Graphes

Introduction

Mathilde Vernet
mathilde.vernet@univ-lehavre.fr

Master Informatique, Master Mathématiques
Université Le Havre Normandie

Automne 2020

Présentation du cours

Public

- M1 Info
- M1 Maths

Organisation

- Cours-TD : 20h
  - Avec Mathilde Vernet
  - 06/10 : 8h-10h et 13h30-16h30
  - 09/10 : 8h-10h
  - 23/10 : 8h-10h
  - 02/11 : 15h30-17h30
  - 03/11 : 8h-10h et 13h30-16h30
  - 06/11 : 15h30-17h30
  - 17/11 : 8h-10h
- TP : 10h
  - Groupes A et B : avec Mathilde Vernet
  - Groupe C : avec Stefan Balev

Présentation du cours

Contenu

- Notions de base de la théorie des graphes
- Algorithmique dans les graphes

Évaluation des connaissances

Sur quel travail ?

- Exercice à rendre : 1 à 3 fois dans le semestre
- TP : En cours de séance, et code et compte-rendu d'un TP à rendre
- Devoir sur table (avec documents) en fin de semestre

Comment ?

- M1 Info : par compétences
- M1 Maths : par notes

Qu'est-ce que c'est ?

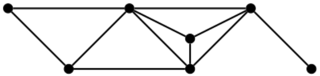
Des entités et les relations entre elles

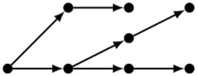
Et concrètement ?

Un graphe G est un couple (V, E) où :

- V est un ensemble de sommets (les entités)
- E est un ensemble d'arêtes entre deux sommets (les relations)

Il existe une représentation graphique





Quelques domaines...

- Sciences techniques : biologie, chimie, physique, informatique,...
- Sciences humaines : géographie, histoire,...
- Monde économique : finance, logistique,...

Quelques applications

Représentations :

- Réseaux de communications : routier, aérien, internet, électrique,...
- Relation binaire : circuit intégré, molécule chimique,...
- Hiérarchie : organigramme, code source, classification de données,...
- Stockage de données : matrice creuse, arbre binaire de recherche...

Problèmes :

- Parcours de données : largeur, profondeur, ...
- Optimisation : tournées de véhicule, ordonnancement,...
- Fiabilité de réseaux : internet, mécanismes complexes,...

Exemple : Réseaux

Machines parallèles et réseaux

- graphe $\rightarrow$ réseaux informatique, connexion serveurs/processeurs
- problèmes $\rightarrow$ conception, dimensionnement, fiabilité, sécurité
- modèles $\rightarrow$ flot, routage, recherche arbre couvrant, k -connexité

Exemple : Logistique

Gestion portuaire et routière

- graphe $\rightarrow$ réseau routier, portuaire
- problèmes $\rightarrow$ diminution des couts, gestion des ressources
- modèles $\rightarrow$ flot, ordonnancement/planification, stockage, routage

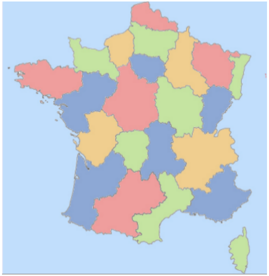
- 1736 : Euler publie le premier article sur les graphes *Solutio problematis ad geometrian situs pertinentis* où est abordé le problème des sept points de Königsberg
  Existe-t-il une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg ?

- 1766 : Euler publie une étude sur le problème du cavalier
  Existe-t-il un chemin pour un cavalier passant sur chaque case d'un échiquier une et une seule fois ?
- 1847 : Kirchhoff utilise les graphes pour étudier les circuits électriques (loi de conservation de l'énergie)
- 1859 : Hamilton invente un casse-tête basé sur un dodécaèdre :
  Est-il possible d'enrouler un fil autour d'un dodécaèdre en passant une et une seule fois sur chaque sommet du polyèdre ?
- 1936 : König sort le premier ouvrage portant exclusivement sur la théorie des graphes avec l'apparition du terme « graphe »

Théorème des quatre couleurs

Problème

Est-il toujours possible de colorier avec seulement quatre couleurs n'importe quelle carte découpée en régions connexes telle que deux régions partageant une frontière reçoivent deux couleurs distinctes ?



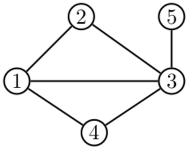
- 1840 : Mobius fait référence à la conjecture des quatre couleurs
- 1879 : Cayley publie la conjecture, Kempe tente une preuve
- 1976 : Appel et Haken démontrent la conjecture des quatres couleurs

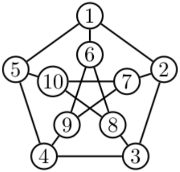
Définition : graphe non orienté

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est défini par :

- V : ensemble des sommets (*vertices* en anglais)
- E : ensemble des arêtes (*edges* en anglais)

Une arête $e \in E$ est une paire de sommets : $e = (u, v)$ avec $u, v \in V$





Vocabulaire dans le graphe non orienté G

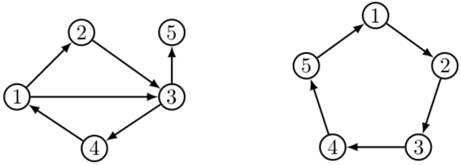
- L'ordre du graphe G est $|V| = n$, nombre de sommets de G
- La taille du graphe G est $|E| = m$, nombre d'arêtes de G
- Les extrémités d'une arête $e = (u, v)$ sont les sommets u et v
- Le sommet u est incident à une arête e si u est une extrémité de e
- L'arête e est incidente au sommet u si e possède u comme extrémité. Les arêtes incidentes à u sont notées $\delta(u) = \{e \in E | e = (u, v)\}$
- Le degré du sommet u est le nombre d'arêtes incidentes à u. On le note $d(u) = |\delta(u)|$
- Un sommet u est adjacent à un sommet v si il existe une arête (u, v) $(\exists (u, v) \in E)$
- Un sommet u est un voisin du sommet v si u est adjacent à v
- Le voisinage du sommet u est l'ensemble des sommets adjacents à u. On le note $\mathcal{N}(u) = \{v \in V | (u, v) \in E\}$
- Propriété : La somme des degrés des sommets $\sum_{u \in V} d(u) = 2 \cdot m$

Définition : graphe orienté

Un graphe orienté $G = (V, A)$ est défini par :

- V : ensemble des sommets (*vertices* en anglais)
- A : ensemble des arcs (*arcs* en anglais)

Un arc $e \in A$ est une paire orientée de sommets : $e = (u, v)$ avec $u, v \in V$.
L'arc (u, v) est différent de l'arc (v, u) !

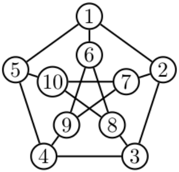


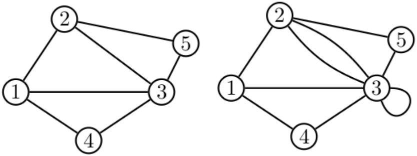
Vocabulaire dans le graphe orienté G

- L'ordre du graphe G est $|V| = n$, nombre de sommets de G
- La taille du graphe G est $|A| = m$, nombre d'arêtes de G
- L'extrémité initiale (origine) d'un arc $e = (u, v)$ est le sommet u.
  L'extrémité finale (destination) d'un arc $e = (u, v)$ est le sommet v.
- Le sommet u est incident à un arc e si u est une extrémité de e
- L'arc e est un arc sortant du sommet u si e possède u comme extrémité initiale. Les arcs sortants de u sont notés $\delta^+(u) = \{e \in A | e = (u, v)\}$.
  L'arc e est un arc entrant du sommet u si e possède u comme extrémité finale. Les arcs entrants sont notés $\delta^-(u) = \{e \in A | e = (v, u)\}$
- Le degré sortant du sommet u est le nombre d'arcs sortants de u noté $d^+(u) = |\delta^+(u)|$. Le degré entrant du sommet u est le nombre d'arcs entrants de u noté $d^-(u) = |\delta^-(u)|$.
- Un sommet u est adjacent à un sommet v si il existe un arc (u, v) ou un arc (v, u) $(\exists (u, v) \in A \vee \exists (v, u) \in A)$
- Un sommet u est un voisin entrant du sommet v si (u, v) est un arc.
  Un sommet u est un voisin sortant du sommet v si (v, u) est un arc.
- Le voisinage entrant du sommet u est $\mathcal{N}^-(u) = \{v \in V | (v, u) \in A\}$.
  Le voisinage sortant du sommet u est $\mathcal{N}^+(u) = \{v \in V | (u, v) \in A\}$.

Dans un graphe $G = (V, E)$:

- L'ensemble des arêtes incidentes à l'ensemble V' sont notées $\delta(V') = \left\{(u, v) \in E | u \in V', v \notin V'\right\}$
- Arcs entrants d'un ensemble V' : $\delta^-(V') = \left\{(u, v) \in A | u \notin V', v \in V'\right\}$
- Arcs sortants d'un ensemble V' : $\delta^+(V') = \left\{(u, v) \in A | u \in V', v \notin V'\right\}$
- $G = (V, E)$ est un graphe régulier $\Leftrightarrow \forall u, v \in V, d(u) = d(v)$ (tous les sommets ont le même degré)
- $G = (V, E)$ est un graphe Δ-régulier $\Leftrightarrow \forall u \in V, d(u) = \Delta$
- Une coupe est une partition des sommets en deux sous-ensembles S et $V \setminus S$. Par extension, on appelle aussi coupe $\delta(S)$
- Le graphe complémentaire de G est le graphe $\bar{G} = (V, \bar{E})$ tel que $\forall u, v \in V, (u, v) \in E \Leftrightarrow (u, v) \notin E$



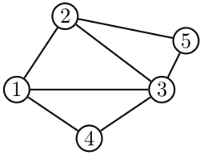


- Une boucle est une arête ou un arc ayant le même sommet à chaque extrémité : arête ou arc de la forme (u, u)
- Des arêtes (ou arcs) multiples sont un ensemble d'arêtes (ou d'arcs) qui possèdent les mêmes extrémités : des arêtes ou arcs e, e', e'' tels que $e = (u, v), e' = (u, v), e'' = (u, v)$
- Un graphe simple (orienté ou non) est un graphe sans boucles et sans arêtes (ou arcs) multiples
- Un graphe multiple (orienté ou non) est un graphe qui possède au moins une boucle ou une arête (ou un arc) multiple.

Matrice d'adjacence

Soit $G = (V, E)$ un graphe dont les sommets sont numérotés $v_1, \dots v_n$. La matrice d'adjacence A de G est une matrice carrée de taille $n \times n$ où $a_{ij} =$

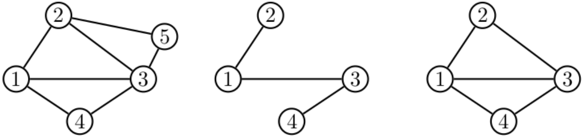
- 1 si $(v_i, v_j) \in E$
- 0 sinon



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés

- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique
- La matrice d'adjacence d'un graphe simple a *une diagonale de 0*



Pour un graphe $G = (V, E)$ (valable pour les graphes orientés et non orientés)

Définition : sous-graphe

$G' = (V', E')$ où ($V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$) est un sous-graphe de G

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall e = (u, v) \in E' \Rightarrow u, v \in V'$$

Définition : sous-graphe induit

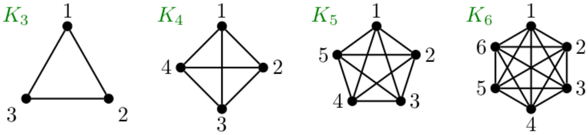
$G' = (V', E')$ (où $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$) est un sous-graphe de G induit par V'

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall u, v \in V' \Rightarrow e = (u, v) \in E'$$

On le note $G[V']$.

- Un graphe complet $G = (V, E)$ est un graphe possédant toutes les arêtes possibles : $\forall u, v \in V, (u, v) \in E$. Un graphe complet de n sommets est noté K_n



- Un sous-graphe complet est appelé une clique
- Un graphe nul est un graphe sans arêtes. Un graphe nul de n sommets est noté N_n
- Un sous-graphe sans arêtes est appelé un stable

Définition : graphe pondéré

Un graphe pondéré est un graphe auquel est associé une (ou plusieurs) application(s) de valuation.

Application sur les sommets

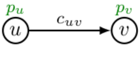
Pondération des sommets

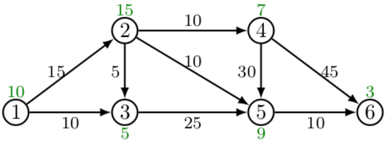
$$\begin{aligned} p : V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto p_v \end{aligned}$$

Application sur les arêtes

Pondération des arêtes

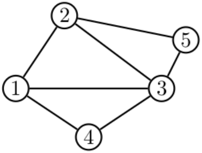
$$\begin{aligned} c : E &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto c_{u,v} \end{aligned}$$





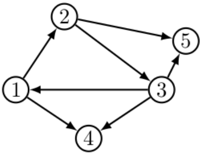
Dans un graphe non orienté $G = (V, E)$

- Une chaine est une suite ordonnée de sommets $P = v_1, \ldots, v_k$ où $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- La longueur d'une chaine est son nombre d'arêtes
- Une chaine simple est une chaine où les arêtes sont empruntées au plus une fois
- Une chaine élémentaire est une chaine où les sommets sont empruntés au plus une fois
- Un cycle est une chaine simple où $v_1 = v_k$
- Un cycle élémentaire est une chaine élémentaire où $v_1 = v_k$
- Un graphe est acyclique s'il ne contient pas de cycle



Dans un graphe orienté $G = (V, A)$

- Une chaine est une suite ordonnée de sommets $P = v_1, \ldots, v_k$ où $(v_i, v_{i+1}) \in A$ ou $(v_{i+1}, v_i) \in A$
- Un chemin est une suite ordonnée de sommets $P = v_1, \ldots, v_k$ où $(v_i, v_{i+1}) \in A$
- Une chaine élémentaire est une chaine où les sommets sont empruntés au plus une fois
- Un chemin élémentaire est un chemin où les sommets sont empruntés au plus une fois
- Un cycle est une chaine simple où $v_1 = v_k$
- Un circuit est un chemin où $v_1 = v_k$
- Une racine est un sommet r tel qu'il existe un chemin de r vers tous les sommets du graphe

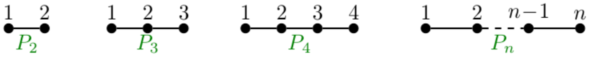


- Un chemin hamiltonien est un chemin qui passe par tous les sommets du graphe exactement une fois
- Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets du graphe exactement une fois
- Un graphe hamiltonien est graphe qui possède un cycle hamiltonien
- Un cycle eulérien est un cycle qui passe par toutes les arêtes du graphe exactement une fois
- Un graphe eulérien est graphe qui possède un cycle eulérien

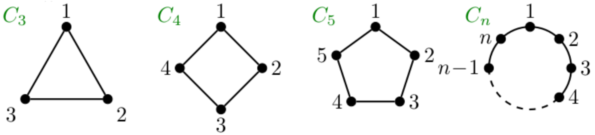
Théorème

Un graphe est eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

- Un graphe chaine est un graphe composé uniquement d'une chaine. Un graphe chaine de n sommets est noté P_n.



- Un graphe cycle est un graphe composé uniquement d'un cycle. Un graphe cycle de n sommets est noté C_n.



Définition : distance

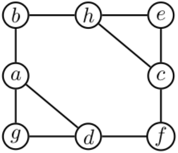
La distance d'un sommet u à un sommet v est la *longueur* du plus petit chemin entre u et v.
La longueur peut être définie :

- en nombre d'arêtes (ou d'arcs) : $dist(u, v) = \min\{long(P_{u,v}) | P_{u,v} \text{ est un chemin}\}$
- grâce au poids sur les arêtes (ou arcs) : $\min\{poids(P_{u,v}) | P_{u,v} \text{ est un chemin}\}$ où $poids(P_{u,v}) = \sum poids(i, j)$ où $(i, j) \in P_{u,v}$

S'il n'existe pas de chemin $dist(u, v) = \infty$

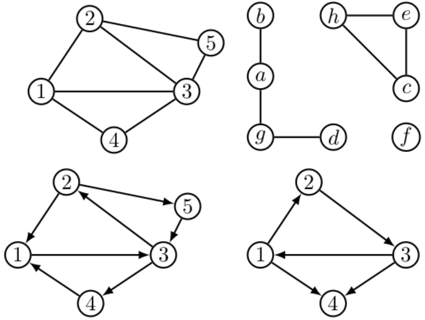
Définition : diamètre

Le diamètre d'un graphe G est la plus grande distance entre deux sommets de G : $diam(G) = \max\{dist(u, v) | u, v \in V\}$



Définitions

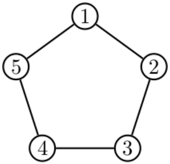
- Un graphe G est connexe s'il existe une chaine entre chaque paire de sommets
- Une composante connexe de G est un sous-graphe induit connexe maximal (au sens de l'inclusion) de G
- Un graphe orienté G est fortement connexe s'il existe un chemin entre chaque paire de sommets
- Une composante fortement connexe de G est un sous-graphe induit fortement connexe maximal (au sens de l'inclusion) de G

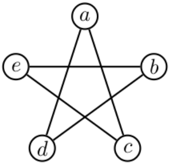


Isomorphisme de graphes orientés ou non orientés

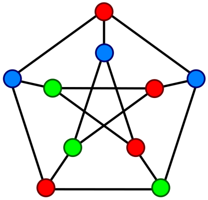
Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes s'il existe une bijection $\varphi : V \to V'$ telle que :

$$\forall u, v \in V,\ (u, v) \in E \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E'$$





- Une coloration de graphe attribue une couleur à chaque sommet telle que deux sommets adjacents portent une couleur différente
- Le nombre chromatique d'un graphe G est le nombre de couleurs minimum nécessaires pour colorier le graphe. On le note $\chi(G)$
- Une k-coloration d'un graphe est une coloration utilisant k couleurs



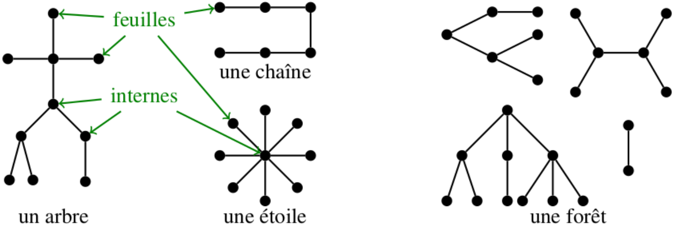
Propriétés

- Si G possède un sous-graphe isomorphe à K_k alors il faudra au moins k couleurs pour colorier le graphe
  Autrement dit, le nombre chromatique d'un graphe est supérieur à la taille de sa plus grande clique
- $\chi(G) \geqslant 3 \Leftrightarrow G$ contient un cycle impair comme sous-graphe
- Le sous-graphe engendré par les sommets d'une même couleur est un stable

Définition : Arbre

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un arbre si et seulement si G est connexe et acyclique

- Un nœud est un sommet de l'arbre
- Une feuille est un sommet de degré 1
- Un nœud interne est un sommet de degré > 1
- Une branche est une arête de l'arbre
- Une forêt est un graphe non connexe dont chaque composante connexe est un arbre



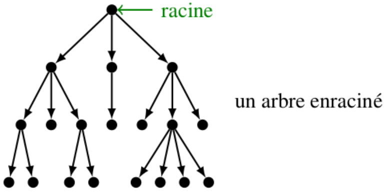
Propriétés

- G est une forêt $\Leftrightarrow$ G est acyclique
- G est un arbre $\Rightarrow$ $m = n - 1$
- G est un arbre $\Leftrightarrow$ G est connexe et acyclique
- G est un arbre $\Leftrightarrow$ G est connexe et $m = n - 1$
- G est un arbre $\Leftrightarrow$ G est acyclique et $m = n - 1$
- Dans un arbre, il existe un chemin unique entre chaque paire de sommets
- Un arbre est connexe minimal : enlever une arête déconnecte le graphe
- Un arbre est acyclique maximal : ajouter une arête crée un cycle
- Un arbre d'un moins deux sommets possède au moins deux feuilles

Définition : arborescence

Un graphe orienté G est une arborescence si et seulement si G est acyclique et possède est une racine

- Le parent d'un sommet u est un voisin entrant de u
- Le fils d'un sommet u est un voisin sortant de u



Propriétés

$G = (V, A)$ est une arborescence de racine r
$\Leftrightarrow$ Il existe un unique chemin de r vers tous les sommets du graphe
$\Leftrightarrow$ G est connexe et $d^-(r) = 0$ et $d^-(v) = 1 \ \forall v \in V \setminus \{r\}$
$\Leftrightarrow$ G est acyclique et $d^-(r) = 0$ et $d^-(v) = 1 \ \forall v \in V \setminus \{r\}$

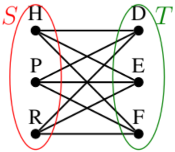
Définition : graphe biparti

Un graphe biparti est un graphe pour lequel il existe une bi-partition $\{S, T\}$ de V tel que $E \subseteq \{(u, v) | u \in S, v \in T\}$.
On a $V = S \cup T$ et $S \cap T = \emptyset$. Les graphes $G[S]$ et $G[T]$ forment des stables.

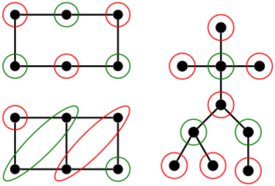
Définition : graphe biparti complet

Un graphe biparti complet K_{n_S, n_T} est un graphe biparti $G = (S \cup T, E)$ tel que

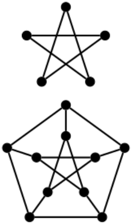
$$|S| = n_S,\ |T| = n_T \text{ et } \forall u \in S, v \in T, (u, v) \in E$$



graphe biparti complet $K_{3,3}$



graphes bipartis



graphes non bipartis

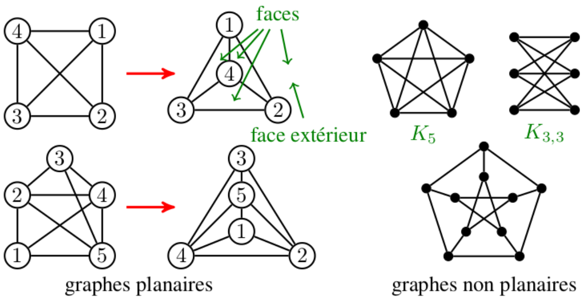
Propriétés

- Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire
- Les graphes $C_{2\cdot n}$ et les arbres sont des graphes bipartis
- Un graphe est biparti si et seulement si il est 2-coloriable
  G est biparti $\Leftrightarrow \chi(G) = 2$

Définition : graphe planaire

Un graphe planaire est un graphe que l'on peut dessiner dans un plan sans intersection des arêtes

- Une face dans un graphe planaire est une région du plan délimitée par les arêtes.
- La face extérieure est une région infinie



Propriétés

- Formule d'Euler : Pour G connexe et planaire, soit f le nombre de faces, on a $f - m + n = 2$
- Les graphes C_n et les arbres sont des graphes planaires
- Pour G planaire simple et connexe d'au moins 3 sommets, on a $m \leqslant 3 \cdot (n-2)$
- Pour G planaire simple, connexe et biparti d'au moins 3 sommets, on a $m \leqslant 2 \cdot (n-2)$
- Pour G planaire simple et connexe alors $\exists u \in V$ tel que $d(u) \leqslant 5$
- K_5 n'est pas planaire
- $K_{3,3}$ n'est pas planaire
- Un graphe planaire est 6-coloriable *(assez simple à démontrer)*
- Un graphe planaire est 5-coloriable *(moins simple à démontrer, mais faisable)*

Théorème des quatre couleurs

Un graphe planaire est 4-coloriable.