ANÁLISIS FUNCIONAL

→ Espacio normado (Stefan Banach, 1920).

E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$; $p: E \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(1)\ p(x)\geq 0\ \forall x\in E\\ (2)\ p(x+y)\leq p(x)+p(y)\\ (3)\ p(\lambda x)=|\lambda|p(x)\end{array}\right]\text{seminorma}\\ (4)\ p(x)=0 \Longleftrightarrow x=0\end{array}\right]\begin{array}{l}\text{norma}\\ p(x)=\|x\|\end{array}$$

Distancia inducida: $d_{\|\cdot\|}(x,y)=\|x-y\|$ ⇝ Cumple los axiomas de distancia. $d_{\|\cdot\|}(x+z,y+z)=d_{\|\cdot\|}(x,y)$, $d_{\|\cdot\|}(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|d_{\|\cdot\|}(x,y)$.

Si d es una distancia que cumple los dos puntos anteriores, $\|x\|=d(x,0)$ es una norma.

→ $A\subset E$ → $\langle A\rangle$ es el subespacio vectorial generado por A:

$\left\{\sum_{i\in I}\lambda_i a_i : I \text{ finito},\ \lambda_i\in\mathbb{K},\ a_i\in A\right\}$; $[A]=\overline{\langle A\rangle}$.

$B_{\|\cdot\|}(E)=\{x\in E: \|x\|\leq 1\}$, $S_{\|\cdot\|}(E)=\{x\in E: \|x\|=1\}$.

→ $\|\cdot\|:(E,d_{\|\cdot\|})\to\mathbb{R}$ es continua uniforme: $\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\| = d_{\|\cdot\|}(x,y)$. $S:E\times E\to E$, $(x,y)\mapsto x+y$, $M:\mathbb{K}\times E\to E$, $(\lambda,x)\longmapsto\lambda x$ son continuas: $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$, $\|(x_n+y_n)-(x_0+y_0)\|\leq\|x_n-x_0\|+\|y_n-y_0\|\xrightarrow{n}0$; $\lambda_n\to\lambda_0$, $\|\lambda_n x_n-\lambda_0x_0\|\leq\underbrace{|\lambda_n|}_{\text{acot.}}\underbrace{\|x_n-x_0\|}_{\to 0}+\underbrace{|\lambda_n-\lambda_0|}_{\to 0}\underbrace{\|x_0\|}_{\text{cte}}\longrightarrow 0$

En consecuencia, $\{a + rB(E) : r>0\}$ es una base de entornos de a.

$\rightarrow$ $T_a : x \longmapsto a+x$, traslación, $(T_a^{-1}) = T_{-a}$; homeomorfismo.

$\lambda \neq 0$. $M_\lambda : x \longmapsto \lambda x$, $(M_\lambda)^{-1} = M_{1/\lambda}$ $\rightsquigarrow$ homeomorfismo.

$\rightarrow$ Si F es un s.v de E, entonces $\overline{F}$ es también s.v.

$\rightsquigarrow$ $\left| \begin{array}{l} x,y \in \overline{F} \\ \alpha,\beta \in K \end{array} \right.$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\alpha x + \beta y \in \overline{F}$. $\exists (x_n) \subset F$, $(y_n) \subset F$, $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. $(x,y) \longmapsto \alpha x + \beta y$ es continua, luego $\alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha x + \beta y$. $(\alpha x_n + \beta y_n) \subset F \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \overline{F}$.

$\rightarrow$ Todo hiperplano en un espacio normado es o bien cerrado o bien denso $\longrightarrow$ $H \subset E$ propio y maximal. $H \subset \overline{H} \subset E \rightsquigarrow$
$\left| \begin{array}{l} H = \overline{H} \rightsquigarrow H \text{ cerrado} \\ \overline{H} = E \rightsquigarrow H \text{ denso}. \end{array} \right.$

El núcleo de una forma lineal continua es cerrado. El núcleo de una forma lineal no continua es denso.

$\rightarrow$ Dos normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si $(E, \|\cdot\|_1) \xrightarrow{id} (E, \|\cdot\|_2)$ es un homeomorfismo.

$\rightarrow$ $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si es completo como espacio métrico. Ej: K^n con $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

$X \neq \phi$. $\mathcal{B}(X) = l_\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{K} : f(X)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{K}\} \rightsquigarrow$ subespacio vectorial de $\mathbb{K}^X$. $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty$.

$(f_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ quiere decir que $\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \xrightarrow{n} 0$ (convergencia uniforme) $\rightsquigarrow$ espacio de Banach de dimensión infinita si X es infinito.

$\longrightarrow$ Sea (f_n) de Cauchy. $x_0 \in X \rightsquigarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, luego $(f_n(x_0))$ es de Cauchy en $\mathbb{K} \rightsquigarrow \exists f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. ¿Es f de $l_\infty(X)$? $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \exists N \mid \forall n, m \geq N$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x \in X$, fijado x, $|f_n(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon$, y cuando $n \to \infty$, $|f(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon$, $|f(x)| \leq |f_N(x)| + \varepsilon \leq \|f_N\|_\infty + \varepsilon$ acotado. $\|f - f_m\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - f_m(x)| \overset{m \geq N}{\leq} \varepsilon \rightsquigarrow f_m \xrightarrow{m} f$.

X espacio topológico $\neq \phi$. $C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{K}$ continua y acotada$\} \overset{s.v.}{\subset} l_\infty(X) \rightsquigarrow$ con $\|\cdot\|_\infty$ es Banach.

X compacto $\rightsquigarrow C_b(X) = \mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{K} : f$ continua$\}$

X loc. comp y $T_2 \rightsquigarrow C_0(X) = \{f : X \to \mathbb{K}$ continua y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0\}$, $\overset{*}{X} = X \cup \{\infty\}$

X T_2, $C_{0,0}(X) = \{f : X \to \mathbb{K}$ continua que se anula fuera de un compacto $K_f\} \overset{s.v}{\subset} C_0(X)$. Si $X = \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$, $f \in C_0(\mathbb{R})$ pero $f \notin C_{0,0}(\mathbb{R})$; se puede aproximar arbitrariamente por funciones de $C_{0,c}(\mathbb{R})$. $C_{00}(\mathbb{R}) \subsetneq \overline{C_{0,c}(\mathbb{R})} = C_0(\mathbb{R})$, luego $C_{00}(\mathbb{R})$ no es Banach.

$X = \mathbb{N} \rightsquigarrow l_\infty(\mathbb{N}) = \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K},\ n \longmapsto x(n) : \sup_n |x(n)| < \infty\} = l_\infty$.
$C_0(\mathbb{N}) = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \longrightarrow 0\} = C_0$. $C_{00}(\mathbb{N}) = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n = 0$ salvo para un número finito de puntos$\} = \langle \overbrace{\chi_{\{n\}}}^{e_n}, n \in \mathbb{N} \rangle = C_{0,c}$

$\mathcal{P} \subset C_{\mathbb{R}}[0,1]$ polinomios, $\mathcal{P} \ni p \xrightarrow{\delta_2} p(2) \in \mathbb{R}$ es lineal pero no continua: $p_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n$, $\|p_n\|_\infty = \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$, $\delta_2(p_n) = 1$.

$\longrightarrow$ E espacio vectorial. A es generador si $\langle A \rangle = E$. A es linealmente independiente si todo subconjunto finito es l.i. A es base si es a la vez generador y linealmente independiente.

En dimensión infinita: el conjunto de los $A \subset E$ linealmente independiente ordenado por la inclusión es un conjunto parcialmente ordenado e inductivo (toda cadena tiene una cota superior); por el lema de Zorn, existe un elemento maximal, que será base de E. Además todas las bases de E tienen el mismo cardinal.

$\longrightarrow$ Teorema de Weierstrass (1885): si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\varepsilon > 0$, $\exists$ un polinomio p_ε con $\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$.
En $\mathbb{C}$ no se cumple, pues el límite uniforme de polinomios sobre cualquier compacto debe ser holomorfo. (Tma. Weierstrass).

$\rightarrow K$ compacto, $E = (C_{\mathbb{R}}(K), \|\cdot\|_\infty)$. $A \overset{s.v.}{\subset} E$ es un subretículo si $f, g \in A \Rightarrow \begin{cases} f \vee g = \max(f,g) \in A \\ f \wedge g = \min(f,g) \in A \end{cases}$

$$|f| = f \vee 0 - f \wedge 0, \quad \begin{cases} f \vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \\ f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|) \end{cases}$$

Así, A (s.v.) es subretículo $\Leftrightarrow [f \in A \Rightarrow |f| \in A]$.

$\rightarrow$ A distingue puntos si siempre que $s \neq t$, $s,t \in K$, $\exists f \in A$ con $f(s) \neq f(t)$.

$\rightarrow$ A distingue puntos fuertemente si dados $s \neq t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\exists f \in A$, $f(s) = \alpha$, $f(t) = \beta$.

$\rightarrow$ Si A (s.v.) distingue puntos y $\mathbb{1} \in A$, entonces A distingue puntos fuertemente $\longrightarrow f(s) \neq f(t) \rightsquigarrow$ tomamos
$$g(x) = \alpha \cdot \mathbb{1} + \frac{\beta - \alpha}{f(t) - f(s)}[f(x) - f(s)] \in A.$$

$\rightarrow$ Si A es un subretículo de $C_{\mathbb{R}}(K)$ que separa puntos fuertemente, entonces A es denso en $(C_{\mathbb{R}}(K), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow$
$f \in C_{\mathbb{R}}(K)$, $\varepsilon > 0$. Sea $t \in K$. $\forall s \in K \setminus \{t\}$ $\exists g_s \in A \mid g_s(s) = f(s)$, $g_s(t) = f(t)$. $U(s) = \{x \in K : g_s(x) > f(x) - \varepsilon\} \supset \{s,t\} \rightsquigarrow$ $K \subset U(s_1) \cup \dots \cup U(s_n)$. $h_t = g_{s_1} \vee \dots \vee g_{s_n} \in A$. $h_t(t) = f(t)$, y $\forall s \in K$, $h_t(s) > f(s) - \varepsilon$.

AFS

$V(t) = \{x \in K : h_t(x) < f(x) + \varepsilon\} \supset \{t\} \rightsquigarrow K \subset V(t_1) \cup \dots \cup V(t_\ell)$,

$g = h_{t_1} \wedge \dots \wedge h_{t_\ell} \in A$. $f(s) + \varepsilon > g(s) > f(s) - \varepsilon$ $\forall s \in K$, luego g es la función buscada.

$\longrightarrow$ Toda subálgebra cerrada de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ es un subretículo.

Si demostramos esto, como corolario se tiene:

$\longrightarrow$ Tma. Stone-Weierstrass: toda subálgebra de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ que distinga puntos fuertemente es densa en $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K), \|\cdot\|_\infty)$. De aquí se deriva, por ejemplo, que los polinomios son densos en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$

$\longrightarrow$ Sea A una subálgebra cerrada. $f \in A \overset{?}{\Rightarrow} |f| \in A$.

$|f| = \sqrt{f^2} \rightsquigarrow$ Basta probar que si $g \in A$, $g \geq 0$, entonces $\sqrt{g} \in A$.

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $\mathbb{1} \in A$ a) $g > 0 \rightsquigarrow 0 < \delta \leq g < 1 < 2 - \delta$, pasando a $\dfrac{g}{2\|g\|_\infty}$. $g \overset{?}{=} (\mathbb{1} - f)^2 = \mathbb{1} - 2f + f^2$, $f = \frac{1}{2}\left[(\mathbb{1} - g) + f^2\right]$. $T(f) = \frac{1}{2}\left[(\mathbb{1} - g) + f^2\right]$; ¿tiene T algún punto fijo en A? $h = \mathbb{1} - g \in A$,

$\|h\|_\infty \leq 1 - \delta = \alpha < 1$, $h \in A \cap \{v \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K) : \|v\| \leq \alpha\} = H$ cerrado. Vamos a ver que $T : H \longrightarrow H$ es contractiva. $\|T(f)\| = \frac{1}{2}\|h + f^2\| \leq \frac{1}{2}[\alpha + \alpha] = \alpha$.

$\|T(f_1) - T(f_2)\| = \frac{1}{2}\|f_1^2 - f_2^2\|_\infty = \frac{1}{2}\|(f_1 - f_2)(f_1 + f_2)\| \leq \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\| \cdot 2\alpha = \overset{<1}{\alpha}\|f_1 - f_2\|$. Así, $\exists! f \in H \mid T(f) = f \rightsquigarrow g = (\mathbb{1} - f)^2$.

b) $g \geq 0$. $g_n = g + \frac{1}{n} > 0$. $\sqrt{g + \frac{1}{n}} \in A$, $\sqrt{g + \frac{1}{n}} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \sqrt{g} \in A$, pues A es cerrado.

$\boxed{\text{CASO 2}}$ $\mathbb{1} \notin A$. $A' = A \oplus \langle \mathbb{1} \rangle$ subálgebra: $(f+\alpha \mathbb{1})(g+\beta\mathbb{1}) = \underbrace{fg + (\alpha g + \beta f)}_{\in A} + \underbrace{\alpha\beta \mathbb{1}}_{\in\langle \mathbb{1}\rangle}$. ¿Seguirá siendo A' cerrado? $(f_n + \alpha_n \mathbb{1}) \longrightarrow h$, ¿$h\in A'$? 1) α_n son acotadas. Si no, $\exists\, \alpha_{n_k} \uparrow \infty$, $\frac{1}{\alpha_{n_k}}(f_{n_k}+\alpha_{n_k}\mathbb{1}) \longrightarrow \frac{h}{\alpha_{n_k}} \equiv 0 \rightsquigarrow -\frac{f_{n_k}}{\alpha_{n_k}} \longrightarrow \mathbb{1}\in A$ contra lo supuesto. Así, hay una subsucesión convergente, $(\alpha_{n_k})\longrightarrow\alpha$. $(f_{n_k}+\alpha_{n_k}\mathbb{1})\longrightarrow h$, $f_{n_k} = (f_{n_k}+\alpha_{n_k}\mathbb{1}) - \alpha_{n_k}\mathbb{1} \longrightarrow h-\alpha\mathbb{1} = f\in A \rightsquigarrow h = f+\alpha\mathbb{1}\in A'$.

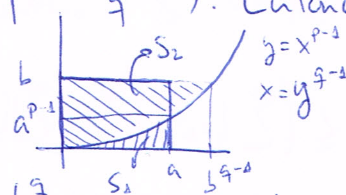
Con esto, A' es cerrado, $\sqrt{g}\in A'$. ¿Y en A? $\sqrt g = f+\alpha\mathbb{1} \rightsquigarrow$

$\underbrace{g}_{\in A} = \underbrace{f^2+2\alpha f}_{\in A} + \alpha^2 \underbrace{\mathbb{1}}_{\notin A} \longrightarrow \alpha=0$, $\sqrt g\in A$.

$\longrightarrow$ Los polinomios $\mathcal{P}$ son un subespacio de $C_{\mathbb R}[0,1]$, por el Lema de Zorn está contenido en un hiperplano: $\mathcal P\subset H\subset C_{\mathbb R}[0,1]$. H no puede ser cerrado, pues $\overline{\mathcal P} = C_{\mathbb R}[0,1]$, luego es denso.

$\longrightarrow$ Algunas desigualdades.

(DY) Desigualdad de Young. $a,b\ge 0$, $p>1$, q nº conjugado de p: $\frac1p+\frac1q = 1$ $\left(q-1 = \frac qp,\ (p-1) = \frac pq, \dots\right)$. Entonces $ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, con igualdad si y sólo si $a^p = b^q$.



$S_1 = \int_0^a x^{p-1} = \frac{a^p}{p}$, $S_2 = \int_0^b y^{q-1} = \frac{b^q}{q}$. $ab \le S_1+S_2 = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, con igualdad si y sólo si $a = b^{\overbrace{q-1}^{q/p}} \rightsquigarrow a^p = b^q$.

(DH) Desigualdad de Hölder. $(a_n), (b_n) \geq 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{N} b_n^q \right)^{\frac{1}{q}},$$ con igualdad sii $\exists c \geq 0 \mid c a_n^p = b_n^q \ \forall n$.

($p = q = 2 \rightsquigarrow$ Desigualdad de Cauchy-Schwarz). $A = \sum a_n^p$, $B = \sum b_n^q$.

Si $A = 0$ o $B = 0$, se cumple. $A, B \neq 0 \rightsquigarrow \frac{a_n}{A^{1/p}} \frac{b_n}{B^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_n^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{b_n^q}{B}$

$\Rightarrow \frac{\sum_1^N a_n b_n}{A^{1/p} B^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1 \rightsquigarrow \sum_1^N a_n b_n \leq A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}$. Para la igualdad, se debe dar igualdad $\frac{a_n^p}{A} = \frac{b_n^q}{B} \ \forall n \rightsquigarrow \exists c \geq 0 \mid c a_n^p = b_n^p$.

Tomando supremos, $\sum_1^\infty a_n b_n \leq \left(\sum_1^\infty a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_1^\infty b_n^q \right)^{\frac{1}{q}}$.

(DM) Desigualdad de Minkowski. $(a_n) \subset \mathbb{C}$, $p \geq 1$.

$$\left(\sum |a_n + b_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$ con igualdad ($p > 1$) sii $\exists c \geq 0 \mid a_n = c b_n \ \forall n$. $p = 1 \rightsquigarrow$ desigualdad triangular. $p > 1$:

$$\sum |a_n + b_n|^p = \sum |a_n + b_n| |a_n + b_n|^{p-1} \overset{\text{DTriang.}}{\leq} \sum |a_n| |a_n + b_n|^{p-1} +$$
$$+ \sum |b_n| |a_n + b_n|^{p-1} \overset{\text{DH}}{\leq} \left(\sum |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_n + b_n|^{\overbrace{(p-1)q}^{p}} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\left(\sum |a_n + b_n|^{\overbrace{(p-1)q}^{p}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$ Si $\sum |a_n + b_n|^p = 0$, el resultado es obvio. Si $\sum |a_n + b_n|^p \neq 0$, $\left(\sum |a_n + b_n|^p \right)^{\overbrace{1 - \frac{1}{q}}^{1/p}} \leq \left(\sum |a_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. La igualdad en DTriang, DH nos dan $a_n = c b_n \ \forall n$.

Para $p < 1$ no se cumple la desigualdad de Minkowski.

Sí que se cumple $\sum |a_n+b_n|^p \le \sum |a_n|^p + \sum |b_n|^p$.

$\longrightarrow$ Espacios l_p. $1 \le p < \infty$. $l_p = \{x=(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty\} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. ¿Es l_p subespacio? $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_n |\lambda x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. $\|x+y\|_p = \left(\sum_n |x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_n |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \rightarrow l_p$ cerrado para sumas y productos por escalares. De igual modo $\|\cdot\|_p$ es norma.

$(l_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach. Sea $(\zeta_n) \subset l_p$, $\zeta_n = (x_n(m))_{m=1}^{\infty}$ de Cauchy. ¿Es convergente? $|x(k)| \le \left(\sum_1^{\infty} |x(j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$ $\forall x \in l_p$, $\forall k \in \mathbb{N}$; $|x_n(k) - x_m(k)| \le \|\zeta_n - \zeta_m\|_p$, luego $x_n(m)$ converge en $\mathbb{K}$ para cada $m \rightarrow \overset{\zeta}{x}(m) = \lim_n x_n(m)$.

Sea $\varepsilon > 0 \rightarrow \exists N : n,m \ge N \Rightarrow \|\zeta_n - \zeta_m\|_p \le \varepsilon^{1/p}$, $\sum_{k=1}^{R} |x_n(k) - x_m(k)|^p \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_m(k)|^p \le \varepsilon$. Cuando $m \rightarrow \infty$, $\sum_{k=1}^{R} |x_n(k) - x(k)|^p \le \varepsilon$. Cuando $R \rightarrow \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x(k)|^p \le \varepsilon \Rightarrow \zeta_n - \zeta \in l_p$, $\zeta \in l_p$ y además, $\|\zeta_n - \zeta\|_p \le \varepsilon$ si $n \ge N$, luego $\zeta_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} \zeta$ y l_p es espacio de Banach.

→ f continua en $[a,b]$, $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$; por (DH) punto a punto, $\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(t)|}{\|g\|_p} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}$; integrando en $[a,b]$,

$$\frac{\int |fg|}{\|f\|_p\|g\|_p} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \rightsquigarrow \int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

desigualdad de Hölder para funciones. Desigualdad de Minkowski:

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Espacios L^p. $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f$ medible y $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty\}$ ⇝ seminorma; al hacer el cociente por la relación de equivalencia "ser igual en c.t.p." obtenemos los espacios de Banach $(L^p, \|\cdot\|_p)$.

→ Sean E, F espacios normados y $T : E \to F$ lineal.
Son equivalentes:

a) T es uniformemente continua
b) T es continua
c) T es continua en $a \in E$
d) T es continua en 0
e) T es acotada, $T(B(E))$ acotado en F
f) $\exists M > 0 \mid \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E \ \forall x \in E$
g) T es Lipschitziana.

$\longrightarrow$ a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). c) $\Rightarrow$ d): $x_n \to 0 \rightsquigarrow x_n + a \to a$, $T(x_n+a) \to T(a) \rightsquigarrow T(x_n) + T(a) \to T(a)$, $T(x_n) \to 0$ ✓

d) $\Rightarrow$ e) Por la continuidad en 0, $T^{-1}(B(F))$ es abierto $\rightsquigarrow \exists R > 0 \mid$ $RB(E) \subset T^{-1}(B(F)) \Rightarrow T(RB(E)) = RT(B(E)) \subset B(F)$, $T(B(E)) \subset \frac{1}{R} B(F)$; tomando $M = \frac{1}{R}$ tenemos lo que queremos.

e) $\Rightarrow$ f) $\|T(x)\| \leq M \; \forall x, \|x\| \leq 1$; si $y \in E \setminus \{0\}$, $x = \frac{y}{\|y\|} \in B(E) \rightsquigarrow$ $\frac{1}{\|y\|}\|T(y)\| \leq M$, $\|T(y)\| \leq M\|y\|$.

f) $\Rightarrow$ g) $\Rightarrow$ a) Comprobación.

$\longrightarrow$ Un isomorfismo topológico entre E y F e. normados es un isomorfismo que es homeomorfismo (T y T^{-1} continuas).

Caracterización de isomorfismos topológicos. $T: E \to F$ lineal es isomorfismo top. si y sólo si

1) T es sobreyectiva
2) $\exists m, M > 0 \mid m\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$

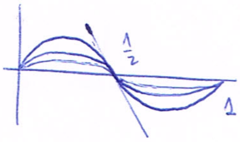
$\longrightarrow$ Si T es isomorfismo top, 1) y 2) se cumplen trivialmente. Recíprocamente, de 2) sale la inyectividad y la continuidad de T y T^{-1}.

Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre E son equivalentes ($id: (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ isom. top.) si y sólo si $\exists m, M > 0$ con $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$.

La completitud no es un invariante topológico, sino que depende de la métrica: $\mathbb{R} \cong (0,1)$; con la distancia usual de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ es completo y $(0,1)$ no.

La continuidad uniforme de los isomorfismos topológicos sí que preserva la completitud; si E y F espacios normados son isomorfos topológicamente y E es Banach, F también. Las sucesiones de Cauchy se conservan por $m\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Ej: $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{T} \mathbb{K}$, $f \mapsto f'(\frac{1}{2}) \rightsquigarrow$ es una aplicación discontinua:



, o por ejemplo $\left\{\frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

$E,F \rightsquigarrow \mathcal{L}(E,F) = \{T: E \to F, T \text{ lineal y continua}\} \overset{s.v.}{\subset} L(E,F) \overset{s.v.}{\subset} F^E$

$T \in \mathcal{L}(E,F) \rightsquigarrow \|T\| = \underbrace{\inf\{M>0 : \|T(x)\| \leq M\|x\| \ \forall x \in E\}}_{A} < +\infty$.

$B = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$, $C = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$, $D = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}$.

Es evidente que $B = C$; $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \to C = D$. $A \geq B$; si $D \geq A$, tenemos toda la igualdad. $\|T(x)\| \leq D\|x\| \ \forall x \neq 0$ y también para $x = 0$ $\to D \in \{M>0 : \|T(x)\| \leq M\|x\| \ \forall x \in E\} \rightsquigarrow D \geq A$. Con estas igualdades, es fácil comprobar que $\|\cdot\|$ es norma en $\mathcal{L}(E,F)$. Si $F = \mathbb{K}$, $\mathcal{L}(E,\mathbb{K}) =$

E' dual topológico $\subset E^*$ dual algebraico.

$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \equiv \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T(x)\| \to 0 \leadsto$ Convergencia uniforme sobre acotados, más fuerte que la convergencia uniforme sobre compactos.

$T : (c_0, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{K}$, $x = (x_n) \mapsto x_1 + x_3$. $|T(x)| \leq |x_1| + |x_3| \leq 2\|x\|_\infty$ $\Rightarrow \|T\| \leq 2$; en este caso se da la igualdad: $e_1 + e_3 = (1, 0, 1, 0, \dots)$ $\in B(c_0)$, $\|T\| \geq |T(e_1 + e_3)| = |2| = 2 \leadsto \|T\| = 2$.

$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n \leadsto$ norma 1 aunque no se alcanza.

$\to$ Productos finitos de espacios normados. $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. $(x,y) \in E \times F \leadsto$ Definimos $\|(x,y)\|_\infty =$ $= \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$. Es fácil ver que es norma; si $a \in E$, $b \in F$, $(a,b) + r B(E \times F) = \{(x,y) : \|x - a\|_E \leq r, \|y - b\|_F \leq r\} = [a + rB(E)] \times [b + rB(F)]$. Así, la topología inducida por $\|\cdot\|_\infty$ es la topología producto.

También se puede tomar $\|(x,y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F$; $\|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_1 \leq 2\|(x,y)\|_\infty \to$ Las normas son equivalentes. Igualmente para $\|(x,y)\|_p = \left[\|x\|_E^p + \|y\|_F^p\right]^{1/p}$ $(p \geq 1)$

$\to$ Cocientes. E espacio normado, F subespacio vectorial de E, $E \xrightarrow{\pi} E/F$, $x \mapsto \pi(x) = x + F$. Para que E/F tenga estructura de

e. normado con la misma topología inducida por π, hace falta que F sea cerrado, pues si no, E/F no es Hausdorff ($\pi^{-1}(0) = F \rightsquigarrow \{0\}$ no es cerrado)

E e.n., F s.v. cerrado, $\|\pi(x)\| = \inf\{\|x-m\| : m \in F\} = \operatorname{dist}(x, F)$

1) $\|\pi(x)\|$ es una norma en E/F

2) π es continua, abierta y $\|\pi\| \leq 1$

3) Si E es Banach, también lo es E/F.

$\longrightarrow$ $\|\lambda\pi(x)\| = |\lambda|\,\|\pi(x)\|$, $\|\pi(x)+\pi(y)\| = \|\pi(x+y)\| \leq \|\pi(x)\| + \|\pi(y)\|$ por las propiedades de distancias entre conjuntos. Por ser F cerrado, $\|\pi(x)\| = 0 \iff \pi(x) = 0$ ($\equiv x \in F$).

Si F no es cerrado, tenemos una seminorma.

π es lineal. ¿Es continua? $0 \in F \rightsquigarrow \|\pi(x)\| \leq \|x\| \overset{+\,\pi \text{ lineal}}{\rightsquigarrow}$ π continua y $\|\pi\| \leq 1$. ¿Es π abierta? Sólo hay que comprobarlo para la bola unidad. $\pi\underbrace{\{x : \|x\| < 1\}}_{U(E)} \overset{?}{=} \{\pi(y) : \|\pi(y)\| < 1\}$. $\subset$ es trivial; sea $\pi(y)$ con $\|\pi(y)\| < 1 \rightsquigarrow \exists\, x \in \pi(y) \,/\, \|x\| < 1$, y $\pi(y) = \pi(x)$. En general esto no funciona para bolas cerradas.

$G \subset E$ abierto $\rightarrow$ ¿$\pi(G)$ abierto? Sea $\pi(g) \in \pi(G)$ con $g \in G$ $\rightsquigarrow \exists\, r > 0$, $g + rU(E) \subset G$, $\pi(g) + r\underbrace{\pi(U(E))}_{U(E/F)} \subset \pi(G)$ y $\pi(G)$ es abierto.

$$\|\pi\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\pi(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|\pi(x)\| = \begin{cases} 1 & \text{si } E\neq F \\ 0 & \text{si } E=F \end{cases}$$

Supongamos que E es Banach, $(\pi(x_n))\subset E/F$ de Cauchy. Tomamos $n_1<n_2<\dots$ con $\|\pi(x_n)-\pi(x_m)\|<\frac{1}{2^{k+1}}$ si $n,m\geq n_k$.
$\|\pi(x_{n_k}-x_{n_{k-1}})\|<\frac{1}{2^k}$ $\forall k$, $\exists y_k \mid \pi(y_k)=\pi(x_{n_k}-x_{n_{k-1}})$ con $\|y_k\|<\frac{1}{2^k}$, $\pi(y_1)=\pi(x_{n_1})$, $z_m = y_1+\sum_{k=2}^{m} y_k$; $\pi(z_m) = \pi(x_{n_1})+\pi(x_{n_2}-x_{n_1})+\dots+\pi(x_{n_m}-x_{n_{m-1}})$
$=\pi(x_{n_m})$, $\|z_m - z_{m+p}\| = \|\sum_{k=m+1}^{m+p} y_k\| < \sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2^m}\xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. $(z_n)\subset E$ es de Cauchy; $\exists \lim_{m\to\infty} z_m = z$, $\pi(z) \overset{\pi \text{ continua}}{=} \lim_{m\to\infty}\pi(z_m) = \lim_{m\to\infty}\pi(x_{n_m})$,
y como $(\pi(x_n))$ es de Cauchy, $\pi(x_n)\xrightarrow{n}\pi(z)$. Así, E/F es Banach.

Producto infinito: no se puede definir una norma porque cualquier entorno de 0 tendría subespacios propios: $V_1\times V_2\times\dots\times V_n\times E_{n+1}\times\dots$, y habría vectores de norma arbitrariamente grande que no están en una bola abierta.

$\longrightarrow$ Teorema de Hahn-Banach:
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed, "\widetilde{T}"] \arrow[d, shift right, "P_F"'] & G \\ F \arrow[u, shift right, "i"'] \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow$ Se puede encontrar un complementario lineal H, $E=F\oplus H$, pero a veces P_F no es continua, aunque sí sea lineal. Si existe H con P_F

continua, se dice que F admite complementario topológico.

$c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$ no posee complementario topológico, y no admite extensión $\tilde{I}$. Sin embargo, si $G = \mathbb{K}$, sí que se da la extensión.

$$\begin{tikzcd} \ell_\infty \arrow[r, dashed, "\tilde{I}"] & c_0 \\ c_0 \arrow[u, hook] \arrow[ur, "I"'] & \end{tikzcd}$$

→ $p: E \to \mathbb{R}$ es una subnorma si 1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ 2) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall \lambda \geq 0$. Es como un controlador del tamaño.

Ej: si $f: X \to \mathbb{R}$ acotada, $p(f) = \sup_{x \in X} f(x)$ es una subnorma.

→ Lema de extensión lineal inmediata. E espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, p subnorma en E, M s.v. de E y $T_0 : M \to \mathbb{R}$ lineal ($T_0 \in M^*$) tal que $T_0(m) \leq p(m)$ $\forall m \in M$. Sea $x_0 \in E \setminus M$. Entonces $\exists T : M \oplus \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$ lineal tal que $T|_M = T_0$ y $T(x) \leq p(x)$ $\forall x \in M \oplus \langle x_0 \rangle = F$.

→ Si $T : M \oplus \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$, $T|_M = T_0$, $T(m + \lambda x_0) = T(m) + \lambda T(x_0)$ → Sólo hay que elegir $T(x_0) = \mu \in \mathbb{R}$, si lo hay apropiado.

$m, n \in M \rightsquigarrow T_0(m+n) \leq p(m+n) \leq p(m+x_0) + p(n-x_0)$; $T_0(n) - p(n-x_0) \leq p(m+x_0) - T_0(m)$. Así, $-\infty < \sup_M \{T_0(n) - p(n-x_0)\} = \alpha \leq \beta = \inf_M \{p(m+x_0) - T_0(m)\} < \infty$. Sea $\alpha \leq \mu \leq \beta$. $m \in M$, $\lambda \neq 0$.

$T_0\left(-\frac{m}{\lambda}\right)-p\left(-\frac{m}{\lambda}-x_0\right)\leq \mu \leq p\left(\frac{m}{\lambda}+x_0\right)-T_0\left(\frac{m}{\lambda}\right)$; $-p\left(-\frac{m}{\lambda}-x_0\right)\leq$
$T_0\left(\frac{m}{\lambda}\right)+\mu \leq p\left(\frac{m}{\lambda}+x_0\right)$. Si $\lambda<0$, $p(m+\lambda x_0)\geq T_0(m)+\lambda\mu$ ✓.
Si $\lambda>0$, $T_0(m)+\lambda\mu\leq p(m+\lambda x_0)$ ✓

– Si p es seminorma, $T(x)\leq p(x) \iff |T(x)|\leq p(x)$.

$\longrightarrow$ Tma. Hahn-Banach. E e.v. sobre $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$, M s.v. de E, p seminorma sobre E y $T_0\in M^*$, $|T_0(m)|\leq p(m)$ $\forall m\in M$. Entonces $\exists T\in E^*$ con $T|_M=T_0$ y $|T(x)|\leq p(x)$ $\forall x\in E$.

$\longrightarrow$ Caso 1: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (y entonces valdría para sublineales).

$\mathcal{G}=\{(N,S): M\subset N\subset E,\ S\in N^*,\ S|_M=T_0,\ |S(u)|\leq p(u)\ \forall u\in N\}$.
$\mathcal{G}$ es no vacío, pues $(M,T_0)\in\mathcal{G}$.

$(N_1,S_1)\prec(N_2,S_2)$ si $N_1\subset N_2$ y $S_2|_{N_1}=S_1$. ¿Es $(\mathcal{G},\prec)$ inductivo? Sea $\{(N_i,S_i)\}_{i\in I}\subset\mathcal{G}$ totalmente ordenado.
$N=\bigcup_{i\in I}N_i \rightarrow$ subespacio vectorial de E. $S:N\to\mathbb{R}$ definido del siguiente modo: $x\in N \rightsquigarrow x\in N_i$, $S(x)=S_i(x)$, bien definido por el orden total. $M\subset N$, $S|_M=T_0$ y $|S(x)|=|S_i(x)|\leq p(x)$.

Por el Lema de Zorn, $\exists(F,T)\in\mathcal{G}$ maximal. Si $F\neq E$, $\exists x_0\in E\setminus F \overset{\text{L.E.I.}}{\Longrightarrow} \exists\tilde{T}:F\oplus\langle x_0\rangle\to\mathbb{R}$, extensión en $\mathcal{G}$, $(F,T)\precneqq(F\oplus\langle x_0\rangle,\tilde{T})\in\mathcal{G}$ absurdo. Así, $F=E$, T extensión buscada.

Caso 2: $\mathbb{k}=\mathbb{C}$. $z=x+iy \rightsquigarrow z=\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)-i\,\mathrm{Re}(iz)$.
$f:E\to\mathbb{C}$, $f(x)=\mathrm{Re}f(x)+i\,\mathrm{Im}f(x)=\mathrm{Re}f(x)-i\,\mathrm{Re}(if(x))$.
Si $U:E\to\mathbb{C}$ es lineal, $\mathrm{Re}\,U=U_0$ es $\mathbb{R}$-lineal, $U(x)=U_0(x)-iU_0(ix)$.
Recíprocamente, si $U_0:E\to\mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$-lineal, entonces $U(x)=$
$=U_0(x)-iU_0(ix)$ es $\mathbb{C}$-lineal $(U(ix)=iU(x))$.

Sea $U:M\to\mathbb{C}$, $|U(m)|\leq p(m)\ \forall m\in M$. $U_0=\mathrm{Re}\,U:$
$M\to\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineal, $|U_0(m)|\leq|U(m)|\leq p(m)\rightsquigarrow$ Por el caso 1,
$\exists\tilde{U}_0:E\to\mathbb{R}$ lineal con $\tilde{U}_0|_M=U_0$, $|\tilde{U}_0(x)|\leq p(x)\ \forall x\in E$. Definimos
$\tilde{U}(x)=\tilde{U}_0(x)-i\tilde{U}_0(ix):E\to\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineal.

$\tilde{U}|_M=U$. $x\in E\rightsquigarrow\tilde{U}(x)=|\tilde{U}(x)|e^{i\theta}$. $y=e^{-i\theta}x\rightsquigarrow$
$\tilde{U}(y)=e^{-i\theta}\tilde{U}(x)=\underline{|\tilde{U}(x)|}=|\tilde{U}_0(y)|\leq p(e^{-i\theta}x)=\underline{p(x)}$.

$\longrightarrow$ a) Sea E un espacio normado, M s.vect. y $T_0\in M'$
($T_0:M\to\mathbb{k}$ lineal y continua). Entonces $\exists T:E\to\mathbb{k}$ lineal
y continua, $T|_M=T_0$, $\|T\|=\|T_0\|$. b) Sea $x_0\neq 0$. $\exists x_0'\in E'$,
$\|x_0'\|=1$, $x_0'(x_0)=\|x_0\|$. En particular, $\|x\|=\sup\left\{|x'(x)|:\ \begin{matrix}\|x'\|\leq 1\\ \text{ó}\\ \|x'\|=1\end{matrix}\right\}$ (*).

$\longrightarrow$ a) Aplicar el tma. Hahn-Banach a $p(x)=\|T_0\|\|x\|$.
b) $M=\langle x_0\rangle=\{\lambda x_0:\lambda\in\mathbb{k}\}$, $T_0(\lambda x_0)=\lambda\|x_0\|$, $\|T_0(\lambda x_0)\|=\|\lambda x_0\|$, luego
$\|T_0\|=1\rightsquigarrow\exists x_0'\in E'$, $\|x_0'\|=1$, $x_0'(x_0)=\|x_0\|$. De igual modo,

(*) Y en realidad es máximo.

si $x' \in E'$, $\|x'\| \overset{\text{def}}{=} \sup\{|x'(x)| : x \in B(E)\}$

$\longrightarrow$ E e.n. a) Si $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ l.i., $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{K}$, $\exists x' \in E'$ tal que $x'(x_i) = \alpha_i$ $\forall i$ b) En particular, E' distingue puntos fuertemente de E y si $\dim E = \infty$, también $\dim E' = \infty$.

$\longrightarrow$ a) $F = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset E$. Sea $T_0 : F \to \mathbb{K}$, $T_0\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$. $T_0 \in F'$ $\overset{HB}{\Longrightarrow}$ $\exists x' \in E' \mid x|_F = T_0$.

Toda forma lineal en un e.v. de dim $<\infty$ es continua

b) $x_0 \neq y_0 \rightsquigarrow z_0 = x_0 - y_0 \neq 0$; $\exists x_0' \in E' \mid x_0'(z_0) \neq 0 \Rightarrow x_0'(x_0) \neq x_0'(y_0)$.
Sea $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \exists x_1, \dots, x_n \in E$ l.i.; $\exists x_1', \dots, x_n' \in E' \mid x_i'(x_j) = \delta_{ij} \rightsquigarrow$ $\{x_1', \dots, x_n'\}$ son l.i. Como n es arbitrario, E' no puede tener dimensión finita.

$\longrightarrow$ E espacio normado, F s.v. de E. a) Si $x_0 \notin \overline{F}$, $\exists x' \in E'$, $\|x'\| = 1$, $x'|_F = 0$ y $x'(x_0) = d = \text{dist}(x_0, F)$ (>0). b) $x_0 \in \overline{F} \iff$ $\{\forall x' \in E'$ con $x'|_F = 0 \Rightarrow x'(x_0) = 0\}$ c) F es denso $\iff$ $\{\forall x' \in E'$ con $x'|_F = 0 \Rightarrow x' = 0\}$.

D/ a) Sea $E/\overline{F}$, $\pi : E \to E/\overline{F}$. $\pi(x_0) \neq 0 \rightsquigarrow \exists \varphi \in (E/\overline{F})'$ con $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(\pi(x_0)) = \|\pi(x_0)\| = d$. Tomamos $x' = \varphi \circ \pi \in E'$, $x'(x_0) = \varphi(\pi(x_0)) = d$,
$\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{|x'(x)|\} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(\pi(x))| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} |\varphi(\xi)| = \|\varphi\| = 1$.
b) y c) son evidentes.

//

→ Lema de Riesz. E e.n., F s.v. cerrado y propio, $\varepsilon > 0$. $\exists x_0 \in E$ con $\|x_0\| = 1$, $\|x_0 - f\| \geq 1 - \varepsilon$ $\forall f \in E$.

D/ $\exists x' \in E'$, $\|x'\| = 1$ con $x'|_F = 0$, por no ser F denso. Así, $\exists x_0 \in S(E)$ con $|x'(x_0)| \geq 1 - \varepsilon$. Sea $f \in F$. $\|x_0 - f\| \geq |x'(x_0 - f)|$ $= |x'(x_0)| \geq 1 - \varepsilon$.

→ a) Si E es de dimensión infinita y $0 < \varepsilon < 1$, $\exists (x_n) \subset S(E)$ con $\|x_n - x_m\| \geq 1 - \varepsilon$ $\forall n \neq m$. b) Para E e.n. son equivalentes:
1) $\dim E < \infty$ 2) Todo conjunto cerrado y acotado es compacto 3) $B(E)$ es compacto 4) $S(E)$ es compacto.

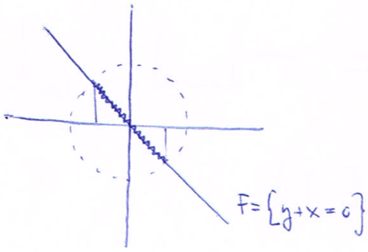
D/ a) $x_1 \in S(E) \rightsquigarrow F_1 = \langle x_1 \rangle \neq E$ cerrado$^{(*)}$ $\rightsquigarrow \exists x_2 \in S(E)$, $\|x_2 - \lambda x_1\| \geq 1 - \varepsilon$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. $F_2 = \langle x_1, x_2 \rangle \neq E$ cerrado$^{(*)}$ $\rightsquigarrow \exists x_3 \in S(E)$ con $\|x_3 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2\| \geq 1 - \varepsilon$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, y así inductivamente.

b) $(1) \overset{(*)}{\Longrightarrow} (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$. $(4) \Rightarrow (1) \rightsquigarrow$ Si $\dim E = \infty$, por a) tomamos $(x_n) \subset S(E)$, $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall n \neq m$, y ninguna subsucesión es de Cauchy $\rightsquigarrow S(E)$ no es compacto.

Si $\dim E = \infty$, cualquier bola es no compacta; los compactos tienen interior vacío. No hay funciones meseta.

(*) Pues son de dim finita, $\cong \mathbb{K}^n$, y de Banach.

$\rightarrow \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow$

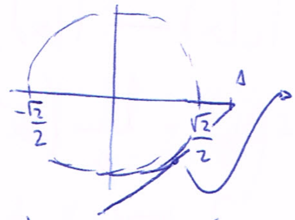


$T_0 : F \to \mathbb{R}$

$(x,-x) \longrightarrow T(x,-x) = x \rightsquigarrow$ con $\|\cdot\|_2$;

$\|T_0\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Queremos extender T_0; $T_0 = \Pi_1|_F$, pero $\|\Pi_1\| = 1$; el tma. de Hahn-Banach no nos daría Π_1. $T \in \mathbb{R}^{2'} \rightsquigarrow T \leftrightarrow (\alpha, \beta)$, y se puede ver que la norma inducida en $\mathbb{R}^{2'}$ es $\|\cdot\|_2$ también.

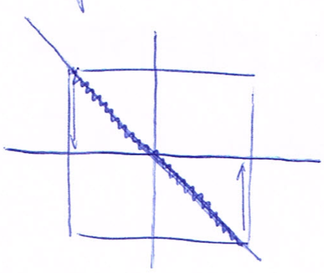
$T(x,-x) = \alpha x - \beta x = x \rightsquigarrow \begin{matrix} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2} \end{matrix} \rightsquigarrow$



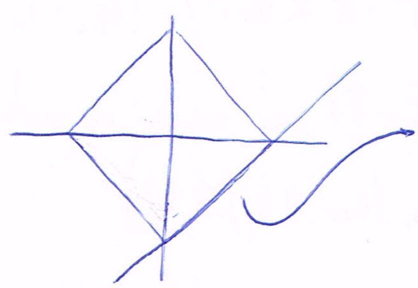
una sola solución.

$\|(\alpha,\beta)\| = \sup\{|\alpha x + \beta y| : x^2 + y^2 = 1\} \rightsquigarrow (x,y)$ prop. a $(\alpha,\beta) \rightsquigarrow x = k\alpha$, $y = k\beta$, $k = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\alpha x + \beta y = (\alpha^2+\beta^2)\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \|(\alpha,\beta)\|_2$.

Tomamos ahora $\|\cdot\|_\infty$. $\|(\alpha,\beta)\| = \sup\{|\alpha x + \beta y| : \max\{|x|,|y|\} = 1\} \rightsquigarrow$ Se toma una esquina apropiada y se tiene $|\alpha x + \beta y| = |\alpha| + |\beta| = 1 \rightsquigarrow$ En el dual, norma 1.



$\|T_0\| = 1 \rightsquigarrow$



Muchas posibles extensiones

La recta siempre debe ser tangente a la esfera de radio $\|T_0\|$; depende de la geometría de la norma que haya unicidad o multiplicidad de soluciones.

$\longrightarrow$ E, F e.n., $\mathcal{L}(E,F) = \{T : E \to F : T$ lineal y continua$\}$,

$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|T(x)\| \rightsquigarrow$ Norma sobre $\mathcal{L}(E,F)$.

$\longrightarrow$ Si F es Banach, $\mathcal{L}(E,F)$ también lo es.

D/ Sea $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E,F)$ de Cauchy. $x \in E \rightsquigarrow$

$\|T_n(x) - T_m(x)\| \le \|T_n - T_m\| \, \|x\| \xrightarrow{n,m \to \infty} 0 \Rightarrow \{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ de Cauchy $\rightsquigarrow T_n(x) \longrightarrow T(x)$. ¿Es T lineal? $T(\alpha x + \beta y) = \lim_n T_n(\alpha x + \beta y) = \lim_n (\alpha T_n(x) + \beta T_n(y)) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

¿Es T continua? $\|T(x)\| = \|\lim_n T_n(x)\| = \lim_n \underbrace{\|T_n(x)\|}_{\le \|T_n\| \|x\|} \le M\|x\| \rightsquigarrow$

$T \in \mathcal{L}(E,F)$. Sea $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \exists N \mid \forall n, m \ge N$, $\|T_n - T_m\| \le \varepsilon$.

$\|x\| \le 1 \rightsquigarrow \|T_n(x) - T_m(x)\| \le \varepsilon \;\; \forall n,m \ge N \Rightarrow \|T_n(x) - T(x)\| \le \varepsilon \;\; \forall n \ge N$

$\Rightarrow \|T_n - T\| \le \varepsilon \;\; \forall n \ge N \rightsquigarrow \|T\| = \lim_n \|T_n\|$. //

$\longrightarrow$ E, F e.n., F completo, E_0 s.v. denso de E. $T_0 \in \mathcal{L}(E_0, F)$. Entonces $\exists! T \in \mathcal{L}(E,F)$, $T|_{E_0} = T_0$, $\|T\| = \|T_0\|$. Así, $\mathcal{L}(E,F) \ni T \mapsto T|_{E_0} \in \mathcal{L}(E_0, F)$ es una isometría lineal. En particular, $E_0' \cong E'$ (por ejemplo, $(c_{00}, \|\cdot\|_p)' \cong \ell_p'$).

D/ Sea $x \in E \rightsquigarrow \exists (x_n) \subset E_0$, $(x_n) \to x$. $\|T_0(x_n) - T_0(x_m)\| \le \|T_0\| \underbrace{\|x_n - x_m\|}_{\text{Cauchy}} \xrightarrow{n,m} 0 \Rightarrow \exists \lim_n T_0(x_n)$, que por definición será $T(x)$.

¿Está bien definido? $(y_n) \to x$, $\|T_0(x_n) - T_0(y_n)\| \le \|T_0\| \|x_n - y_n\| \to 0$, luego $T_0(x_n)$ y $T_0(y_n)$ tienen el mismo límite.

Si $x \in E_0$, $T(x) = T_0(x)$, tomando la sucesión constante x.

$T(\alpha x + \beta y) = \lim_n T_0(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_n (\alpha T_0(x_n) + \beta T_0(y_n)) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

$\|T\| \geq \|T_0\|$ por tratarse de una extensión. Pero $\|T(x)\| \leq$
$\leq \|T_0\| \lim_n \|x_n\| = \|T_0\| \|x\| \to \|T\| \leq \|T_0\|$, y así $\|T\| = \|T_0\|$. //

Banach también, si $E \cong F$

$\longrightarrow$ E e.n., F Banach 1) $\mathrm{Iso}(E,F)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(E,F)$. Más aún, si $T \in \mathrm{Iso}(E,F)$ y $\|T - U\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, entonces $U \in \mathrm{Iso}(E,F) \to \left\{U : \|T-U\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}\right\} \subset \mathrm{Iso}(E,F)$.

2) $\mathrm{Iso}(E,F) \ni T \longrightarrow T^{-1} \in \mathrm{Iso}(F,E)$ es continua.

D/ $U = T - (T-U) = T - S$, $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. 1) <u>Caso 1</u> $T = I$ (identidad), $E = F$.

$\|S\| < 1 \overset{?}{\Rightarrow} I - S \in \mathrm{Iso}(E,E)$. $(I-S)^{-1} \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} S^n$ (serie de Carl Neumann)

$\|S^n\| \leq \|S\|^n$; $\left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} S^n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \|S\|^n \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, luego hay convergencia de las sumas parciales. Sea $R = \sum_{n=0}^{\infty} S^n$. La composición $\circ$: $\mathcal{L}(E,E) \times \mathcal{L}(E,E) \longrightarrow \mathcal{L}(E,E)$ es continua, y así

$(I-S) \circ \left(\lim_N \sum_{n=0}^{N} S^n\right) = \lim_N \left[\sum_{0}^{N} S^n - \sum_{1}^{N+1} S^n\right] = \lim_N \left[I - S^{N+1}\right] = I$,

e igual para el otro orden. //

<u>Caso 2</u> T es inversible, luego $\underbrace{(T-S)}_{} = \underbrace{T}_{E\to F}\underbrace{(I - T^{-1} \circ S)}_{E \to E}$

$\|T^{-1} \circ S\| \leq \|T^{-1}\| \|S\| < 1 \to I - T^{-1} \circ S \in \mathrm{Iso}(E,E)$, $(T-S)^{-1} =$
$= (I - T^{-1} \circ S)^{-1} \circ T^{-1} = \left[\sum (T^{-1} S)^n\right] T^{-1}$, $\|(T-S)^{-1}\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \frac{1}{1 - \|T^{-1}\| \|S\|}$.

2) Caso 1: $I : E \to E = F$; vamos a ver la continuidad en I.

$I_{so}(E,F) \ni (S_k) \longrightarrow I \overset{?}{\Longrightarrow} S_k^{-1} \longrightarrow I^{-1} = I$. $V_k = I - S_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \|V_k\| < 1$ si $k \geq k_0$. $S_k = I - V_k \Rightarrow S_k^{-1} = (I - V_k)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} V_k^n$ $(k \geq k_0)$.

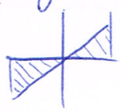
$$\|S_k^{-1} - I\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} V_k^n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|V_k\|^n = \frac{\|V_k\|}{1 - \|V_k\|} \xrightarrow{k} 0.$$

Caso 2: $T_k \longrightarrow T \overset{?}{\Longrightarrow} T_k^{-1} \longrightarrow T^{-1}$. $T^{-1}T_k \longrightarrow I \xrightarrow{\text{Caso 1}}$

$T_k^{-1} \circ T \longrightarrow I \Rightarrow T_k^{-1} \longrightarrow T^{-1}$.

Ej: $(\mathcal{C}[-1,1], \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{T} (\mathcal{C}[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$, $f \mapsto T(f)(t) = t\int_{-1}^{1} f(s)\,ds$. $|T(f)(t)| \leq 2|t|\,\|f\|_\infty \to \|T\| \leq 2$. $\|T\| \geq \frac{|T(\mathbb{1})|}{\|\mathbb{1}\|_\infty} = 2$,

luego $\|T\| = 2$. $T^2(f) = t\int_{-1}^{1} T(f)(s)\,ds = t\int_{-1}^{1}\left[s\left(\int_{-1}^{1} f(u)\,du\right)\right]ds = 0$

() operador nilpotente. Así, $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = I + T = (I - T)^{-1}$.

La ecuación $f(t) - t\int_{-1}^{1} f(s)\,ds = g(t)$ tiene solución $f = (I+T)(g)$

Esto es porque $\sum T^n$ converge, aunque $\|T\| = 2 \not< 1$.

Otro ejemplo: $f(t) + t^2\int_0^1 s f(s)\,ds = s$. Sea $x'(f) = \int_0^1 s f(s)\,ds$,

$|x'(f)| \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$. $u(s) = s$ identidad. Buscamos $(I+T)(f) = u$,

$T(f) = x'(f)\cdot u^2$ (operador de rango finito). $f + x'(f)u^2 = u \Rightarrow$

$f = u - x'(f)u^2$; $x'(f) + x'(f)x'(u^2) = x'(u)$; $x'(f)[1 + x'(u^2)] = x'(u)$.

$x'(u) = \frac{1}{3}$, $x'(u^2) = \frac{1}{4}$, así que sí hay solución, $x'(f) = \frac{4}{15} \to$

$f = v - \frac{4}{15} v^2$. En general, $f + \sum_{i=1}^{n} x_i'(f) v_i = g \rightsquigarrow x_j'(f) + \sum_{i=1}^{n} x_i'(f) x_j'(v_i) =$
$= x_j'(g) \rightsquigarrow$ Sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

$\longrightarrow$ E Banach, $T: E \to E$, $T \in \mathcal{L}(E,E)$. λ es un valor regular, $\lambda \in \overset{\rightsquigarrow \text{resolvente de } T}{\rho(T)}$ si $T - \lambda I \in Iso(E,E)$. $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ es el espectro de T. Si $\ker(T - \lambda I) \neq 0$, $\lambda \in \sigma(T) \rightsquigarrow$ autovalores. $e(T) = \{\lambda : \ker(T - \lambda I) \neq 0\} \subset \sigma(T)$. Si $\dim E < \infty$, $e(T) = \sigma(T)$ $= \{$raíces de $p(\lambda)$ polinomio característico$\}$ $\longrightarrow$ Aquí trabajaremos con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$E = (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $T(f)(t) = t f(t)$. Sea $\lambda \in e(T)$, f autofunción. $T(f)(t) = t f(t) = \lambda f(t) \rightsquigarrow (t - \lambda) f(t) = 0 \ \forall t \in [0,1] \rightsquigarrow f = 0$ y no hay autovalores. Sin embargo, si $\lambda \in [0,1]$, $(T - \lambda I)$ no es sobreyectiva: $\nexists f \mid (T - \lambda I) f = \mathbb{1} \iff (t - \lambda) f(t) = 1 \ \forall t \in [0,1]$.
En consecuencia, $[0,1] \subset \sigma(T)$

$\longrightarrow$ E Banach sobre $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(E,E)$. 1) $\rho(T)$ es un abierto de $\mathbb{C}$ 2) Si $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ para $\lambda \in \rho(T)$, se tiene $R_\lambda - R_\mu$ $= (\lambda - \mu) R_\mu \circ R_\lambda \ \forall \lambda, \mu \in \rho(T)$, y $\rho(T) \ni \lambda \longmapsto R_\lambda \in Iso(E,E)$ es continua
3) $\sigma(T)$ es un compacto de $\mathbb{C}$, $\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|T\|\}$ y $\lim_{\substack{\lambda \to \infty \\ \lambda \in \rho(T)}} \|R_\lambda\| = 0$.
4) $\sigma(T) \neq \emptyset$.

D/ 1) $\mathbb{K} \ni \lambda \xrightarrow{\varphi} T-\lambda I \in \mathcal{L}(E,E)$ continua, $\rho(T) = \varphi^{-1}(\overset{\text{Abierto}}{I_{sc}(E,E)})$ abierto.

2) $R_\lambda - R_\mu = R_\mu(R_\mu^{-1} \circ R_\lambda - I) = R_\mu(\underbrace{R_\mu^{-1}}_{T-\mu I} - \underbrace{R_\lambda^{-1}}_{T-\lambda I})R_\lambda = (\lambda-\mu)R_\mu \circ R_\lambda$.

3) $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ cerrado. Sup $|\lambda| > \|T\|$. $T-\lambda I = \lambda\left[\frac{1}{\lambda}T - I\right]$, $\|\frac{1}{\lambda}T\| = \frac{1}{|\lambda|}\|T\| < 1$, luego $T-\lambda I \in I_{sc}(E,E)$. Así, $\sigma(T) \subset \{\lambda \leq \|T\|\}$ y $\sigma(T)$ es compacto. $R_\lambda = \frac{-1}{\lambda}\sum \frac{T^n}{\lambda^n} = -\sum \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$; $\|R_\lambda\| \leq$

$$= \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda|-\|T\|} \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0$$

4) $\sigma(T) \neq \phi$. Sea $\psi \in \mathcal{L}(E,E)'$, y definimos $f_\psi(\lambda) = \psi(R_\lambda)$, $f_\psi : \rho(T) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Veamos que es holomorfa: $\frac{f_\psi(\lambda) - f_\psi(\mu)}{\lambda-\mu}$ $= \frac{\psi(R_\lambda) - \psi(R_\mu)}{\lambda-\mu} = \psi\left(\frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda-\mu}\right) = \psi(R_\mu \circ R_\lambda)$. Si $\mu \to \lambda$, $R_\mu \to R_\lambda$, $R_\mu \circ R_\lambda \longrightarrow R_\lambda^2$ en la topología del espacio $\to \psi(R_\lambda^2) =$ $= \psi\left(((T-\lambda I)^{-1})^2\right) \in \mathbb{C} \to$ Así que $f_\psi \in \mathcal{H}(\rho(T))$.

Si $\sigma(T) = \phi$, $\rho(T) = \mathbb{C} \to f_\psi$ entera. Pero $\|R_\lambda\| \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0$ $\Rightarrow |f_\psi(\lambda)| \leq \|\psi\|\|R_\lambda\| \to 0 \to$ Por el tma. de Liouville, $f_\psi \equiv 0$ $\forall \psi \overset{HB}{\Longrightarrow} R_\lambda = 0$, pero $R_\lambda \circ \overset{T-\lambda I}{\overline{R_\lambda^{-1}}} = I$, y llegamos a un absurdo.

$a=b$ en $E \iff x'(a) = x'(b)$ $\forall x' \in E'$, por Hahn-Banach.

$\longrightarrow$ No existe $P: l_\infty \longrightarrow c_0$ proyección lineal y continua.

D/ $Q = I-P : l_\infty \to l_\infty$, $\operatorname{Ker} Q = c_0$. $Q: l_\infty \to l_\infty$, $Q_n : l_\infty \to \mathbb{K}$, $\pi_n \to Q(x) = (Q_n(x))_{n=1}^\infty$

$Q(x)=0 \iff x\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker Q_n \rightsquigarrow c_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker Q_n$

<u>Lema</u>: $\forall \lambda\in\mathbb{R}\ \exists N_\lambda \in \mathbb{N}$ infinito tal que si $\lambda\neq\mu$, $N_\lambda\cap N_\mu$ es a lo más finito. D/ $\mathbb{Q}=\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$. Dado λ, tomo $(q_n^\lambda)\to\lambda \rightsquigarrow E_\lambda=\{(q_n^\lambda)\}$, $N_\lambda=\{n: q_n^\lambda\in E_\lambda\}\to$ Si $\lambda\neq\mu$, no puede haber más que un número finito de coincidencias en N_λ y N_μ.

Para cada λ, tomo $x_\lambda=\chi_{N_\lambda}\notin c_0$ (tiene infinitos 1). Dada Q forma lineal, $\{\lambda : |Q(x_\lambda)|\geq \frac{1}{n}\}$ es finito $\rightsquigarrow$ $H(Q)=\{\lambda : Q(x_\lambda)\neq 0\}$ es numerable. Si $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} H(Q_n)$, entonces $x_\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\ker Q_n$ pero $x_\lambda\notin c_0 \to c_0\neq \bigcap_{n=1}^{\infty}\ker Q_n$.

$\longrightarrow E'=\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$. E' es Banach; $\dim E=\infty \implies \dim E'=\infty$; si E_0 es un subespacio denso de E, $E_0'=\mathcal{L}(E_0,\mathbb{K})\equiv\mathcal{L}(E,\mathbb{K})=E'$.

Ejemplos del dual. $E=\ell_p$, $1\leq p<\infty$, c_0.

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q\geq 1$. Dado $a=(a_n)\in\ell_q$, tenemos $T_a:\ell_p\to\mathbb{K}$, $T_a(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, bien definido por la desigualdad de Hölder: $\|\sum a_n x_n\|\leq\sum|a_n||x_n|\leq\|a\|_q\|x\|_p$, y $\|T_a\|\leq\|a\|_q$.

Si $1 \leq p < \infty$, $\forall x = (x_n) \in E$, $x = \lim_{m\to\infty} x^m$, con $x^m = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$, $x = \sum x_i e_i$, en el sentido de que $x = \lim_m \sum_{i=1}^m x_i e_i$. Si $T \in E'$, $T(x) = T(\sum x_i e_i) = T(\lim_m \sum_{i=1}^m x_i e_i) = \lim_m \sum_{i=1}^m x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^\infty x_i T(e_i) \rightsquigarrow T$ se recupera sabiendo los valores de $T(e_i) \rightsquigarrow T$ se asocia a $(T(e_i))_{i=1}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. ¿Está esta sucesión en l_q?

CASO 1 $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ La aplicación $l_q \ni a \xrightarrow{\Theta_p} T_a \in l_p'$ es una biyección lineal isométrica. Ya hemos visto que $\|\Theta_p(a)\| \leq \|a\|_q$. Sea $T \in l_p'$, $a = (T(e_i)) \overset{?}{\in} l_q$. Queremos x con $T(x) = \sum |T(e_i)|^q < \infty \rightsquigarrow x_i = \begin{cases} \frac{|T(e_i)|^q}{T(e_i)} & T(e_i) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ Pero ver que $x \in l_p$ es lo mismo que ver que $a \in l_q$, pues $|x_i|^p = |T(e_i)|^{(q-1)p} = |T(e_i)|^q$.

Consideramos $z^m = (z_n^m)$: $z_n^m = \begin{cases} \frac{|T(e_n)|^q}{T(e_n)} & \text{si } T(e_n) \neq 0,\ 1 \leq n \leq m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$z^m \in l_p$. $T(z^m) = \sum_{n=1}^m \|T(e_n)\|^q \leq \|T\| \|z^m\|_p = \|T\| \left(\sum_{n=1}^m |T(e_n)|^q\right)^{\frac{1}{p}}$, y dividiendo, $\left(\sum_{n=1}^m |T(e_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|T\|$ $\forall m \in \mathbb{N} \rightsquigarrow a \in l_q$, $\|a\|_q \leq \|T\|$ ✓.

CASO 2: $E = c_0$. La aplicación $l_1 \ni a \xrightarrow{\Theta_0} T_a \in c_0'$ es una biyección lineal isométrica. $T \in c_0'$, $a = (T(e_i)) \overset{?}{\in} l_1$.

$z^m = (z_n^m)$, $z_n^m = \begin{cases} \frac{|T(e_n)|}{T(e_n)}, & 1 \leq n \leq m,\ T(e_n) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ $\|z^m\|_\infty \leq 1$,

$$T(z^m) = \sum_{n=1}^{m} |T(e_n)| \leq 1 \cdot \|T\| \checkmark$$

<u>CASO 3</u> $E = l_1$ $(q=\infty)$. La aplicación $l_\infty \ni a \xrightarrow{\theta_1} T_a \in l_1$ es una biyección lineal isométrica. Si $T \in l_1'$, $a = (T(e_i)) \overset{?}{\in} l_\infty$.

$z^m = \alpha_m e_m$, $\alpha_m = \begin{cases} \frac{|T(e_m)|}{T(e_m)} & \text{si } T(e_m) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, $\|z^m\|_\infty \leq 1$,

$T(z^m) = |T(e_m)| \leq \|T\| \checkmark$.

Es cierto que $l_1 \hookrightarrow l_\infty'$ isométricamente, pero l_∞' es mucho más grande. El problema es que $x \neq \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ (la cola no es convergente). Cuando se tiene una base $\{e_i\}$ con $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ de modo único, se tiene una base topológica. l_∞ no admite base topológica porque no es separable.

$c_0 \subset C = \{x = (x_n) : \exists \lim_n x_n\} \subset l_\infty$. Consideramos $T: C \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longrightarrow \lim_n x_n$. Por el tma de Hahn-Banach, T se extiende a $\tilde{T}: l_\infty \longrightarrow \mathbb{K}$. Ahora bien, $\tilde{T}(e_i) = 0$ y $\tilde{T}(x) \neq \sum x_i \tilde{T}(e_i)$ (T es continua: $|T(x)| \leq \|x\|_\infty$ y $T(\mathbb{1}) = 1$, $\mathbb{1} = (1,1,1,\dots)$).

$l_p = L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)$, con $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\mu(A) = \#(A)$ medida de contar, $\int x(n)\, d\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$.

Sea μ una medida σ-finita, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\mathcal{L}^q(\mu) \ni f \longrightarrow T_f \in (\mathcal{L}_p)'$, $T_f(g) := \int fg$. Por la desigualdad de Hölder para medidas,

$|T_f(g)| \leq \|g\|_p \|f\|_q \Rightarrow \|T_f\| \leq \|f\|_q$. $g(t) = \begin{cases} \frac{|f(t)|^q}{f(t)} & \text{si } f(t) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$\rightarrow \|g\|_p = \left(\int |f|^{\frac{(q-1)p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_q^{q/p} < \infty$, $T_f(g) = \int |f(t)|^q dt = \|f\|_q^q \leq$
$\|T_f\| \|f\|_q^{q/p}$, $\|T_f\| \geq \|f\|_q^{q(1-\frac{1}{p})} = \|f\|_q$. Así $L_q \hookrightarrow L_p'$, pero para la sobreyectividad se necesita el tma. Radon-Nikodym.

Sea $T \in (L_p)' = (\mathcal{L}_p)'$. Definimos $\nu(A) = T(\chi_A) \rightsquigarrow$ es medida por ser T continua. $\mu(A) = 0 \Rightarrow \chi_A = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \rightsquigarrow \nu$ es absolutamente continua respecto a μ, $\nu \ll \mu \rightarrow$ por el tma. Radon-Nikodym, $\exists f \mid T(\chi_A) = \nu(A) = \int_A f\,d\mu$. Como las funciones medibles se aproximan por simples, $T(g) = \int fg\,d\mu$. Quedaría ver que $f \in L_q$.

$(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)' \ni x'$, $x' \leftrightarrow g \in NBV[0,1]$, $x'(f) = \int_0^1 f\,dg \rightsquigarrow$ medida de Borel regular

$\longrightarrow$ Bidual. $E \rightsquigarrow (E', \|\cdot\|)$, $E'' =$ bidual topológico $=$ $(E', \|\cdot\|)'$. Tenemos una inmersión $E \overset{J_E}{\hookrightarrow} E''$, $x \longmapsto J_E(x) = \hat{x}$, $\hat{x}(x') = x'(x)$, $\langle x', \hat{x} \rangle = \langle x, x' \rangle$. $|\hat{x}(x')| \leq \|x\| \|x'\| \rightarrow \|\hat{x}\| \leq \|x\|$ $\rightsquigarrow \hat{x}$ es continua. $\|x\| = \sup\{|x'(x)| : \|x'\| = 1\} = \sup\{|\hat{x}(x')| : \|x'\| = 1\} = \|\hat{x}\| \rightsquigarrow J_E$ es una isometría lineal.

Se dice que E es reflexivo si $J_E(E) = E''$. Si $\dim E < \infty$, E es reflexivo, pues $E' = E^*$, $E'' = E^{**}$. Si E es reflexivo, entonces E es Banach, pues es isométrico a E'' Banach.

Existen espacios isométricos (linealmente) a su bidual y no reflexivos: espacio de James A, $A \simeq A''$, $\dim {}^{A}/_{J_A(A)} = 1$.
Todos los espacios $L_p(\mu)$, $1<p<\infty$, son reflexivos.

Ningún l_p, $1 \le p < \infty$ junto con c_0 es isomorfo a un subespacio de otro elemento de $\mathcal{F} = \{l_p : 1 \le p < \infty\} \cup \{c_0\}$.

→ Compleción de un espacio. $E \hookrightarrow \tilde{E}$, donde $\tilde{E}$ está formado por clases de equivalencias de sucesiones de Cauchy.

Sea E un e.n. Existe un (único salvo isometrías lineales) espacio de Banach $\tilde{E}$ tal que E es linealmente isométrico a un s.v. denso de $\tilde{E}$. Además, $\tilde{E}$ verifica la siguiente propiedad universal: $\forall$ espacio de Banach F y $\forall T \in \mathcal{L}(E,F)$ $\exists!\ \tilde{T} \in \mathcal{L}(\tilde{E},F)$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \tilde{E} \arrow[r, dashed, "\tilde{T}"] & F \\ E \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "T"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

D/ Tomamos $E \overset{J_E}{\hookrightarrow} E''$, $\tilde{E} = \overline{J_E(E)}$ → E es isométrico a $J_E(E)$ denso en $\tilde{E}$; $\tilde{E}$ es cerrado en E'' Banach ⇝ $\tilde{E}$ Banach. Cualquier T se extiende a $\tilde{T}$ por Hahn-Banach; por la densidad $\tilde{T}$ es única. ↪ No, pues $F \neq \mathbb{K}$. Pero aun así es posible por límites.

Unicidad:
$$\begin{tikzcd} & \varphi_1(E) \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed, "T_1"] & \tilde{E}_1 \arrow[d, shift right, "\tilde{T}_1"'] \\ E \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \\ & \varphi_2(E) \arrow[r, hook] \arrow[uur, dashed, "T_2"] & \tilde{E}_2 \arrow[uu, shift right, "\tilde{T}_2"'] \end{tikzcd}$$
(por la prop. universal).

$(c_{00}, \|\cdot\|_1) \rightsquigarrow (l_1, \|\cdot\|_1)$ es un completado ; $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

$\longrightarrow$ Traspuesta topológica. $E \xrightarrow{T \in \mathcal{L}(E,F)} F \rightsquigarrow F' \xrightarrow{T' = T^t|_{F'}} E'$,

$T'(y') = y' \circ T$, $\langle x, T'(y')\rangle = \langle T(x), y'\rangle$.

1) $\mathcal{L}(E,F) \ni T \longmapsto T' \in \mathcal{L}(F', E')$ es una biyección lineal isométrica.

$\|T'\| = \sup\limits_{\|y'\|\leq 1} \|T'(y')\| = \sup\limits_{\|y'\|\leq 1} \left\{ \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\langle x, T'(y')\rangle| \right\} = \sup\limits_{\|y'\|\leq 1} \left\{ \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), y'\rangle| \right\}$

números positivos

$= \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \underbrace{\left\{ \sup\limits_{\|y'\|\leq 1} |\langle T(x), y'\rangle| \right\}}_{\|T(x)\|} = \|T\|$.

$E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G \rightsquigarrow G' \xrightarrow{S'} F' \xrightarrow{T'} E'$. 2) $(S \circ T)' = T' \circ S'$

3) $(I_E)' = I_{E'}$ 4) Si T es un isomorfismo topológico, T' también lo es y $(T')^{-1} = (T^{-1})'$ 5)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J_E"'] & F \arrow[d, "J_F"] \\ E'' \arrow[r, "T'' = (T')'"'] & F'' \end{tikzcd} \qquad E' \xleftarrow{T'} F'$$

conmutativo.

$x \in E$. $J_F T(x) (= \widehat{T(x)}) \overset{?}{=} T'' \circ J_E(x) = T''(\hat{x})$. Sea $y' \in F'$.

$\langle y', J_F T(x)\rangle = \langle T(x), y'\rangle = \langle x, T'(y')\rangle = \langle T'(y'), J_E(x)\rangle =$

$= \langle y', T''(J_E(x))\rangle \ \forall y' \rightsquigarrow J_F T(x) = T'' J_E(x)$.

Gracias a 5), si E, F son isomorfos topológicamente y E es reflexivo, entonces F es reflexivo.

$\longrightarrow$ Sea E Banach. Entonces E reflexivo $\Longleftrightarrow E'$ reflexivo.

$\Rightarrow$) $E' \xhookrightarrow{J_{E'}} (E')'' = E'''$, $x' \longmapsto \hat{x}'$. Sea $\varphi \in E'''$. $\varphi : E'' \longrightarrow \mathbb{K}$, $E \hookrightarrow E''$, $x' : E \to \mathbb{K}$

$x' := \varphi \circ J_E$. ¿Se cumple que $\hat{x}' = \varphi$? $\forall x'' \in E''$, $\hat{x}'(x'') \overset{E}{=} \langle x'', \hat{x}'\rangle \overset{?}{=} \varphi(x'')$.

Como E es reflexivo, $\exists\, x \in E \mid x'' = \hat{x} \rightsquigarrow \hat{x'}(x'') = \hat{x'}(\hat{x}) = \hat{x}(x') =$
$= x'(x)$; $\varphi(x'') = \langle x'', \varphi \rangle = \langle \hat{x}, \varphi \rangle = \langle J_E(x), \varphi \rangle = \langle x, \varphi \circ J_E \rangle = \langle x, x' \rangle$,
luego es cierto que $\hat{x'} = \varphi$. No se usa que E es Banach.

$\Leftarrow$) $J_E(E) \overset{?}{=} E''$. Veamos que $J_E(E)$ es denso en E''.
E'' y E son Banach, luego $J_E(E)$ es cerrado en E''; si se prueba la densidad se tiene todo.

Sea $\varphi \in (E'')' = E'''$ con $\varphi|_{J_E(E)} = 0$. E' es reflexivo $\rightsquigarrow \exists\, x' \in E'$
con $\varphi = \hat{x'}$. $\forall x \in E$, $0 = \langle \hat{x}, \varphi \rangle = \langle \hat{x}, \hat{x'} \rangle = \langle x, x' \rangle \rightsquigarrow x' = 0$, $\varphi = 0$.

$E \hookrightarrow E'' \hookrightarrow E^{iv)} \hookrightarrow E^{vi)} \hookrightarrow \dots$
$E' \hookrightarrow E''' \hookrightarrow E^{v)} \hookrightarrow E^{vii)} \hookrightarrow \dots$
] O bien E y E' son reflexivos y todo son igualdades, o bien las inclusiones son siempre propias.

1) c_0, l_1, l_∞ no son reflexivos
2) l_p $(1<p<\infty)$ son reflexivos.

$\to$ 1) c_0 reflexivo $\overset{\text{dual}}{\Longleftrightarrow}$ l_1 reflexivo $\overset{\text{dual}}{\Longleftrightarrow}$ l_∞ reflexivo. Si c_0 es reflexivo, $c_0 \simeq c_0'' \simeq l_\infty$, pero c_0 es separable y l_∞ no lo es.

2) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\Theta_p : l_q \to (l_p)'$, $b \longmapsto T_b$, $T_b(a) = \sum a_n b_n$.
$\Theta_p' : (l_p)'' \to (l_q)' \rightsquigarrow l_p \xrightarrow{\Theta_q} (l_q)' \xrightarrow{(\Theta_p')^{-1}} l_p''$. ¿Es $J_{l_p} = (\Theta_p')^{-1} \circ \Theta_q$?
$b \in l_q$, $l \in l_p$ $\rightsquigarrow \langle b, \Theta_p(a) \rangle \overset{J_{l_p}}{=} \langle a, \Theta_q(b) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.
Sea $a \in l_p$, $x' \in l_p'$. $\langle x', (\Theta_p^{-1})' \circ \Theta_q(a) \rangle = \langle \Theta_p(b), (\Theta_p^{-1})' \circ \Theta_q(a) \rangle =$
$\quad \llcorner \Theta_p(b)$

$= \langle b, \Theta_q(a)\rangle = \langle a, \Theta_p(b)\rangle = \sum a_n b_n$) $\langle x', \hat{a}\rangle = x'(a) = \langle a, \Theta_p(b)\rangle$.

Lo mismo ocurre para los espacios $L^p(\mu)$, $1<p<\infty$.

→ Topologías débiles. Topología débil* ($\overset{=\sigma(E',E)}{\omega^*}$) en un dual.

$E' \subset \mathbb{K}^E \equiv \prod_{x\in E} \mathbb{K}_x$, $\mathbb{K}_x = \mathbb{K}$. ω^* = topología en E' heredada por la puntual en $\mathbb{K}^E$ (o topología producto). $(x_n') \subset E'$; $(x_n') \xrightarrow{\omega^*} x' \iff$ $x_n'(x) \to x'(x)\ \forall x \in E$ ($\equiv$ topología inicial en E' para la familia de funciones $\{\hat{x} : x\in E\} = J_E(E) \subset E''$)

$(c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \rightsquigarrow x_n'(x) = \sum_{k=1}^n x_k$. $a_n = (1,1,\dots,1,0,\dots) \in \ell_1$, $x_n' = T_{a_n}$; $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)' \equiv \ell_1$. Si $x = (x_1,\dots,x_N,0,\dots)$, $x_n'(x) \xrightarrow{n} \sum_{k=1}^N x_k = \varphi(x)$. $\varphi: c_{00} \to \mathbb{K}$ es lineal pero no continua, y de hecho $\|a_n\| = n \to \infty$. Existe límite puntual pero no es continuo, por lo que no hay convergencia ω^*.

1) $\sigma(E',E)$ es T_2 (proviene de $\mathbb{K}^E$ Hausdorff)

2) $(x_n') \xrightarrow{\omega^*} x'$, $(y_n') \xrightarrow{\omega^*} y' \Rightarrow (\alpha x_n' + \beta y_n') \xrightarrow{\omega^*} \alpha x' + \beta y'$.

3) La topología es más débil que la norma: $(x_n') \xrightarrow{\|\cdot\|} x' \Rightarrow$ $(x_n') \xrightarrow{\omega^*} x'$, pues $|x_n'(x) - x'(x)| \le \|x_n' - x'\|\|x\| \to 0$.

$\ell_1 = c_0'$, en ns T_{e_n}, $T_{e_n}(x) = x_n \to 0 = T_0(x) \rightsquigarrow T_{e_n} \xrightarrow{\omega^*} 0$, mientras que $\|T_{e_n}\| = 1\ \forall n$, $(T_{e_n}) \overset{\|\cdot\|}{\not\to} 0$.

→ Teorema de Alaoglu-Bourbaki. $B(E')$ con la topología $\sigma(E',E)$ es compacto.

D// $x\in E \rightsquigarrow \Delta_x = \{\lambda : |\lambda| \le \|x\|\} \subset \mathbb{K}$ compacto. $x' \longmapsto (x'(x))_{x\in E}$ $\rightsquigarrow B(E') \subset \prod_{x\in E} \Delta_x \subset \mathbb{K}^E$. Gracias al tma. de Tychonoff, $\prod_{x\in E}\Delta_x$ es compacto. Veamos que $B(E')$ es cerrado en $\mathbb{K}^E$ y $B(E')$ será compacto.

$f \in \overline{B(E')}^{\omega^*} \subset \prod_{x\in E}\Delta_x \rightsquigarrow |f(x)| \le \|x\|$, suponiendo que f es lineal. Como estos espacios no son métricos, habría que utilizar redes en vez de sucesiones.

$x,y\in E$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K} \rightsquigarrow f(\alpha x+\beta y) \overset{?}{=} \alpha f(x)+\beta f(y)$. Sea $\varepsilon>0$. Consideramos el siguiente entorno de f: $\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\cdots\times \underbrace{D(f(\alpha x+\beta y),\varepsilon)}^{\alpha x+\beta y}\times\cdots \times \overbrace{D(f(x),\varepsilon)}^{x}\times\cdots\times \overbrace{D(f(y),\varepsilon)}^{y}$. Por ser f adherente, $\exists x'_\varepsilon \in B(E')$ tal que $x'_\varepsilon \in V_f^{(\alpha x+\beta y,\, x,\, y,\, \varepsilon)} \rightarrow |x'_\varepsilon(\alpha x+\beta y) - f(\alpha x+\beta y)| \le \varepsilon$, $|x'_\varepsilon(x) - f(x)| \le \varepsilon$, $|x'_\varepsilon(y)-f(y)| \le \varepsilon$. Como x'_ε es lineal, $|f(\alpha x+\beta x) - \alpha f(x) - \beta f(y)| \le \varepsilon(1+|\alpha|+|\beta|)$; y como ε es arbitrario, $f(\alpha x+\beta x) = \alpha f(x)+\beta f(y)$.

//

$\longrightarrow$ Topología débil en E ($\omega = \sigma(E,E')$). $E \overset{J_E}{\hookrightarrow} (E')' = E''$; se toma $\sigma(E'',E')|_{J_E(E)}$. $(x_n) \xrightarrow{\omega} x \equiv \hat{x}_n \xrightarrow{\omega^*} \hat{x} \Longleftrightarrow \hat{x}_n(x') = x'(x_n)$ $\longrightarrow \hat{x}(x') = x'(x)$ $\forall x'\in E'$. Con esta definición, ya hemos probado que tenemos una topología. $x_n \xrightarrow{\omega} x$, $y_n \xrightarrow{\omega} y \rightsquigarrow \alpha x_n+\beta y_n \xrightarrow{\omega} \alpha x+\beta y$.
En c_0, $e_n \xrightarrow{\omega} 0$ pues $\forall a\in \ell_1$, $T_a(e_n) = a_n \to 0 = T_a(0)$, pero $\|e_n\|_\infty = 1$.

Así, $\|x_n - x\| \to 0 \not\Leftarrow (x_n) \xrightarrow{\omega} 0$.

En E' tenemos $\omega^* = \sigma(E', E)$ y $\omega = \sigma(E', E'')$; si $J_E(E) \subsetneq E''$, ω es más fina que ω^*, $\omega^* \leq \omega \leq \|\cdot\|$. Pero si E es reflexivo, $\omega = \omega^*$ y el tma. Alaoglu-Bourbaki sirve en E.

$\longrightarrow$ Tomamos S_0 conjunto de funciones continuas, S_1 límites puntuales de funciones de S_0, S_1 límites de S_2, ..., y en general $S_{\alpha+1}$ límites de S_α, y para β ordinal límite, $S_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} S_\alpha$. Baire demostró que $S_\alpha \subsetneq S_{\alpha+1}$, pero no son todas las funciones (por ejemplo si trabajamos en $[0,1]$, todas las funciones anteriores son medibles Lebesgue).

$A \subset X \leadsto A$ es de 1ª categoría si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $\mathring{\overline{A_n}} = \phi$ (A_n diseminado). A es de 2ª categoría si no es de 1ª categoría.

Teorema de Baire. Sea X espacio métrico completo. Se cumplen las siguientes afirmaciones equivalentes:

1) Si (F_n) es una sucesión de cerrados con interior vacío, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior vacío.

2) Si (G_n) es una sucesión de abiertos densos, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso.

D/ Probamos 2). Sea $\phi \neq G \overset{ab}{\subset} X \leadsto$ Hay que ver que $G \cap (\cap G_n) \neq \phi$

$a_1 \in G \cap G_1 \neq \phi \rightsquigarrow \exists \overline{B}(a_1, r_1) \subset G \cap G_1, \; 0 < r_1 \leq 1.$

$a_2 \in B(a, r_1) \cap G_2 \neq \phi \rightsquigarrow \exists \overline{B}(a_2; r_2) \subset B(a_1; r_1) \cap G_2 \; ; \; 0 < r_2 < \frac{1}{2}.$

Y así sucesivamente $\rightsquigarrow (a_n)$ con $d(a_{n+p}, a_n) \leq r_n \leq \frac{1}{n} \; \forall p \rightarrow$

Por la completitud de X, $a_n \to a$ que está en todos los $\overline{B}(a_n, r_n)$ $\subset G \cap (\cap G_n)$.

Así, los espacios métricos completos son de Baire ($\equiv$ cumplen 1) y 2)). Los espacios loc. compactos y Hausdorff también son de Baire; se cambia $\overline{B}(a_n, r_n)$ por entornos abiertos con adherencia compacta.

Dominio: abierto conexo

$\longrightarrow D \subset \mathbb{C}^n \rightsquigarrow (\mathcal{H}(D), \overset{\text{conv. sobre compactos}}{\tau_c})$ es espacio métrico completo: se toma $(K_n) \uparrow D$, $\bigcup_n K_n = D$, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \rightsquigarrow$ se define $d(f,g) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}$

d induce la topología τ_c.

Teorema de Montel: $\sup_n \|f_n\|_K = M_K < \infty \Rightarrow \exists (f_{n_k}) \xrightarrow{\tau_c} f$.

Prolongación analítica: $f \in \mathcal{H}(D)$ admite prolongación analítica si $\exists \tilde{D}$ dominio, $\tilde{D} \supset D$, $\tilde{D} \setminus D$ con interior no vacío y $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{D})$, $\tilde{f}|_D = f$.

$S_D = \{f \in \mathcal{H}(D) : f$ admite prolongación analítica$\} \rightsquigarrow S_D$ es de primera categoría en $\mathcal{H}(D)$ o bien $S_D = \mathcal{H}(D)$.

D// Sea $(y_n) \subset \partial D$ denso, $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$. $H_{mnp} = \{f \in \mathcal{H}(D) :$

$\exists \tilde{f} \in \mathcal{H}(D \cup \{y_n + \frac{1}{m}B\})$, $\tilde{f}|_D = f$ y $|\tilde{f}(z)| \leq p$, $\forall z \in y_n + \frac{1}{m}B\}$.
Por el tma. de Montel, H_{mnp} son cerrados. $E_{mn} = \bigcup_{p \geq 0} H_{mnp}$, $S_D = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{mn}$.

Si $\mathring{H}_{mnp} = \phi$ $\forall m, n, p$, S_D es de primera categoría. Si $\exists \mathring{H}_{m_0 n_0 p_0} \neq \phi$, como E_{m_0, n_0} es subespacio vectorial con interior no vacío, es igual a $\mathcal{H}(D) \to S_D = \mathcal{H}(D)$. Si se cumple esto último, $\mathcal{H}(D) = E_{mn} \to$ todas las funciones prolongables lo hacen a un abierto común $E_{mn} = D \cup \{y_n + \frac{1}{m}B\}$. Si para cada y_n $\exists f \in \mathcal{H}(D)$ con $\lim_{z \to y_n} |f(z)| = \infty$, S_D es de 1ª Categoría.
Ej: $D \subset \mathbb{C}$ disco unidad. $y \in \partial D$, $\frac{1}{z+y} \rightsquigarrow$ no se puede prolongar en $y \to \exists f \in \mathcal{H}(D)$ que no es prolongable en ningún punto de ∂D. Esto ocurre en todos los $D \subset \mathbb{C}$, pero en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, hay casos de $S_D = \mathcal{H}(D)$.

$\longrightarrow$ Sean E e.n. Banach, F e.n., $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\exists$ $r > 0$ con $\overline{T(B(E))} \supset rB(F)$. Entonces $T(B(E)) \supset \frac{r}{2} B(F)$ (en realidad $T(B(E)) \supset sB(F)$ $\forall s < r$). Además en este caso T es abierta y sobre.
D// $G \subset E$ abierto. ¿Es $T(G)$ abierto? Supongamos que se cumple $T(B(E)) \supset \frac{r}{2} B(F)$. $T(a) \in T(G)$, $a \in G \Rightarrow \exists R > 0 \mid a + RB(E) \subset G$, $T(a) + R\frac{r}{2} B(F) \subset T(a) + RT(B(E)) \subset T(G) \rightsquigarrow T(G)$ abierto. $T(E)$ abierto y

subespacio vectorial $\Rightarrow T(E) = F$.

Suponemos ahora que $\overline{T(B(E))} \supset r B(F)$. Sea $y \in \frac{r}{2} B(E)$. ¿Existe $x \in B(E)$ con $y = T(x)$? Afirmamos que existe $(x_n)_{n\geq 0} \subset E$ tal que 1) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ y 2) $\|y - T(x_n)\| \leq r\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Se construye inductivamente: $x_0 = 0$; construidos $x_0, x_1, \dots, x_k$, $y - T(x_k) \in r\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} B(F)$ $\subset \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \overline{T(B(E))} = \overline{T\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} B(E)\right)} \Rightarrow \exists z_k \in \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} B(E)$, $\|y - T(x_k)$ $- T(z_k)\| < r\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} \rightsquigarrow x_{k+1} = x_k + z_k$.

Como E es Banach, $x_n \to x$, pues $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\|$ $< \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n} 0$. $T(x_n) \longrightarrow T(x) = y$, como queríamos. $\|x\| = \left\|x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)\right\|$ $\leq \|x_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$.

$\longrightarrow$ Tma de la aplicación abierta (o tma. de Banach-Schauder).
Sea E Banach, F e.n., $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T(E)$ es de 2ª categoría en F. Entonces T es abierta y sobre.

D// $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} k B(E) \Rightarrow T(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} k T(B(E)) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{k T(B(E))} \rightsquigarrow$ Como $T(E)$ es de 2ª categoría, $\exists n \mid \overset{\circ}{\overline{nT(B(E))}} \neq \phi \rightsquigarrow \overset{\circ}{\overline{T(B(E))}} \neq \phi$. $\exists a \in \overline{T(B(E))}$, $r > 0$, $a + rB(F) \subset \overline{T(B(E))}$. $-a + rB(F) \subset \overline{T(-B(E))} = \overline{T(B(E))}$. Sea $y \in rB(F)$. $a + y, -a + y \in \overline{T(B(E))} \Rightarrow \exists (x_n), (z_n) \subset B(E) \mid T(x_n) \longrightarrow a + y$, $T(z_n) \longrightarrow -a + y \rightsquigarrow T\left(\frac{x_n + z_n}{2}\right) \longrightarrow y$; $y_n = \frac{x_n + z_n}{2} \in B(E)$ por convexidad. Así,

$y \in \overline{T(B(E))}$, $2B(F) \subset \overline{T(B(E))}$. Aplicando el lema anterior, T es abierta y sobre.

Si E y F son Banach y T es una biyección lineal continua entre ellos, entonces T^{-1} es continua (un espacio de Banach $F \subset F$ es de 2ª Categoría). En particular, dos normas de espacio de Banach sobre un mismo espacio vectorial E, si son comparables, son equivalentes. $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$. (*)

$(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{I} (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1) \rightsquigarrow$ no es isomorfismo topológico $\rightsquigarrow (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ es de 1ª Categoría de Baire.

F Banach de dimensión infinita, $(e_i)_{i\in I}$, $\|e_i\| = 1$ base algebraica. $E = c_{00}(I)^{\|\cdot\|_\infty}$, $E \xrightarrow{T} F$, $(x_i)_{i\in I} \longrightarrow \sum_{i\in I} x_i e_i$ es isomorfismo algebraico, pero no topológico, porque F es completo y E no es completo. T no es abierta.

$\longrightarrow$ **Teorema de la gráfica cerrada.** Sean E, F Banach y $T: E \longrightarrow F$ lineal con gráfica $(G_f = \{(x, f(x)) \in E\times F\})$ cerrada. Entonces T es continua.

D// $E\times F \xrightarrow{S} F$
$(x,y) \longmapsto T(x) - y$ $\rightsquigarrow G_T = \ker S =$ s.v. de $E\times F$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, dashed, "(\pi_E|_{G_T})^{-1}"'] & & F \\
& G_T \arrow[ul, "\pi_E|_{G_T}"] \arrow[ur, bend right, "\pi_F"'] \arrow[d, hook] & \\
& E\times F &
\end{tikzcd}$$

biyección continua

G_T Cerrado $\to$ Banach

$E\times F$ Banach

Por el tma. de la apl. abierta, $(\pi_E|_{G_T})^{-1}$ es continua $\rightsquigarrow T = \pi_F \circ (\pi_E|_{G_T})^{-1}$ continua. //

(*) Es decir, si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas con las que X es completo y $\|x\|_2 \leq M\|x\|_1$, $\exists\, m > 0 \mid m\|x\|_1 \leq \|x\|_2$.

$\mathcal{C}(K)$, $\|\cdot\|_\infty$, sea $\|\cdot\|$ otra norma tal que 1) $(\mathcal{C}(K),\|\cdot\|)$ Banach
2) La evaluación en un punto de K es continua. $(\mathcal{C}(K),\|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{I} (\mathcal{C}(K),\|\cdot\|)$ es continua; para probarlo veamos que la gráfica es cerrada(*). $\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \\ f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} g\end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} f=g$. $|g(t)-f(t)| \le |g(t)-f_n(t)| + |f_n(t)-f(t)| \le \underbrace{|g(t)-f_n(t)|}_{\to 0} + \underbrace{\|f_n-f\|_\infty}_{\to 0} \Rightarrow g(t)=f(t)\ \forall t$. Por el tma. apl. abierta, I es isom. top. Así, cualquier norma razonable es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$, e igual en los espacios L_p y ℓ_p.

→ Principio de acotación uniforme (tma. Banach-Steinhauss)

E, F e.n., $\{T_i\}_{i\in I}\subset \mathcal{L}(E,F)$. $A=\{x\in E: \sup_{i\in I}\|T_i(x)\|<\infty\}$.

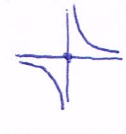
1) A es un F_σ (unión numerable de cerrados)

2) Si A es de 2ª categoría, entonces $\exists M>0$, $\|T_i\|\le M\ \forall i\in I$ $(\Rightarrow A=E)$
(la acotación puntual en E espacio de Banach implica equicontinuidad).

D// 1) $A_n = \{x\in E: \sup_{i\in I}\|T_i(x)\|\le n\} = \bigcap_{i\in I}\{x: \|T_i(x)\|\le n\}$ cerrado, $A=\bigcup_n A_n$.

2) Si A es de 2ª categoría, $\exists N \mid \mathring{A}_N\ne\emptyset$, $\exists a\in A_N, R>0: a+RB(E)\subset A_N$.
Si $\|x\|\le R$, $a+x, a\in A_N \leadsto \|T_i(x)\|\le\|T_i(a+x)\|+\|T_i(a)\|\le 2N\ \forall i\in I$.
$y\ne0 \leadsto \|R\frac{y}{\|y\|}\|=R$, $\frac{R}{\|y\|}\|T_i(y)\|\le 2N\ \forall i\in I$, $\|T_i(y)\|\le\frac{2N}{R}\|y\|\ \forall i\in I$, $\|T_i\|\le\frac{2N}{R}\ \forall i\in I$. //

→ Si E es Banach, F e.n., $(T_n)\subset\mathcal{L}(E,F)$ tal que $\forall x\in E$

(*) La condición de gráfica cerrada es: sea $x_n\to x$. Si $T(x_n)\to y$, entonces $y=T(x)$. Es estrictamente más débil que continuidad: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,  $\leadsto$ discont. en $x=0$.

$\exists \lim_n T_n(x) =: T(x)$, entonces $T \in \mathcal{L}(E,F)$(*)

D// $A = E$ de 2ª Categoría $\Rightarrow \sup_n \|T_n\| = M < \infty \Rightarrow \|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq M\|x\| \; \forall x \in E$.

$\longrightarrow$ E Banach. Si existe $x \in E$ con $\sup \|T_i(x)\| = \infty$, entonces A es de 1ª Categoría y $E \setminus A$ es un G_δ denso.

D// $A \neq E \Rightarrow$ A de 1ª Categoría, pues si fuera de 2ª Categoría habría acotación uniforme y $A = E$. $A = \bigcup F_n$, $\mathring{F}_n = \phi \rightarrow E \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus F_n)$. Como E es Banach, $\mathring{A} = \phi$ y $E \setminus A$ es denso. //

Ej: $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1) = E$, no Banach y de 1ª Categoría. $x_n'(f) = n\int_0^{1/n} f(t)dt$, $|x_n'(f)| \leq n\|f\|_1 \Rightarrow \|x_n'\| \leq n$, y de hecho se da la igualdad. $x_n'(f) \longrightarrow f(0) = \delta(f)$; δ es lineal pero no continua. Y sin embargo $A = E$. Hay acotación puntual pero no uniforme.

$\longrightarrow$ Si E es Banach, toda familia $(x_i')_{i \in I} \subset E'$ puntualmente acotada (w^*-acotada) es acotada en norma.

$\longrightarrow$ Un subconjunto $A \subset E$ es acotado en norma si y sólo si $\forall x' \in E'$, $x'(A) \subset \mathbb{K}$ es acotado (w-acotado). No se requiere que E sea completo.

D// $\sup_A \|a\| \leq M \Rightarrow |x'(a)| \leq \|x'\|\|a\| \leq \|x'\| M \Rightarrow x'(A)$ acotado.

Recíprocamente, $E \xrightarrow[J]{\text{isometría}} E''$, $A \longrightarrow J(A) = \hat{A} \subset (E')'$ Banach, $\hat{A}$ es w^*-acotado en $F = E'$ ($\hat{A}$ puntualmente acotado) $\rightarrow \hat{A}$ acotado en

(*) Lo cual no significa que $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$, sino $T_n \xrightarrow{w^*} T$, pues la convergencia débil ya implica las premisas.

norma $\leadsto A\subset E$ acotado en norma.

$\longrightarrow$ Sea $(x_n)\subset E$ e.n.. Son equivalentes:

1) x_n converge débilmente a 0.

2) a) (x_n) acotada en norma

b) $x'(x_n)\longrightarrow 0$ $\forall x'\in S$ = denso en E'.

$E=(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $f_n \xrightarrow{\omega} f\in E \iff$ 1) $\|f_n\|_\infty\leq M$

2) $f_n(t)\to f(t)$ $\forall t\in[0,1]$.

En efecto, E' = medidas de Radon regulares, y se usa el teorema de la convergencia dominada.

$\longrightarrow$ Principio de condensación de singularidades. Sea E Banach, $(F_n)\leadsto$ e.n., $\mathcal{H}_n\subset\mathcal{L}(E,F_n)$. Supongamos que para cada n existe $x_n\in E$ tal que $\sup_{T\in\mathcal{H}_n}\|T(x_n)\|=\infty$.
Entonces existe G_δ-denso $B\subset E$ tal que $\forall x\in B$, $\sup_{T\in\mathcal{H}_n}\|T(x)\|=\infty$ $\forall n$.

D// $F_{nm}=\{x\in E: \sup_{T\in\mathcal{H}_n}\|T(x)\|\leq m\}$, $\bigcup_{m=1}^\infty F_{nm}=E_n\neq E \to$ de 1^a Categoría,
$C=\bigcup_{n=1}^\infty E_n=\bigcup_{n=1}^\infty\bigcup_{m=1}^\infty F_{nm}$ es de 1^a Categoría, $E\setminus C=B$.

$\longrightarrow$ Espacios de Hilbert. E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}=\begin{vmatrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{vmatrix}$.
Un semi-producto escalar o forma sesquilineal definida positiva sobre E es una aplicación $(\cdot|\cdot):E\times E\longrightarrow\mathbb{K}$ que cumple:

(S1) $(\alpha x+\beta y|z)=\alpha(x|z)+\beta(y|z)$

(S2) $(x|y) = \overline{(y|x)}$ (hermitiana)

(S3) $(x|x) \geq 0$

Se deduce que $(x|\alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x|y) + \bar{\beta}(x|z)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la forma sesquilineal es bilineal.

Si además se cumple

(S3)' $(x|x) = 0 \iff x = 0$,

entonces $(\cdot|\cdot)$ es un producto escalar.

Sea $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x|y)$

2) $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

3) $x \longmapsto \|x\|$ es una seminorma sobre E.

4) Si $(\cdot|\cdot)$ es un producto escalar, $\|\cdot\|$ es una norma sobre E y la igualdad en 2) ocurre si y sólo si x e y son l.d.

(2) $\longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $0 \leq (x+\lambda y | x + \lambda y) = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x|\lambda y)$.
$(x|y) = e^{i\theta}|(x|y)| \rightarrow$ tomamos $\lambda = e^{i\theta} t$, $t \in \mathbb{R} \rightarrow 0 \leq \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t|(x|y)|$ $\forall t \in \mathbb{R} \implies$ los coeficientes de la parábola cumplen $|(x|y)|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \rightarrow |(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, con igualdad si $\exists \lambda |\ \|x+\lambda y\| = 0$

(3) $\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x|y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x|y)|$
$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(4) La igualdad se da si $\exists \lambda |\ \|x + \lambda y\| = 0 \iff x + \lambda y = 0 \rightarrow x, y$ l.d.

$\longrightarrow$ Un espacio prehilbert es un e.n. cuya norma deriva de un producto escalar. Un espacio prehilbert completo se llama espacio de Hilbert.

Propiedades de los espacios prehilbert:

1) Identidad del paralelogramo: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.

2) Identidad de polarización: $(x|y)=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right]$ ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$), o $=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right]$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$).

¿Son los espacios ℓ^p espacios de Hilbert? $e_1=x$, $y=e_2 \rightsquigarrow$ $\|x+y\|=2^{\frac{1}{p}}=\|x-y\|$, $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2^{2/p}+2^{2/p}=2(\|x\|^2+\|y\|^2)=2^2$ $\Rightarrow \frac{2}{p}+1=2$, $p=2 \rightsquigarrow$ Sólo ℓ^2 es espacio de Hilbert (aunque hay que dar todavía un producto escalar concreto).

En ℓ^2: $(x|y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$, absolutamente convergente, pues $\sum|x_n||y_n|\leq\left(\sum|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum|y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$ por la des. Hölder. $\sqrt{(x|x)}=\sqrt{\sum|x_n|^2}=\|x\|_2$. $(\mathcal{C}[0,1],\|\cdot\|_2)\longrightarrow(f|g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$, e igual para $L^2[0,1]$.

$\longrightarrow$ Ortogonalidad. $x\perp y \iff (x|y)=0$ ($\iff y\perp x$). Si $A\subset E$, $A^\perp=\{y\in E:(y|a)=0\ \forall a\in A\}$ subespacio de E.

$a\in E\rightsquigarrow T_a(x)=(x|a)$, $|T_a(x)|\leq\|a\|\|x\|\Rightarrow T_a\in E'$, $\|T_a\|\leq\|a\|$. Si $a\neq 0$, $\|T_a\|\geq\frac{T_a(a)}{\|a\|}=\frac{\|a\|^2}{\|a\|}=\|a\|$. $E\ni a\longrightarrow T_a\in E'$; $A^\perp=\bigcap_{a\in A}\ker T_a$ $\longrightarrow$ subespacio cerrado.

1) $A\subset B\Rightarrow B^\perp\subset A^\perp$. 2) $A^\perp=\langle A\rangle^\perp=\overline{[A]}^\perp$. Es claro que $A\subset\langle A\rangle\subset\overline{[A]}\Rightarrow A^\perp\supset\langle A\rangle^\perp\supset\overline{[A]}^\perp$. Sea $y\in A^\perp\iff(y|a)=$

$(a|y)=0\ \forall a\in A \iff A\subset \ker T_y \Rightarrow [A]\subset \ker T_y \Rightarrow y\in [A]^{\perp}$.

3) $A\subset A^{\perp\perp}$, $A^{\perp}=A^{\perp\perp\perp}$.

4) $(\bigcup A_i)^{\perp}=\bigcap A_i^{\perp}$.

$\longrightarrow$ Existencia de proyección. E prehilbert, $\emptyset\neq A\subset E$ convexo y completo. Entonces $\forall x\in E$, $P_A(x)$ (conjunto de puntos que minimizan la distancia) $\neq\emptyset$ y se reduce a un solo punto.

D// $d(x,A)=d>0 \rightarrow \exists (a_n)\subset A$ tal que $\|x-a_n\|\searrow d$ (sucesión minimizante). Identidad del paralelogramo en $x-a_n$, $x-a_m$:
$\|a_m-a_n\|^2+\|2x-(a_m+a_n)\|^2=2\left(\|x-a_n\|^2+\|x-a_m\|^2\right)$, $\|a_m-a_n\|^2=$
$=2\left(\|x-a_n\|^2+\|x-a_m\|^2\right)-4\underbrace{\left\|x-\frac{a_n+a_m}{2}\right\|^2}_{\text{convex}\rightarrow\geq d^2}\leq 2\left(\|x-a_n\|^2+\|x-a_m\|^2\right)-4d^2\longrightarrow 0$.
Así, (a_n) es de Cauchy, por la completitud, $a_n\rightarrow a$,
$\|x-a\|=\lim\|x-a_n\|=d$.

Si $a,b\in P_A(x)$, $a,b,a,b,\dots$ es una sucesión minimizante y tiene límite $\rightarrow a=b$.

//

$\longrightarrow$ Sea A un s.v. de un prehilbert E, $a\in A$, $x\in E$. Son equivalentes: 1) $a=P_A(x)$ 2) $x-a\in A^{\perp}$.

D// 1) $\Rightarrow$ 2) Si $A\neq\{0\}$ y $b\in A\setminus\{0\}$, $a+\lambda b\in A\ \forall\lambda\in\mathbb{K}$,
$\|x-a\|^2\overset{\text{hip.}}{\leq}\|x-(a+\lambda b)\|^2=\|(x-a)-\lambda b\|^2=\|x-a\|^2+|\lambda|^2\|b\|^2-2\operatorname{Re}\bar{\lambda}(x-a|b)$
$\rightarrow 2\operatorname{Re}\bar{\lambda}(x-a|b)\leq|\lambda|^2\|b\|^2$. Sup. $(x-a|b)=|(x-a|b)|e^{i\theta}$, $\lambda=te^{i\theta}$, $t>0$
$\rightarrow 2t|(x-a|b)|\leq t^2\|b\|^2\ \forall t \Rightarrow (x-a|b)=0$.

2) $\Rightarrow$ 1) $b \in A$. $\|x-b\|^2 = \|(x-a)+(a-b)\|^2 = \|x-a\|^2 + \|a-b\|^2 \geq \|x-a\|^2$ ✓.

$\rightarrow$ Teorema de la proyección ortogonal. E prehilbert, A s.v. completo. 1) $E \ni x \longrightarrow P_A(x)$ es lineal, idempotente y continua, con $\|P_A\| = 1$ si $A \neq \{0\}$, $\|P_A\| = 0$ si $A = \{0\}$ 2) $\ker P_A = A^\perp$ y $E = A \oplus A^\perp$ 3) $A = A^{\perp\perp}$

D/ 1) Si $a \in A$, $P_A(a) = a \Rightarrow P_A^2(x) = P_A(x)$. $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \overset{?}{\Rightarrow}$ $P_A(\alpha x + \beta y) = \alpha P_A(x) + \beta P_A(y)$. $x - P_A(x) \in A^\perp \Rightarrow \alpha x - \alpha P_A(x) \in A^\perp$, $y - P_A(y) \in A^\perp \Rightarrow \beta y - \beta P_A(y) \in A^\perp$, y al sumar, $(\alpha x + \beta y) - (\alpha P_A(x) + \beta P_A(y)) \in A^\perp$. $\|x\|^2 = \|\underbrace{x - P_A(x)}_{\in A^\perp} + \underbrace{P_A(x)}_{\in A}\|^2 = \|x - P_A(x)\|^2 + \|P_A(x)\|^2 \geq \|P_A(x)\|^2 \Rightarrow \|P_A\| \leq 1$; si $a \in A \setminus \{0\}$, $\|P_A\| \geq \frac{\|P_A(a)\|}{\|a\|} = 1$.

2) Si $P_A(x) = 0$, $x - 0 \in A^\perp \rightsquigarrow \ker P_A = A^\perp$. $x = \underbrace{x - P_A(x)}_{\in A^\perp} + \underbrace{P_A(x)}_{\in A}$, $A \cap A^\perp = \{0\} \Rightarrow E = A \oplus A^\perp$. $I - P_A$ proyección sobre $A^\perp$.
En un Hilbert, cualquier subespacio cerrado es la imagen de una proyección continua; así
$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, dashed] & F \text{ e.n.} \\ A \arrow[u, hook] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
admite siempre extensión.

3) $A \subset A^{\perp\perp}$. Sup $b \in A^{\perp\perp}$. $P_A(b) \in A \subset A^{\perp\perp}$, $b - P_A(b) \in A^\perp \cap A^{\perp\perp} = \{0\}$, luego $b = P_A(b) \in A$.

//

$\rightarrow$ E espacio de Hilbert. 1) Si $\emptyset \neq A \subset E$, $A^{\perp\perp} = \overline{\langle A \rangle} = [A]$.
2) A es total ($[A] = E$) $\Leftrightarrow A^\perp = \{0\}$.

D/ 1) $A^\perp = \langle A \rangle^\perp = [A]^\perp$, $A^{\perp\perp} = [A]^{\perp\perp} = [A]$. 2) $[A] = E \Leftrightarrow A^\perp = [A]^\perp = \{0\}$. //

Ej: $E=(c_{00}, \|\cdot\|_2) \subset \ell_2(\mathbb{R})$. $A=\{x\in E : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x_k = 0\} = \ker T_{\left(\frac{1}{n}\right)}$.
$\hookrightarrow \ell_2$

$T_a(x) = (x|a) = \sum x_n a_n$. $x=(x_1, \dots x_n, 0, \dots) \in A^{\perp}$, $y=(0 \dots \overset{k}{1} \dots 0, -\frac{k+1}{k}, 0, \dots) \in A \rightsquigarrow (x|y_k) = x_k = 0 \rightsquigarrow A^{\perp} = \{0\}$, $A^{\perp\perp} = E \neq A$.

El problema está en que E no es Hilbert, y A no admite proyección.

$\longrightarrow$ E prehilbert. $a\in E \rightsquigarrow T_a(x) = (x|a) \rightsquigarrow T_a \in E'$, $\|T_a\| = \|a\|$.

Teorema de Fréchet-Riesz (1907). 1) $\Phi: E \to E'$ es una isometría antilineal (Φ aditiva y $\Phi(\lambda a) = \bar{\lambda}\Phi(a)$).
2) E es completo si y sólo si Φ es sobre.

D/ 1) Ya está probado 2) Si Φ es sobre, E es isométrico a E' y es completo. Sup. que E es Hilbert. $x' \in E' \setminus \{0\} \Rightarrow$ $H = \ker x'$ hiperplano cerrado y propio. Sea $b\in H^{\perp}$, $\|b\|=1$ ($E = H \oplus \langle b \rangle$).
Si $x\in E$, $x = h + \lambda b$, $(x|b) = \lambda$. Entonces $x'(x) = \lambda x'(b) = x'(b)(x|b) = (x | \overline{x'(b)} b) = T_a(x)$ con $a = \overline{x'(b)}\, b$

//

Convergencia débil en un Hilbert: $x_n \xrightarrow{\omega} x \iff (x_n|a) \longrightarrow (x|a)$ $\forall a\in E$ (prehilbert: $\forall a \in \hat{E}$ completado; el dual de E se identifica con su completado).

Si E es Hilbert, $(T_a|T_b) := (b|a) = \overline{(a|b)}$, $(T_a|T_a) = \|a\|^2 = \|T_a\|^2$.
Así, el dual de un Hilbert es Hilbert, y $\underbrace{E \xrightarrow{\Psi_E} E' \xrightarrow{\Psi_{E'}} E''}_{J_E}$. Como

Ψ_E y $\Psi_{E'}$ son biyecciones, J_E es biyección: todos los espacios de Hilbert son reflexivos.

→ Sistemas ortogonales. E prehilbert. $(u_i)_{i\in I}$ es ortogonal si 1) $u_i \neq 0$ $\forall i \in I$ 2) $(u_i | u_j) = 0$ si $i \neq j$. Si además $\|u_i\| = 1$ $\forall i$, el sistema se dice ortonormal. Todo sistema ortogonal es linealmente independiente: $\sum_{i\in F} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow 0 = \|\sum \lambda_i u_i\|^2 \overset{\text{Pitágoras}}{=} \sum |\lambda_i|^2 \|u_i\|^2 \Rightarrow \lambda_i = 0$ $\forall i$.

→ Sea $(u_i)_{i\in I}$ un sistema ortonormal. 1) Si $M \subset I$ es finito y $E_M = \overline{\langle u_i : i \in M\rangle}$, $P_{E_M}(x) = \sum_{i\in M} (x|u_i) u_i$. 2) (Desigualdad de Bessel) $\forall M \subset I$ finito, $\sum_{i\in M} |(x|u_i)|^2 \leq \|x\|^2$.

D/ (1) $x - \sum_{i\in M} (x|u_i) u_i \in E_M^\perp = \{u_i : i \in M\}^\perp$, $\left(x - \sum_{i\in M} (x|u_i) u_i \middle| u_j\right) = 0$ $\forall j \in M$.

(2) $\|P_{E_M}(x)\|^2 = \left\|\sum_{i\in M} (x|u_i) u_i\right\|^2 = \sum_{i\in M} |(x|u_i)|^2 \leq \|x\|^2$. //

→ $(x|u_i) = \hat{x}(i)$ = coeficiente i-ésimo de x respecto al s.o. $(u_i)_{i\in I}$.

Ej: $E = (\mathcal{C}[0,2\pi], \|\cdot\|_2)$ o $L_2[0,2\pi]$. $e_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, $(e_n|e_m) = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m \end{cases}$. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistema ortonormal trigonométrico. $\hat{f}(k) = \left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_n\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\,dt$. Para ℓ_2, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia ortonormal.

→ Sumabilidad. E = e.n., $(x_i)_{i\in I} \subset E$ es sumable de suma $S = \sum_{i\in I} x_i$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M_\varepsilon \subset I$ finito tal que $\forall M \in \mathcal{P}_f(I)$ (→finito), $M \supset M_\varepsilon$, $\|S_M - S\| < \varepsilon$, $S_M = \sum_{i\in M} x_i$. Se trata de utilizar la red $(S_M)_{M\in\mathcal{P}_f(I)}$

$\longrightarrow$ (1) $l_I(E) = \{(x_i)_{i\in I} \subset E : (x_i)$ es sumable$\}$ es un s.v. de E^I y $l_I(E) \ni (x_i) \to \sum_{i\in I} x_i \in E$ es lineal. (2) $T \in \mathcal{L}(E,F)$ induce $\tilde{T} : l_I(E) \to l_I(F)$ lineal, $(x_i) \mapsto (T(x_i))$, y $T(\sum_{i\in I} x_i) = \sum_{i\in I} T(x_i)$. (3) Si $I = \mathbb{N}$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_{\mathbb{N}}(E)$ entonces $\forall \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyección, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (conmutativamente convergente; esto no ocurre siempre con las sumas numerables). (4) Si $(x_i)_{i\in I}$ es sumable, entonces $\{i\in I : x_i \neq 0\}$ es a lo más numerable.

Para $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ se tiene M_n finito; $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = I_0$. Si $m \notin M_n$, $\|x_m\| < \frac{1}{n} \to$ el soporte de (x_i) está contenido en I_0.

$\longrightarrow$ $(\alpha_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^+$. Entonces $(\alpha_i)_{i\in I}$ es sumable $\Longleftrightarrow \sup\{\sum_{i\in M} \alpha_i : M$ finito $\subset I\} < \infty$.

D// $\Rightarrow$) $\sum_{i\in I} \alpha_i = S$, $\varepsilon = 1 \to \exists M_1 \mid$ si $M \supset M_1$, $\|\sum_{i\in M} \alpha_i - S\| \leq 1$. $L \subset I$ finito $\to S_L = \sum_{i\in L} \alpha_i \leq \sum_{i\in L\cup M_1} \alpha_i \leq |S| + 1$. $\Leftarrow$) $\sup\{S_M : M \in \mathcal{P}_f(I)\} = S < \infty$. Si $\varepsilon > 0$, $\exists M_\varepsilon \mid S_{M_\varepsilon} \geq S - \varepsilon$. Si $M \in \mathcal{P}_f(I)$, $M_\varepsilon \subset M$, entonces $S \geq S_M \geq S_{M_\varepsilon} \geq S - \varepsilon$, $|S - S_M| \leq \varepsilon$. //

$\longrightarrow$ $(\alpha_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ ($\to \mathbb{K}, \mathbb{K}^n$). Son equivalentes: 1) $(\alpha_i)_{i\in I}$ es sumable 2) $\sup\{|\sum_{i\in M} \alpha_i| : M \in \mathcal{P}_f(I)\} < \infty$ 3) $(|\alpha_i|)_{i\in I}$ es sumable.

D// 1) $\Rightarrow$ 2) $\sum_{i\in I} \alpha_i = S$, $\varepsilon = 1 \to |S_M - S| \leq 1$ $\forall M \supset M_\varepsilon \Rightarrow |S_M| \leq |S| + 1$. $L \in \mathcal{P}_f(I) \to L = (L\cup M_\varepsilon) \setminus (M_\varepsilon \setminus L)$, $S_{L\cup M_\varepsilon} - S_{M_\varepsilon \setminus L} = S_L \Rightarrow |S_L| \leq |S_{L\cup M_\varepsilon}| + |S_{M_\varepsilon\setminus L}| \leq |S| + 1 + k$

2) $\Rightarrow$ 3) $\beta_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } \alpha_i \geq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_i < 0 \end{cases}$, $\gamma_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_i \geq 0 \\ -\alpha_i & \text{si } \alpha_i < 0 \end{cases} \to$ Si $(|\alpha_i|)$ es sumable, β_i y γ_i también,

2) $\Rightarrow$ 1)

luego $(\alpha_i) = (\beta_i) - (\gamma_i)$ también. (3) $\Rightarrow$ (2) Es obvio.

→ Espacios $\ell_2(I)$. $I \neq \phi$, $\ell_2(I) = \{(\alpha_i)_{i\in I} \subset \mathbb{K}^I : (|\alpha_i|^2)_{i\in I}$ es sumable$\}$. $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I} \rightarrow (x|y) = \sum_{i\in I} x_i \overline{y_i}$. ¿Está bien definido? Sea $M \subset I$ finito. $\sum_{i\in M} |x_i||y_i| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{i\in M} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i\in M} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\leq \left(\sum_{i\in I} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i\in I} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)} = \left(\sum_{i\in I} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

→ (Caracterización de bases ortonormales). Sea $(u_i)_{i\in I}$ un sistema ortonormal en un prehilbert E. Son equivalentes:

1) $\{u_i\}_{i\in I}$ es total $(\overline{\langle u_i : i\in I\rangle} = [u_i : i\in I] = E)$

2) $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\hat{x}(i)|^2$ (id. Parseval)

3) $\forall x \in E$, $x = \sum_{i\in I} \hat{x}(i)\, u_i$

4) $\forall x, y \in E$, $(x|y) = \sum_{i\in I} \hat{x}(i)\, \overline{\hat{y}(i)}$.

Estas cuatro condiciones implican

5) $(u_i)_{i\in I}$ es maximal (como sistema ortonormal).

Si E es completo, (5) es equivalente a las anteriores. Si se cumplen las condiciones (1)–(4) se dice que $(u_i)_{i\in I}$ es base ortonormal.

D/ (1) ⇒ (2) Sea $\varepsilon > 0$. $\exists M_\varepsilon \subset I$ finito, $y_0 \in E_M = \langle u_i : i \in M\rangle$ tal que $\|x - y_0\| \leq \varepsilon$. Si $M \supset M_\varepsilon$, $E_M \supset E_{M_\varepsilon}$. Por la desigualdad de Bessel, $0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i\in M} |\hat{x}(i)|^2 = \|x\|^2 - \|P_{E_M}(x)\|^2 = \|x - P_{E_M}(x)\|^2 \leq \|x - y_0\|^2 \leq \varepsilon$. Así, es cierto que $\sum_{i\in I} |\hat{x}(i)|^2$ es sumable con suma $\|x\|^2$.

(2) ⇒ (3) $M \subset I$ finito $\rightsquigarrow \left\|x - \sum_{i\in M} \hat{x}(i) u_i\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in M} |\hat{x}(i)|^2 \rightsquigarrow \sum_{i\in M} \hat{x}(i) u_i = x$

(3) => (1) Obvio

(3) => (4) $y\in E \to T_y(x)=(x|y)$, $T_y\in E'$. $(\hat{x}(i)u_i)_{i\in I}$ sumable a x
$\Rightarrow (T_y(\hat{x}(i)u_i))_{i\in I}$ es sumable de suma $T_y(x)=(x|y)$; $T_y(\hat{x}(i)u_i)=$
$=\hat{x}(i)(u_i|y)=\hat{x}(i)\overline{\hat{y}(i)}$.

(4) => (2) Se toma $x=y$.

(2) => (5) Sup. $\exists a\neq 0$, $a\in\{u_i: i\in I\}^{\perp}$. Entonces a no cumple la identidad de Parseval.

(5)+Hilbert => (1) Sup. $[u_i : i\in I]=H\neq E \leadsto H$ es cerrado en Hilbert y existe ortogonal $\Rightarrow \exists a\in H^{\perp}$, $\|a\|=1$. Entonces $\{u_i\}_{i\in I}\cup\{a\}$ es ortonormal y $\supsetneq\{u_i\}_{i\in I}$. //

$\longrightarrow$ 1) Si E es un prehilbert, todo s.o. $\neq\emptyset$ está contenido en uno maximal. 2) Todo espacio de Hilbert posee una base ortogonal.

D// Sea $\sigma=$ s.o. $\neq\emptyset$, $\mathcal{G}=\{\Sigma\subset E: \Sigma$ es s.o, $\Sigma\supset\sigma\}$ ordenado con la inclusión $\to$ si $(\Sigma_i)_{i\in I}\subset\mathcal{G}$ está totalmente ordenada, $\bigcup_{i\in I}\Sigma_i$ es s.o. $\leadsto$ Por el Lema de Zorn, existe $\Lambda\in\mathcal{G}$ maximal. (hay espacios prehilbert sin base ortonormal, pero deben tener un cardinal muy grande; todos los espacios separables tienen una base ortogonal) Es obvio que 1) => 2). //

$\longrightarrow$ (Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt). Si $\{x_n\}_{n\in I}$ finito o numerable de vectores linealmente independientes en un prehilbert, $\exists$ un s.o. $\{u_n\}_{n\in I}$ tal que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\langle x_1,\dots,x_k\rangle=\langle u_1,\dots,u_k\rangle$ (esto implica que $\{x_n\}_{n\in I}$, $\{u_n\}_{n\in I}$ generan lo mismo).

D// $v_1 = x_1$; $u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. A partir de aquí tomamos $0 = x_{k+1} - P_{L_k}(x_{n+1}) = v_{k+1} \in L_k^{\perp}$, $u_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$ $x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|u_i) u_i$. Es fácil comprobar que se cumplen todos los requisitos. //

$\longrightarrow$ E prehilbert, $(u_i)_{i\in I}$ s.o., $M = \overline{\langle u_i : i\in I\rangle}$ completo (para que exista proyección). Entonces $P_M(x) = \sum_{i\in I} (x|u_i) u_i$

D// $(u_i)_{i\in I}$ es b.o. de $M \rightsquigarrow P_M(x) = \sum_{i\in I} (P_M(x)|u_i) u_i$; $(P_M(x)|u_i) = (\underbrace{P_M(x) - x}_{\in M^{\perp}} + x|u_i) = (x|u_i) \to P_M(x) = \sum_{i\in I} (x|u_i) u_i$.

$\longrightarrow$ Un espacio prehilbert es separable $\Longleftrightarrow$ E posee una b.o. finita o numerable.

D// $\Leftarrow$) $E = \overline{\langle u_i : i\in I\rangle} \to E$ separable.

$\Rightarrow$) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso. Si los $\{x_n\}$ son independientes se aplica el proceso de Gram-Schmidt, y como $\langle x_n : n\in\mathbb{N}\rangle = \langle u_n : n\in\mathbb{N}\rangle$, resulta que $E = \overline{\langle u_n : n\in\mathbb{N}\rangle}$ y $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ es base ortogonal. Si los $\{x_n\}$ no son independientes, tomamos $x_{n_1} \neq 0$ el primero no nulo y luego seguimos con los primeros $x_{n_{k+1}} \notin \langle x_1, \dots, x_{n_k}\rangle$ (finito o num.)

¿Es cierto que $\langle x_{n_k} : k\in I\rangle = \langle x_n : n\in\mathbb{N}\rangle$? $\subset$ es obvio, pero $\supset$ también es cierto por construcción. //

→ (Tma. Riesz-Fischer). E prehilbert, $(v_i)_{i\in I}$ base ortonormal

1) $E \ni x \xrightarrow{\Psi} (\hat{x}(i))_{i\in I} \in \ell_2(I)$ está bien definida, es lineal, preserva el producto escalar (luego es isometría), cuya imagen es un subespacio vectorial denso de $\ell_2(I)$.

2) Si E es Banach, Ψ es sobreyectiva → isomorfismo isométrico.

D/ 1) La desigualdad de Bessel prueba que Ψ está bien definida. Es obvio que Ψ es lineal. Por la caracterización de las b.o., $(x|y) = \sum_{i\in I} \hat{x}(i)\overline{\hat{y}(i)}$, se preserva el producto escalar. $\langle \Psi(v_i) = e_i, i\in I\rangle \subset \Psi(E) \to \Psi(E)$ denso. 2) Si E es completo, $\Psi(E)$ también; es cerrado y denso luego es el total.

→ E, F espacios de Hilbert. 1) Todas las b.o. de E tienen el mismo cardinal (dimensión hilbertiana). 2) $\ell_2(I) \approxeq \ell_2(J) \iff \text{Card}(I) = \text{Card}(J)$ ($\approxeq$ es isomorfismo preservando el producto escalar) 3) $E \approxeq F \iff D.H.(E) = D.H.(F)$.

D/ 1) Sean $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j\in J}$ bases ortogonales de E. Si I o J son finitos, entonces las bases son algebraicas y su cardinal coincide. Sup. I, J infinitos. Sea $J_i = \{j\in J : (b_j|a_i) \neq 0\}$. $a_i \neq 0 \to \sum_j (a_i|b_j) b_j = a_i$. Así, $J_i \neq \emptyset$ y $\text{card}(J_i) \leq \aleph_0$ (numerable). Si $j\in J$, $b_j = \sum_i (a_i|b_j) a_i \to$ $j \in J_i$ para algún $i \to J = \bigcup_{i\in I} J_i \to \text{Card}(J) \leq \text{Card}(I)$. Del mismo modo $\mathrm{Card}(I) \leq \mathrm{Card}(J)$, y por el tma. Cantor-Bernstein, $\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(J)$.

2) Por el primer apartado, $\ell_2(I) \approxeq \ell_2(J) \Rightarrow \mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(J)$. Recíprocamente, si $\sigma: I \to J$ es biyección, definimos $\varphi: \ell_2(I) \to \ell_2(J)$, $(\alpha_i)_{i\in I} \xrightarrow{\varphi} (\alpha_{\sigma(i)})_{i\in I}$ y es fácil ver que se trata de un isomorfismo isométrico.

3) Se deduce de 2) teniendo $E \approxeq \ell_2(I)$, $F \approxeq \ell_2(J)$ para algunos conjuntos I, J.

$\longrightarrow$ Sistema trigonométrico. $\mathcal{C}_p[0,2\pi] = \{f \in \mathcal{C}[0,2\pi] : f(0) = f(2\pi)\}$. Con $\|\cdot\|_\infty$, los polinomios trigonométricos son densos: $\overline{\langle e^{int} : n \in \mathbb{Z}\rangle}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}_p[0,2\pi]$. Como $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$ (salvo alguna constante quizás), esta familia también es densa en $(\mathcal{C}_p[0,2\pi], \|\cdot\|_2) \subset L_2[0,2\pi] \rightsquigarrow$ tenemos una base ortonormal: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_n : n \in \mathbb{Z}\right\}$, con $e_n(t) = e^{int}$. $\mathcal{C}_p[0,2\pi] = \ker(\delta_0 - \delta_{2\pi})$ discontinua (en $\|\cdot\|_2$), luego $\mathcal{C}_p[0,2\pi]$ es denso en $(\mathcal{C}[0,2\pi], \|\cdot\|_2)$ y en $L_2[0,2\pi]$; tenemos una base ortonormal en los tres espacios $\to E$ (y el último es Hilbert).

$f \in E \rightsquigarrow \hat{f}(k) = \left(f \,\middle|\, \frac{e_k}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt$. $c_k(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt$, $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) \frac{e_k}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e_k$ (sumable). Id.

Parseval: $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt$ $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt\right)$.

$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = (f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$. $g = \chi_{(a,b)}$, $0\le a<b\le 2\pi$ $\to$

$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\left(\frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{ikt}dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(t)\,dt$ $\to$ aunque no haya convergencia puntual, es cierta la integración término a término. $f\in L_2[0,2\pi]$ $\iff (\hat{f}(k))_k \in \ell_2(\mathbb{Z})$

Se puede definir la transformada de Fourier en L^1:
$f\in L^1[0,2\pi]$; $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$, $|c_k(f)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f| = \frac{1}{2\pi}\|f\|_1$ $\forall k$.
Así tenemos $\mathcal{F}: L^1[0,2\pi] \longrightarrow \ell_\infty(\mathbb{Z})$, pero en realidad la imagen está contenida en c_0 (Lema de Riemann-Lebesgue). En efecto:

$$\begin{tikzcd} L^1[0,2\pi] \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \ell_\infty \\ L^2[0,2\pi] \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \ell_2 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

; todas las aplicaciones son continuas.

$c_{00}\subset \ell_2 \subset \ell_\infty \to \overline{\ell_2}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0$, $\mathcal{F}\left(\overline{L^2[0,2\pi]}^{\|\cdot\|_1}\right) = \mathcal{F}(L^1[0,1]) \subset$
$\overline{\mathcal{F}(L^2[0,2\pi])}^{\|\cdot\|_\infty} = \overline{\ell_2}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0$ (no es todo c_0; es de 1ª categoría en c_0).(*)

$f\in \mathcal{C}^1_p[0,2\pi]$, $k\neq 0 \to c_k(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)e^{-ikt}\right]_0^{2\pi} + ik\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right) = c_k(f) = \frac{1}{ik}c_k(f') \to$ En este caso los coeficientes de f decrecen "más rápido de lo normal", y así $S_N \to f$ uniformemente.

$\longrightarrow$ Operadores en espacios de Hilbert. Sea H espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Sabemos que $H' = \{T_y : y\in H\}$, $T_y(x) = (x|y)$; por el tma. Hahn-Banach, $\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} \{|(Tx|y)|\}$, $\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|T(x)\| = \sup_{\|x\|\le 1}\{|(T(x)|y)| : \|y\|\le 1\}$.

(*) Las funciones de L^1 se aproximan por las de L^2, luego los coef. de Fourier se aproximan por los de $\ell_2 \to c_0$.

Sea (u_n) una base ortonormal de H, $T\in\mathcal{L}(H) \rightsquigarrow x=\sum_{n=1}^{\infty}(x|u_n)u_n$,

$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x|u_n)T(u_n)=\sum_{m=1}^{\infty}(T(x)|u_m)u_m \longrightarrow (T(x)|u_m)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(T(u_n)|u_m)}_{k_{mn}}(x|u_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}k_{mn}(x|u_n)$. Así, T nos viene descrita por una "matriz":

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots \\ k_{21} & k_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix}(x|u_1)\\(x|u_2)\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(T(x)|u_1)\\(T(x)|u_2)\\ \vdots\end{pmatrix},\quad k=(k_{m,n})_{n,m=1}^{\infty}.$$

Si $\sum_{m,n=1}^{\infty}|k_{mn}|^2<\infty$, entonces k está asociado a una aplicación continua: $x\in H\rightsquigarrow A_m(x)=\sum_{n=1}^{\infty}k_{mn}(x|u_n)$ sumable; $\sum_{n=1}^{\infty}|k_{mn}(x|u_n)|\le$
$\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}|k_{mn}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|_2$, $\sum_{m=1}^{\infty}|A_m(x)|^2\le\overbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|k_{mn}|^2\right)}^{K}\|x\|_2^2 \longrightarrow \exists T(x)=$
$\sum_{m=1}^{\infty}A_m(x)u_m$ continua, $\|T(x)\|^2=\sum_m|A_m(x)|^2\le K^2\|x\|^2$. Ahora bien, el recíproco no es cierto: $T(x)=x$ es obviamente continua, $k_{mn}=\delta_{mn}$
$\rightsquigarrow \sum_{\substack{m=1\\n=1}}^{\infty}|k_{mn}|^2=\infty$.

$\longrightarrow$ Si $T\in\mathcal{L}(H,H)$, $\exists! T^*\in\mathcal{L}(H,H)$ tal que $(T(x)|y)=(x|T^*(y))\ \forall x,y\in H$.
T^* se llama adjunto de T.

D/ $y\in H\rightsquigarrow x\mapsto\overbrace{(T(x)|y)}^{=\varphi_y(x)}$ es lineal y continua, y por el Tma. representación, $\exists! T^*(y)\in H \mid \varphi_y=\psi T^*(y) \longrightarrow$

$$\begin{tikzcd} H' & H' \arrow[l, "T'"'] \\ H \arrow[u, "\psi^{-1}"] \arrow[r, shift left, "T"] & H \arrow[u, "\psi"'] \arrow[l, shift left, "T^*"] \end{tikzcd}$$

$T^*=\psi^{-1}\circ T'\circ\psi$ //

1) $\|T^*\|=\|T'\|=\|T\|$

2) $(T+S)^*=T^*+S^*$, $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$, $(T\circ S)^*=S^*\circ T^*$, $T^{**}=T$, $I^*=I$

3) T es isom. top $\Longleftrightarrow T^*$ es isom. top, y $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$

4) $\|T\circ T^*\|=\|T\|^2=\|T^*\circ T\|$.

Para 4) $\rightsquigarrow \|T^*\circ T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$. $\|T(x)\|^2 = (Tx\,|\,Tx) = (T^*T(x)|x)$
$\leq \|T^*T\|\|x\|^2 \Rightarrow \|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Igual para $T\circ T^*$.

$\longrightarrow$ Se dice que T es autoadjunto o hermitiano si $T = T^*$.
T es positivo si es autoadjunto y $(Tx|x) \geq 0$ $\forall x \in H$ (con lo que $(x|y)_T = (T(x)|y)$ es semiproducto escalar).

1) Si (k_{mn}) es la matriz asociada a T, $k_{mn} = (T(u_n)|u_m) =$
$= (u_n | T^*(u_m)) = \overline{(T^*(u_m)|u_n)} = \overline{k_{nm}}$ (trasponer y conjugar como en álgebra lineal). Si T es autoadjunto, $k_{mn} = \overline{k_{nm}}$.

2) $\forall T \in \mathcal{L}(H,H)$, $\exists!$ dos operadores autoadjuntos T_1 y T_2 tal que $T = T_1 + iT_2$; basta tomar $T_1 = \frac{T+T^*}{2}$, $T_2 = \frac{T-T^*}{2i}$.

3) T y S autoadjuntos $\Rightarrow T+S$ autoadjunto, $T\circ S$ autoadjunto $\Leftrightarrow$ T y S conmutan $\left((T\circ S)^* = S^*\circ T^* = S\circ T \overset{?}{=} T\circ S\right)$.

4) Si T es autoadjunto, $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \underset{\leq}{=} 1} |(T(x)|x)| \ (= C)$ (la diagonal).
Es obvio que $C \leq \|T\|$. $\|T\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} |(T(x)|y)|$; $(T(x+y)|(x+y)) -$
$- (T(x-y)|x-y) = 2\left[(T(x)|y) + \underbrace{\overline{(T(y)|x)}}_{(y|T(x))}\right] = 4\mathrm{Re}(T(x)|y) \leq C\left[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right]$
$= 2C\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$. Multiplicando por un cierto $e^{i\theta}$, puedo quitar la parte real: $|(T(x)|y)| \leq \frac{C}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. $\|x\| = 1$, $y = \frac{T(x)}{\|T(x)\|} \rightsquigarrow \left|\left(T(x)\,\middle|\,\frac{T(x)}{\|T(x)\|}\right)\right|$
$\leq \frac{C}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) = C \Rightarrow \|T(x)\| \leq C$, $\|T\| \leq C$ ✓

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $(T(x)|x)\in\mathbb{R}\ \forall x \Rightarrow T$ es autoadjunto.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, esto no es cierto.

$\longrightarrow$ T operador sobre H. $\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C} : T-\lambda I\notin Is_c(H)\}$, $e(T)=\{\lambda\in\mathbb{C} : \ker(T-\lambda I)\neq 0\}$, $a(T)=\{$autovalores aproximados$\}$; $\lambda\in a(T)$ si $\exists(x_n)$, $\|x_n\|=1$ con $(T-\lambda I)(x_n)\longrightarrow 0$, es decir, $\nexists M>0 \mid \|(T-\lambda I)(x)\|\geq M\|x\|$ (siempre hay cota por arriba, pero puede no haberla por abajo(*)). Se tiene $e(T)\subset a(T)\subset\sigma(T)$ ($T-\lambda I$ es isomorfismo si $\exists m, M \mid m\|x\|\leq\|(T-\lambda I)(x)\|\leq M\|x\|$).

5) $T\in\mathcal{L}(H,H)\Rightarrow \ker T=T^*(H)^\perp$, $\ker T^*=T(H)^\perp$. $x\in\ker T \Longleftrightarrow T(x)=0 \Longleftrightarrow \forall y\in H$, $(T(x)|y)=(x|T^*(y))=0 \Longleftrightarrow x\in T^*(H)^\perp$, e igual para la otra. T es inyectiva $\Longleftrightarrow T^*(H)$ es denso, T^* es inyectiva $\Longleftrightarrow T(H)$ es denso.

$\lambda\in\sigma(T)\Longleftrightarrow\bar{\lambda}\in\sigma(T^*)$. En efecto: $T-\lambda I\in Is_c(H) \Longleftrightarrow (T-\lambda I)^* = T^*-\bar{\lambda}I\in Is_c(H)$.

$\longrightarrow$ $T\in\mathcal{L}(H,H)$ autoadjunto $\rightsquigarrow$ espectro numérico: $\omega(T)=\{(Tx|x) : \|x\|=1\}\subset\mathbb{R}$.

$\sigma(T)\subset\overline{\omega(T)}$.

D// $\lambda\notin\overline{\omega(T)} \Rightarrow \exists\delta>0$, $|\overset{\lambda(x|x)}{\lambda}-(T(x)|x)|\geq\delta\ \forall x, \|x\|=1 \rightarrow |(T(x)-\lambda x|x)|\geq\delta$.
$(T-\lambda I)(H)$ es denso $\Longleftrightarrow (T-\lambda I)(H)^\perp=\{0\}$. Si $y\in(T-\lambda I)(H)^\perp$, $\forall x\in H$, $((T-\lambda I)(x)|y)=0 \rightsquigarrow$ Tomamos $x=\frac{y}{\|y\|}$, $y\rightarrow\frac{y}{\|y\|}$ y llegamos a contradicción.

(*) Tener una cota inferior es equivalente a ser homeomorfismo sobre la imagen.

Así que $(T-\lambda I)(H)$ es denso. ¿Es inyectivo? $\|(T(x)-\lambda x|x)\| \geq \delta \; \forall x, \|x\|=1$ $\Rightarrow \|(T-\lambda I)(y)\| \geq \delta \|y\| \rightarrow$ inyectivo. H es Banach y su imagen también $\xrightarrow{\text{pues es isom. top.}}$ cerrada. $(T-\lambda I): H \rightarrow H$ isom. topológico y $\lambda \in \sigma(T)$ //

$\rightarrow T \in \mathcal{L}(H,H)$ autoadjunto. 1) $\sigma(T) \subset [m_T, M_T] \subset \mathbb{R}$, $m_T = \inf\{(Tx|x) : \|x\|=1\}$, $M_T = \sup\{(Tx|x) : \|x\|=1\}$ 2) Si $T \geq 0$ (autoadj. pos.), $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$

3) $\sigma(T) = a(T)$ y $m_T, M_T \in a(T)$. 4) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores y x_1, x_2 son autovectores asociados, entonces $(x_1|x_2)=0$.

D// 1) $\sigma(T) \subset \overline{\omega(T)} \subset [m_T, M_T]$ 2) Si $T \geq 0$, $\omega(T) \subset \mathbb{R}^+$

3) $\lambda \in [m_T, M_T] \setminus a(T) \overset{?}{\Rightarrow} \lambda \notin \sigma(T)$. $T_\lambda = T - \lambda I : H \rightarrow T_\lambda(H)$ isom. topológico. $T_\lambda(H)^\perp = \ker T_\lambda^* = \ker T_\lambda = \{0\} \Rightarrow T_\lambda(H)$ denso, Banach como $H \rightsquigarrow$ cerrado y $T_\lambda(H) = H \Rightarrow \lambda \notin \sigma(T)$. ¿Está m_T en $a(T)$?

Sea (x_n), $\|x_n\|=1$ tal que $(Tx_n|x_n) \downarrow m_T = \lambda$. $T_\lambda = T - \lambda I$. $((T-\lambda I)(x)|x) \geq 0 \; \forall x, \|x\|=1 \rightarrow T_\lambda \geq 0$. Si $B(x,y) = (T_\lambda x|x)$, es semiproducto escalar; por Cauchy-Schwarz, $|B(x,y)|^2 \leq (B(x,x))(B(y,y))$. $x = x_n$, $y = T_\lambda(x_n) \rightsquigarrow \|T_\lambda(x_n)\|^2 \leq (T_\lambda(x_n)|x_n)(T_\lambda^2(x_n)|T_\lambda(x_n)) \leq (T_\lambda(x_n)|x_n)\|T_\lambda(x_n)\|^3$, con lo que $\|T(x_n)-\lambda x_n\|^2 \longrightarrow 0 \Rightarrow \lambda \in a(T)$. Para $M_T \in a(T)$ se realiza una prueba similar.

4) $\lambda_1(x_1|x_2) = (\lambda_1 x_1|x_2) = (Tx_1|x_2) = (x_1|T^* x_2) = \lambda_2(x_1|x_2) \overset{\lambda_2 \neq \lambda_1}{\Rightarrow} (x_1|x_2) = 0$. //

$\rightarrow E, F$ e.n. Banach. $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es compacto si $\overline{T(B(E))}$ compacto.

Son equivalentes:

1) T compacto
2) $\forall (x_n) \subset E$ acotada, $(T(x_n))$ posee una subsucesión convergente.
3) $\forall (x_n) \subset B(E)$, $(T(x_n))$ posee una subs. convergente.
4) $\forall D \subset E$ acotado, $\overline{T(D)}$ compacto.

Ej: 1) Si $\dim T(E) < \infty$, T compacto (operador de rango finito).
2) Si T es un isom. topológico y $\dim E$ es infinita, T no es compacto.

$\mathcal{K}(E,F) = \{$operadores compactos$\}$.

1) $\mathcal{K}(E,F)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(E,F)$.
2) Si $T \in \mathcal{K}(E,F)$, $S \in \mathcal{L}(F,G)$, $U \in \mathcal{L}(D,E) \Rightarrow S \circ T \circ U \in \mathcal{K}(D,G)$.

En particular, $\mathcal{K}(E,E)$ es un ideal del anillo $\mathcal{L}(E,E)$.

D// 1) $(T_n) \subset \mathcal{K}(E,F)$, $T_n \to T \in \mathcal{L}(E,F)$. ¿$T \in \mathcal{K}(E,E)$? Sea $(x_n) \subset B(E)$. $T_1 \in \mathcal{K}(E,F) \Rightarrow \exists (x_n^1)$ subs. de (x_n) con $(T_1(x_n^1))$ convergente. Luego tomamos (x_n^2) subsucesión de (x_n^1) tal que $(T_2(x_n^2))$ también converja. Así se construye (x_n^k) $\forall k$; si tomamos $y_n = x_n^n$, $\exists \lim_{n\to\infty} T_k(y_n)$ $\forall k$. $\|T(y_n) - T(y_m)\| \leq \|T(y_n) - T_k(y_n)\| + \|T_k(y_n) - T_k(y_m)\| + \|T_k(y_m) - T(y_m)\| \leq 2\|T - T_k\| + \|T_k(y_n) - T_k(y_m)\| \rightsquigarrow$ $(T(y_n))$ es de Cauchy, y como F es Banach, converge.

Así, el límite de operadores de rango finito es compacto.[(**)] //

Ej: $k \in \mathcal{C}(I^2)$, $I = [a,b]$. $T_k(f)(s) = \int_a^b k(s,t) f(t)\, dt$, $T_k : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$, $\|T_k\| \leq \|k\|_\infty$. $\left\{\sum_{n=1}^m u_n(s) v_n(t)\right\}$ es denso en $\mathcal{C}(I^2)$ $\to$

(**) El apartado 2) es una simple comprobación.

$\exists k_n = \sum_{i=1}^{m(n)} v_i^n(s) v_i^n(t)$ $\longrightarrow$ tma. Stone-Weierstrass: $\{\sum v_i(s) v_i(t)\}$ subálgebra que distingue puntos fuertemente. $\|k_n - k\|_\infty \to 0 \Rightarrow T_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} T_k$. Además,

$T_{k_n} f(s) = \sum_{i=1}^{m(n)} v_i^n(s) \int_a^b v_i^n(t) f(t)\,dt \in \langle v_1^n, \dots, v_{m(n)}^n \rangle$ de rango finito

$\to$ Todos los operadores T_k son compactos. Como $\mathcal{C}(I^2) \subset L^2(I^2)$ es denso, T_k también es compacto $\forall k \in L^2(I^2)$.

No todos los operadores son de este estilo: $Id \in \mathcal{L}(L^2(I), L^2(I))$ no es de este estilo $\to$ para eso Dirac introdujo las funciones singulares δ.

$\longrightarrow$ Sea $T \in \mathcal{L}(H,H)$ autoadjunto y compacto.

1) $\sigma(T) \setminus \{0\} = e(T) \setminus \{0\}$

2) $\forall \lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, $\ker(T - \lambda I)$ tiene dimensión finita.

3) $\|T\|$ o $-\|T\| \in e(T)$.

D/ 1) $\sigma(T) = a(T)$ (T autoadjunto) $\subset [m_T, M_T]$. $\lambda \in a(T) \setminus \{0\} \Rightarrow \exists (x_n)$, $\|x_n\| = 1$, $(T - \lambda I)(x_n) \to 0$. Como T es compacto, $\exists (x_{n_k})$, $T(x_{n_k}) \to y$, $\lambda x_{n_k} \to \lambda y \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} y \neq 0 \to T(y) - \lambda y = \lim [T(x_{n_k}) - \lambda x_{n_k}] = 0$ $\to \lambda \in e(T)$

2) Si $\dim \ker(T - \lambda I) = \infty$, $\exists (u_n) \subset \ker(T - \lambda I)$ ortonormal, $\|T(u_n) - T(u_m)\|^2 = |\lambda|^2 \|u_n - u_m\|^2 = 2|\lambda|^2 \to \{T(u_n)\}$ no posee ninguna subsucesión convergente, contra la compacidad de T.

3) Si $T = 0$, no hay nada que probar. $T \neq 0 \to \|T\| = \sup\{|(Tx|x)| : \|x\| = 1\} = \max\{|m_T|, |M_T|\}$. Si $m_T + M_T \geq 0$, $m_T \leq M_T$, $-m_T \leq M_T$ $\longrightarrow$

$0 \neq M_T = \|T\| \in e(T)$. Si $m_T + M_T < 0$, $m_T \leq M_T$, $m_T \leq -M_T \rightsquigarrow m_T \leq |M_T|$,

$0 \neq m_T = -\|T\| \in e(T)$. //

$\longrightarrow$ Teorema espectral para operadores autoadjuntos y compactos.

H espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, $0 \neq T \in \mathcal{L}(H,H)$ autoadj. y compacto.

1) Existe una sucesión (finita o infinita) $(\lambda_n)_{n\in I} \subset \mathbb{R}$ de autovalores no nulos de T, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$, y un sistema ortonormal $(u_n)_{n\in I}$, $T(u_n) = \lambda_n u_n$ (por el resultado anterior, en $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ no hay cadenas infinitas de igualdades; por ejemplo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{37} \neq \lambda_{38} = \lambda_{39} = \dots = \lambda_{64} \neq \lambda_{65} = \dots$), de modo que

i) $\forall x \in H$, $x = \sum_{n\in I} (x|u_n) u_n + y$, $y \in \ker T$

ii) $T(x) = \sum_{n\in I} \lambda_n (x|u_n) u_n \quad \forall x \in H$.

Además, si I es infinito, $(\lambda_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. $\sigma(T)\setminus\{0\} = \{\lambda_n : n\in I\} = e(T)\setminus\{0\}$.

2) $T(H) = F_\infty = \overline{\langle u_n : n\in I\rangle}$, $\ker(T) = F_\infty^\perp$, $H = \ker T \oplus T(H)$

Así, si queremos resolver $Tx - \lambda x = z$, entonces $\sum(\lambda_n - \lambda)(x|u_n)u_n - \lambda y = z = \sum (z|u_n)u_n + \underset{\ker T}{z_0}$, y se iguala término a término.

D// 1) Haremos inducción. Tomamos λ_1 con $|\lambda_1| = \|T\|$, y rellenamos según la dimensión de $\ker(T - \lambda_1 I) \rightsquigarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$, y también tomamos $u_1, \dots, u_n$ autovalores unitarios y ortogonales entre ellos. $F_n = \langle u_1, \dots, u_n\rangle$. $F_n^\perp = H_n \rightsquigarrow T_n = T|_{H_n} : H_n \to H_n$ es compacto

y autoadjunto. $\rightsquigarrow \exists \lambda_{n+1}$, $|\lambda_{n+1}| = \|T_n\|$, $\lambda_{n+1} \in \sigma(T_n) \subset \sigma(T)$.
Ahora bien, $\|T_n\| \leq \|T\|$, y no puede haber igualdad (quizá hay un cambio de signo). En general la construcción debe cumplir $|\lambda_k| = \|T|_{\langle u_1, \dots, u_{k-1}\rangle^\perp}\|$. Este proceso se continúa hasta que

a) $\exists n \mid T|_{\langle u_1, \dots, u_n\rangle^\perp} = 0$, con lo que ya tenemos nuestra descomposición: $H = \langle u_1, \dots, u_n\rangle \oplus \langle u_1, \dots, u_n\rangle^\perp$, $x = \sum_{i=1}^{n} (x|u_i)u_i + y$, $y \in \ker T$, $T(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|u_i)u_i$.

b) Tenemos una sucesión infinita. Hay que probar que $|\lambda_n| \to 0$.
$|\lambda_n| = \|T|_{H_{n-1}}\|$. Si $|\lambda_n| \not\to 0$, $|\lambda_n| \geq \delta > 0$ $\forall n$; $\|T(u_n) - T(u_m)\|^2 = \|\lambda_n u_n + \lambda_m u_m\|^2 = |\lambda_m|^2 + |\lambda_n|^2 \geq 2\delta^2$ y no hay ninguna subsucesión convergente, contra compacidad de T.

$F_\infty = \overline{\langle u_n : n \in I\rangle} \rightsquigarrow$ base ortonormal de F_∞. $P_{F_N}(x) = \sum_{n \in I} (x|u_n)u_n = z$. $x_n = \sum_{i=1}^{n} (x|u_i)u_i = P_{\langle u_1, \dots, u_n\rangle}(x)$. $x = x_n + y_n$, $y_n \in \langle u_1 \dots u_n\rangle^\perp = H_n$.
$\|T(y_n)\| = \|(T|_{H_n})(y_n)\| \leq |\lambda_n| \|y_n\| \leq |\lambda_n| \|x\| \to 0$. $x - x_n = y_n \to x - z = y$;
$T(y_n) \to 0 \Rightarrow T(y) = 0$, y así $x = z + y = \underbrace{\sum (x|u_n)u_n}_{F_\infty} + \underbrace{y}_{\ker T}$, $T(x) = \sum \lambda_n (x|u_n)u_n$, pero $T(x) \in F_\infty$.

$s \in e(T) \setminus \{0\}$, $T(u) = su$, $su = T(u) = \sum \lambda_n (u|u_n)u_n$. Si $s \neq \lambda_n$ $\forall n$, $(u|u_n) = 0 \overset{su}{\Rightarrow} T(u) = \sum \lambda_n (u|u_n)u_n = 0$, que es absurdo.

ANÁLISIS FUNCIONAL

HOJA 1 CURSO 2013

1.- Sea $E := (\mathcal{C}_{\mathbb{K}}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ y $f_0, f_1, f_2 \in E$ dadas por $f_0(t) = 1,\ f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2$.

a) Si $P_n : E \to E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es una sucesión de operadores lineales *positivos* (e.d., $P_n(f) \geq 0$ si $f \geq 0$) tales que $\lim_{n\to\infty} P_n(f_j) = f_j$ para $j = 0, 1, 2$, entonces $\lim_{n\to\infty} P_n(f) = f$ para toda $f \in E$ (*Teorema de Korovkin*, 1953). (Ind. Limaye, pág. 40: si para cada $s \in [a,b], g_s(t) := (t-s)^2$, pruébese que, dado $f \in E$, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a,b]$ se tiene $-\epsilon - 2\|f\|_\infty \frac{g_s(t)}{\delta^2} \leq f(t) - f(s) \leq \epsilon + 2\|f\|_\infty \frac{g_s(t)}{\delta^2}$. Pruébese entonces que $P_n(g_s)(s)$ converge a 0 *uniformemente para* $s \in [a,b]$.)

b) Para cada $f \in \mathcal{C}([0,1])$ y $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$B_n(f) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Pruébese que (B_n) es una sucesión de operadores en $\mathcal{C}([0,1])$ que satisfacen las hipótesis del Teorema de Korovkin. Dedúzcase el Teorema de Weierstrass.

2.- Pruébese la siguiente versión del Teorema de Stone-Weierstrass para funciones complejas: Sea K un espacio compacto Hausdorff y A una subálgebra de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ tal que separa puntos fuertemente de K y siempre que $f \in A$, la función conjugada $\overline{f} \in A$. Pruébese que los conjuntos $\Re A := \{\Re f : f \in A\}$, $\Im A := \{\Im f : f \in A\}$ son subálgebras densas de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$. Dedúzcase que A es densa.

3.- a) Las funciones de la forma $f(z) := \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$ son densas en $(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

b) Dedúzcase que cualquier función continua periódica de periodo 2π puede aproximarse uniformemente por polinomios trigonométricos.(Ind.:Si $\theta : [0, 2\pi] \to \mathbb{T}$ está dada por $\theta(t) := e^{it}$, la correspondencia $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) \ni f \to \varphi := f \circ \theta \in \mathcal{CP}_{2\pi}(\mathbb{R})$ es una biyección lineal isométrica para las correspondientes normas del supremo.)

4.- a) Sea E un espacio normado no trivial. Pruébese que la adherencia de cualquier bola abierta es la correspondiente bola cerrada, que el diámetro de $B(a,r)$ es $2r$ y que si $B(a,r) \subset B(b,s)$, entonces $r \leq s$ y $\| a - b \| \leq s - r$

b) Demuéstrese que en un espacio de Banach, toda sucesión encajada de bolas cerradas no vacías, tienen un punto común.

c) En $E = (C_{\mathbb{R}}([0,1]), \| \,.\, \|_\infty)$ se consideran los conjuntos

$$C_n = \{f \in E : f(0) = 1, 0 \leq f(t) \leq 1 \text{ si } t \in [0, 1/n],\ f(t) = 0 \text{ si } t \in [1/n, 1]\}$$

Pruébese que $\big(C_n\big)$ es una sucesión decreciente de cerrados, acotados y no vacíos, con intersección vacía.

ANÁLISIS FUNCIONAL

HOJA 2 CURSO 2013

1.- a) Demuéstrese que si $0 < p < 1$, $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$, se cumple $\sum |a_n + b_n|^p \leq \sum |a_n|^p + \sum |b_n|^p$.

b) Pruébese que c_{00} es denso en cada uno de los espacios ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$. ¿Es denso en ℓ_∞?

c) f) Si $p \leq q$, pruébese que $\ell_p \subset \ell_q$ y $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ $\forall x \in \ell_p$ ¿Cuando vale la norma de la inclusión? Muéstrese también que si $p \neq q$, entonces $\ell_p \neq \ell_q$.

d) Si $x \in \ell_p$ para algún $p \geq 1$, por (c) resulta que $x \in \ell_s$, $\forall s \geq p$. Pruébese que existe $\lim_{s\to\infty} \|x\|_s = \inf_{s\geq p} \|x\|_s = \|x\|_\infty$.

e) Si $1 \leq p < q$, encuéntrese una sucesión en ℓ_p que converja a 0 en ℓ_q, pero no en ℓ_p (Sug.: constrúyase la sucesión en c_{00}.)

f) Pruébese que la dimensión de cada uno de los espacios $\ell_p (1 \leq p \leq \infty)$ es Car(R). (Sug.: Para cada $t \in (0, 1)$, considérese la sucesión $x_t = (t^n)$.)

2.- a) Estúdiese la convergencia de la sucesión $f_n(t) := t^n$ en cada uno de los espacios siguientes:

(i) $E = (C_{\mathbb{R}}([0, 1], \| \,.\, \|_\infty)$; (ii) $E = (C^1[0, 1], \| \,.\, \|^1)$, donde $\| f \|^1 = \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty$;

(iii) $E = (C[0, 1], \| \,.\, \|_1)$, donde $\| f \|_1 = \int_0^1 | f(t) | \, dt$

¿Cuales de estos espacios normados son Banach?

b) En el espacio $E = (C^1([0, 1]), \| \,.\, \|_\infty)$, ¿son continuas las formas lineales

$$T_1(f) := f(1) \quad ; \quad T_2(f) := f'(\frac{1}{2}) \quad ; \quad T_3(f) := \int_0^1 t f'(t) \, dt?$$

3.- Sea E un e.v. de dimensión infinita.

a) Si $(e_i)_{i\in I}$ es una base algebraica de E y para cada $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ (¡nótese que hay sólo un número finito de sumandos no nulos!) se define

$$\|x\|_1 = \sum_{i\in I} |x_i|, \qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i \in I\},$$

pruébese que $\|.\|_1$ y $\|.\|_\infty$ son dos normas no equivalentes sobre E.

4.- Si E, F, G son espacios normados y $B : E \times F \to G$ es bilineal, pruébese que son equivalentes:

i) B es continua, ii) B es continua en $(0, 0)$ iii) Existe $M > 0$ tal que $\|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$.

ANÁLISIS FUNCIONAL

HOJA 3 CURSO 2013

1.- Sea E un espacio normado. Pruébese:

a). La aplicación $x \mapsto \|x\|$ es uniformemente continua.

b) Toda sucesión de Cauchy en E es un conjunto acotado.

c) Toda aplicación lineal T de $(\mathbb{K}^n, \| \,.\, \|_\infty)$ en otro espacio normado F es continua y alcanza su norma, e.d., existe $x_o \in S = \{x \in \mathbb{K}^n : \| x \|_\infty = 1\}$ tal que $\|T\| = \|T(x_o)\|_F$. (Sug. S es compacto en $(\mathbb{K}^n, \| \,.\, \|_\infty)$.

d) Dedúzcase de (c) que si F tiene dimensión n, todo isomorfismo algebraico T entre $(\mathbb{K}^n, \| \,.\, \|_\infty)$ y F es un isomorfismo topológico. (Sug.: con las notaciones de (c), la función $x \mapsto \|T(x)\|$ alcanza un mínimo $m > 0$ sobre S.).

e) Dedúzcase de (d) que toda aplicación lineal de un e.v.n. de dimensión finita en otro e.v.n. es continua. Dedúzcase, en particular, que existen constantes $M, N > 0$ tal que si p es un polinomio de una variable de grado $\leq n$, $p(x) = a_o x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, se tiene $| \, a_0 \, | + |a_n| \leq M \sup\{| \, p(x) \, | : x \in [0,1]\} \leq N \int_0^2 |p(t)| \, dt$. (Sug.: considérense las aplicaciones $p \mapsto p^{(n}$ y $p \mapsto p(0)$.)

f). Dedúzcase de (d) que todas las normas sobre un e.v. de dimensión finita son equivalentes, y que con cualquiera de ellas el espacio es completo. Conclúyase que todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado, es cerrado.

g) Dedúzcase que una forma lineal sobre un espacio normado es continua si y sólo si su núcleo es cerrado (Ind.: Para la suficiencia, utilizar la factorización canónica de T a través de $E/KerT$). Muéstrese con un ejemplo que el resultado no es cierto en general para aplicaciones lineales entre espacios normados arbitrarios.

2.- a) Sea E un espacio normado y (x_n) una sucesión de elementos de E. Pruébese que el subespacio vectorial cerrado generado por (x_n), e.d. $[x_n : n \in \mathbb{N}]$, es separable. (Sug.: El conjunto de combinaciones lineales finitas de los (x_n) con coeficientes en un subconjunto numerable denso de $\mathbb{K}$, es denso en $[x_n : n \in \mathbb{N}]$.) Dedúzcase que los espacios $(C([0,1], \|.\|_\infty)$, c_o, ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ son separables.

b) Pruébese que ℓ_∞ no es separable (sug.: Si $A \neq B$ son dos subconjuntos no vacíos de N, $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$).

c) c) Sea ahora M un s.v. cerrado de E. Pruébese que son equivalentes:

i) E es separable.

ii) M y E/M son separables.

ANÁLISIS FUNCIONAL

HOJA 4 CURSO 2013

1.- Sea $E = C_{\mathbb{R}}([0,1])$. Se define $\| f \|_1 = \int_0^1 | f(t) | \, dt$ y se pone $E_1 = (E, \| \, . \, \|_1)$, $E_\infty = (E, \| \, . \, \|_\infty)$. Para cada $\varphi \in E$, se define $T_\varphi(f) = \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt$.

a) Pruébese que $T_\varphi \in E_1'$, y calcúlese su norma.

b) Pruébese que $T_\varphi \in E_\infty'$ y que $\| T_\varphi \| = \| \varphi \|_1$ (Sug.: Para la desigualdad no trivial, procédase así : para cada $\epsilon > 0$, considérese una partición de [0,1] en intervalos en los que la oscilación de φ sea menor que ϵ. Defínase $f(t) = \text{signo}(\varphi(t))$ en aquellos intervalos en los que φ tiene signo constante, y lineal en el resto, de modo que $f \in E$ y $\| f \|_\infty = 1$. Calcúlese $| T_\varphi(f) |$. Un dibujo puede ayudar.)

2.- a) Sean E, F espacios normados, $E \neq \{0\}$ y $x_o \in E \setminus \{0\}, x_o' \in E'$ tales que $x_o'(x_o) = 1$. Pruébese que la aplicación $F \ni y \overset{S}{\mapsto} T_y \in \mathcal{L}(E, F)$, definida por $T_y(x) = x_o'(x) y$, es un isomorfismo topológico sobre su imagen, y que $S(F)$ es cerrado. Dedúzcase que si $\mathcal{L}(E, F)$ es completo, lo es F.

b) Sean ahora $E = F = (c_{oo}, \|.\|_\infty)$, $\mathbf{v}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} e_k$ y $T_n(x) = x_1 \mathbf{v}_n$ si $x = (x_i) \in c_{oo}$. Pruébese que cada $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$, la sucesión $\{T_n\}$ es de Cauchy, pero no converge en $\mathcal{L}(E, F)$.

3.- Sean $T_n : \ell_\infty \to \mathbb{K}$ tal que $T_n(x) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, $\forall n \geq 1$, $\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell_\infty$. Sea $M = \{x \in \ell_\infty : \exists \lim_{n\to\infty} T_n(x)\}$ y definamos $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, $\forall x \in M$.

(a) Pruébese que $T_n \in (\ell_\infty)'$ con norma $\|T_n\| = 1$, $\forall n \geq 1$.

(b) Pruébese que M es un subespacio vectorial cerrado que contiene al subespacio c de las sucesiones convergentes.

(c) Pruébese que que $T \in M'$ con $\|T\| = 1$ y que para todo $x \in c$, $T(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$

(d) Sea $\tau(x) = (x_2, x_3, \cdots)$, $\forall x \in \ell_\infty$. Pruébese que $x - \tau(x) \in Ker(T) \subset M$ para todo $x \in \ell_\infty$.

(e) Dedúzcase que existe $S \in (\ell_\infty)'$, extensión de T tal que $\|S\| = 1$ y $Sx = S(\tau^n x)$, $\forall x \in \ell_\infty$, $\forall n \geq 1$.

(f) Dedúzcase que $S(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \cdots) = \frac{1}{4}$. (Ind. Compárese con $S(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \cdots)$). ¿Cuánto vale $S(1,0,0,1,0,0,1,\cdots)$?

(g) Pruébese que S no es de la forma T_a, para ningún $a \in \ell_1$.

4.- a) Si $(x_i)_{i\in I}$ es un subconjunto denso de E, pruébese que existe una familia $(x_i')_{i\in I} \subseteq E'$ tal que $\| x_i' \| = 1$ y $\| x \| = \sup\{| x_i'(x) | : i \in I\}$ para cada x de E.

b) Dedúzcase de (b) que E es isométrico a un subespacio de $\ell_\infty(I)$. En particular, todo espacio normado separable es isométrico a un subespacio propio de $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$.

c) Si E' es separable, pruébese que E es separable. (Ind.: Si (x'_n) es una sucesión densa en $S(E')$, tómese $x_n \in E$ con $\| x_n \| \leq 1$ y $| x'_n(x_n) | > 1/2$; pruébese que (x_n) es total en E.) ¿Es cierto el recíproco?

5.- Sea $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$K(s,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } s \geq t; \\ 0, & \text{si } s < t. \end{cases}$$

y $T : (\mathcal{C}([0,1]), \| \cdot \|_\infty) \to (\mathcal{C}([0,1]), \| \cdot \|_\infty)$, definido por

$$Tf(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) dt$$

el operador (de Volterra) asociado.

a) Pruébese que T está bien definido, es continuo y que el operador T^n tiene como núcleo la función $K_n(s,t) = \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}$, si $0 \leq t \leq s \leq 1$; ; 0 si $t > s$ (Inducción sobre n). Dedúzcase que $I - T$ es inversible y encuéntrese una expresión concreta para $(I - T)^{-1}$, lo que permitirá resolver la ecuación $(I - T)(f) = g$ en $C([0,1])$.

b) Si g es derivable, compruébese que la ecuación $(I - T)(f) = g$ es equivalente a una ecuación diferencial con una condición inicial adecuada, y que la solución obtenida en (a) concuerda con la que resulta de la teoría general de ecuaciones diferenciales.

6.- a) Sean E, F espacios normados y $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(E,F)$. Pruébese que $\mathcal{F}$ es equicontinuo si y sólo si lo es en 0, si y sólo si es un conjunto acotado en la norma de $\mathcal{L}(E,F)$.

b) Dedúzcase que si E es *separable*, toda sucesión $\{x'_n\} \subset B(E')$ posee una subsucesión que converge puntualmente a un $x' \in B(E')$ (Ind.: consúltese la prueba del teorema de Ascoli y sus consecuencias).

c) Sea $E = \ell_\infty$. Para cada $x = (x_n) \in E$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se define $x'_n(x) := x_n$. Pruébese que $x'_n \in E'$, $\|x'_n\| = 1$, pero $(x'_n) \subset B(E')$ no posee ninguna subsucesión puntualmente convergente. Esto prueba que la hipótesis de separabilidad en (b) no es superflua.

ANÁLISIS FUNCIONAL

HOJA 5 CURSO 2013

1.- Sea $E = c_{oo}$ el espacio vectorial de las sucesiones complejas con un número finito de términos no nulos y $E_p := (E, \|\cdot\|_p)$ $(1 \leq p \leq \infty)$

a) Sea $T : E \to \mathbb{C}$ la forma lineal definida por $T(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$ $(x = (x_n) \in E)$

i).- ¿Para qué valores de $p \in [1, \infty]$ es continua T?.

ii).- Calcúlese la norma de T en los casos en que es continua y discútase si existe algún $x \in B(E_p)$ tal que $\|T\| = T(x)$.

b) Exhíbase una forma lineal sobre c_{00} que sea continua sobre E_2 pero no lo sea sobre E_3.

c) Si $H = \{x = (x_n) \in c_{oo} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$, pruébese que H es un s.v. denso de $(c_{oo}, \|.\|_\infty)$.

d) Consideremos el subespacio de E_p definido por $M_p := \{x = (x_n) \in E_p : x_n = 0, \forall n > 2 \text{ y } x_1 = x_2\}$.

i).- ¿Para qué valores de p M_p es cerrado en E_p?

ii).- Sea T_0 la forma lineal sobre M_2 definida por $T_0(x) := x_1$. Calcúlense todas las posibles extensiones lineales continuas de T_0 a E_2. ¿Cuáles conservan la norma?

2.- Sea $T : c_0 \to c_0$ dada por $T(a_1, a_2, \cdots) := (a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \cdots)$.

a) Pruébese que T está bien definido, es lineal y continuo. Calcúlese $\|T\|$.

b) Con la identificación usual de c_0' con ℓ_1, calcúlese $T'(b)$, siendo $b = (\frac{1}{2^n})$.

3.- Sea E un espacio normado.

a) Si una sucesión $(x_n) \subset E)$ converge débilmente a un $x \in E$, pruébese que $x \in \overline{\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle} = [x_n : n \in \mathbb{N}]$. (Ind.: T. H. B.).

b) Si $(x_n') \subset E'$ es una sucesión acotada en norma tal que $\lim_{n\to\infty} x_n'(x) = 0$ para todo x de un subconjunto $S \subset E$ *denso*, entonces (x_n') converge débil* a 0.

c) Si $(x_n) \subset E$ es una sucesión acotada en norma tal que $\lim_{n\to\infty} x'(x_n) = 0$ para todo x' de un subconjunto $S' \subset E'$ *denso*, entonces (x_n) converge débilmente a 0.

d) Sea ahora $E = \ell_p$ $(1 < p < \infty)$. Dedúzcase que si $(\zeta_n) \subset E$ es una sucesión *acotada* y converge coordenada a coordenada a un $\zeta \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, entonces $\zeta \in E$ y (ζ_n) converge débilmente a ζ. ¿Es cierto el resultado para $E = \ell_1$ o c_0?.

e) Pruébese que la hipótesis de acotación en (c) es esencial. Es decir, existen sucesiones en ℓ_p (no acotadas) que convergen coordenada a coordenada a 0 y no convergen débilmente.

f) Sea ahora $x_n := e_1 + \cdots + e_n = (1, 1, \ldots, 1^{(n}, 0 \ldots)$, que pertenece a c_{00} y, por tanto, a todos los ℓ_p, $p \leq 1 \leq \infty$. Estúdiese si la sucesión (x_n) converge débilmente en c_0 y en ℓ_1. Si se identifica ℓ_1 con $(c_0)'$, ¿converge (x_n) débil*?

ANÁLISIS FUNCIONAL

HOJA 6 CURSO 2013

-Redactar y entregar el viernes, 18/04/2013

1.- Sea $X \neq \emptyset$ y E un subespacio vectorial de $\ell_\infty(X)$ que contiene a las constantes. Un funcional lineal sobre E se llama *positivo* si $T(f) \geq 0$, para toda $f \in E$ cuyos valores sean ≥ 0.

a) Si $T \in E'$ verifica $\| T \| = T(\mathbf{1})$, entonces necesariamente T es positivo (Ind.: Si $\|T\| = 1$ y $f \in E,\ 0 \leq f \leq 1$, sea $g = 2f - 1$ y $T(g) = \alpha + i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pruébese que para todo $r \in \mathbb{R}$, se tiene $(\beta + r)^2 \leq |\, T(g + ir)\,|^2 \leq 1 + r^2$.)

b) Si, siempre que $f \in E$ se cumple que $\overline{f} \in E$, pruébese que, recíprocamente, todo funcional positivo sobre E es continuo y $\| T \| = T(\mathbf{1})$. Dedúzcase también que si $|\, f\,| \in E$, entonces $|\, T(f)\,| \leq T(|\, f\,|)$.

c) En las hipótesis de (b), dedúzcase que toda extensión a $\ell_\infty(X)$ de un funcional positivo sobre E que conserve la norma, es también un funcional positivo sobre $\ell_\infty(X)$.

d) Sea ahora U el disco unidad abierto en $\mathbb{C}$, Γ la frontera de U, $\Delta = \overline{U}$ y A un subespacio cerrado de $C(\Delta)$ que contiene a los polinomios y tal que $\|f_{|\Gamma}\|_\infty = \|f\|_\infty$, $\forall f \in A$.

i).- Pruébese que para cada $z \in U$ existe un funcional lineal positivo μ_z sobre $C(\Gamma)$ tal que $f(z) = \mu_z(f_{|\Gamma})$, $\forall f \in A$ (Ind.: La restricción $C(\Delta) \ni f \mapsto f_{|\Gamma} \in C(\Gamma)$ permite identificar isométricamente A con un subespacio vectorial de $C(\Gamma)$).

ii).- Sea

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Si $z = re^{i\theta} \in U$, pruébese que

$$\mu_z(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt \quad \forall f \in C(\Gamma)$$

(Ind.: Pruébese que la fórmula es cierta para cada $f_n(\omega) = \omega^n,\ -\infty < n < \infty$)

iii).- Dedúzcase la *fórmula de Poisson*: Si $f \in A$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt \quad \forall z \in U$$

ANÁLISIS FUNCIONAL

HOJA 7 CURSO 2013

1.- a) Pruébese que un espacio normado de dimensión infinita numerable, es de primera categoría de Baire (y, por tanto, no puede ser completo: Teorema de Baire).

b) Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, $\mathcal{B}$ una base algebraica de E y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$ una parte infinita numerable. Pongamos $E_n := \langle \mathcal{B} \backslash \{u_m : m \geq n\} \rangle$. Pruébese que uno al menos de los E_n es un subespacio propio, denso (y, por tanto, no completo), de segunda categoría de Baire.

2.- Sea $E := (C([0,1]), \| \cdot \|_1)$.

i).- Pruébese que la identidad $I : (C([0,1]), \| \cdot \|_\infty) \to E$ es una biyección lineal continua, pero no bicontinua.

ii).- Pruébese que $B_\infty := \{f \in E : \|f\|_\infty \leq 1\}$ es un conjunto convexo, cerrado y con interior vacío en E.

iii).- Dedúzcase que E es un espacio de primera categoría de Baire.

3.- Sea $E = C_{\mathbb{R}}([0,1])$, con la norma del supremo.

a) Pruébese que para cada $n \in \mathbb{N}$, es cerrado el conjunto

$$F_n = \left\{ f \in E : \exists t \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \text{ tal que } \frac{| f(t+h) - f(t) |}{h} \leq n, \forall h \in (0, \frac{1}{n}) \right\}$$

b) Pruébese que F_n tiene interior vacío (Ind.: Si $g \in E$ y p es un polinomio tal que $\| g - p \|_\infty < \epsilon$, tómese una función s en forma de dientes de sierra, tal que $\| s \|_\infty < \epsilon$ y su pendiente sea en valor absoluto mayor que $n + \| p' \|_\infty$. Entonces $f = p + s \in E \backslash F_n$ y $\| g - f \|_\infty < 2\epsilon$.)

c) Dedúzcase que $F = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ es de primera categoría. El conjunto $B = E \backslash F$ es residual y ninguno de sus elementos es derivable en ningún punto de [0,1).

4.- Sea $E = \mathcal{C}^n([a,b])$ con la norma

$$\|f\|_n := \sum_{i=0}^{n} \|f^{(i}\|_\infty.$$

a).- Pruébese que E es completo.

b).- Pruébese que $M := \{f \in E : f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n}(a) = 0\}$ es un subespacio cerrado de E.

c).- Se considera $T : E \to F = (\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$ definido por

$$T(f) = a_n f^{(n} + \ldots + a_0 f, \quad \text{con } a_j \in F.$$

Pruébese que $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

d).- Se supone que para todo $g \in F$, la ecuación $T(f) = g$ tiene una solución única en M. Si $(p_n) \to g$ en F y $f_n \in M$ cumple $T(f_n) = p_n$, pruébese que existe $f \in M$ tal que $(f_n) \to f$ en E y $T(f) = g$.

ANÁLISIS FUNCIONAL

HOJA 8 CURSO 2013

1.- Sean E, F y G espacios de Banach y $B : E \times F \to G$ una aplicación bilineal separadamente continua.

a) Utilícese el principio de acotación uniforme para probar que si $(x_n) \to 0$ en E, existe $M > 0$ tal que $\| B(x_n, y) \| \leq M \| y \|$, $\forall y \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Dedúzcase de (a) que B es continua.

c) Si $E = C_{oo}(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R})$: Sop f es compacto$\}$ con la norma del supremo, pruébese que $B(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} fg$ es una forma bilineal separadamente continua y no continua sobre E.

2.- Sean E y F espacios de Banach y $S \in \mathcal{L}(E, F)$ suprayectiva.

a) Pruébese que existe una constante $K > 0$ de modo que $\forall y \in F$, $\exists x \in E$ tal que $S(x) = y$ y $\|x\| \leq K\|y\|$.

b) Si $T \in \mathcal{L}(\ell_1, F)$, pruébese que existe $\overline{T} \in \mathcal{L}(\ell_1, E)$ tal que $S \circ \overline{T} = T$. (Ind.: Defínase $\overline{T}(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n$ para una elección adecuada de $y_n \in E$).

c) Dedúzcase que si existe una aplicación lineal, continua y suprayectiva de un Banach E sobre ℓ_1, entonces E contiene un subespacio cerrado M isomorfo topológicamente a ℓ_1, que es imagen de una proyección lineal continua $P : E \to M$

3.- (Jordan-Von Neumann). Si E es un espacio normado, pruébese que la norma de E deriva de un producto escalar si y sólo si se verifica la identidad del paralelogramo (Sug.: defínase $(x \mid y)$ por la identidad de polarización. Pruébese que $(x + y \,|\, z) + (x - y \,|\, z) = 2(x \mid z)$ para demostrar que, efectivamente, $(x \mid y)$ así definido cumple las condiciones de un producto escalar.) Dedúzcase que $(C[0, 1], \| \,.\, \|_\infty)$ no es isométrico a un espacio de Hilbert. Dedúzcase también que el espacio normado completado de un espacio prehilbert, es un espacio de Hilbert (es decir, su norma deriva de un producto escalar, que extiende el original.)

4.- Sea $E = \{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0\}$ con la norma del supremo, y $F = \{f \in E : \int_0^1 f(t)\, dt = 1\}$, que es un hiperplano afí n cerrado de E.

a) Pruébese que $\|f\| \geq 1$ para toda $f \in F$.

b) Si $1 < a < 2$, pruébese que existe $f_a \in F$ con $\|f_a\| = a$.

c) Dedúzcase que $\mathrm{dist}(0, F) = 1$, y que no existe proyección de 0 sobre F

ANÁLISIS FUNCIONAL

HOJA 9 CURSO 2013

1.- En el espacio $\mathbb{R}^3$ se considera la forma bilineal simétrica

$$\langle (x,y,z)|(x',y',z')\rangle := \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

a) Pruébese que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ que le confiere estructura de espacio de Hilbert H.

b) Encuéntrense un vector ortogonal a los vectores $\mathbf{e}_1 := (1,0,0)$ y $\mathbf{e}_2 := (0,1,0)$.

c) Aplíquese el proceso de ortonormalización de Gramm-Schmidt a la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ para obtener una base ortonormal de H. ¿Cuál es la expresión de un punto arbitrario (x,y,z) en términos de la B.O. obtenida?

d) Calcúlese en H la proyección ortogonal de $\mathbf{v} := (1,1,1)$ sobre el plano M generado por $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. Calcúlese también la distancia de $\mathbf{v}$ a M.

e) Se considera la forma lineal sobre $\mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) := x+y+z$. Obténgase el vector $\mathbf{a}$ que corresponde a T por el teorema de Frechet-Riesz y calcúlese $\|T\|$.

2.- Sea $E = C_{\mathbb{R}}([-1,1])$ con el producto escalar usual.

a) Se considera $q_n(t) = t^n (n \geq 0)$. Sea (P_n) la familia que se obtiene al aplicar el proceso de ortogonalización de Gramm-Schmidt a (q_n). Calcúlese $P_o,\ P_1,\ P_2$ y P_3, y los correspondientes vectores unitarios $u_o,\ u_1,\ u_2$ y u_3.

b) Pruébese que los (P_n) coinciden, salvo constantes, con los polinomios

$$Q_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \text{ (Polinomios de Legendre.)}$$

(Ind.: Los Q_n son ortogonales y de grado n.)

c) Calcúlense los coeficientes de Fourier de q_3 respecto de $\{u_o,\ u_1,\ u_2\}$.

d) Calcúlese $\inf\{\int_{-1}^1 \mid x^3 - a - bx - cx^2 \mid^2 dx :\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$

e) Hállese el máximo de $\int_{-1}^1 x^3 g(x)dx$, cuando g está sujeta a las siguientes restricciones:

$$\int_{-1}^1 g(x)dx = \int_{-1}^1 xg(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 g(x)dx = 0; \int_{-1}^1 \mid g(x) \mid^2 dx = 1; g \in E.$$

3.- Sea $E := (C([-\pi,\pi])$ con el producto escalar usual y la base trigonométrica.

a) Calcúlense los coeficientes de Fourier de las funciones

$$i)\ f(t) = t \quad ; \quad ii)\ g(t) = t^2 \quad ; \quad iii)\ h(t) = e^{iat}\ (a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}); \quad iv)\ u(t) = |t|.$$

b) Dedúzcase de la identidad de Parseval que $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calcúlese $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$.

c) Si $f \in E$ es de clase C^1 y periódica de pereiodo 2π, ¿qué relación existe entre los coeficientes de Fourier de f' y los de f? Dedúzcase que en este caso la serie de Fourier de f converge *uniformemente* a f. (Ind.: En este caso los coeficientes de Fourier de f están en ℓ_1).

ANÁLISIS FUNCIONAL

HOJA 10 CURSO 2013

1.- Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(H, H)$.

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pruébese que T es autoadjunto si y sólo si $(T(x)|x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in H$. (Ind.: Pruébese que $(T(x)|y) = \frac{1}{4}\left[(T(x+y)|x+y) - (T(x-y)|x-y) + i(T(x+iy)|x+iy) - i(T(x-iy|x-iy)\right]$, $\forall x, y \in H$). Pruébese que el resultado no es cierto si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

b) Se dice que T esá *acotado inferiormente* si existe $m > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq m\|x\|, \forall x \in H$ (o, lo que es lo mismo, T es un isomorfismo topológico sobre su imagen.)

Pruébese que T es sobre si y sólo si T^* está acotado inferiormente.(Ind.: En unb sentido, razónese por reducción al absurdo: en el otro, téngase en cuenta que $T(x) = y$ si y sólo si $(z|T(x)) = (z|y),\ \forall z \in H$.)

2.- Sea $H = \ell_2$ y definamos $S, T \in \mathcal{L}(H, H)$ así: si $x = (x_1, x_2, \ldots) \in H$,

$$S(x) = (0, x_1, 0, x_3, 0, \ldots); T(x) = (x_2, 0, x_4, 0, \ldots)$$

a) Pruébese que $S^* = T$ y $T^* = S$.

b) Pruébese que S no es compacto, aunque S^2 sí lo es. (Ind.: Estudiar $\{S(e_{2k-1})\}_{k=1}^{\infty}$).

c) Pruébese que $U = S \circ T$ no es compacto.

d) Pruébese que U es autoadjunto y positivo.

e) Pruébese que $\sigma(U) = \{0, 1\} = e(U)$.

3.- Sea $K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ (1-t)s, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$ y definamos $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ por $Tf(s) := \int_0^1 K(s,t)f(t)dt$.

a).- Pruébese que T es compacto y autoadjunto.

b).- Si $\lambda \neq 0$ es un autovalor de T y f una autofunción correspondiente a λ, pruébese que f es de clase infinito y verifica $\lambda f" + f = 0,\ f(0) = f(1) = 0$.

c).- Dedúzcase que $\sigma(T) = \{(n\pi)^{-2} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. ¿Es 0 autovalor?

d).- Calcúlense los subespacios propios y demuéstrese que cada uno de ellos tiene dimensión 1. Pruébese que existe una base ortonormal de $L_2[0,1]$ formada por autovectores.

e).- Discútanse las ecuaciones integrales siguientes, resolviendo las que tengan solución:

$$(T - I)f(s) = e^s; (2)(T - \pi^{-2}I)f(s) = e^s; (3)(T - \pi^{-2}I)f(s) = \cos \pi s.$$

PROBLEMAS ANÁLISIS FUNCIONAL

$\boxed{1.1}$ a) Por la continuidad uniforme de f, dado $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ con $|t-s|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(s)|<\varepsilon$. Sea $s\in[a,b]$. Entonces

$-\varepsilon - 2\|f\|_\infty \frac{g_s(t)}{\delta^2} \leq f(t)-f(s) \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{g_s(t)}{\delta^2}$. En efecto: si $|t-s|<\delta$, $-\varepsilon \leq f(t)-f(s)\leq\varepsilon$. Y si $|t-s|\geq\delta$, $g_s(t)\geq\delta^2$ y $-2\|f\|_\infty \leq f(t)-f(s) \leq 2\|f\|_\infty$, así que la fórmula vale para todo t,s. Aplicamos P_n:

$$-P_n(\varepsilon)(s) - \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}P_n(g_s)(s) \leq P_n(f)(s) - P_n(f(s))(s) \leq P_n(\varepsilon)(s) + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}P_n(g_s)(s).$$

Vamos a ver convergencia uniforme en s: $P_n(\varepsilon) = \varepsilon P_n(f_0) \xrightarrow{u} \varepsilon f_0 = \varepsilon$.
$P_n(f(s))(s) = f(s)P_n(f_0) \xrightarrow{u} f(s)f_0 = f(s)$. $P_n(g_s)(s) = P_n(t^2-2ts+s^2)$
$= s^2P_n(f_0) - 2sP_n(f_1) + P_n(f_2) \xrightarrow{u} s^2f_0 + 2sf_1 + f_2 = g_s(s)=0$.
Esto, junto con que ε es arbitrario, hace que $P_n(f) \xrightarrow{u} f$.

b) $f\geq 0 \Rightarrow B_n(f)\geq 0$ ✓. $B_n(f_0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = 1\ \forall n$ ✓

$$B_n(f_1) = \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{k}{n}\binom{n}{k}}\, t^k(1-t)^{n-k} = t\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{(n-1)-(k-1)} = t.$$

$$B_n(f_2) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{k}_{1+(k-1)}\binom{n-1}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{(n-1)-(k-1)}$$

$= \frac{t}{n}(1+(n-1)t) \longrightarrow t^2$. En consecuencia todas las funciones se pueden aproximar por polinomios.

1.2 Está claro que si A separa puntos fuertemente, también lo hacen $\Re A$ y $\Im A$. Si $f,g\in \Re A$, $f=\Re u$, $u=f+i\tilde{f}$, $g=\Re v$, $v=g+i\tilde{g}$. Como $\bar{u},\bar{v}\in A$, $f,g\in A$ y $fg\in A$, $fg=\Re fg\in \Re A$. Igual para $\Im A$. Así que son subálgebras y se aplica el tma. de Stone en el caso real. Si $\Re A$ y $\Im A$ son subálgebras densas de $C_{\mathbb{R}}(K)$, como $\Re A, \Im A\subset A$, A es densa en $C_{\mathbb{C}}(K)$ (como no sabemos si $i\in A^{(*)}$, nunca la quitamos).

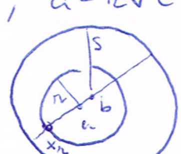
1.3 a) $\left\{\sum_{-N}^{N} a_n z^n\right\}$ son densas en $(C_{\mathbb{C}}(\overbrace{\mathbb{T}}^{\{|z|=1\}}), \|\cdot\|_\infty)$, según el desarrollo en serie de Fourier para funciones continuas; sep. puntos fuertemente$^{(**)}$ y es subálgebra autoconj.

b) Si f es 2π-per, induce $\tilde{f}:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$. Más bien: $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{T}$, $t\mapsto e^{it}$ ⇝ $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})\ni f\to\varphi:=f\circ\theta\in C\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ ⇝ es una biyección lineal isométrica, pues $\sup_{\mathbb{R}}\varphi=\sup_{\mathbb{T}} f$ ⇝ Podemos aproximar las funciones continuas 2π-per. por polinomios trig. $\sum_{-N}^{N} a_n e^{int}$.

1.4 a) Evidentemente, $\overline{U(a,r)}\subset B(a,r)$. Sea $b\in B(a,r)$ ⇝ $|b-a|\le r$. $U(b,\varepsilon)$ ⇝ $c=b+\frac{a-b}{|a-b|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\in U(b,\varepsilon)$; $|a-c|=$

$$=\left|a-b-\frac{a-b}{|a-b|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right|=\underbrace{|a-b|}_{\le r}\left[1-\frac{\varepsilon}{2|a-b|}\right]<r \rightsquigarrow c\in U(a,r),\ b\in\overline{U(a,r)}.$$

$B(a,r)$ ⇝ Por la desigualdad triangular (centro), $\operatorname{diam}(B(a,r))\le 2r$, pero si $\|v\|=1$, $a+rv\in B(a,r)$, $a-rv\in B(a,r)$ y $|rv-(-rv)|=2r$.

$B(a,r)\subset B(b,s)$ ⇝ 

⇝ Tomando diámetros, $s\ge r$;

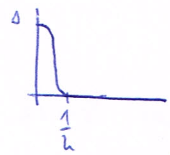
$x_r=a+\frac{r}{\|a-b\|}(a-b)$, $s\ge\|x_r-b\|=\left\|(a-b)\left(1+\frac{r}{\|a-b\|}\right)\right\|=\|a-b\|+r$, $\|a-b\|\le s-r$

(*) $i\in\mathbb{C}$ es escalar, así que no hay problema en eso.

(**) z separa puntos y $1\in A$.

AF2P

b) B_n bolas cerradas, $B_n = B(a_n, r_n)$, r_n decreciente, $\|a_{n+1} - a_n\| \le r_n - r_{n+1} \rightsquigarrow \{a_n\}_n$ es de Cauchy, y como el espacio es completo, $a_n \to a$. $\|a_{n+k} - a_n\| \le r_n \xrightarrow{k\to\infty} \|a - a_n\| \le r_n$, y $a \in B_n$, $a \in \bigcap_n B_n$

c) $E = (C_{\mathbb{R}}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. $C_n = \{f \mid f(0) = 1,\ 0 \le f(t) \le 1$ en $[0, \frac{1}{n}]$, $f(t) = 0$ en $[\frac{1}{n}, 1]\} \rightsquigarrow$ 

$\rightsquigarrow$ Cerrados encajados no vacíos, con intersección vacía. Esto ocurre porque no son bolas. Si los C_n fueran compactos, la intersección sería no vacía. $\mathbb{R}^n$ es loc. compacto, pero $C_{\mathbb{R}}([0,1])$ no.

HOJA 2

[1] a) Basta ver que si $a, b \in \mathbb{C}$, $|a+b|^p \le |a|^p + |b|^p$. $|a+b|^p \le (|a|+|b|)^p$; sup. que $0 \le |a| \le |b| \le |a|+|b| \rightsquigarrow |a|^p - 0^p = a \cdot p \cdot \zeta^{p-1}$, $\zeta \in [0, |a|]$, $(|a|+|b|)^p - |b|^p = a \cdot p \cdot \xi^{p-1}$, $\xi \in [|b|, |a|+|b|]$. $\zeta \le \xi \Rightarrow \zeta^{p-1} \ge \xi^{p-1}$, $|a|^p - 0^p \ge (|a|+|b|)^p - |b|^p$ y $(|a|+|b|)^p \le |a|^p + |b|^p$. (1)

b) Sea $x \in l_p \rightsquigarrow$ Definimos $(a_n) \subset C_{00} \subset l_p$, $(a_n)_m = \begin{cases} x_m & \text{si } m \le n \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases}$

$$\|x - a_n\|_p = \left(\sum_{m=1}^{n} |x_m - (a_n)_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} |x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n} 0$$

por ser la cola de una suma convergente.

C_{00} no es denso en l_∞. Sea $x = (1, 1, 1, \dots) \in l_\infty$ y $(a_n) \subset C_{00}$. $\|x - a_n\|_\infty = \sup_m \{|x_m - (a_n)_m|\} \ge 1\ \forall n \rightsquigarrow a_n \not\to x$. (2)

c) Veamos antes lo siguiente: $0 \le a \le b \rightsquigarrow (a^q+b^q)^{\frac{1}{q}} \overset{?}{\le} (a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}$

Si $a=0$, es cierto. Si no, dividimos entre b: $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^q+1\right)^{\frac{1}{q}} \overset{?}{\le} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^p+1\right)^{\frac{1}{p}}$.

$\frac{a}{b}=c\le 1$; $f(x)=(1+c^x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\log} \frac{1}{x}\log(1+c^x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{<0}\underbrace{\log(1+c^x)}_{>0}$

$+\underbrace{\frac{1}{x}\frac{1}{1+c^x}}_{>0}\underbrace{\log(c)}_{<0}\underbrace{c^x}_{>0}<0$. Así f es decreciente y tenemos la desigualdad buscada.

La desigualdad para dos términos sirve para un número finito:

$$\left(\left[(a^q+b^q)^{\frac{1}{q}}\right]^q+c^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\left[(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}\right]^p+c^p\right)^{\frac{1}{p}} \Longrightarrow (a^q+b^q+c^q)^{\frac{1}{q}} \le (a^p+b^p+c^p)^{\frac{1}{p}}$$

Al tomar supremos, $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (puede haber ∞).

En consecuencia, $\ell_p\subset\ell_q$ y $\|x\|_q\le\|x\|_p \; \forall x\in\ell_p$. (3)

$i: \ell_p \hookrightarrow \ell_q$. $\|i\|=\inf\{M>0: \underbrace{\|x\|_q}_{\|i(x)\|} \le M\underbrace{\|x\|_p}_{\|x\|} \; \forall x\in E\}=\inf A$.

Como $\|x\|_q\le\|x\|_p$, $1\in A$. Pero si $x=(1,0,0,\dots)$, $\|x\|_q=\|x\|_p=1$, luego $A\subset[1,\infty)$ y $\|i\|=1$.

$x=\left(\frac{1}{1^{\frac{1}{p}}},\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}},\frac{1}{3^{\frac{1}{p}}},\dots\right)$. $\|x\|_q=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$,

$x\in\ell_q$. $\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=\infty$, pues se tiene una serie armónica. (4)

d) Sea $x\in\ell_p$. $|x_n|=(|x_n|^s)^{\frac{1}{s}}\le\|x\|_s$, y al tomar supremos,

$\|x\|_\infty\le\|x\|_s \; \forall s$.

Por otro lado: reordenamos los x_n para que $|x_1| \leq |x_2| \leq |x_3| \leq \dots$ (se puede hacer porque $x_n \to 0$); $x = (a_1, a_2, \dots, a_t, \underbrace{b_1, b_2, b_3, \dots}_{\tilde{x}})$ con $\|\tilde{x}\|_p = \varepsilon < \max(a_1, 1)$. $\|x\|_s = (a_1^s + a_2^s + a_3^s + \dots + a_t^s + \|\tilde{x}\|_s^s)^{\frac{1}{s}} \leq (t a_1^s + \underset{\to 0}{\varepsilon^s})^{\frac{1}{s}} \longrightarrow a_1 = \|x\|_\infty$, luego $\|x\|_s \xrightarrow{s} \|x\|_\infty$. (5)

e) $x_n = (\overbrace{\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}, \dots, \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}}^{n}, 0, 0, \dots) \to \|x_n\|_p = (n \cdot \frac{1}{n})^{\frac{1}{p}} = 1 \ \forall n$.

$\|x_n\|_q = (n \cdot \frac{1}{n^{\frac{q}{p}}})^{\frac{1}{q}} = [n^{(1-\frac{q}{p})}]^{\frac{1}{q}} = n^{\overset{<0}{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}} \xrightarrow{n} 0$.

f) $\mathbb{R} \hookrightarrow \ell_p \hookrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; $|\mathbb{R}| \leq |\ell_p| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| \to |\ell_p| = |\mathbb{R}|$.

Si la base tiene cardinal menor que $\mathbb{R}$, como $\{x_t\}_{t \in (0,1)}$ es una familia de cardinal $|\mathbb{R}|$, hay una combinación finita no nula igual a 0: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \rightsquigarrow$ $\alpha_1 t_1^i + \alpha_2 t_2^i + \dots + \alpha_k t_k^i = 0 \to \alpha_j = 0$ por el det. de Vandermonde.

$\|x_t\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} t^{np})^{\frac{1}{p}} = (\frac{t^p}{1-t^p})^{\frac{1}{p}} = \frac{t}{\sqrt[p]{1-t^p}}$; $\|x_t\|_\infty = \sup_n \{t^n\} = t$.

(1) Se puede hacer aplicando la desigualdad de Minkowski a $(a^p, 0)$, $(0, b^p)$, $r = \frac{1}{p} > 1$: $(\sum |a_n + b_n|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\sum |a_n|^r)^{\frac{1}{r}} + (\sum |b_n|^r)^{\frac{1}{r}} \longrightarrow [(a^p)^r + (b^p)^r]^p \leq [(a^p)^r]^p + [(b^p)^r]^p$, $(a+b)^p \leq a^p + b^p$.

Se pueden considerar los espacios ℓ_p, $0<p<1$ con la distancia inducida por $\rho_p(x) = \sum |x_n|^p$, que no es norma. Son espacios metrizables no normados; las bolas pueden no ser convexas.

(2) En l_∞, $\overline{c_{00}} = c_0$

(3) Sea $x \in l_p$. $\frac{|x_n|}{\|x\|_p} \leq 1$, luego $\frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} \geq \frac{|x_n|^q}{\|x\|_p^q}$, y al sumar en n,

$1 \geq \frac{\|x\|_q^q}{\|x\|_p^q} \Rightarrow \|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q$, $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

(4) Esto nos dice que aunque la inclusión es continua, no se da un homeomorfismo sobre la imagen; las topologías en l_p inducidas por $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q|_{l_p}$ no son iguales. $l_p \hookrightarrow l_q$ no es Banach porque no es cerrado: l_p es denso en l_q, pues $c_{00} \subset l_p \subset l_q$ ya es denso.

(5) $\|x\|_{p+r}^{p+r} = \sum |x_n|^p |x_n|^r \leq \left(\sum |x_n|^p\right) \|x\|_\infty^r$; $\|x\|_{p+r} \leq$

$\leq \left(\sum |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p+r}} \cdot \|x\|_\infty^{\frac{r}{p+r}} = \underbrace{\|x\|_p^{\frac{p}{p+r}}}_{\to 1} \underbrace{\|x\|_\infty^{\frac{r}{p+r}}}_{\to \|x\|_\infty} \longrightarrow \|x\|_\infty$.

$\boxed{2}$ 1) $E = (\mathcal{C}_\mathbb{R}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. $f_n(t) = t^n$, y puntualmente,

$f_n(t) \longrightarrow f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases} \notin \mathcal{C}_\mathbb{R}([0,1])$, luego no hay convergencia.

Como E es Banach, debe ser que $(f_n)_n$ no es de Cauchy.

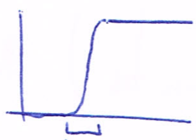
2) $E = (\mathcal{C}_\mathbb{R}^1([0,1]), \|\cdot\|^1)$, $\|f\|^1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \longrightarrow$ convergencia uniforme de la sucesión y de la derivada. $\|f_n - f\|^1 \geq \|f_n - f\|_\infty \rightsquigarrow$ no puede haber convergencia. E es Banach: $(f_n)_n$ de Cauchy $\rightsquigarrow$ hay límite puntual, y uniforme en $\mathcal{C}_\mathbb{R}([0,1])$, $f_n \to f$, $f_n' \to g$. En efecto, $|f_n(x) - f_m(x)|$

AFGP

$\le \|f_n - f_m\|_\infty \le \|f_n - f_m\|^1$, e igual para las derivadas. f y g son continuas. Como las derivadas de f converge unif. a g, f es derivable y $f' = g \rightsquigarrow f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^1([0,1])$ y $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ (se puede hacer con integración: $f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)\,dt \xrightarrow{n} f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,dt \rightsquigarrow f'(x) = g(x)$). Con esta norma, los operadores diferenciales son continuos. La teoría de distribuciones da una topología no normada pero en la que todos los operadores diferenciales son continuos.

3) $E = (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. $\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n} 0$, luego $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$. Sin embargo, E no es Banach.

$\rightsquigarrow$ el límite puntual es $\chi_{[\frac{1}{2},1]}$, que no coincide en casi todo punto con una función continua (en efecto, ¿cuánto sería $f(\frac{1}{2})$?



$f \neq \chi_{[\frac{1}{2},1]}$) La compleción de este espacio es $L^1([0,1])$. $E \subset L^1([0,1])$ denso $\rightsquigarrow E$ no es cerrado y no es Banach.

b) $E = (\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ (no es Banach). $T_1(f) = f(1)$. $|f(1) - g(1)| \le \|f-g\|_\infty^{(*)} \rightsquigarrow$ Continuo. $T_2(f) = f'(\frac{1}{2})$. No continuo: $\forall M\ \exists f_M \in E \mid |f_M'(\frac{1}{2})| > M\|f_M\|_\infty \rightsquigarrow f_M(t) = \sin(2\pi M t)$. Otro modo:

(*) En las constantes hay igualdad $\rightsquigarrow \|T_1\| = 1$.

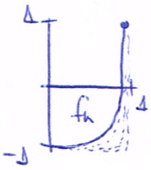
$f_n = \frac{\sin 2n\pi t}{n} \longrightarrow 0$, $f_n'\left(\frac{1}{2}\right) = \cos n\pi = (-1)^n$ ⇝ no continua en 0 ni en ningún punto.

$$T_3(f) = \int_0^1 t f'(t)\,dt \quad |T_3(f)| = \left|\int_0^1 t f'(t)\,dt\right| \leq ? \quad T_3(f) =$$

$$= \int_0^1 t f'(t)\,dt = \Big[t f(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 f(t)\,dt = f(1) - \int_0^1 f(t)\,dt,$$

$|T_3(f)| \leq |f(1)| + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$ ⇝ Continua y $\|T_3\| \leq 2$.

¿Es la norma 2?



⇝ $f_n(1) = 1$, $\int_0^1 f(t)\,dt \longrightarrow -1$

⇝ $\|f_n\| = 1$, $|T_3(f_n)| \longrightarrow 2$, con lo que $\|T_3\| = 2$, aunque no hay ninguna función con $\|f\| = 1$, $|T_3(f)| = 2$.

$\boxed{3}$ E e.v. de dim. infinita. a) $(e_i)_{i\in I}$ base algebraica de E.

$x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ ⇝ $\|x\|_1 = \sum_{i\in I} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i \in I\}$ (¡la suma y el máximo son finitos!). No son equivalentes.

¿Existen m y M positivos con $m\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq M\|x\|_1$ $\forall x \in E$?

M se puede tomar $M = 1$. Vamos a ver que no hay tal m.

$(e_n)_{n=1}^\infty$ colección numerable. $x_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. $\|x_n\|_\infty = 1$, $\|x_n\|_1 = n$ ⇝ $mn \leq 1$, $m \leq \frac{1}{n}$ $\forall n$ ⇝ m no puede ser positivo.

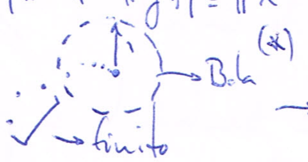
$\boxed{4}$ 1) $\Rightarrow$ 2) Obvio. 2) $\Rightarrow$ 3) Si no existe tal constante M, para cada $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_n, y_n$ con $\|B(x_n, y_n)\| > n^2 \|x_n\| \|y_n\|$. $x_n, y_n \neq 0$ $\rightsquigarrow \tilde{x}_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$, $\tilde{y}_n = \frac{y_n}{n\|y_n\|}$, $\|\tilde{x}_n\| = \frac{1}{n}$, $\|\tilde{y}_n\| = \frac{1}{n}$, luego $\tilde{x}_n, \tilde{y}_n \to 0$.

Sin embargo, $\|B(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\| = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\|x_n\|} \frac{1}{\|y_n\|} \|B(x_n, y_n)\| > 1$, con lo que B no es continua en $(0,0)$.

3) $\Rightarrow$ 1) $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, $a \in E$, $b \in F$. $\|B(a + x_n, b + y_n) - B(a,b)\| =$
$= \|B(a,b) + B(x_n, b) + B(a, y_n) + B(x_n, y_n) - B(a,b)\| \leq \|B(x_n, b)\| +$
$+ \|B(a, y_n)\| + \|B(x_n, y_n)\| \leq M \underbrace{\|x_n\|}_{\to 0} \|b\| + M \|a\| \underbrace{\|y_n\|}_{\to 0} + M \underbrace{\|x_n\|}_{\to 0} \underbrace{\|y_n\|}_{\to 0} \longrightarrow 0$

HOJA 3

$\boxed{1}$ a) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\| \rightsquigarrow \delta(\varepsilon) = \varepsilon$

b) 

$\to \max\{r, \|x - x_1\|, \dots, \|x - x_n\|\}$.

c) Sea $M = n \cdot \max\{\|T(e_1)\|, \dots, \|T(e_n)\|\}$. $\|T(x_1, \dots, x_n)\|$
$= \|x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n)\| \leq |x_1| \, \|T(e_1)\| + \dots + |x_n| \, \|T(e_n)\| \leq$
$\leq (|x_1| + \dots + |x_n|) \max\{\|T(e_i)\|\} \leq n \|x\|_\infty \max\{\|T(e_i)\|\} = M \|x\|_\infty$

S es compacto en $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, y $x \longmapsto \|T(x)\|$ es continua $\rightsquigarrow$ $\exists\, x_0 \in S \mid \|T(x_0)\| \geq \|T(x)\|$ $\forall x \in S$. $\|T\| = \sup_{x \in S} \|T(x)\| = \|T(x_0)\|$.

(*) Si no hay convergencia, la bola se toma centrada en x_n, n suf. grande.

AFGP

d) $m = \min_{x \in S} \|T(x)\| > 0$ por ser T isomorfismo algebraico $\rightsquigarrow$

$m\|x\| \le \|T(x)\| \le M\|x\| \ \forall x \in E$.

e) Sólo hay que tener un isomorfismo topológico con $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ y aplicar c). $|a_0|+|a_1|+\dots+|a_n|$, $\sup\{|p(x)| : x \in [0,1]\}$, $\int_0^2 |p(t)|dt$ son normas sobre los polinomios$^{(*)}$ $\rightsquigarrow$ $|a_0|+|a_n| \le M \sup\{|p(x)| : x \in [0,1]\}$ $\le N\int_0^2 |p(t)|dt$.

f) Sólo necesitamos considerar $id : E^{\|\cdot\|_1} \to E^{\|\cdot\|_2}$. Todos son top. isomorfos a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ completo. Cualquier subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado porque ya es Banach.

g) $h : E \to \mathbb{K}$. Si h es continua, $\ker h = h^{-1}(\{0\})$ es cerrado. Recíprocamente, si $\ker h$ es cerrado, puedo considerar $E/\ker h$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{K} \\ \underbrace{E/\ker h \arrow[r, "\bar{h}", "\simeq"'] & \operatorname{im} h}_{\simeq \{0\}, \mathbb{K}} \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

π, i son siempre continuas. $\bar{h}$ también lo es por ser isomorfismo entre e.n. de dimensión finita.

Si $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ son normas no equivalentes sobre un e.n. de dim ∞, $id : E \to E$ es lineal pero no continua.

$\boxed{2}$ a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}[i] \subset \mathbb{C}$ densos numerables. $A = \{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i, \lambda_i \in \mathbb{Q}[i]\}$ numerable. $x_n \in [A]^{(**)}$, luego $[x_n : n \in \mathbb{N}] \subset [A]$ $(=)$.

(*) $\mathbb{K}_n[x] \hookrightarrow C([0,1]), C([0,2])$.

$(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \rightsquigarrow x_n = x^n$ (incluyendo 0), y los polinomios son densos.

$c_0 \rightsquigarrow x_n = e_n$, que generan c_{00}, cuyo cierre es c_0. Igual para los espacios l_p (***)

b) $N = \{$sucesiones de 1 y 0$\} \subset l_\infty$ (no numerable) $\rightsquigarrow$ dos puntos cualesquiera distan 1. Si hubiese un subconjunto denso, habría un elemento en cada bola $U(x, \frac{1}{3})$, $x \in N$, y el subconjunto sería no numerable.

c) Si A es denso y numerable en E, $\Pi(A)$ es denso y num. (Π sobreyectiva) en E/M. Métrico + separable $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ 2AN hereditario para subconjuntos $\rightsquigarrow M$ 2AN y separable.

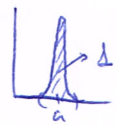
Si M y E/M son separables: sean $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \dots$ denso en E/M, $\overline{x_i} = \Pi(x_i)$, $m_1, m_2, \dots$ denso en M. Consideramos $\{x_i + m_j : i,j \in \mathbb{N}\}$. Sea $y \in E$, $\varepsilon > 0$. $\overline{y} \in E/M \rightsquigarrow \exists \overline{x_i} \mid \|\overline{y} - \overline{x_i}\|_{E/M} = \inf\{\|y - x_i - m\| : m \in M\} < \frac{\varepsilon}{2} \rightsquigarrow \exists m^* \in M$ con $\|y - x_i - m^*\| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\{m_j\}$ denso en $M \rightsquigarrow \exists m_j$ con $\|m^* - m_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$, con lo que $\|y - x_i - m_j\| < \varepsilon$.

(***) ¡Cuidado! No se toman combinaciones lineales. $y \in E$, $\varepsilon > 0$ $\rightsquigarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N \mid \|y - \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. $\|\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i\| \leq$ ($\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[i]$) $\sum_{i=1}^N |\alpha_i - \lambda_i| \|x_i\| \leq \underbrace{\max_i \|x_i\|}_{M} \sum_{i=1}^N |\alpha_i - \lambda_i| \rightsquigarrow$ Se toma $|\alpha_i - \lambda_i| \leq \frac{\varepsilon}{2NM}$.

(*) $\{x_n\}$ denso $\rightsquigarrow \{B(x_n, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$; 2AN $\Rightarrow$ separable tomando un punto de cada abierto básico.

(***) $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \hookrightarrow (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_p)$ es continua, luego $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_p)$ son separables. $\mathcal{C}[0,1]$ es denso en $L^p \rightsquigarrow$ $L^p[0,1]$ separable, $1 \le p < \infty$.

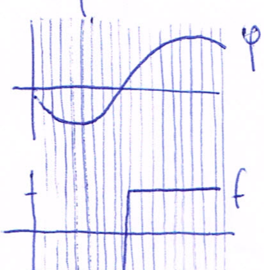
HOJA 4

1 a) $|T_\varphi(f)| = \left|\int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |\varphi(t)||f(t)|\,dt \le \|\varphi\|_\infty \cdot \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|_1$. Sea $a \in [0,1]$ con $|\varphi(a)| = \sup_{[0,1]} |\varphi(t)|$ y $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \exists\, \delta > 0 \mid |\varphi(t)| \ge |\varphi(a)| - \varepsilon$ si $t \in (a-\delta, a+\delta)$. $f \to$ 

$|T_\varphi(f)| = \left|\int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt\right| = \int_{a-\delta}^{a+\delta} |\varphi(t)|f(t)\,dt \ge (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)\cdot \underbrace{1}_{\|f\|_1} \rightsquigarrow$
$\|T\| \ge \|\varphi\|_\infty - \varepsilon \to \|T\| = \|\varphi\|_\infty$.

b) $|T_\varphi(f)| = \left|\int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |\varphi(t)|\,|f(t)|\,dt \le \|f\|_\infty \cdot \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt = \|\varphi\|_1 \cdot \|f\|_\infty$.

$\varepsilon > 0 \to$ Partición de $[0,1]$ en intervalos en los que la oscilación de φ es menor que ε.



$|T_\varphi(f)| = \left|\int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt\right| \ge \|\varphi\|_1 - \varepsilon\cdot 1 \rightsquigarrow$
$\|T\| \ge \|\varphi\|_1 - \varepsilon$, $\|T\| = \|\varphi\|_1$.

2 a) S es inyectiva(*) pues $T_y(x_0) = y$. Además, $\|T_y\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_y(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|x_0'(x)y\| = \sup_{\|x\|=1} |x_0'(x)|\|y\| = \|x_0'\|\|y\| \rightsquigarrow$ isometría. Si $T_{y_n} \to T$,

(*) Verificando $m\|x\| \le \|Tx\| \le M\|x\|$ no hace falta la inyectividad.

evaluando en x_0, $T_{y_n}(x_0) \to T(x_0)$, $y_n \to T(x_0) = y \rightsquigarrow T = T_y$.

Así, si $\mathcal{L}(E,F)$ es completo, F es Banach.

b) $\|T_n(x)\| = \frac{1}{2}|x_1| \leq \frac{1}{2}\|x\|_\infty$; $\|T_n\| = 1/2$. $\|(T_n - T_m)(x)\| \overset{n \geq m}{=} \frac{1}{2^m}|x_m|$;

$\|T_n - T_m\| \leq \frac{1}{2^m}$. $\{T_n\}$ es de Cauchy. Sin embargo, si $T_n \to T$,

$\underbrace{T_n(e_1)}_{v_n} \to T(e_1)$, pero $v_n \to (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots) \notin c_{00}$

$\boxed{3}$ a) $\|T_n(x)\| = \left|\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right| \leq \left|\frac{n \cdot \max|x_i|}{n}\right| \overset{(*)}{=} \|x\|_\infty$, pero $T_n(\mathbb{1}) = 1$

$\rightsquigarrow \|T_n\| = 1 \ \forall n$.

b) $M = \{x \in l_\infty : \exists \lim_n T_n(x)\}$. M es subespacio vectorial.

Cerrado: $x_m \to x$. Sea $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \exists N \mid$ si $m \geq N$, $\|x - x_m\| \leq \varepsilon \rightsquigarrow$

$\|T_n(x) - T_n(x_m)\| \leq \varepsilon \rightsquigarrow \|T_n(x) - T_n(x_N)\| \leq \varepsilon \ \forall n$. $\exists N_0 \mid$ si $n_i \geq N_0$,

$\|T_{n_1}(x_N) - T_{n_2}(x_N)\| \leq \varepsilon \rightsquigarrow \|T_{n_1}(x) - T_{n_2}(x)\| \overset{(**)}{\leq} 3\varepsilon \rightsquigarrow T_n(x)$ es de Cauchy,

y como l_∞ es completo, hay límite. $c \subset M$.

c) $\|T_n(x)\| \leq \|x\|_\infty \to \|T(x)\| \leq \|x\|_\infty$, $\|T\| \leq 1$. Pero $\|\mathbb{1}\|_\infty = 1$,

$\|T(\mathbb{1})\| = 1 \rightsquigarrow \|T\| = 1$. Si $x \in c$, $T(x) = \lim_n x_n$.

d) $x - \tau(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \dots)$; $T_n(x - \tau(x)) = \frac{1}{n}(x_1 - x_n)$ Acot.

$\to 0 \rightsquigarrow x - \tau(x) \in \ker(T)$.

e) Aplicamos el teorema de Hahn-Banach a $T \to \|S\| = 1$.

$x - \tau(x) \in \ker(T)$, $\tau(x) - \tau^2(x) \in \ker(T), \dots, \rightsquigarrow x - \tau^n(x) \in \ker(T)$,

$S(x - \tau^n(x)) \in \ker(T) \rightsquigarrow Sx = S(\tau^n(x))$.

(*) Convergencia Cèsaro.

(**) T_n son equicontinuas $\rightsquigarrow$ Tma. Ascoli-Arzelá.

(f) $S(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\dots) = S(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\dots)$; su suma es $S(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\dots)=\frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow \frac{1}{4}$. Del mismo modo, $S(1,0,0,1,0,0,1,\dots) = \frac{1}{3}$

(g) $S(e_i) = S(0,0,0,\dots,1,0,0,\dots) = S(0) = 0 \rightsquigarrow$ Como S no es nula, S no es de la forma T_a, $a \in l_1$.

$\boxed{4}$ a) Por el tma. Hahn-Banach, para cada i $\exists$ x_i' con $\|x_i'\| = 1$, $x_i'(x_i) = \|x_i\|$. Como $\|x_i'\| = 1$, $|x_i'(x)| \le \|x\|$.

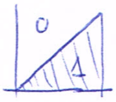
Por otro lado, si $x_{i_k} \to x$, $|x_{i_k}'(x) - x_{i_k}'(x_{i_k})| \le \|x - x_{i_k}\| \rightsquigarrow$

$\underbrace{|x_{i_k}'(x)}_{\to\|x\|} - \underbrace{\|x_{i_k}\||}_{\to\|x\|} \le \underbrace{\|x - x_{i_k}\|}_{\to 0} \rightsquigarrow x_{i_k}'(x) \to \|x\|$.

b) $E \to l_\infty(I)$, $x \mapsto (x_i'(x))_{i\in I} \rightsquigarrow$ aplicación lineal; $\|(x_i'(x))\|_\infty = \sup_{i\in I} |x_i'(x)| = \|x\| \rightsquigarrow$ isometría. Si numerable, $E \hookrightarrow l_\infty$; inclusión propia porque l_∞ no es separable.

c) Sea $A = [x_n]$ y $x \notin A \rightsquigarrow d(x,A) = d > 0$; $\exists$ $x' \mid x'(x) = d$, $x'|_A = 0$, con $\|x'\| = 1$. $x_{n_k}' \to x'$. Si $\|x' - x_{n_k}'\| < \varepsilon$, $|\underbrace{x'(x_{n_k})}_{0} - \underbrace{x_{n_k}'(x_{n_k})}_{|\cdot|>\frac{1}{2}}|$ $< \varepsilon$; se toma x_n con $x_n'(x_n) > \frac{1}{2} \rightsquigarrow$ se llega a contradicción $\rightsquigarrow$ cualquier forma que se anule en A tiene norma 0, es decir, $E = A$. Se sigue que E es separable.

$(l_1)' = l_\infty$, que no es separable.

$\boxed{5}$ $k:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$, , $T:(\mathcal{C}[0,1],\|\cdot\|_\infty)\to(\mathcal{C}[0,1],\|\cdot\|_\infty)$, $Tf(s)=\int_0^1 k(s,t)f(t)dt=\int_0^s f(t)dt$.

a) $\|T\|=1$, $T^n f=\int_0^s \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt$ por inducción. Para $n=1$ es cierto; $T^{n+1}f=T(T^n f)=\int_0^s\int_0^r \frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt\,dr=$
$=\int_0^s\int_t^s \frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dr\,dt=\int_0^s\frac{(s-t)^n}{n!}f(t)dt$.

Si $I+T+T^2+\dots$ converge, es el inverso de $I-T$.
$\sum_{k=1}^N T^k f(s)=\int_0^s\left(\sum_{k=1}^N\frac{(s-t)^{k-1}}{(k-1)!}\right)f(t)dt$; hay convergencia uniforme y $\sum_{k=1}^\infty T^k f(s)=\int_0^s e^{s-t}f(t)dt$. Esto es convergencia puntual en $\mathcal{L}(\mathcal{C}[0,1],\mathcal{C}[0,1])$. Mejor: $\|T_k\|\le\|k\|_\infty\Rightarrow\|T^n\|=\|T_{k_n}\|\le\frac{1}{(n-1)!}$
$\Rightarrow$ hay convergencia (uniforme, la propia del espacio) en $\mathcal{L}(\mathcal{C}[0,1],\mathcal{C}[0,1])$. $(I-T)^{-1}(f)=\int_0^s e^{s-t}f(t)dt+f(s)$.

b) g derivable $\rightsquigarrow (I-T)(f)=g\rightsquigarrow f-\int_0^s f(t)dt=g$; derivando, $f'(s)-f(s)=g'(s)$, $f(0)=g(0)$. $f(s)=e^sF(s)\rightsquigarrow f'(s)-f(s)=e^sF'(s)+\cancel{e^sF(s)}-\cancel{e^sF(s)}=g'(s)$, $F'(s)=\frac{g'(s)}{e^s}\rightsquigarrow F(s)=\underbrace{F(0)}_{f(0)=g(0)}+$
$+\int_0^s\frac{g'(t)}{e^t}dt$, $f(s)=e^sg(0)+\int_0^s e^{s-t}g'(t)dt=e^sg(0)+\left[e^{s-t}g(t)\right]_0^s-$
$-\left(-\int_0^s e^{s-t}g(t)dt\right)=g(s)+\int_0^s e^{s-t}g(t)dt=(I-T)^{-1}(g)$.

$\boxed{6}$ a) Si $\mathcal{F}$ es equicontinuo en todo E, también lo es en 0; si lo es en 0, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall f \in \mathcal{F}$, $\|x - 0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(x) - 0\| < \varepsilon$.

Entonces $\delta(\varepsilon)$ sirve para todo E: $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x-y)\| = \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Si $\mathcal{F}$ es equicontinua, $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} \|f(x)\| \leq \delta(1)\ \forall f \in \mathcal{F}$.

Recíprocamente, si $\|f\| \leq M\ \forall f \in \mathcal{F}$, se puede tomar $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$.

b) Repetir la prueba para $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Se usa que $\mathbb{R}$ es separable.

c) $x_n'(x) = x_n \rightsquigarrow |x_n'(x)| = |x_n| \leq \|x\|$; $x_n'(e_n) = 1 \to \|x_n'\| = 1$.

Sin embargo, dada una subsucesión x_{n_k}', y el elemento

x, $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n_{2k} \\ -1 & \text{si } i = n_{2k+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, $x_{n_k}'(x)$ no tiene límite.

$\boxed{\text{HOJAS}}$

$\boxed{1}$ a) i) Para $1 \leq p < \infty$, c_{00} es denso en ℓ_p, $c_{00}' = \ell_p' = \ell_q$ (*).

$b = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$. $1 < q < \infty \rightsquigarrow \|b\|_q = \left(\sum \frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$ $\quad p = 1, q = \infty \rightsquigarrow$ $\|b\|_\infty = 1$. Para $p = \infty$, T no es continua (**): $\sum \frac{1}{n} = \infty$; elegimos

$x_n \in c_{00}$, $x_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } m \leq N(n) \\ 0 & \text{si } m > N(n) \end{cases}$, donde $N(n)$ se elige para que

$\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{k} \geq n$. Así, $\|x_n\| = \frac{1}{n}$, $T(x_n) \geq n \rightsquigarrow$ discontinuo.

ii) $1 < q < \infty \rightsquigarrow$ Buscamos $a \in \ell_p$ con $\sum a_n \cdot \frac{1}{n} = \left(\sum \frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}$.

La igualdad se da cuando $c a_n^p = \frac{1}{n^q} \rightsquigarrow a_n = \frac{1}{n^{\frac{q}{p}}}$, $\|a\|_p = \left(\sum \frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{p}} \rightsquigarrow$

(*) Para $p = \infty$, $\overline{c_{00}} = c_0$, $c_{00}' = c_0' = \ell_1$, $\ell_\infty' \neq \ell_1$.

$\langle e_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ es base algebraica de $c_{00} \to c_{00}^* = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \neq c_{00}'$.

(**) Se puede hacer directamente, pues $\|b\|_1 = \infty$

$\frac{q}{p}+1 = q\left(1-\frac{1}{q}\right)+1 = q$

$1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$

$\tilde{a} = \frac{1}{\|a\|_p} a$. Así, $\|\tilde{a}\|_p = 1$, $\sum \tilde{a}_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\|a\|_p} \sum \frac{1}{n^{\frac{q}{p}}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\|a\|_p} \sum \frac{1}{n^q} =$

$= \left(\sum \frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}} = \|b\|_q = \|T\|$. $\longrightarrow$ Pero estos elementos no son de C_{00}.

$p=1, q=\infty \rightsquigarrow T(e_1) = 1 = \|T\|$.

b) Se trata de encontrar $b \in l_2 \setminus l_{\frac{3}{2}} \rightsquigarrow b = \left(1, \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}, \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}, \dots\right)$.

c) Sea $x \in C_{00}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$, y $M = \sum_{k=1}^{N} x_k \rightsquigarrow$

Consideramos $y_n = (x_1, x_2, \dots, x_N, \overbrace{-\frac{M}{n}, -\frac{M}{n}, \dots, -\frac{M}{n}}^{n}, 0, 0, \dots) \in H \rightsquigarrow$

$\|x - y_n\|_\infty = \frac{|M|}{n} \longrightarrow 0$. (*)

d) i) M_p es de dimensión 1, luego siempre es cerrado.

ii) $T \in E_2' = l_2$ con $T|_{M_2} = T_0 \rightsquigarrow T = b \in l_2$, $b = (a, 1-a, \dots\dots) \in l_2$.

$|T_0(x)| = |x_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_1^2 + x_1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|x\|_2 \rightsquigarrow \|T_0\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si queremos que $\|T\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

entonces $\sum_{n=3}^{\infty} b_n^2 + a^2 + (1-a)^2 = \frac{1}{2}$. $a^2 + (1-a)^2 = 2a^2 - 2a + 1 = 2\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$

$= 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \rightsquigarrow \sum_{n=3}^{\infty} b_n^2 + 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \rightarrow b_n = 0$, $a = \frac{1}{2} \rightsquigarrow$ sólo hay una posible extensión.

$\boxed{2}$ a) $a_n + a_{n+1} \xrightarrow{n} 0 + 0 = 0 \rightarrow$ Bien definido. T es trivialmente lineal. $\|T(a)\|_\infty = \sup |(T(a))_n| = \sup |a_n + a_{n+1}| \leq \sup |a_n| + \sup |a_{n+1}| \leq$
$2\|a\|_\infty$. Si $a = (1, 1, 0, 0, \dots)$, $\|a\|_\infty = 1$, $\|T(a)\|_\infty = \|(2, 1, 0, \dots)\|_\infty = 2 = \|T\|$.

b) $T: C_0 \to C_0$ induce $T': C_0' = l_1 \to C_0' = l_1$. $b \in l_1$, $b = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$,

(*) H es núcleo de una forma lineal no continua: $T: C_{00} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \sum x_n \rightsquigarrow$ $(1, 1, 1, \dots) \notin l_1 \rightsquigarrow$ no continua.

$\tilde{b} = T'(b)$. $\langle a, T'(b)\rangle = \langle T(a), b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2^n}$
$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}\frac{1}{2^n} = a_1 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \langle a, \tilde{b}\rangle$, con $\tilde{b} =$
$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}, \frac{1}{8} + \frac{1}{4}, \dots\right) \in \ell_1$. (*)

$\boxed{3}$ a) $(x_n) \subset E$, $x_n \xrightarrow{w} x$. Si $x \notin [x_n : n \in \mathbb{N}]$, por el tma. Hahn-Banach existe x' que se anula en $[x_n : n \in \mathbb{N}]$ y con $x'(x) \neq 0$. Pero entonces $x'(x_n) = 0 \not\to x'(x)$ y no se da la convergencia débil.

b) $(x_n') \subset E'$. Sup. $\|x_n'\| \leq M$ $\forall n$ y $x \in E$, $x_m \to x$, $x_m \in S$.
$|x_n'(x)| = |x_n'(x - x_m) + x_n'(x_m)| \leq M\|x - x_m\| + |x_n'(x_m)|$ $\forall m$.
Se elige m con $M\|x - x_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y existe n suf. grande con $|x_n'(x_m)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leadsto |x_n'(x)| \leq \varepsilon$ para n suf. grande, $x_n'(x) \xrightarrow{n} 0$, $x_n' \xrightarrow{w^*} 0$

c) $\|x_n\| \leq M$, $x' \in E'$, $x_m' \to x'$, $x_m' \in S \leadsto |x'(x_n)| = |(x' - x_m')(x_n) + x_m'(x_n)| \leq M\|x' - x_m'\| + |x_m'(x_n)|$ $\forall m$, y se razona como antes.

d) Si $\zeta \notin \ell_p$, $\exists N \mid \sum_{k=1}^{N} |\zeta(k)|^p \geq (2M)^p$, con M cota para $\|\zeta_n\|_p$.
Pero entonces $M \geq \|\zeta_n\|_p \geq \sum_{k=1}^{N} |\zeta_n(k)|^p \longrightarrow \sum_{k=1}^{N} |\zeta(k)|^p \geq (2M)^p$ (!).
c_{00} es denso en $\ell_q = \ell_p'$. $b \in c_{00}$, $b = (b_1, \dots, b_N, 0, 0, \dots)$. $b(\zeta_n) =$
$= \sum_{k=1}^{N} b_k \underbrace{\zeta_n(k)}_{\to \zeta(k)} \longrightarrow \sum_{k=1}^{N} b_k \zeta(k) = b(\zeta) \leadsto \zeta_n \xrightarrow{w} \zeta$.

(*) $T \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ & & \cdots & & \end{pmatrix} \leadsto T' \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \vdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

En l_1, es cierto que si $\zeta_n \in l_1$, $\zeta_n \xrightarrow{\text{coord}} \zeta$, entonces $\zeta \in l_1$.
Ahora bien: $T(x) = \sum x_n$ asociado a $(1,1,1,\dots) \notin c_0 = \overline{c_{00}}$,
$\zeta_n = e_n \rightsquigarrow \zeta_n \xrightarrow{\text{coord}} 0$, pero $T(\zeta_n) = 1$, $T(0) = 0 \rightsquigarrow \zeta_n \overset{\omega}{\not\to} 0$.
En c_0, $\zeta_n = (1, 1, \overset{n}{1}, \dots, 1, 0, 0, \dots) \xrightarrow{\text{coord}} (1,1,1,\dots) \notin c_0$.

e) Sea $b \in l_q$ con términos no nulos, $\zeta_n = \frac{1}{b_n} e_n \rightsquigarrow$
$\zeta_n \xrightarrow{c} 0$, pero $b(\zeta_n) = 1 \ \forall n \rightsquigarrow \zeta_n \overset{\omega}{\not\to} 0$

f) Tomando $T e_n$, resulta que la convergencia débil implica la convergencia coordenada a coordenada. $(1,1,1,\dots) \notin c_0$, $l_1 \rightsquigarrow$ no puede haber convergencia débil. Para $l_1 = c_0'$ si se toma e_n, de nuevo débil$^* \Rightarrow$ coord, luego de nuevo no hay convergencia.

En l_∞, $x_n \xrightarrow{\omega^*} \mathbb{1}$, porque $l_\infty = l_1'$, $l_1 = \overline{c_{00}}$. No hay convergencia débil, porque l_∞' es muy grande. Si tomamos una extensión del límite generalizado (Hoja 4) $LIM \in l_\infty'$, $LIM(x_n) = 0$, $LIM(\mathbb{1}) = 1$
$\rightsquigarrow x_n \overset{\omega}{\not\to} \mathbb{1}$.

$\longrightarrow$ Compactificaciones. X completamente regular. La compactificación más sencilla es $X^* = X \cup \{\infty\}$. $f: X \to \mathbb{R}$ continua tiene extensión a X^* si hay límite cuando $x \to \infty \in X^*$. Compactificación maximal: de Stone-Čech: $\beta(X)$. La construcción es la siguiente:
X completamente regular, $E = C_b(X)$ continuas y acotadas con $\|\cdot\|_\infty$.

$X \ni s \xrightarrow{\delta} \delta(s) \in E'$, $\delta(s) = \delta_s$, $\delta_s(f) = f(s) \rightsquigarrow \delta_s \in E'$, $\|\delta_s\| = 1$.

1) $\delta : X \to (E', w^*)$ es continua 2) δ es inyectiva 3) $\delta(X) \subset B(E')$

$\rightsquigarrow$ Hace falta completamente regular.

homeomorfismo sobre su imagen. Alaoglu-Bourbaki: $\delta(X) \subset (B(E'), w^*)$ = compacto; $\beta(X) = \overline{\delta(X)}^{w^*} (\subset B(E'))$, $X \simeq \delta(X)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathbb{R} \\ \beta(X) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}\,?"'] & \end{tikzcd}$$

continua y acotada. $f \in E \rightsquigarrow \hat{f} \in E''$, $\hat{f}(x') = x'(f)$.

$\hat{f} : E' \to \mathbb{R}$ es w^*-continua $\rightsquigarrow \tilde{f} = \hat{f}|_{\beta(X)}$,

$\tilde{f}(s) = \hat{f}(\delta_s) = \delta_s(f) = f(s)$.

Si tomamos $F \subset \mathcal{C}_b(X)$ subespacio, se puede hacer otra compactificación $\subset B(F')$ más pequeña con propiedades de extensión para funciones de F.

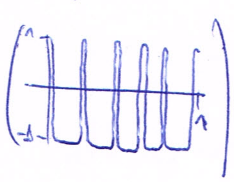
$\mathcal{C}_b(X) \equiv \mathcal{C}(\beta(X)) \to \ell_\infty \equiv \mathcal{C}(\beta(\mathbb{N}))$. $c = \mathcal{C}(\mathbb{N}^*)$

Si X es compacto, $X \simeq \beta(X)$.

Con la topología débil, en cualquier abierto hay subespacios enteros, mientras que en las bolas de $\|\cdot\|$ todos los elementos están acotados.

$\mathcal{C}[0,1] \ni f \to s_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} s_n(f) \overset{\text{Tma. Darboux}}{=} \int_0^1 f(t)\,dt = I(f)$.

Así, $s_n \xrightarrow{w^*} I$. Sin embargo $s_n \overset{\|\cdot\|}{\not\to} I$, pues $\|s_n - I\| = 2 \ \forall n$



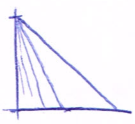
AF20P

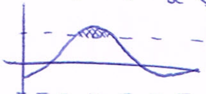
HOJA 7

1 a) $E=\langle e_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Consideramos $E_n=\langle e_m\rangle_{1\le m\le n}$ ~ Cerrado y con interior vacío porque no es el total ⇝ $E=\bigcup_n E_n$ de 1ª Categoría

b) E Banach, $\mathcal{B}$ base algebraica infinita y $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{B}$ una parte infinita numerable. $E_n=\langle\mathcal{B}\setminus\{u_m : m\ge n\}\rangle$. $E=\bigcup_n E_n$, E es de 2ª categoría $\Rightarrow \exists E_n$ de 2ª categoría, con lo que $\mathring{\overline{E_n}}\ne\emptyset$. $\overline{E_n}$ s.v ⇝ $\overline{E_n}=E$, E_n es denso y propio (faltan elementos de la base).

2 a) $E=(\mathcal{C}[0,1],\|\cdot\|_1)$. $I:(\mathcal{C}[0,1],\|\cdot\|_\infty)\longrightarrow E$. Es lineal y continua: $\|f\|_1=\int_0^1|f|\le\int_0^1\|f\|_\infty=\|f\|_\infty$. Sin embargo no es bicontinua porque $(\mathcal{C}[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ es Banach y E no, o también: $f_n(x)=\begin{cases}1-nx & [0,\frac{1}{n}]\\ 0 & [\frac{1}{n},1]\end{cases}$

→  $\|f_n\|_1=\frac{1}{2n}\longrightarrow 0$, $\|f_n\|_\infty=1\ \forall n$.

b) $B_\infty=\{f\in E : \|f\|_\infty\le 1\}$. Es convexo. También es cerrado: $f_n\in B_\infty$, $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|_1}f$. La convergencia en norma $\|\cdot\|_1$ no implica la convergencia puntual (en el ejemplo anterior $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|_1}0$). Pero si f se sale de $[-1,1]$, $\|f-f_n\|_1$ tiene una cota inferior positiva:  ⇝ $f\in B_\infty$.

Y tiene interior vacío por ser subespacio propio(*)

c) $E=\bigcup_n nB_\infty$ ⇝ 1ª Categoría.

3 a) $F_n=\left\{f\in E : \exists t\in[0,1-\frac{1}{n}] \text{ tal que } \frac{|f(t+h)-f(t)|}{h}\le n\ \forall h\in(0,\frac{1}{n})\right\}$

Sup. $f_m\in F_n$, $f_m\xrightarrow{u}f$. Entonces hay una subsucesión $t_{m_k}\longrightarrow t\in[0,1-\frac{1}{n}]$

$|f(t+h)-f(t)|\le\underbrace{|f(t+h)-f(t_m+h)|}_{\le\varepsilon}+\underbrace{|f(t_m+h)-f_m(t_m+h)|}_{\le\varepsilon}+\underbrace{|f_m(t_m+h)-f_m(t_m)|}_{\le hn}+$

(*) ¡No es subespacio! Vimos que si $\mathring{B}_\infty\ne\emptyset$, $0\in\mathring{B}_\infty$ ⇝ la inversa sería continua. O hacerlo directamente como en 3b.

$+\underbrace{|f_m(t_m)-f(t_m)|}_{\le\varepsilon}+\underbrace{|f(t_m)-f(t)|}_{\le\varepsilon}\le 4\varepsilon+hn \to$ shn.

b) $g\in F_n$ y $\varepsilon>0$. Tomamos p polinomio con $\|g-p\|_\infty<\varepsilon$, s $\frac{\varepsilon}{0}$ pendientes > $n+\|p'\|_\infty \to M$

$\|g-(p+s)\|_\infty \le \|g-p\|_\infty+\|s\|_\infty<2\varepsilon$. Sea $t\in[0,1-\frac{1}{n}]$, $h\in(0,\frac{1}{n})$.

$|f(t+h)-f(t)| = |p(t+h)+s(t+h)-p(t)-s(t)| \overset{h \text{ suf peq}}{=} |p(t+h)-p(t)+Mh| \ge$

$|Mh|-|p(t+h)-p(t)|\ge Mh-h\cdot\underbrace{\frac{|p(t+h)-p(t)|}{h}}_{\to|p'(t)|}>nh$ si h es suf. pequeño.

Luego $f\notin F_n$.

c) $F=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ es de primera categoría. $B=E\setminus F$ es no vacía y sus elementos no son derivables en ningún punto de $[0,1)$, pues si lo fuesen, estarían en algún F_n. Residual: complementario de 1ª Categoría.

$\boxed{4}$ a) Sea $(f_m)_m$ de Cauchy $\|f_{m+p}^{(i}-f_m^{(i}\|_\infty\le\|f_{m+p}-f_m\|_n$, con lo que las sucesiones $(f_m^{(i})$ son de Cauchy en $C[a,b]$, y $f_m^{(i}\xrightarrow{m} f_i$. Por el teorema de paso al límite en la derivación, f_0 es derivable y $f_0'=f_1$, f_1 es derivable y $f_1'=f_2$, etc $\to (f_m)_m\xrightarrow{m} f$.

b) $M=\{f\in E: f(a)=f'(a)=\dots=f^{(n}(a)=0\}$ subespacio cerrado de E.

Basta notar que para cada i, $E\to\mathbb{K}$, $f\to f^{(i}(a)$ es continua

c) $|T(f)(x)|=|a_n(x)f^{(n}(x)+\dots+a_0(x)f(x)|\le\|a_n\|_\infty\|f^{(n}\|_\infty+\dots+$
$\|a_0\|_\infty\|f\|_\infty\le(\|a_n\|_\infty+\dots+\|a_0\|_\infty)\|f\|_n \to \|T\|\le(\|a_n\|_\infty+\dots+\|a_0\|_\infty)$. $\to$ O mejor máx $\{\|a_k\|_\infty\}$

d) Como M es cerrado en E, es Banach; T es biyección lineal continua $\to T^{-1}$ es continua y se toma $f_n=T^{-1}(p_n)$, $f_n\to f=T^{-1}(g)$.

$X = L^1[0,1]$, (r_n) = racionales en $(0,1)$, $x_n = \chi_{[0,r_n]}$, $A = \langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$.
Con la construcción del ejercicio 1 se consigue un subespacio propio, denso y de 2ª Categoría.

El ejercicio 4 demuestra la dependencia continua de las condiciones iniciales en un problema de Cauchy.

$\longrightarrow f \in L^1[0,2\pi]$, $C_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt \rightsquigarrow f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(f) e^{ikt}$,
$S_N f(t) = \sum_{-N}^{N} C_k(f)\, e^{ikt}$.

Dirichlet (1829-35) Una función continua con un número finito de máximos y mínimos se aproxima puntualmente por la serie de Fourier.

Paul Dubois Reymond da una función continua cuya serie de Fourier diverge en algunos puntos.

$$S_N(f) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(\theta - t)}\right)}_{D_N(\theta - t)} f(\theta)\, d\theta, \quad D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\theta} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \theta \neq 0.$$

$E = C_p[0,2\pi] = \{f \in C[0,2\pi],\ f(0) = f(2\pi)\}$ subespacio cerrado de $(C[0,2\pi], \|\cdot\|_\infty)$ (núcleo de $\delta_0 - \delta_{2\pi}$ continua).

Sea $x_0 \in [0,2\pi]$. Consideramos $E \ni f \xrightarrow{T_{x_0 N}} S_N f(x_0) = \int_0^{2\pi} D_N(x_0 - \theta) f(\theta)\, d\theta$,

$$\|T_{x_0N}\| = \|D_N\|_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right| d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(2N+1)\theta|}{|\sin\theta|} d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2N+1)\theta|}{\sin\theta} d\theta$$ número de Lebesgue de orden n.

$$\|D_N\|_1 \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2N+1)\theta|}{\theta} d\theta = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2N} \int_{\frac{k}{2N+1}\frac{\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2N+1}\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2N+1)\theta|}{\theta} d\theta \geq$$

$$\geq \left(\frac{2}{\pi}\right)\sum_{k=0}^{2N} \frac{2N+1}{k+1} \int_{\frac{k}{2N+1}\frac{\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2N+1}\frac{\pi}{2}} |\sin(2N+1)\theta| d\theta = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{k+1} \underbrace{\int |\sin u| du}_{1} \quad u=(2N+1)\theta$$

$$\rightarrow \|D_N\|_1 \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k+1} \xrightarrow{N} \infty.$$

Por el Principio de acotación uniforme, $\{f\in E : \sup|S_N f(x_0)| = +\infty\}$ es un G_δ denso de 2ª Categoría en E. En este conjunto diverge la serie de Fourier en x_0.

$S = \{x_n \in [0,2\pi]\}$ denso en $[0,2\pi]$. Consideramos $T_{x_kN}(f) = S_N f(x_k)$, $\{T_{x_kN} : N\in\mathbb{N}\} = H_k \subset E'$ $\rightarrow$ Por el Principio de Condensación de singularidades, $\exists\, G_\delta$ denso $B_S \subset E$ tal que $\forall f\in B_S$, $\sup_N |S_N f(x_k)| = \infty$ $\forall k$.

Si $S = (x_k)$ racionales en $[0,2\pi]$ y $f \in B_S$, $D_f = \{x\in[0,2\pi] : \sup|S_N f(x)| = \infty\} = \bigcap_{m=1}^{\infty}\{x\in[0,2\pi] : \sup_N |S_N f(x)| > m\} = \bigcap_{m=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\bigcup_{N=1}^{\infty}\{x\in[0,2\pi] : |S_N f(x)| > m\}}_{\text{abierto denso}, \supset (x_k)}\Big) \rightarrow G_\delta$-denso, de 2ª categoría en $[0,2\pi]$.

Carleson-Hunt $\rightarrow$ En L^2, la serie de Fourier converge en casi todo punto $\rightarrow$ los conjuntos anteriores, aunque son topológicamente grandes, son de medida de Lebesgue 0.

HOJA 8

1 a) y b) La hipótesis de continuidad separada equivalen a que para cada $x\in E$, $y\in F$, las funciones $B(x,\cdot): F\to G$ y $B(\cdot,y): E\to G$ son continuas. Consideramos $B(F)=\{y\in F \mid \|y\|=1\}$, con la familia $\{B(\cdot,y)\}\subset \mathcal{L}(E,G)$ asociada. Si $x\in E$, $\|B(\cdot,y)(x)\|=\|B(x,y)\|\leq \leq\|B(x,\cdot)\|\|y\|=\|B(x,\cdot)\| \to$ Como E es Banach, por el Principio de Acotación Uniforme $\exists M \mid \|B(\cdot,y)\|\leq M$ $\forall y\in B(F)$. Entonces $\|B(x,y)\|=\|y\|\|B(x,\frac{y}{\|y\|})\|\leq M\|x\|\|y\|$. Esto automáticamente implica que B es continua: si $x_n\to 0$, $y_n\to 0$, entonces $\|B(a+x_n,b+y_n)-B(a,b)\|=\|B(a,y_n)+B(x_n,b)+B(x_n,y_n)\|\leq M(\|a\|\|y_n\|+\|x_n\|\|b\|+\|x_n\|\|y_n\|)\xrightarrow{n} 0$.(**)

c) $B(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty} fg$. Fija f, $|\int_{-\infty}^{\infty} fg|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|fg|\leq\mu(\operatorname{sop} f)\cdot\|f\|_\infty\cdot\|g\|_\infty$, y fija g, $|\int_{-\infty}^{\infty} fg|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|fg|\overset{(*)}{\leq}\mu(\operatorname{sop} g)\cdot\|g\|_\infty\cdot\|f\|_\infty$. Sin embargo, si $f_n=g_n=\frac{1}{n}\chi_{[0,n^2]}$, $f_n,g_n\to 0$ y $B(f_n,g_n)=1$ $\forall n$. El problema está en que las funciones con soporte compacto con $\|\cdot\|_\infty\leq 1$ tienen norma 1 no acotada.

¡cuidado! No es continua.

2 a) E y F espacios de Banach, $S\in\mathcal{L}(E,F)$ suprayectiva $\to$ Por el TAA, S es abierta y cociente topológico $\to \overline{S}: E/\ker S\to F$ isomorfismo topológico $\to \exists k>0 \mid \|\overline{x}\|\leq k\|y\|$. Y ahora cada $\overline{x}$

(*) En realidad más fino utilizando normas 1. (**) La idea era considerar $\{B(x_n,\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$

tiene algún x con norma tan próxima como se quiera $\rightsquigarrow$ $\|x\| \leq k' \|y\|$, $k' > k$.(**)

b) $T \in \mathcal{L}(l_1, F)$; encontrar $\overline{T} \in \mathcal{L}(l_1, E)$ con $S \circ \overline{T} = T$. Sup. $e_n \xrightarrow{T} y_n \in F \rightsquigarrow$ elegimos $x_n \in E$ con $x_n \xrightarrow{S} y_n$, $\|x_n\| \leq k \|y_n\|$, y definimos $\overline{T}(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. ¿Bien definida y continua? $|\overline{T}(a)| =$
$= \| \sum a_n x_n \| \leq \sum |a_n| \|x_n\| \leq k \sum |a_n| \|y_n\| = k \sum |a_n| \|T(e_n)\| \leq k \|T\| \sum |a_n|$
$= k \|T\| \|a\|_1 \rightarrow \|\overline{T}\| \leq k \|T\|$(***)

c) Si tomamos $F = l_1$, $T = id_{l_1}$, entonces $S: E \to l_1$ induce $\overline{T}: l_1 \to E$, cuya imagen M es un subespacio cerrado isomorfo a l_1,(*) por ser $S \circ \overline{T}$ identidad; M es la imagen de la proyección $\overline{T} \circ S: E \to E$.
↳ Si E tiene un cociente como l_1, entonces este cociente se puede ver como una proyección.

$\boxed{3}$ Si $\|\cdot\|$ se deriva de un p.e., cumple la identidad del paralelogramo. Recíprocamente, si $\|\cdot\|$ cumple la id. paralelogramo, definimos $(x|y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$. $(x|x) = \frac{1}{4}\left[\|2x\|^2 - \|0\|^2\right] = \|x\|^2$.

Paral. $(x+y|z) + (x-y|z) = \frac{1}{4}\left[\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right] + \frac{1}{4}\left[\|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2\right]$
$= \frac{1}{2}\left[\|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y\|^2\right] = 2(x|z)$. Así, fijos y, x, $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ para $\lambda \in \mathbb{Q}$, y como $\|\cdot\|$ es continua, $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Con esto se desprenden todas las propiedades de producto escalar.(*)

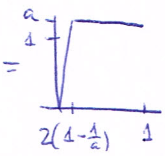
$(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ no es isométrico a un espacio de Hilbert porque no cumple la identidad del paralelogramo: $f = x$, $g = 1-x$, $\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 1^2 + 1^2 = 2$; $\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Por continuidad, el espacio normado completado cumple la igualdad del paralelogramo, y la id. polarización coincide.

(*) Propiedad proyectiva de l_1: l_1 es un objeto proyectivo en la categoría de Esp. Banach.
(**) TAA $\rightarrow S(B(E)) \supset RB(F)$, $y \in F \setminus \{0\} \rightsquigarrow \frac{y}{\|y\|}R = S(x_0)$, $y = S\left(\frac{\|y\|}{R} x_0\right) = S(x)$, $\|x\| \leq \frac{1}{R}\|y\|$.
(***) $\mathcal{L}(l_1, E) = \{$sucesiones acotadas en $E\}$.

AF26P

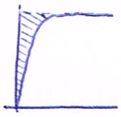
$\boxed{4}$ $E=\{f\in \mathcal{C}([0,1]) : f(0)=0\}$, $F=\{f\in E : \int_0^1 f(t)\,dt = 1\}$

a) Si $\|f\|_\infty<1$, $\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |f(t)|\,dt \le \|f\|_\infty < 1$.

b) $1<a<2 \rightsquigarrow f_a =$ 

, $\int_0^1 f_a = \frac{1}{2}\cdot 2(1-\frac{1}{a})\cdot a + \left[1-2(1-\frac{1}{a})\right]\cdot a =$

$= a-1-a+2 = 1$.

c) Por lo anterior, $\text{dist}(0,F)=1$, pero no existe $f\in F$ con $\|f-0\|_\infty =$
$= \|f\|_\infty = 1$:  (*) .

(*) CASO REAL

1) $(x+y|z)+(x-y|z) = 2(x|z)$.

2) $(0|y) = \frac{1}{4}\left[\|y\|^2-\|-y\|^2\right] = 0$

3) $(nx|z) = n(x|z)$. Por inducción: $n=1$ ✓ $((n+1)x|z) = (nx+x|z) =$
$= 2(nx|z) - ((n-1)x|z) \overset{HI}{=} 2n(x|z) - (n-1)(x|z) = (n+1)(x|z)$.

4) $(rx|z) = r(x|z)\ \forall r\in\mathbb{Q}_+$: $\left(\frac{m}{n}x\middle|z\right) = m\left(\frac{x}{n}\middle|z\right) = \frac{m}{n}\left(n\frac{x}{n}\middle|z\right) = \frac{m}{n}(x|z)$.

5) $(0+y|z)+(0-y|z) = 2(0|z) = 0 \Rightarrow (-x|z) = -(x|z)$.

- 6) Como $\|\cdot\|$ es continua, $(\lambda x|z) = \lambda(x|z)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.
- 7) $(x|y) = (y|x)$ (por la definición)
- 8) $(x|z)+(y|z) = \left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\middle|z\right)+\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\middle|z\right) = 2\left(\frac{x+y}{2}\middle|z\right) = (x+y|z)$
- 9) $(x|x) = \|x\|^2$ (por la definición).

CASO COMPLEJO

1) Definimos $(x|y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right]$

(*) Aquí la proyección es vacía. En los espacios L_p, ℓ_p, $p\neq 2$, hay siempre proyección pero puede no ser única (ℓ_1, ℓ_∞).

$\boxed{AF27P}$

2) $(x+y|z)+(x-y|z)=\frac{1}{4}\Big[\overset{1}{\|x+y+z\|^2}-\overset{2}{\|x+y-z\|^2}+i\overset{3}{\|x+y+iz\|^2}-i\overset{4}{\|x+y-iz\|^2}$
$+\overset{1}{\|x-y+z\|^2}-\overset{2}{\|x-y-z\|^2}+i\overset{3}{\|x-y+iz\|^2}-i\overset{4}{\|x-y-iz\|^2}\Big]=\frac{1}{2}\Big[\|x+z\|^2+\cancel{\|y\|^2}-\|x-z\|^2$
$-\cancel{\|y\|^2}+i\|x+iz\|^2+\cancel{i\|y\|^2}-i\|x-iz\|^2-\cancel{i\|y\|^2}\Big]=2(x|z).$

3) $(ix|y)=\frac{1}{4}\Big[\underbrace{\|ix+y\|^2}_{\|x-iy\|^2}-\underbrace{\|ix-y\|^2}_{\|x+iy\|^2}+i\underbrace{\|ix+iy\|^2}_{\|x+y\|^2}-i\underbrace{\|ix-iy\|^2}_{\|x-y\|^2}\Big]=i(x|y).$

- 4) Se desprende de 2) y 3) que $(\alpha x+\beta y|z)=\alpha(x|z)+\beta(y|z)$ $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.
- 5) $(x|y)=\overline{(y|x)}$ (por la definición)
- 6) $(x|x)=\|x\|^2$ (por la definición).

HOJA 9

$\boxed{1}$ a) La bilinealidad y la simetría son obvias. Def. positiva:

$|1|=1$, $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$, $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1$. $\mathbb{R}^3$ es completo con cualquier norma $\to$ Hilbert.

b) $(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=$
$=(x\ y\ z)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\to(0\ 1\ -1).$

c) $(e_1|e_1)=1\ \checkmark\to u_1=e_1$. $(u_1|e_2)=0$, $(e_2|e_2)=1\ \checkmark\to u_2=e_2$.
$(u_1|e_3)=0$, $(u_2|e_3)=1\to v=e_3-(u_2|e_3)u_2=(0,-1,1)$; $(v|v)=$
$=(0\ -1\ 1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=(0\ -1\ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=1\to u_3=v$. $x=(x|u_1)u_1+$
$+(x|u_2)u_2+(x|u_3)u_3$, $x\in\mathbb{R}^3$

AF28P

d) $M = \langle e_1, e_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle \rightsquigarrow P_M(v) = (v|u_1)u_1 + (v|u_2)u_2$.

$$(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$\rightsquigarrow P_M(v) = u_1 + 2u_2 = (1, 2, 0)$. $d(v, M) = \|v - P_M(v)\| = \|(v|u_3)u_3\| =$
$= |(v|u_3)|\,\|u_3\| = |(v|u_3)|$; $(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$.

e) $T(x, y, z) = x + y + z = (x|v) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (x,\ y+z,\ y+2z)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow v_1 = 1,\ v_2 = 1,\ v_3 = 0$. $\|T\| = \|v\| = \|e_1 + e_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$\boxed{2}$ a) $C_{\mathbb{R}}([-1, 1])$, $q_n(t) = t^n$.

$P_0 = q_0 = 1$

$P_1 = q_1 - (P_0|q_1)\dfrac{P_0}{\|P_0\|^2} = t - \underbrace{(1|t)}_{0}\dfrac{1}{\|1\|^2} = t$.

$P_2 = q_2 - (P_0|q_2)\dfrac{P_0}{\|P_0\|^2} - (P_1|q_2)\dfrac{P_1}{\|P_1\|^2} = t^2 - \underbrace{(1|t^2)}_{2/3}\underbrace{\dfrac{1}{\|1\|^2}}_{2} - \underbrace{(t|t^2)}_{0}\dfrac{t}{\|t\|^2} = t^2 - \dfrac{1}{3}$.

$P_3 = t^3 - \underbrace{(1|t^3)}_{0}\dfrac{1}{\|1\|^2} - \underbrace{(t|t^3)}_{2/5}\dfrac{t}{\|t\|^2} - \underbrace{(t^2|t^3)}_{0}\dfrac{t^2}{\|t^2\|^2} = t^3 - \dfrac{3}{5}t$.

$u_i = \dfrac{P_i}{\|P_i\|} \rightsquigarrow u_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ u_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,t,\ u_2 = \sqrt{\dfrac{45}{8}}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right),\ u_3 = \sqrt{\dfrac{175}{8}}\left(t^3 - \dfrac{3}{5}t\right)$.

b) $Q_n(t) = \dfrac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n \longrightarrow (t^2-1)^n$ llega hasta grado $2n$, y como se deriva n veces, al final $Q_n(t)$ tiene grado n. Sup. $m < n$; vamos a ver que $\int_{-1}^{1} Q_m(t)Q_n(t)\,dt = 0$. $\dfrac{d}{dt}\left((t^2-1)^n\right) = n(t^2-1)^{n-1} \cdot 2t$;
$\dfrac{d^2}{dt^2}\left((t^2-1)^n\right) = n(n-1)(t^2-1)^{n-2} \cdot 2t + n(t^2-1)^{n-1} \cdot 2 \ldots$ en cualquier caso,
$\dfrac{d^k}{dt^k}\left((t^2-1)^n\right) = (t^2-1)^{n-k} \cdot p_k(t)$, y si $k < n$, al evaluar en ± 1 nos

da 0. Por eso en $\int_{-1}^{1} Q_m(t)\cdot Q_n(t)\,dt$ integramos m veces por partes, quitando derivadas en $Q_n(t)$ y poniéndolas en $Q_m(t)$, hasta que finalmente todo se anula.

Como los P_n y los Q_n son ortogonales y $\langle P_1, \dots, P_k\rangle = \langle Q_1, \dots, Q_k\rangle = \{$polinomios de grado $\leq k\}$, se deduce que P_k y Q_k son proporcionales $\forall k$ (en cada caso se obtiene una recta ortogonal a un hiperplano).

$Q_0 = 1$, $Q_1 = 2t$, $Q_2 = 12t^2 - 4$, $Q_3 = 120t^3 - 72t$, $Q_i = \frac{(2i)!}{i!} P_i$.

c) $\left(t^3 \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$, $\left(t^3 \middle| \sqrt{\frac{3}{2}}\,t\right) = \frac{\sqrt{6}}{5}$, $\left(t^3 \middle| \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right) = 0$.

d) $\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2\,dx = \|x^3 - a - bx - cx^2\|_2^2 \rightsquigarrow$ Si queremos minimizar debemos proyectar sobre $M = \{a + bx + cx^2\} \rightarrow P_M(q_3) = (q_3|u_0)u_0 + (q_3|u_1)u_1 + (q_3|u_2)u_2 = \frac{\sqrt{6}}{5}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\,t = \frac{3}{5}t$, $\Big(\underbrace{t^3 - \tfrac{3}{5}t}_{P_3} \Big| \underbrace{t^3 - \tfrac{3}{5}t}_{P_3}\Big) = \frac{8}{175}$.

e) $\int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,dx = (q_3|g) = \sum \hat{q}_3(i)\overline{\hat{g}(i)} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\hat{g}(1) + \sqrt{\frac{8}{175}}\,\hat{g}(3)$.

Las condiciones del principio exigen que $\hat{g}(0) = \hat{g}(1) = \hat{g}(2) = 0$, luego máx. $\sqrt{\frac{8}{175}}\,\hat{g}(3)$ s.a. $\sum_{i\geq 3} |\hat{g}(i)|^2 = 1 \rightsquigarrow \hat{g}(3) = 1$, $g = u_3$. (*)

$\overline{e^{int}} = e^{-int}$

$\boxed{3}$ Base trigonométrica $\rightsquigarrow \left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z}\right\}$. $f(t) = t$, $\hat{f}(n) \overset{!}{=} \int_{-\pi}^{\pi} t\frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\,dt \overset{n\neq 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-in}te^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{-in\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\,dt = \frac{(-1)^n\sqrt{2\pi}}{-in} - \frac{1}{i^2n^2\sqrt{2\pi}}\left[e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} dt = \frac{(-1)^n\sqrt{2\pi}}{-in}$, $\hat{f}(0) = 0$. Id. Parseval: $\|f\|_2^2 = \sum |\hat{f}(n)|^2$

AF30P

$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$. $\sum |\hat{f}(k)|^2 = \underbrace{\hat{f}(0)}_{0} + \sum_{k\neq 0} \left|\frac{(-1)^k\sqrt{2\pi}}{-ik}\right|^2 =$

$= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi}{k^2} = 4\pi S = \frac{2\pi^3}{3} \rightsquigarrow S = \frac{2\pi^3}{12\pi} = \frac{\pi^2}{6}$.

$g(t) = t^2$; $\hat{g}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}}\,dt \overset{k\neq 0}{=} \underbrace{\frac{1}{-ik\sqrt{2\pi}}\left[t^2 e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{2}{-ik\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt}\,dt$

$= -\frac{(-1)\cdot 2\cdot\sqrt{2\pi}}{i^2 k^2} = \frac{(-1)^k 2\sqrt{2\pi}}{k^2}$, $\hat{g}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \frac{2\pi^3}{3\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi^5}}{3}$. Id.

Parseval: $\|g\|_2^2 = \sum |\hat{g}(k)|^2$. $\|g\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5}$, $\sum |\hat{g}(k)|^2 =$

$= |\hat{g}(0)|^2 + \sum_{k\neq 0}\left|\frac{(-1)^k 2\sqrt{2\pi}}{k^2}\right|^2 = \frac{2\pi^5}{9} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8\pi}{k^4} = \frac{2\pi^5}{9} + 16\pi S = \frac{2\pi^5}{5} \rightarrow$

$16\pi S = \frac{2\pi^5}{5} - \frac{2\pi^5}{9} = \frac{18-10}{45}\pi^5 = \frac{8}{45}\pi^5$, $S = \frac{\frac{8}{45}\pi^5}{16\pi} = \frac{\pi^4}{90}$.

$h(t) = e^{iat}$; $\hat{h}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iat}\frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a-k)t}\,dt = \frac{1}{i(a-k)\sqrt{2\pi}}$

$\left[e^{i(a-k)t}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(a-k)\pi} - e^{-i(a-k)\pi}}{i(a-k)\sqrt{2\pi}} = \frac{2\sin((a-k)\pi)}{(a-k)\sqrt{2\pi}} = \frac{(-1)^k 2\sin(a\pi)}{(a-k)\sqrt{2\pi}}$.

$v(t) = |t|$; $\hat{v}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} |t|\frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \int_0^{\pi} t\frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}}\,dt - \int_{-\pi}^{0} t\frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}}\,dt \overset{k\neq 0}{=}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-ik}te^{-ikt}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{-ik\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} e^{-ikt}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-ik}te^{-ikt}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{-ik\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{0} e^{-ikt}\,dt =$

$= \frac{1}{-ik\sqrt{2\pi}}\underbrace{\left[\pi(-1)^k - 0 - 0 + (-\pi)(-1)^k\right]}_{0} + \frac{1}{k^2\sqrt{2\pi}}\left[e^{-ikt}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k^2\sqrt{\pi}}\left[e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{0} =$

$= \frac{1}{k^2\sqrt{2\pi}}\left((-1)^k - 1 - 1 + (-1)^k\right) = \frac{2[(-1)^k - 1]}{k^2\sqrt{2\pi}}$, $\hat{v}(0) = 2\cdot\frac{\pi^2}{2\cdot\sqrt{2\pi}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}}$.

c) $f \in E$ de clase C^1. $\hat{f'}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \underbrace{\left[f(t)\frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0,\ \text{periódica}} -$

$-\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(-in)\frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}dt = in\hat{f}(n)$ $\left(\hat{f'}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dt = 0\right)$. Formalmente,

$f = \sum \hat{f}(n)\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$, $f' = \sum \underbrace{\hat{f}(n)\,in}_{\hat{f'}}\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$.

$$\sum|\hat{f}(n)| = \hat{f}(0) + \sum\left|\frac{\hat{f'}(n)}{n}\right| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \hat{f}(0) + \|(\hat{f'}(n))_n\|_2 \cdot \left\|\left(\frac{1}{n}\right)_n\right\|_2 \overset{\text{Id. Parseval}}{=} \|f'\|_2 \cdot \frac{\pi^2}{3} + \hat{f}(0) \rightsquigarrow$$
$(\hat{f}(n))_n \in \ell_1$.

Sea $f_N = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int}/\sqrt{2\pi}$. $\|f_N - f_M\|_\infty = \left\|\sum_{n=-N}^{-M}\hat{f}(n)\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} + \right.$
$\left. + \sum_{n=M}^{N}\hat{f}(n)\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{n=M}^{N}|\hat{f}(n)| + \sum_{n=-N}^{-M}|\hat{f}(n)|\right) \xrightarrow{M,N\to\infty} 0$ porque $(\hat{f}(n))_n \in \ell_1$.

Así, $\exists \tilde{f} \mid f_N \longrightarrow \tilde{f}$ uniformemente, pero como la convergencia uniforme implica la convergencia en norma L_2, $\tilde{f} = f$.

(*) También: $N = \mathcal{P}^2 \rightsquigarrow g \in N^\perp$, luego $(q_3|g) = (q_3 - P_N(q_3)|g)$
$= (P_3|g)$, pero como $P_3 \in N^\perp$, ahora no importa que g sea ortogonal o no a $N \rightsquigarrow \max_{\|g\|=1}(P_3|g) = \|P_3\| = \sqrt{\frac{8}{175}}$, con $g = \frac{P_3}{\|P_3\|} = U_3$.

HOJA 10

1 a) Si T es autoadjunto, $(T(x)|x) = (x|T(x)) = \overline{(T(x)|x)} \Rightarrow (T(x)|x) \in \mathbb{R}$.

Recíprocamente: $\frac{1}{4}\Big[(T(x+y)|x+y) - (T(x-y)|x-y) + i(T(x+iy)|x+iy) -$
$- i(T(x-iy|x-iy))\Big] = \frac{1}{4}\Big[\underset{1}{(Tx|x)} + (Tx|y) + \underset{x}{(Ty|x)} + \underset{2}{(Ty|y)} - \underset{1}{(Tx|x)} + (Tx|y)$
$+ \underset{x}{(Ty|x)} - \underset{2}{(Ty|y)} + \underset{3}{i(Tx|x)} + i\bar{i}(Tx|y) + ii\,\underset{x}{(Ty|x)} + \underbrace{ii\bar{i}}_{i}\underset{4}{(Ty|y)}$
$-\underset{3}{i(Tx|x)} - i\overline{(-i)}(Tx|y) - i(-i)\underset{x}{(Ty|x)} \underbrace{-i(-i)\overline{(-i)}}_{-i}\underset{4}{(Ty|y)}\Big] =$

AF32P

$= \frac{1}{4}\left[(Tx|y)(1+1+1+1)+(Ty|x)(1+1-1-1)\right] = (Tx|y)$. Así,

$(x|Ty) = \overline{(Ty|x)} = \frac{1}{4}\left[\overline{(T(y+x)|y+x)} + \overline{(T(y\underset{-1}{-}x)|y\underset{-1}{-}x)} - i\,\overline{(T(y\underset{-i}{+i}x)|y\underset{-i}{+i}x)} + i\,\overline{(T(y\underset{i}{-i}x)|y\underset{i}{-i}x)}\right] = (Tx|y)$, pues todos los productos son reales y $(\alpha x|\alpha y) = (x|y)\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \leadsto E = \mathbb{R}^2$, $T \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ no autoadjunto porque la matriz no es simétrica; $(Tx|x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in E$

b) $\Rightarrow$) Si T es sobre, T^* es inyectiva. Sup. T^* no está acotado inferiormente $\leadsto \exists (x_n)$, $\|x_n\| = 1$, $\|Tx_n\| \to 0$. Pues bien, esta familia se puede elegir ortogonal. En efecto, elegidos $x_1, \dots, x_k$, sea $M = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$, $H = M \oplus M^\perp$. Como T^* es inyectiva, está acotada inferiormente sobre M; si lo estuviese también sobre $M^\perp$, entonces lo estaría globalmente: $\|T(x)\| = \|T(\underset{M}{y}) + T(\underset{M^\perp}{z})\| \cdots x$ $\|x\|^2 = \|\underset{M}{y} + \underset{M^\perp}{z}\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geq$ $m_1^2 \|Ty\|^2 + m_2^2 \|Tz\|^2 \geq m(\|Ty\|^2 + \|Tz\|^2) \geq \frac{m^2}{2} \|Tx\|^2 \cdots$ pero no es esta la desigualdad buscada. De otro modo: $\|x_n\| = 1$, $\|T^* x_n\| \to 0 \leadsto$ $x_n = \underset{M}{y_n} + \underset{M^\perp}{z_n}$. y_n tiene una subsucesión convergente, pues está acotada en M de dim. finita, $y_n \to y$. Así, $T^*(z_n) = T^*(x_n) - T^*(y_n) \to -T^*(y)$. Por la acotación inferior z_n también tiene límite z, y $x_n \to y + z = x$, pero entonces x es un punto de no inyectividad.

Así conseguimos (u_n), $\|u_n\| = 1$ ortonormal, $\|T^*(u_n)\| \leq \frac{1}{n^3}$. Sea

$y = \sum \frac{1}{n^2} u_n$. Entonces $y \notin \operatorname{im} T$. Si $y = T\tilde{y}$, $\frac{1}{n^2} = (y|u_n) = (T\tilde{y}|u_n)$ $= (\tilde{y}|T^* u_n) \leq \|\tilde{y}\| \cdot \frac{1}{n^3} \Rightarrow \|\tilde{y}\| \geq n \ \forall n$, que es absurdo.

$\Leftarrow)$ T^* es isomorfismo topológico sobre su imagen $M \rightsquigarrow \exists S = (T^*)^{-1}$: $M \to E$, con $S^*: E \to M$. Sea $x = S^*(y)$, z cualquiera. $(z|T(x))$ $= (T^* z|x) = (T^* z|S^* y) = (ST^* z|y) = (z|y) \rightsquigarrow T(x) = y$.

$\boxed{2}$ a) $(Sx|y) = ((0, x_1, 0, x_3, \dots)|(y_1, y_2, y_3, \dots)) = \sum_k x_{2k-1} y_{2k} = ((x_1, x_2, x_3, \dots)|$ $(y_2, 0, y_4, 0, \dots)) = (x|Ty) \rightsquigarrow S^* = T, T^* = S$.

b) $(e_{2k-1}) \subset \ell_2$ acotada, $S(e_{2k-1}) = e_{2k}$, que no tiene ninguna subsucesión convergente. $S^2 = 0 \rightsquigarrow$ Compacto.

c) $U = S \circ T \rightsquigarrow Ux = S \circ T(x) = S(x_2, 0, x_4, 0, \dots) = (0, x_2, 0, x_4, 0, \dots) \rightsquigarrow$ $U(e_{2k}) = e_{2k} \longrightarrow$ no compacto.

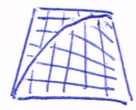
d) $U^* = (S \circ T)^* = T^* \circ S^* = S \circ T = U$. $(Ux|x) = \sum_k |x_{2k}|^2 \geq 0$.

e) Como U es autoadjunto, $\sigma(U) = a(U) \subset [m_U, M_U]$. $(Ue_1|e_1) = (e_2|e_1) = 0$, luego $m_U = 0$. $(Ue_2|e_2) = (e_2|e_2) = 1$; máx $\sum |x_{2k}|^2$ s.a $\sum |x_k|^2 = 1$ es $1 \rightsquigarrow M_U = 1$.

Si $\lambda \in (0,1)$, $U - \lambda I$ es continua y sobre: $(y_1, y_2, \dots) \longleftarrow \left(\frac{y_1}{-\lambda}, \frac{y_2}{1-\lambda}, \frac{y_3}{-\lambda}, \frac{y_4}{1-\lambda} \dots\right)$ $\in \ell_2$, pues $(U - \lambda I)(x) = (-\lambda x_1, (1-\lambda) x_2, -\lambda x_3, (1-\lambda) x_4, \dots)$. Por el TAA, $U - \lambda I$ es isomorfismo topológico $\to \lambda \notin \sigma(U)$. Por otro lado $\{0,1\} \subset$ $\sigma(U)$, y de hecho en $e(U)$: $Ue_1 = 0$, $Ue_2 = e_2$.(*)

(*) Todas las proyecciones no nulas tienen espectro $\{0,1\}$; $U^2 = U$.

AF34P

3 $k(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & 0 \le t \le s \le 1 \\ (1-t)s, & 0 \le s \le t \le 1 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$  , $T: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$,

$Tf(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\,dt$.

a) Ya sabemos que T es compacto$^{(*)}$. Autoadjunto: $(Tf|g) =$ → de hecho es positivo, porque el núcleo es positivo. No es cierto. Tómese máx$\{s,t\}$.

$= \int_0^1 \left[\int_0^1 k(s,t) f(t)\,dt\right] \overline{g}(s)\,ds = \int_0^1 f(t)\left[\int_0^1 \underbrace{k(s,t)}_{=k(t,s)=\overline{k(t,s)}} \overline{g}(s)\,ds\right]dt = (f, Tg)^{(**)}$.

b) $Tf = \lambda f \rightsquigarrow \lambda f(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\,dt$. Podemos derivar bajo el signo integral: $\lambda f'(s) = \int_0^s -t f(t)\,dt + (1-s)s f(s) + \int_s^1 (1-t) f(t)\,dt - (1-s)s f(s) = \int_s^1 f(t)\,dt - \int_0^1 t f(t)\,dt$, $\lambda f''(s) = -f(s)$. Además $k(0,t) = k(1,t) = 0$, luego $\lambda f(0) = \lambda f(1) = 0^{(***)}$.

c) $\sigma(T) \setminus \{0\} = e(T) \setminus \{0\} = \{(n\pi)^{-2} : n \in \mathbb{N}\}$ (asociados a $\sin(n\pi s)$). $0 \in \sigma(T)$ porque T no es sobreyectiva: las funciones imagen son continuas y derivables. Pero $0 \notin e(T)$: si $Tf = 0$, derivando dos veces resulta que $f \equiv 0$.$^{(****)}$

d) Se resuelve la ecuación diferencial $\rightsquigarrow u_n = \sin(n\pi s) \rightsquigarrow$ nos da una base ortogonal (que se puede hacer ortonormal) de $L^2[0,1]$.

(*) Si queremos ver que T es acotado: $\left|\int_0^1 k(s,t) f(t)\,dt\right| \le \left(\int |k(s,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_2$, $\int |Tf(s)|^2 \le \|f\|_2 \cdot \iint |k(s,t)|^2 = \|f\|_2 \boxed{\|k\|_2} \to k \in L^2([0,1]^2)$.

(**) $T \leftrightarrow k(s,t) \rightsquigarrow T^* \leftrightarrow \overline{k(t,s)}$, como en las matrices.

(***) Si $\lambda \ne 0$, f es continua $\rightsquigarrow$ la expresión de la derecha es derivable, y también f, etc, y así está justificada la derivación.

(*****) Esto no vale si $\lambda=0$. $A=\{\sin n\pi t : n\in\mathbb{N}\} \rightsquigarrow [A]=L_2$, pues dada una función continua en $[0,1]$, se puede extender imparmente y conseguir un desarrollo de Fourier en senos.

e) $(T-I)f(s)=e^s$. $f=\sum (f|u_n)u_n$, $T(f)=\sum \lambda_n (f|u_n)u_n \rightsquigarrow$
$T(f)-\lambda f=\sum(\lambda_n-\lambda)(f|u_n)u_n = g=\sum (g|u_n)u_n \rightsquigarrow (f|u_n)=\frac{(g|u_n)}{(\lambda_n-\lambda)}$.

Alternativa de Fredholm: si $\lambda\neq\lambda_n$, hay solución y es única. Si $\lambda=\lambda_n$ y $(g|u_n)\neq 0$, no hay solución, y si $\lambda=\lambda_n$ y $(g|u_n)=0$, hay infinitas soluciones, tomando $(f|u_n)$ arbitrario. Si T no fuese inyectiva: $f=\sum(f|u_n)u_n+f_0$, $g=\sum(g|u_n)u_n+g_0 \rightsquigarrow f_0=\frac{g_0}{\lambda}$, $\lambda\neq0$; si $\lambda=0$, entonces para que haya solución, g_0 debe ser 0.

$\longrightarrow$ Alternativa de Fredholm. T autoadjunto y compacto, $\lambda\neq0$. Ocurre una de las dos posibilidades siguientes:

1) $(T-\lambda I)x=y$ tiene solución única para todo y.

2) $(T-\lambda I)x=0$ tiene solución no trivial, y entonces $\{x \,|\, (T-\lambda I)x=0\} = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$; $(T-\lambda I)x=y$ tiene solución $\iff (y|x_i)=0\ \forall i$.

Esto es consecuencia de que $\sigma(T)\setminus\{0\}=e(T)\setminus\{0\}$.

$\boxed{1}$ Más fácil: $\Rightarrow$) $\exists \|x_n\|=1$, $\|T^*(x_n)\|\to0$. T es sobre $\rightsquigarrow$ por TAA, $\exists r>0 \,|\, rB(H)\subset T(B(H))$, $B(H)\subset \frac{1}{r} T(B(H))$, con lo que $\exists (y_n)$, $\|y_n\|\le\frac{1}{r}$, $T(y_n)=x_n$. Pero entonces $(x_n|x_n)=(Ty_n|x_n)=(y_n|T^*(x_n))\le\frac{1}{r}\|T^*(x_n)\|\to0$, que es absurdo.

$\Leftarrow$)
$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi_y"] \arrow[d, shift right, "T^*"'] & \mathbb{K} \\ T^*(H) \arrow[u, shift right, "(T^*)^{-1}"'] \arrow[ur, "\Theta"'] & \end{tikzcd}$$
$\Theta=\varphi_y\circ(T^*)^{-1} \overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow} \Theta=\varphi_x$. $(z|T(x))=(T^*(z)|x)=\Theta(T^*(z))=\varphi_y(z)=(z|y)$.