

Table des matières

1	Filtre de Kalman	3
1.1	Filtre de Kalman	3
1.2	Filtre de Kalman étendu	4
1.3	Application du EKF au tracking dans BONuS	5

Filtre de Kalman

Contents

1.1	Filtre de Kalman	3
1.2	Filtre de Kalman étendu	4
1.3	Application du EKF au tracking dans BONuS	5

1.1 Filtre de Kalman

Le Filtre de Kalman (KF) et son extension au temps continu appelé Filtre de Kalman-Bucy permettent de résoudre de façon optimale le problème du filtrage linéaire, quand les bruits du système sont additifs et gaussiens. Depuis 1960, le filtre de Kalman a été intensivement utilisé dans des applications diverses tel que l'aéronautique, la balistique etc., et a donné lieu à de nombreuses recherches.

L'algorithme de filtrage assume un système dynamique linéaire discret dans le temps dont l'évolution dynamique est modélisée à l'aide de l'équation d'état :

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_k \quad (1.1)$$

où $k \geq 0$ représente les instants successifs du temps, F_k est la matrice d'état (dimension $(n \times n)$), x_k est le vecteur des variables d'état (dimension $(n \times 1)$), B_k est la matrice d'entrée (dimension $(n \times l)$), u_k est le vecteur de contrôle (dimension $(l \times 1)$) et w_k est le bruit du système (dimension $(n \times 1)$) (moyenne nulle et distribution gaussienne).

Le filtre assume aussi la disponibilité d'un ensemble de mesures qui sont aussi une fonction linéaire des variables d'état :

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (1.2)$$

où H_k est la matrice de mesure et v_k est le bruit de la mesure non corrélée avec w_k (moyenne nulle et distribution gaussienne).

Le filtre de Kalman est un algorithme récursif qui exploite la connaissance du covariancé attendue des variables d'état pour corriger l'estimation a priori des deux l'état du système et la covariancé elle-même. L'algorithme peut être divisé en deux étapes (dans les équations suivantes, l'indice $k|k-1$ après une variable indique sa

valeur estimée avant la mise à jour de la mesure, tandis que l'indice $_{k|k}$ ou $_{k|k}$ indique l'estimation après la mise à jour).

Étape de prédiction : à cette étape, le vecteur d'état est prédit grâce au modèle du système :

$$x_{k|k-1} = F_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} \quad (1.3)$$

La matrice de covariance au temps k est aussi prédit :

$$P_{k|k-1} = F_{k-1}P_{k-1}F_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (1.4)$$

où Q_k est la matrice de covariance du bruit du système w_k dans l'équation 1.1

Étape de mise à jour : à cette étape, la prediction a priori est mise à jour en fonction des mesures :

$$x_k = x_{k|k-1} + K_k(z_k - H_k x_{k|k-1}) \quad (1.5)$$

et la matrice de covariance est aussi mise à jour :

$$P_k = (I - K_k H_k)P_{k|k-1} \quad (1.6)$$

La matrice K_k dans les équations 1.5 et 1.6 est la matrice de gain de Kalman optimal au temps k :

$$K_k = P_{k|k-1}H_k^T(H_k P_{k|k-1}H_k^T + R_k)^{-1} \quad (1.7)$$

où R_k est la matrice de covariance du bruit de mesure v_k dans l'équation 1.2.

1.2 Filtre de Kalman étendu

L'une des principales limitations du filtre de Kalman est le fait qu'il nécessite à la fois le système dynamique et les fonctions de mesure doivent être linéaires par rapport à la variables d'état. Dans de nombreuses applications pratiques, ces exigences ne sont pas satisfaites. Le filtre de Kalman étendu est une version modifiée du filtre de Kalman standard qui peut être appliqué lorsque le système et/ou le modèle de mesure sont non linéaires.

L'équation 1.8 est l'équation non linéaire qui décrit le modèle du système :

$$x_k = f_k(x_{k-1}) + w_k \quad (1.8)$$

L'équation du modèle de mesure non linéaire est :

$$z_k = h_k(x_k) + v_k \quad (1.9)$$

Étape de prediction :

$$x_{k|k-1} = f_k(x_{k-1}) \quad (1.10)$$

$$P_{k|k-1} = F_{k-1}P_{k-1}F_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (1.11)$$

Étape de mise à jour :

$$x_k = x_{k|k-1} + K_k(z_k - h_k(x_{k|k-1})) \quad (1.12)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (1.13)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (1.14)$$

où F_k et H_k représentent les matrices jacobiniennes de f_k et h_k . Soit $F_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ et $h_k = \frac{\partial h}{\partial x_k}$.

1.3 Application du EKF au tracking dans BONuS