoriell}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{\text{derivativ}} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (2.107)$$

Beispiel 2.27

Sei $E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$ das triviale Bündel mit

$$s : \mathcal{M} \rightarrow E \quad (2.108)$$

$$p \mapsto (p, \sigma(p)) \quad (2.109)$$

wobei $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, $\sigma_i \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Dann ist der kanonische Zusammenhang gegeben als:

$$(D_x s)(p) = (p, x_p(\sigma_1), \dots, x_p(\sigma_k)) \quad (2.110)$$

Wir benutzen die folgende Notation: $D_x s = x(\sigma)$.

2.28 Lemma

$x_1, x_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und $x_1(p) = x_2(p)$, dann folgt daraus, dass

$$(D_{x_1}s)(p) = (D_{x_2}s)(p). \quad (2.111)$$

2.29 Lemma

$s_1, s_2 \in \Gamma(\mathcal{M})$ und $s_1 = s_2$ in einer Umgebung von p , daraus folgt, dass

$$(D_x s_1)(p) = (D_x s_2)(p). \quad (2.112)$$

Beweis: (Lemma 2.29)

Wähle $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ mit $\text{supp } \phi \subseteq U$ und $\phi = 1$ auf einer Umgebung $V \subset U$ von p . Dann gilt

$$\phi s_1 = \phi s_2 \quad (2.113)$$

$$D_x(\phi s_1)(p) = D_x(\phi s_2)(p) \quad (2.114)$$

Für die linke Seite ist

$$D_x(\phi s_1)(p) = \underbrace{x(p)}_{=0} s_1(p) + \underbrace{\phi(p)}_{=1} D_x s_1(p) = D_x s_1(p). \quad (2.115)$$

Das gleiche gilt für die rechte Seite und somit folgt die Aussage:

$$(D_x s_1)(p) = (D_x s_2)(p). \quad (2.116)$$

□

Als nächstes möchten wir Lemma 2.28 beweisen. Allerdings können wir gleich etwas allgemeineres beweisen wodurch Lemma 2.28 sofort klar ist.

2.31 Lemma

Sei $\mathcal{L} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$ eine tensorielle Abbildung. Tensoriell bedeutet hierbei, dass

$$\mathcal{L}(\phi s) = \phi \mathcal{L}(s), \quad \forall \phi \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \quad (2.117)$$

gilt. Sei weiterhin $p \in \mathcal{M}$ und $s, \tilde{s} \in \Gamma(E)$ mit $s(p) = \tilde{s}(p)$, dann gilt

$$\mathcal{L}(s)(p) = \mathcal{L}(\tilde{s})(p) \quad (2.118)$$

Lemma 2.28 folgt sofort aus diesem Lemma, da die Abbildung

$$D.s : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(E) \quad (2.119)$$

$$x \mapsto D_x s \quad (2.120)$$

tensoriell ist.

Beweis: (Lemma 2.31)

Sei U eine Umgebung von p und $\phi = (s_1, \dots, s_k)$ ein lokaler Rahmen auf U . Sei außerdem φ eine Bumpfunktion mit $\text{supp } \varphi \subset U$ und $\varphi(p) = 1$. Wir schreiben

$$s = \sum_{i=1}^k \sigma_i s_i, \quad \tilde{s} = \sum_{i=1}^k \tilde{\sigma}_i s_i \quad (2.121)$$

mit $\sigma_i(p) = \tilde{\sigma}_i(p)$.

$$\mathcal{L}(s)(p) = \varphi^2(p) \mathcal{L}(s)(p) \quad (2.122)$$

$$= \mathcal{L}(\varphi^2 s)(p) \quad (2.123)$$

$$= \sum_{i=1}^k \mathcal{L}((\varphi \sigma_i)(\varphi s_i))(p) \quad (2.124)$$

$$= \sum_{i=1}^k \varphi(p) \sigma_i(p) \mathcal{L}((\varphi s_i))(p) \quad (2.125)$$

Analog rechnet man mit \tilde{s}

$$\mathcal{L}(\tilde{s})(p) = \sum_{i=1}^k \varphi(p) \tilde{\sigma}_i(p) \mathcal{L}((\varphi s_i))(p). \quad (2.126)$$

Da $\sigma_i = \tilde{\sigma}_i$ und $\varphi(p) = 1$ folgt nun die Aussage

$$\mathcal{L}(s)(p) = \mathcal{L}(\tilde{s})(p). \quad (2.127)$$

□

Definition 2.33 (Tensorfeld)

Ein Tensorfeld vom Typ (n, s) ist ein glatter Schnitt des Bündels

$$T_s^n(\mathcal{M}) = \left(\bigotimes_{i=1}^n T\mathcal{M} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^s T^{s*}\mathcal{M} \right). \quad (2.128)$$

In anderen Worten ist ein Tensorfeld vom Typ (n, s) eine Abbildung

$$B : \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \dots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{s \text{ mal}} \rightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \dots \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})}_{n \text{ mal}}, \quad (2.129)$$

die tensoriell in jedem Argument ist.

Lemma 2.31 sagt uns, dass jede Abbildung B aus einem Vektorfeld kommt.

An dieser Stelle wollen wir noch einmal kurz einige Fakten über Tensoren sammeln. Ein Tensor vom Rang n ist:

$$t = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \quad (2.130)$$

Sei V ein Vektorraum. Dann gibt es eine Korrespondenz zwischen

1. bilineare Abbildung

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.131)$$

2. Tensoren

$$V^* \otimes V^* = (V \otimes V)^* \quad (2.132)$$

3. lineare Abbildungen

$$V \otimes V \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.133)$$

wie folgt: Seien $\xi, \eta \in V^*$ mit $\xi, \eta : V \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gibt es die folgende bilineare Abbildung

$$(\xi \otimes \eta)(v, w) = \xi(v)\eta(w). \quad (2.134)$$

Allgemeiner hat das Tensorprodukt die folgende Gestalt:

$$\left(\bigotimes^n V \right) \otimes \left(\bigotimes^s V^* \right) \quad (2.135)$$

Wir kehren nun wieder zu den Tensorfeldern zurück.

2.34 Korollar

Sei B ein Tensorfeld vom Typ (n, s) , dann induziert B für alle p eine s -lineare Abbildung:

$$B_p : T_p \mathcal{M}^s \rightarrow T_p \mathcal{M}^n \quad (2.136)$$

$$(v_1, \dots, v_s) \mapsto B_p(v_1, \dots, v_s) \quad (2.137)$$

Wir wollen nun wieder zu Zusammenhängen zurückkehren.

Beispiel 2.35 (Kanonischer Zusammenhang)

Wir wählen die Koordinaten wie folgt:

$$s(p) = (p, \sigma(p)), \quad s \in \Gamma(\mathcal{M} \times \mathbb{R}^k), \quad (2.138)$$

wobei $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ wobei $\sigma_i \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Dann ist der kanonische Zusammenhang wie folgt gegeben:

$$D_x s = (x(\sigma_1), \dots, x(\sigma_k)) \quad (2.139)$$

Sei ω eine 1-Form auf \mathcal{M} mit Werten in Matrizen $\text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R})$. Das bedeutet, dass

$$\omega \in \Gamma(\text{Hom}(T\mathcal{M}, \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R}))) \quad (2.140)$$

$$\omega_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R}) \quad (2.141)$$

$$\omega = (\omega_{ij})_{i,j=1}^k \quad (2.142)$$

ω_{ij} ist eine 1-Form auf \mathcal{M}

$$w_p^{ij} : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.143)$$

Definition 2.36

Mit einer 1-Form kann folgender Zusammenhang definiert werden:

$$(D_x^\omega s)(p) = (p, x_p(\sigma) + \omega_p(x_p)\sigma(p)) \quad (2.144)$$

2.37 Satz

Sei (E, π, \mathcal{M}) ein Vektorbündel und D ein Zusammenhang auf E . Weiterhin sei ω eine 1-Form mit Werten in $\text{Hom}(E, E)$. Dann ist

$$D_x^\omega s = D_x s + \omega(x)s, \quad (2.145)$$

ein Zusammenhang auf E

Umgekehrt gilt ebenso der folgende Satz:

2.38 Satz

Seien D und D' zwei Zusammenhänge auf E . Dann definiert

$$\omega(x)s = D'_x s - D_x s \quad (2.146)$$

eine 1-Form mit Werten in $\text{Hom}(E, E)$.

Beispiel 2.39

Sei $E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$.

$$D_x^\omega s = (p, x(\sigma) + \omega_p(x_p)\sigma_p) \quad (2.147)$$

Aus dem Satz von oben folgt, dass $D_x^\omega s$ alle Zusammenhänge auf E sind. Aus der Lokalisierung folgt

$$\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U. \quad (2.148)$$

Wir stellen uns die Frage wie wir Zusammenhänge mithilfe einer 1-Form finden können. Dies ist mithilfe von Zusammenhangsformen bezüglich eines lokalen Rahmens möglich. Sei $\phi = (s_1, \dots, s_k)$ ein lokaler Rahmen von E über U und sei $x \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Zudem sind $D_x s_1, \dots, D_x s_k \in \Gamma(E)$. Diese lassen sich wie folgt darstellen:

$$D_x s_i = \sum_{j=1}^k \omega_{ij}(x) s_j \quad (2.149)$$

Wobei die 1-Form $\omega_{ij}(x) : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und tensoriell in x ist. Es ist $s = \sum_i \sigma_i s_i$. Damit erhält man:

$$D_x s = \sum (x(\sigma_i) s_i + \sigma_i + \sigma_i D_x s_i) \quad (2.150)$$

$$= \sum_j x(\sigma_j) s_j + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \sigma_i \omega_{ij} s_j \quad (2.151)$$

$$= \sum_j \left[x(\sigma_j) + \sum_i \sigma_i \omega_{ij}(x) \right] s_j \quad (2.152)$$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Offene Menge	2
1.2	Hausdorff'sche Eigenschaft	3
1.3	Kartenwechsel	4
1.4	Visualisierung des Hilfslemmas (1.14) ("bump function")	7
2.1	Darstellung des Tangentialbündel eines Kreises	16
2.2	Veranschaulichung eines Vektorbündels	17
2.3	Beispiel für ein Vektorfeld	24