Mathina

AN INTERACTIVE STORYBOOK BETWEEN MATHEMATICS AND FANTASY

MATHINA MANUALE PER GLI EDUCATORI

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

	4-6 anni	7-10 anni	11-14 anni	15+ anni
Logica	La sfida dei semafori	La sfida delle piastrelle colorate	Cani e gatti	Le mie medaglie, grazie!
Simmetria	Mathina vince tanti nuovi giocattoli!	Il gioco dei rosoni e il labirinto magico	Mathina e i fregi	La giostra dei poliedri
Crittografia	I messaggi segreti	Il pappagallo parlante	Il tesoro perduto	Man in the middle
Visualizzazione spaziale	L'addestratrice degli uccelli del fuoco	Parlare a un unidrago	La corsa delle fenici	Le misteriose lucciole scintillanti

INTRODUZIONE

1. Sviluppo del pensiero matematico nell'era del problem-solving

Il XXI secolo è il secolo del problem-solving. Per i bambini è estremamente utile acquisire confidenza con il potere creativo del pensiero matematico già prima dell'età scolare, perché le capacità connesse al pensiero matematico sono necessarie per comprendere e cogliere le complesse sfide della nostra era. Tuttavia, l'istruzione scolastica formale si dimostra meno efficace nel trasmettere l'effettiva magnitudine dell'applicabilità quotidiana della matematica e la bellezza del pensiero matematico.
Il mondo di Mathina aiuta a sviluppare le abilità di problem-solving attraverso l'applicazione del pensiero matematico, in un ambiente innovativo che include storie coinvolgenti con attività interattive legate a:

- rappresentazione grafica
- logica
- crittografia
- simmetria

Studi ribadiscono che gli approcci non formali ai problemi aiutano gli studenti nella costruzione di una base di conoscenza più sofisticata consentendo di sperimentare la pluralità delle situazioni matematiche e rendendo espliciti i collegamenti tra la matematica della vita quotidiana e la matematica scolastica[1]. Il nostro obiettivo è collegare approcci non formali e motivanti, come l'integrazione di storytelling e app interattive all'apprendimento formale della matematica.
Mathina, da questo punto di vista, è in linea con gli obiettivi della politica educativa dell'Unione europea, che incentiva l'uso efficace delle tecnologie e delle risorse per l'apprendimento digitale nell'istruzione e nella formazione. Tuttavia, una serie di indagini e studi, condotti dalla Commissione europea, dall'OCSE e dal World Economic Forum, per esempio, evidenziano che esiste ancora una lacuna nell'integrazione delle tecnologie e delle risorse per l'apprendimento digitale nei sistemi educativi europei. Ciò riguarda in parte lo sviluppo delle competenze digitali:
competenze tecniche necessarie per utilizzare le nuove tecnologie digitali;

- competenze tecniche necessarie per utilizzare le nuove tecnologie digitali;
- competenze di navigazione digitale, cioè un insieme più completo di competenze necessarie per avere successo nel mondo digitale, comprese la ricerca, la definizione delle priorità e la valutazione della qualità e dell'affidabilità delle informazioni.

Pertanto, è fondamentale sviluppare attività di insegnamento della matematica che siano facili da integrare in un ampio spettro di strumenti educativi.

[1] Barron, B., Cayton-Hodges, G., Bofferding, L., Copple, C., Darling-Hammond, L., & Levine, M. H. (2011). Take a giant step: A blueprint for teaching young children in a digital age. Joan Ganz Cooney Center at Sesame Workshop.

2. Colmare il gap tra educazione matematica formale e informale

Il progetto Mathina colma il gap tra l'educazione matematica formale e non formale con il suo sistema modulare e di facile utilizzo. Questo sistema è accessibile e presentato in più modi (online, offline) e utilizzato su vari dispositivi (mobile, tablet, desktop, smartboard, ecc.), a seconda della posizione e dello scopo previsto. Gli strumenti di Mathina consentono agli educatori di guidare i giovani studenti attraverso una varietà di sfide matematiche e potenziarli seguendo i loro ritmi e percorsi di apprendimento. Incoraggia gli educatori a rispettare le esigenze individuali degli studenti. Inoltre, il nostro progetto supporta nuovi metodi di insegnamento, tra cui la ludicizzazione e lo storytelling, offrendo applicazioni modulari in linea con i curricula scolastici.

L'innovazione di Mathina consiste nel collegare l'apprendimento formale e l'apprendimento informale combinando quattro caratteristiche centrali:

1. EASY-TO-USE
2. EASY-TO-UNDERSTAND
3. EASY-TO-ADAPT
4. EASY-TO-INCLUDE

3. Il mondo di Mathina per il problem-solving

L'utilizzo delle storie e delle attività di Mathina all'apparenza deve sembrare più un gioco che uno studio. I personaggi di fantasia nel mondo delle storie di Mathina motivano i bambini, stimolano il loro interesse e supportano l'integrazione tra la risoluzione dei problemi e la narrazione in modo emozionante e divertente.
Mathina implementa una struttura di narrazione crossmediale per motivare e coinvolgere i bambini in una risoluzione dei problemi basata sul pensiero matematico in varie aree. La funzione principale delle storie problem-based di Mathina è fornire un'esperienza nel processo di sviluppo del pensiero che sia il più possibile coinvolgente anche a livello emotivo, oltre che di impegno. La narrativa basata sul testo è supportata da un ambiente visivo artistico sotto forma di immagini e piccole animazioni. Ogni storia offre problemi interattivi attraverso una o più app digitali, con cui gli studenti possono interagire individualmente o in gruppo, supportati dai genitori o dagli insegnanti quando necessario. Le app e l'esperienza visiva migliorano l'aspetto cognitivo nei bambini e nei giovani durante processo di sviluppo del pensiero logico razionale. L'aspetto sociale (entrare nel mondo di Mathina in piccoli gruppi / condividere le esperienze in una comunità di studenti) e la presenza di una figura guida (entrare nel mondo di Mathina in compagnia di un insegnante o di un genitore) possono supportare efficacemente il processo di apprendimento, secondo il modello del Community Inquiry.

[2] Kalogeras, S. (2014). Transmedia storytelling and the new era of media convergence in higher education. Springer.

La dott.ssa Stavroula Kalogeras, l'autore del libro Transmedia storytelling and the new era of media convergence in higher education[2], (Lo storytelling crossmediale e la nuova era della convergenza nell'istruzione superiore) riassume il background scientifico di questo approccio in una presentazione video:

https://www.youtube.com/watch?v=MmngfqCKHFo

Risultati recenti nel campo delle neuroscienze sottolineano l'efficacia dell'apprendimento attraverso le storie. Sulla base dello stesso modello presentato sopra, Mathina offre unità di apprendimento di dimensioni contenute per attività focalizzate a breve termine, chiamate microlearning. In questo modo l'utente non ha bisogno di utilizzare tutte le storie di Mathina per acquisire un'esperienza completa nella risoluzione dei problemi. Le storie e gli strumenti del progetto Mathina sono disponibili per diversi gruppi di età.

SVILUPPO DEL PENSIERO LOGICO: LE AVVENTURE DI MATHINA A CITTÀ DELLA LOGICA

1. Principali concetti matematici affrontati nelle storie

Argomento: Combinatorica

I bambini in età prescolare all'età di 4-6 anni iniziano a sviluppare il ragionamento logico e, allo stesso tempo, il loro vocabolario si sta espandendo. Come parte dello sviluppo del pensiero matematico e delle capacità di ragionamento, i bambini iniziano a imparare come utilizzare strategie di risoluzione di problemi e di ragionamento che non sono innate, ma che emergono nei loro primi anni, per formare il nucleo delle loro capacità logiche. Questa è l'età in cui inizia il flusso infinito di domande sul "perché". I bambini si entusiasmano per le conversazioni, sono interessati a problemi legati a brevi parole e a narrazioni sempre più lunghe. Sono impegnati a esplorare il loro ambiente, a ordinare gli oggetti in vari set -entusiasti di schemi e sequenze- a stabilire connessioni e contare.

I bambini di questa fascia di età imparano a cercare strutture e regolarità per ordinare, prevedere e creare coesione. I modelli, le funzioni e le relazioni sono al centro del loro pensiero matematico e delle loro capacità di ragionamento. Confronto, classificazione e ordinamento racchiudono queste abilità fondamentali, il pensiero analitico di base e le strategie iniziali di risoluzione dei problemi. La proposta di semplici problemi di combinatorica supporta -con la partecipazione di insegnanti o adulti- lo sviluppo simultaneo di abilità matematiche e il riconoscimento di ulteriori interconnessioni tra diverse categorie di abilità (per esempio, capacità di pensiero e ragionamento matematico, abilità numeriche, abilità legate al pensiero spaziale).

Argomento: pensiero inverso

All'età di 6-7 anni, i bambini, sebbene non siano ancora pensatori completamente razionali, iniziano a sviluppare il pensiero logico. Sono in grado di classificare e ordinare gli oggetti in più modi in modo sempre più indipendente e le loro capacità di riconoscimento dei modelli e di creazione di modelli si stanno sviluppando enormemente. Queste sono abilità essenziali da sviluppare prima di essere introdotti a problemi matematici più complessi, che richiedono approcci più creativi.

Circa dall'età di 8 anni, i bambini applicano già la logica e il ragionamento a determinati eventi che li circondano. Il ragionamento ipotetico è un'abilità importante, che richiede lo sviluppo della memoria, dell'attenzione e della creatività. Il pensiero inverso è un processo cognitivo, che può svolgere un ruolo significativo nella creazione di idee creative, in modo simile al pensiero associativo e analogico.

Argomento: il problema della galleria d'arte

I bambini di età compresa tra gli 11 e i 14 anni entrano nel mondo delle operazioni formali. Pensano già in modo logico e strategico applicando metodi e sono anche in grado di utilizzare la logica deduttiva (cioè il ragionamento basato su una o più affermazioni al fine di raggiungere una conclusione logica). Il pensiero predittivo e il pensiero astratto si sviluppano rapidamente a questa età, proprio come la metacognizione (autoriflessione, consapevolezza e comprensione del proprio processo di pensiero), che diventa un supporto fondamentale per la risoluzione dei problemi.

Argomento: la regola della divisibilità

Le capacità cognitive degli adolescenti aumentano man mano e, con esse, le capacità analitiche e argomentative. L'approccio logico alla risoluzione dei problemi è supportato dall'avanzamento delle domande. Probabilità, statistiche, rappresentazione dei dati e calcoli complessi aiutano a risolvere problemi e situazioni via via sempre più complicati. Anche le equazioni sono comprese sempre più in profondità.

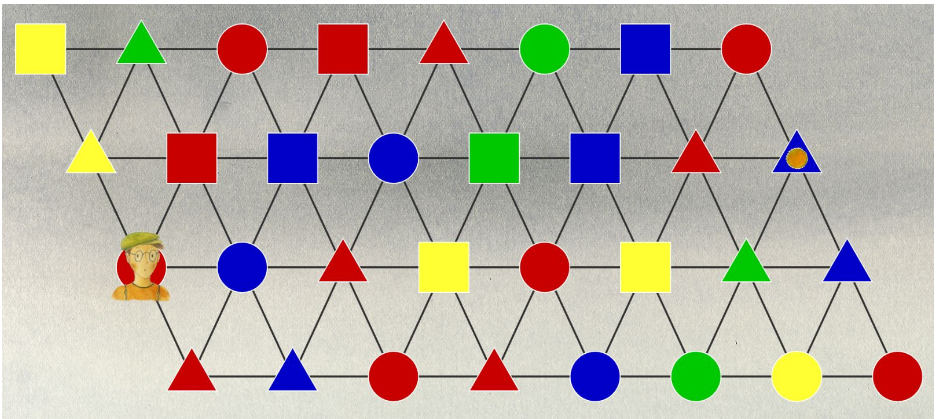
2. App interattive per il problem-solving

La sfida dei semafori
Argomento: Combinatorica

Poiché questa fascia di età non è ancora pronta a leggere la storia senza l'aiuto di un adulto, ci sono diversi modi per utilizzare i materiali in un contesto di scuola materna / primaria. Innanzitutto, l'insegnante potrebbe leggere la storia ai bambini e aiutarli a usare le app, ma è anche possibile considerare l'utilizzo dell'app come modello per supportare il processo di pensiero. Quei bambini con un forte senso visivo troveranno una soluzione, grazie proprio all'aspetto visivo delle app. Gli studenti cinestetici, invece, potrebbero trovare utile affrontare il problema giocando con altri bambini o con i membri della famiglia che, per esempio, tengono in mano un foglio colorato per rappresentare ogni colore. I bambini possono riorganizzare gli attori per rappresentare ogni caso possibile e associare i colori alle persone per aumentare la giocosità del processo di risoluzione.

La sfida delle piastrelle colorate
Argomento: pensiero inverso

Tipici della fascia di età cui questa storia è destinata sono lo sviluppo di nuove abilità. come la logica e il ragionamento. Nella storia "La sfida delle piastrelle colorate", il processo di risoluzione dei problemi è affiancato da una svolta creativa, vale a dire il pensiero inverso, che può motivare i bambini a scoprire un nuovo metodo di sistematizzazione dei problemi.



Cani e gatti
Argomento: il problema della galleria d'arte

Interagire con la storia "Cani e gatti" richiede pensiero predittivo, pensiero astratto, metacognizione, la capacità di riflettere sul proprio metodo di pensiero e anche la capacità di estendere il pensiero logico in un contesto geometrico.

Le mie medaglie, grazie!
Argomento: criteri di divisibilità

Per risolvere il problema introdotto nella storia di "Le mie medaglie, grazie!", Saranno richieste capacità analitiche e argomentative.

Number of the friend	Remaining amount to give away	Amount to receive	Remaining amoung to give away	Amount to receive	Total amout received
1	123	6			
2	117	9			
3	108	9			
4	99	[redacted]			

3. Ulteriori sviluppi

George Polya, pioniere della didattica del problem-solving, ha suggerito un processo in quattro fasi per affrontare i problemi nel suo famoso libro "How to Solve It":

(1) Comprendi il problema
(2) Elabora un piano
(3) Esegui il piano
(4) Esamina il risultato

Gli educatori e gli studenti possono implementare questo schema su qualsiasi problema matematico nel progetto Mathina e non solo.

Quando i bambini danno una risposta sbagliata, invece di correggere immediatamente la soluzione ed evidenziare il loro errore, è più cruciale rispondere positivamente, apprezzando lo sforzo ed esaminando il processo di pensiero insieme ai bambini.

La riflessione può essere avviata in questo modo:
Stai dicendo che...?
Da come ho capito, hai concluso che...
Capisco, quindi, pensi che...
Cosa ti ha fatto pensare in questo modo?

Per sviluppare abilità logiche in età prescolare, gli educatori possono utilizzare giochi di classificazione con oggetti reali (oggetti di uso quotidiano, giocattoli, forme geometriche, ecc.) o immagini. L'ordinamento può essere basato, per esempio su taglia, colore, dimensione e altre caratteristiche. Si possono inventare giochi di fantasia basati su schemi ritmici di applausi, passi di danza o creazione di sequenze oggetti fisici.

Per i bambini di età compresa tra 5 e 7 anni, la previsione di una regolarità offre interessanti opportunità per sviluppare le capacità di pensiero. Blocchi, pietre colorate, forme di carta colorata, frutta, verdura o qualsiasi altro insieme di oggetti possono essere utilizzati per creare motivi regolari. I bambini possono sfidarsi a vicenda (e anche i loro insegnanti) a continuare uno schema che è stato iniziato da uno di loro. All'età di 6-7 anni, modelli contenenti anche numeri possono essere affiancati a quelli visti sin qui. È anche possibile creare problemi che hanno più di una risposta o sequenze che possano completarsi in più di un modo. Si può iniziare a giocare con indovinelli, anche con numeri, utilizzano per esempio il numero di anni, il numero di oggetti nell'ambiente, edifici, animali, piante o altri oggetti di uso quotidiano, per sviluppare la capacità di porsi domande, classificare e argomentare. Anche la partecipazione alla cura della casa, come ordinare i giocattoli, gli oggetti di uso quotidiano, rifare il letto, cucinare, ordinare le posate, apparecchiare la tavola, può essere molto utile per sviluppare le capacità di pensiero.

I bambini di età compresa tra 11 e 14 anni possono identificare, esplorare e spiegare schemi più complessi, anche in un contesto matematico e geometrico. Per esempio, le frazioni possono essere rappresentate sulla linea numerica, come una porzione di una forma geometrica (cerchio, quadrato, triangolo, ecc.) o utilizzando dei regoli. Compilare elenchi sistematici e identificare i sottoproblemi, quando si lavora su un problema complesso, può aiutare a sviluppare capacità di pensiero e ottenere una solida pratica nell'implementazione di varie strategie di risoluzione dei problemi.

Gli adolescenti di età compresa tra 14 e 18 anni possono esplorare i problemi del mondo reale, come pianificare gli acquisti alla fine di una svendita di stagione, pianificare piccoli investimenti o comprendere i processi del mondo reale con l'aiuto di diagrammi e analisi dei dati. Possono provare a inventare puzzle logici, creare giochi da tavolo su determinati problemi relativi ai loro interessi e studi, analizzare l'equità di un sistema di votazione, esplorare sistemi complessi nell'ambiente circostante o sistemi forniti dalla tecnologia.

Bibliografia

- Germain-Williams, T. (2017). Teaching Children to Love Problem Solving. A Reference from Birth through Adulthood. World Scientific.
- Parviainen, P. (2019). The Development of Early Mathematical Skills – A Theoretical Framework for a Holistic Model. Journal of Early Childhood Education Research Volume 8 Issue 1 2019, 162–191.
- Polya, G. (1945). How to solve it; a new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

SIMMETRIA E POLIEDRI:
MATHINA ALLA FIERA DELLA SIMMETRIA

1. Principali concetti matematici affrontati nelle storie

Argomento: simmetrie assiali

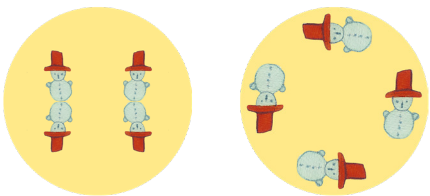
Per la fascia di età 4-6, l'obiettivo principale è esplorare un tipo di simmetria che anche i bambini più piccoli conoscono in modo empirico: la simmetria "a specchio". Se ci limitiamo a figure piane, ciò significa controllare se un'immagine ha assi di simmetria o meno.

Per semplicità, vengono considerati solo gli assi di simmetria in posizione verticale e orizzontale rispetto al punto di vista dell'osservatore.

Argomento: simmetrie assiali e rotazioni

Nella fascia di età 7-10, i bambini acquisiscono maggiore familiarità con la simmetria assiale. Inoltre, acquisiscono familiarità simmetrie di tipo rotazionale. Perciò concetti come la nozione stessa di simmetria, oppure le prime proprietà relative alla riflessione e alla rotazione e la classificazione dei rosoni in base alla loro simmetria possono essere esplorate.

Con il termine "simmetria" di una figura consideriamo un'isometria, cioè una funzione che preserva le distanze, che mappa la figura esattamente in se stessa, in modo che l'immagine sia identica prima e dopo la trasformazione: non dovrebbe, cioè, essere possibile distinguere la figura iniziale da quella finale per forma, posizione o colore.



I due rosoni nella figura precedente possono sembrare simili, ma hanno una differenza significativa per quanto riguarda la loro simmetria: mentre quella a sinistra ha simmetrie di riflessione - di tipo diedrale - quella a destra non le ha - è un rosone ciclico.

E possiamo distinguere le rosette diedri in base al numero di simmetrie di riflessione che presentano (per esempio, la rosetta a sinistra ha 2 assi di simmetria, è descritta come D2). Allo stesso modo, possiamo classificare le rosette cicliche in base al numero di simmetrie di rotazione (quella a destra è un C4).

Argomento: simmetrie assiali e rotazioni (2a parte)

Nella fascia di età 11-14, oltre alla riflessione e alla rotazione, i bambini possono anche soffermarsi su due isometrie meno "intuitive"[1]: traslazione e glissosimmetria.

Facciamo riferimento alla nozione di simmetria indicata nel paragrafo precedente (Simmetrie assiali e rotazioni).

Una volta che le 4 isometrie nel piano sono note: simmetria assiale, rotazione, traslazione e glissosimmetria[2], i ragazzi possono iniziare a esplorare il tipo di simmetria dei fregi.

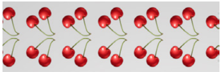
C'è un risultato molto importante e sorprendente riguardo alle simmetrie dei fregi: sebbene possiamo produrre una grande varietà di fregi dal punti di vista visuale, dal punto di vista matematico ci sono solo 7 tipi di fregi con simmetrie diverse.

[1] Osserviamo che tutti i tipi di simmetrie menzionati, con l'eccezione parziale delle glissosimmetrie fanno parte del curriculum standard della Scuola Secondaria di I grado (12/14 years).

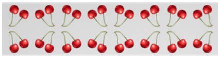
[2] È possibile dimostrare che, nel piano, non esistono altri tipi di isometrie.

La dimostrazione di un risultato così sorprendente richiede conoscenze matematiche di livello più avanzato, tuttavia, comprendere le differenze tra i 7 tipi di fregi e classificare i fregi in base alla loro simmetria è un argomento che può essere esplorato dai bambini, anche in modo giocoso.
Nella tabella seguente, possiamo vedere esempi dei 7 tipi di fregi e un elenco delle simmetrie corrispondenti.

Traslazioni e simmetrie assiali con asse verticale



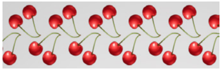
Traslazioni, simmetrie assiali con asse orizzontale, glissosimmetrie



Traslazioni, simmetrie assiali con asse orizzontale e con asse verticale, rotazioni, glissosimmetrie

Traslazioni, rotazioni

Traslazioni, simmetrie assiali con asse verticale, rotazioni, glissosimmetrie



Traslazioni, glissosimmetrie

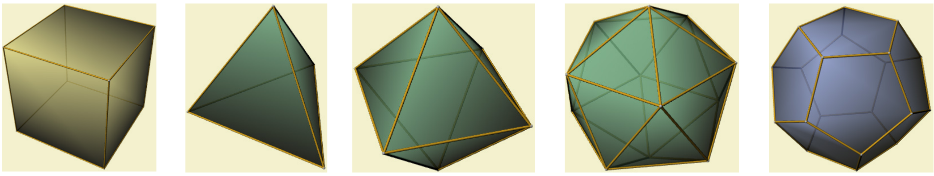
Traslazioni

Argomento: simmetrie e poliedri

Il ragionamento tridimensionale è un'abilità che si acquisisce con l'età e, quindi, questo argomento è rivolto solo alla fascia di età 15-19+. Ci siamo concentrati su un tipo specifico di oggetti 3D familiari agli adolescenti: i poliedri. A tale scopo, abbiamo scelto due classi di poliedri molto "simmetrici": Solidi platonici e poliedri uniformi.

Un solido platonico è un poliedro "il più regolare possibile". Più precisamente, chiediamo che un solido platonico abbia le seguenti proprietà:

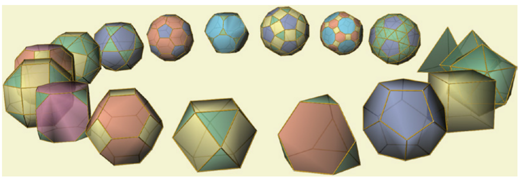
- le facce sono tutte poligoni regolari uguali tra loro (lo stesso numero di lati, tutti con la stessa lunghezza e angoli uguali);
- a ogni vertice si incontra lo stesso numero di facce;
- gli angoli diedri, cioè gli angoli tra facce contigue, sono tutti uguali tra loro;
- gli angoli solidi in ciascun vertice sono tutti uguali tra loro.



Esistono solo 5 tipo di solidi platonici (immagine sopra): tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro, dodecaedro, ed è possibile, in modo costruttivo, indurre gli adolescenti a ottenere tutti i solidi platonici e concludere che non ne possono esistere altri.
Dopo aver esplorato i solidi platonici, possiamo passare ai poliedri uniformi. Un poliedro uniforme è un poliedro in cui:

- le facce sono tutte poligoni regolari, ma non tutte con lo stesso numero di lati;
- per ogni coppia di vertici, c'è almeno una simmetria del poliedro che porta un vertice sull'altro.

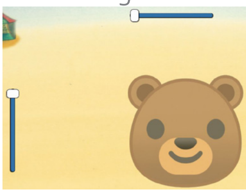
A differenza dei solidi platonici, la classe dei poliedri uniformi non è finita - include 1) una famiglia infinita di prismi, le cui basi sono poligoni regolari e le cui facce laterali sono quadrati; 2) una famiglia infinita di antiprismi, le cui basi sono poligoni regolari e le cui facce laterali sono triangoli equilateri; 3) 13 altri poliedri (immagine sotto).



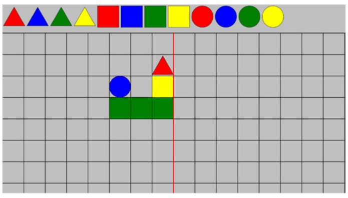
2. Digital Apps for Interactive Problem-solving

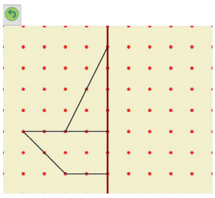
App per la fascia di età 4-6
Argomento: simmetria assiale

Come accennato prima, in questa fascia di età l'idea è di esplorare la nozione di asse di simmetria. Tutte le app sono dedicate a questo scopo, ma presentano diversi livelli di difficoltà: nelle app 1.1 e 1.2, il bambino deve controllare se una data immagine presenta o meno assi di simmetria, mentre nelle app 1.3 e 1.4, il bambino deve completare la costruzione di immagini simmetriche.
Per quanto riguarda le app 1.1 e 1.2, la prima può essere vista come una modalità di allenamento per la seconda: infatti, nell'app 1.1, il bambino deve occuparsi solo di un'immagine alla volta, mentre nell'app 1.2, più immagini sono presentate contemporaneamente.
Anche la app 1.4 è più difficile dell'app 1.3: in quest'ultima il bambino deve solo classificare immagini preesistenti, mentre nell'app 1.4 il bambino deve completare il disegno di immagini simmetriche.


App 1.1

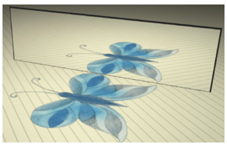

App 1.2

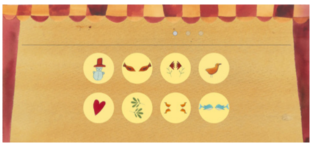

App 1.3

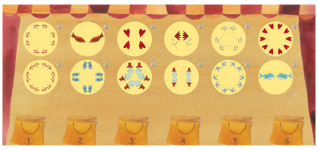

App 1.4

App per la fascia di età 7-10
Argomento: simmetrie assiali e rotazioni

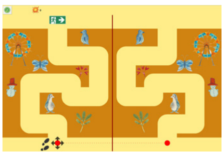
L'obiettivo della app 2.1 è che i bambini controllino se una data immagine ha un asse di simmetria, usando uno specchio.
Le app 2.2 - 2.4 sono dedicate a un argomento matematico affrontato in questa sezione: la classificazione dei rosoni. Queste app sono state concepite come guida per i bambini durante questo processo: con la app 2.2, essi imparano a distinguere i rosoni diedrali da quelli ciclici. Le app 2.3 e 2.4 sono poi dedicate alla classificazione rispettivamente di questi due tipi di rosoni.
Le app 2.5 e 2.6 coprono, un altro argomento matematico affrontato in questa sezione: le proprietà matematiche relative alla simmetria assiale e alla rotazione: la app 2.5 è dedicata alle prime, la app 2.6 copre, invece, le seconde.

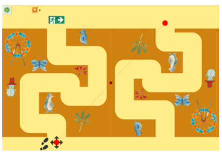

App 2.1


App 2.2


App 2.3

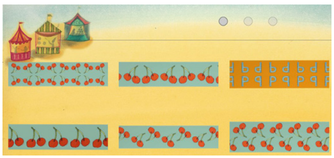

App 2.4

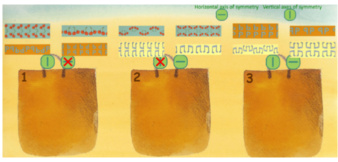

App 2.5


App 2.6

App per la fascia di età 11-14
Argomento: simmetrie assiali, rotazioni, traslazioni e glissosimmetrie
Tutte le app sono dedicate alla classificazione e riproduzione dei fregi.
Le app 3.1 e 3.3 sono più ricreative: il loro obiettivo è mostrare come un cilindro o una "tavola" possano essere usati per riprodurre fregi di un certo tipo.
Invece, le app 3.2 e 3.4-3.8 sono state concepite per guidare i ragazzi in un processo che permetta di ottenere i 7 tipi di fregi: attraverso la app 3.2, i ragazzi iniziano individuando i fregi con assi di simmetria. Quindi, nella app 3.3, incontrano 3 diverse classi di fregi, in base al tipo di assi di simmetria esistenti (orizzontale, verticale o entrambi). Successivamente, nella app 3.5, ottengono una nuova classe di fregi, individuando i fregi con simmetria di rotazione. Nella app 3.6, I ragazzi dividono una precedente "classe di fregi" in 2 nuove classi ("simmetria assiale + nessuna simmetria di rotazione" e "simmetria assiale + simmetria di rotazione"), ottenendo un totale di 5 classi di fregi. Infine, nella app 3.7, individuando i fregi con glissosimmetria, i ragazzi ottengono tutte le 7 possibili tipologie di fregi.
La app 3.8 è dedicata a una sistematizzazione del lavoro già svolto: qui i ragazzi devono ritrovare, per ognuna delle 7 classi di fregi, le simmetrie associate.

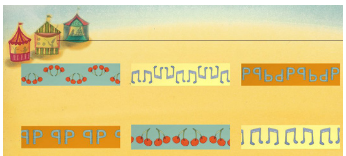

App 3.1

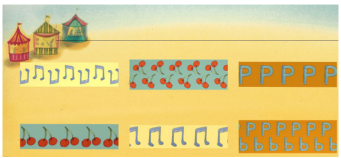

App 3.2

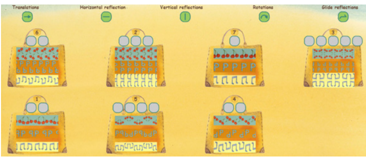

App 3.3


App 3.4

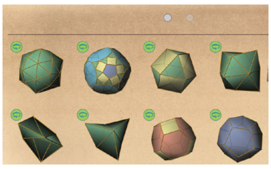

App 3.5


App 3.6

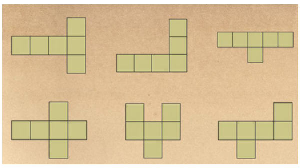

App 3.7


App 3.8

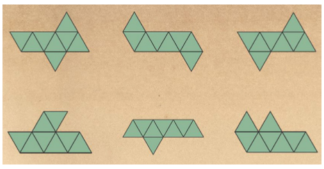
App per la fascia di età 15-19+
Argomento: simmetrie e poliedri
Tutte le app sono dedicate ai concetti principali presentati nel capitolo: classificazione dei poliedri e la loro rappresentazione sul piano attraverso gli sviluppi.
Le app 4.2 e 4.3 sono dedicate a trovare sviluppi piani, rispettivamente, per il cubo e l'ottaedro.
Le app 4.1, 4.4 e 4.5 sono invece dedicate alla classificazione dei poliedri: dopo aver selezionato, da un gruppo di poliedri, quelli convessi, gli studenti possono passare a "poliedri non platonici le cui facce sono tutte poligoni regolari e uguali". Questa app (4.4) mira a dimostrare che, sebbene sia possibile trovare poliedri simili ai solidi platonici, abbiamo poca libertà quando proviamo a conservare tutte le proprietà di questi ultimi
Attraverso l'ultima app, gli adolescenti possono infine scoprire i poliedri uniformi.



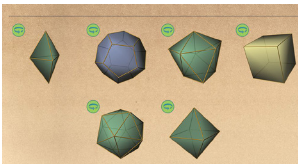
App 4.1



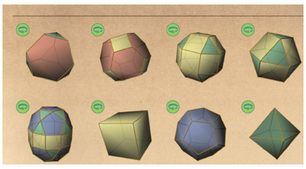
App 4.2



App 4.3



App 4.4



App 4.5

3. Ulteriori sviluppi

Ci sono diversi argomenti non direttamente trattati nel progetto Mathina, che sono collegati alla parte di simmetria e che possono essere esplorati con bambini e adolescenti. Di seguito elenchiamo alcuni esempi.
Per la fascia di età 7-10, oltre alla simmetria di rotazione e alla simmetria assiale, è possibile iniziare a lavorare con le traslazioni. Quindi, ulteriori esplorazioni che coinvolgono tipi di fregi "semplici" (per esempio senza glissosimmetria) possono essere iniziate in classe o autonomamente.
Per la fascia di età 11-14 anni, possono essere sviluppati anche esperimenti più estesi, che coinvolgono non solo fregi, ma anche la classificazione dei motivi dei mosaici; si noti che, in questo caso, dovranno essere considerate traslazioni in direzioni diverse). Tuttavia, quando si lavora con la simmetria dei mosaici , è conveniente fare attenzione alla scelta delle immagini, in modo da non scoraggiare i bambini con esempi eccessivamente complessi.
Per la fascia di età 15-19+, oltre alla geometria e alle simmetrie in 3D, possono essere sviluppate anche attività legate alla simmetria nel piano, ovvero attività legate alla classificazione completa dei 7 tipi di fregi e dei 17 tipi di mosaici.

CRITTOGRAFIA:
MATHINA SULL'ISOLA DEI BUCANIERI

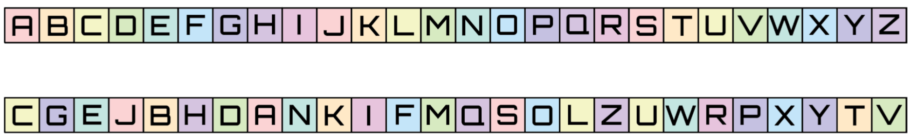
1. Main Mathematical Concepts Implemented in the Stories

Argomento: introduzione alla crittografia

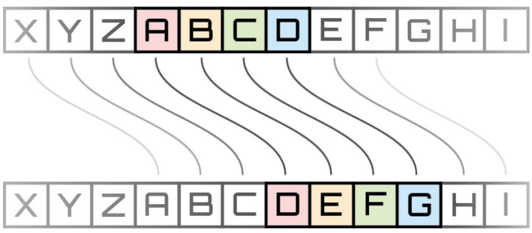
Per la fascia di età 4-6, l'obiettivo principale è esplorare le basi della crittografia, in particolare il concetto di chiave e metodo. Pertanto, il focus è sull'astrazione, in particolare l'idea di scegliere un simbolo piuttosto che un messaggio specifico. Questo perché, in questa fascia di età, alcuni bambini non hanno ancora imparato a leggere. Si noti, tuttavia, che le storie e le app contengono ancora testo, quindi potrebbe essere necessario l'aiuto di un educatore per completare la storia.

Argomento: cifrario di Cesare

Nella fascia di età 7-10 i bambini hanno già imparato a leggere, quindi è possibile introdurre cifrari alfabetici, come quello di Cesare. L'obiettivo qui è introdurre i concetti di cifrario a sostituzione e l'idea che la chiave del cifrario usato nella storia possa essere ridotta a una singola lettera. Il modo in cui le lettere sono associate in un cifrario a sostituzione è chiamato chiave della cifrario, in modo che sia possibile cifrare un messaggio semplicemente sostituendo ogni lettera con quella corrispondente a seconda della chiave. Il metodo di decodifica è lo stesso, ma la corrispondenza viene seguita al contrario. Per esempio, con la chiave dell'immagine seguente, la parola "MESSAGGIO" viene crittografata nella parola "MBUUCDDNS".



Nella sua forma originale, il cifrario di Cesare associa, invece, a ogni lettera la terza lettera che la segue nell'alfabeto: la lettera "A" è associata alla lettera "D", "B" a "E" e così via... Il sistema può essere generalizzato utilizzando, invece di 3 come nell'originale, un numero diverso. Per conoscere la chiave dobbiamo solo conoscere il numero di "salti" che dobbiamo fare.

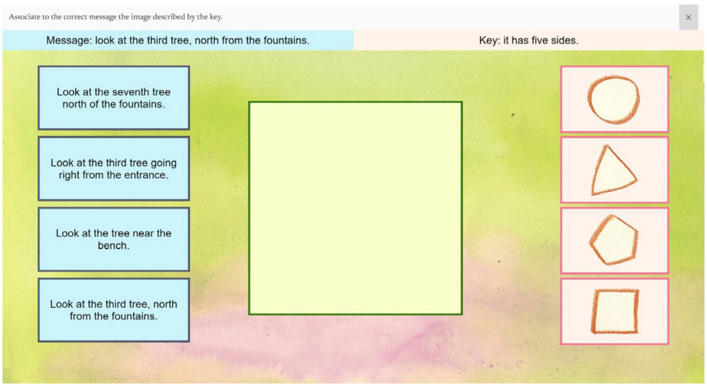


L'argomento è ulteriormente sviluppato per la fascia di età 11-14 anni. Gli studenti di questa fascia di età hanno, infatti, più familiarità con le operazioni aritmetiche, quindi è possibile approfondire la conoscenza dell'algebra del cifrario di cesare. In particolare, possiamo introdurre il concetto di aritmetica modulare. L'aritmetica "modulo n" funziona come la normale aritmetica, ma utilizza solo numeri compresi tra 0 e n-1. Se abbiamo due numeri a e b scelti tra 0 e n-1, possiamo sommarli, sottrarli o moltiplicarli. Per fare ciò svolgiamo normalmente l'operazione con i numeri naturali e poi calcoliamo il resto della divisione intera tra il numero ottenuto e n: questo sarà il risultato dell'operazione con aritmetica modulare (diciamo, in linguaggio matematico, che io calcolo la somma, differenza o il prodotto "modulo n").

Argomento: sistemi di scambio di chiavi
La fascia di età 15-19 anni ha acquisito una sufficiente familiarità con il ragionamento matematico relativo alle funzioni inverse e una buona capacità di astrazione, consentendoci così di introdurre un semplice sistema di scambio di chiavi. Abbiamo scelto di trattare il sistema di scambio di chiavi Diffie-Hellman, che consente di ottenere un segreto condiviso tra due persone che comunicano solo attraverso un canale di comunicazione pubblico e non crittografato. Il metodo Diffie-Hellman si basa sulle cosiddette "funzioni unidirezionali", cioè funzioni invertibili che sono molto facilmente calcolabili in una direzione, ma estremamente difficili da calcolare nell'altra.
Il metodo Diffie-Helmann utilizza il logaritmo discreto, ovvero il calcolo del logaritmo in aritmetica modulare, operazione estremamente più complessa dal punto di vista della difficoltà computazionale rispetto all'elevamento a potenza (anche nella versione discreta).

2. App interattive per il problem-solving

App per la fascia di età 4-6
Argomento: Introduzione alla crittografia
Come accennato prima, in questa fascia di età l'idea è di esplorare i concetti di chiave e metodo. Nella app 1.1, l'utente deve selezionare il messaggio corretto (corrispondente a quello fornito) e trovare la chiave fornita sotto forma di suggerimento. Le app 1.2 e 1.3 approfondiscono ulteriormente questo argomento: nella app 1.2 viene presentata più di un'immagine e viene introdotta un'ambiguità riguardante la chiave, in quanto il suggerimento può essere ricondotto a più di una chiave corretta, evidenziando l'importanza della chiarezza nella comunicazione matematica. La app 1.3, infine, riassume tutti i concetti: gli utenti devono questa volta lasciare un messaggio corretto grazie al suggerimento fornito nella storia per la chiave. Le app vengono presentate all'utente con difficoltà crescente, favorendo così la comprensione dell'argomento per passi successivi.



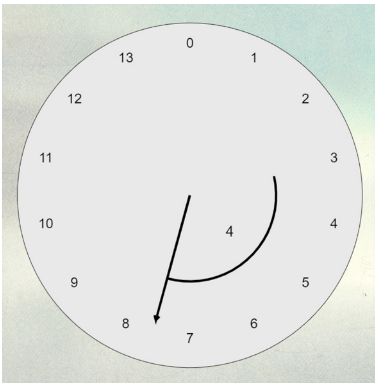
App per la fascia di età 7-10 anni
Argomento: cifrario di Cesare (parte 1)
Le app 2.1 e 2.2 sono dedicate all'introduzione del cifrario di Cesare. Funzionano in modo simile, ma, in un certo senso opposto, la app 2.1 viene utilizzata per cifrare e la app 2.2 per decifrare un messaggio nascosto.
L'obiettivo combinato di queste due app è evidenziare il concetto di chiave e la pratica nella cifratura e nella decifrazione dei messaggi.

Se utilizzato in aula è possibile ignorare i messaggi forniti e utilizzare solo la parte centrale delle app con messaggi personalizzati.

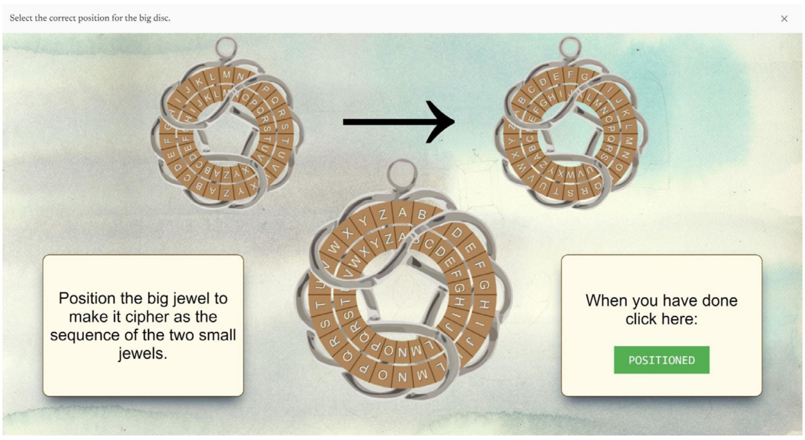
App per la fascia di età 11-14 anni
Argomento: cifrario di Cesare e aritmetica modulare

Le app 3.1 e 3.2 sono simili nel concetto alle app 2.1 e 2.2, fornendo la stessa esperienza, ma con un livello di difficoltà maggiore, che riflette la fascia di età più avanzata. Nell'App 3.3 viene introdotto il concetto di aritmetica modulare, notando che scegliere una chiave per la cifratura con il cifrario di Cesare significa scegliere g, un numero da 1 a 25, come chiave. Questo lascia solo 25 tentativi per un intruso di rompere il messaggio, quindi sono possibili attacchi di forza bruta.

Le app 3.4 e 3.5 mostrano che il cifrario di Cesare non diventa più sicuro se



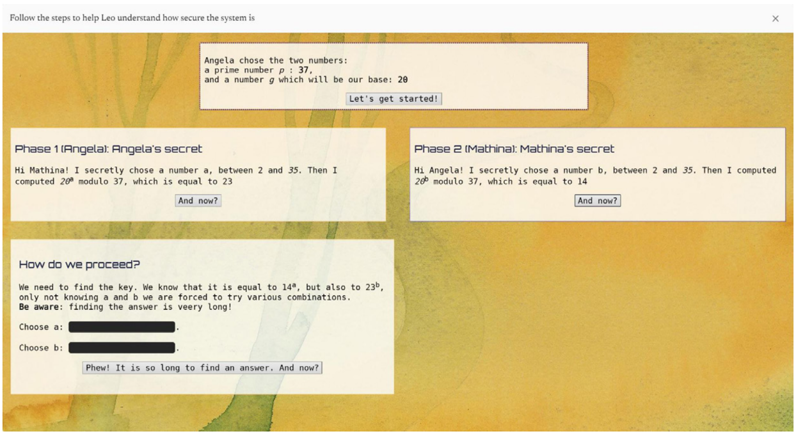
applicato due volte di seguito (come possiamo verificare grazie proprietà dell'aritmetica modulare), in particolare nella app 3.4 vengono utilizzate due successive iterazioni del cifrario di Cesare, mentre nella app 3.5 viene mostrata l'equivalenza di una doppia cifratura e di una singola iterazione.



A partire dal problema di come rendere più sicuro il cifrario di Cesare, le app 3.6 e 3.7 presentano allo studente un diverso tipo di cifratura, con un messaggio che non può essere decifrato con metodi noti. Le app 3.8 e 3.9 servono per provare qualche possibile ricostruzione sia del metodo, sia di un'eventuale chiave, applicando due cifrari di Cesare con chiavi diverse a parole di posto dispari e pari (App 3.8) oppure a singole lettere, sempre distinguendo in lettere di posto dispari e pari (App 3.9) Quest'ultimo cifrario è, in realtà, un esempio particolare di quello che è noto come cifrario di Vigénére.

App per la fascia di età dai 15 ai 19 anni
Argomento: scambio di chiavi

Tutte le app sono pensate per guidare gli studenti alla costruzione del metodo di scambio di chiavi Diffie-Hellman. In particolare, la app 4.1 presenta un'esperienza più guidata, in cui sono già forniti i passaggi aritmetici. Le app 4.2 e 4.4 replicano un'esperienza simile, ma con un minor numero di passaggi precompilati; gli studenti devono verificare se la loro familiarità con il cifrario ha raggiunto un livello adeguato. L'app 4.3 illustra anche quanto sia difficile un possibile attacco al metodo, replicando la situazione Man in the middle presentata nella storia.



3. Ulteriori sviluppi

Il programma di Mathina copre una parte storicamente rilevante della crittografia a chiave privata, introducendo il cifrario di Cesare. In un possibile sviluppo per la fascia di età 7-10 anni, sotto la guida di insegnanti ed educatori, gli studenti possono esplorare in classe quanto sia sicuro questo cifrario.

In particolare, si può notare che scegliere una chiave per la il cifrario di Cesare significa scegliere un numero da 1 a 25. Ciò lascia solo 25 tentativi a un eventuale malintenzionato per scoprire la chiave del messaggio, quindi un possibile attacco a forza bruta avrebbe facilmente successo. Questo approfondimento, sostanzialmente, estende l'attività degli studenti nella fascia 7-10 anni anche agli argomenti trattati per la fascia di età 11-14 anni.
Ciò è reso possibile dal fatto che la crittografia non fa parte dell'usuale programma scolastico, quindi può essere utilizzata come argomento bonus per attività extracurricolari.

Uno sviluppo possibile per la fascia di età 11-14 è, invece, cercare di capire quanto sia sicuro il cifrario di Vigénére (notiamo che il nome non è mai menzionato nel programma diMathina agli studenti, ma solo a insegnanti ed educatori), introducendo l'analisi delle frequenze o tecniche similari.
Per quanto riguarda gli scambi di chiavi, le funzioni unidirezionali e la crittografia a chiave pubblica in generale, ulteriori sviluppi possono essere proposti agli studenti riguardo a cifrari come Kid-RSA (una versione semplificata di RSA con concetti matematici adatti alla fascia di età 15-19 anni).

VISUALIZZAZIONE SPAZIALE: LA TERRA DEGLI UCCELLI DEL FUOCO

Con il termine “visualizzazione spaziale” ci riferiamo alle relazioni tra idee simboliche e algebriche e rappresentazioni spaziali grafiche, come vettori o funzioni. Nella terra degli uccelli del fuoco, ci concentriamo specificamente sui modi per descrivere e costruire curve nel piano. Questa interazione, fondamentale in matematica, viene usualmente rivisitata più volte nell’insegnamento della matematica con diversi strumenti e punti di vista.

Un punto chiave delle storie di Mathina è che i concetti matematici vengono introdotti ai bambini prima di quanto previsto nel sistema di istruzione formale, sebbene in un modo più superficiale e nascosto rispetto al sistema formale stesso. Tuttavia, le storie possono essere lette (o rilette) a qualsiasi età, in particolare nel momento in cui il sistema scolastico introduce formalmente quel concetto e persino rivisitando la storia nelle fasi successive. Con un educatore di supporto (insegnante, genitore ...) che fornisce suggerimenti, è possibile ottenere nuove intuizioni dalla lezione in età progressivamente più avanzate.

1. Principali concetti matematici affrontati nelle storie

Argomento: curve parametriche

INelle app di “L’allenatrice degli uccelli del fuoco”, un unidrago disegna una curva nel cielo (inteso come una proiezione piana sullo schermo della app) a partire dalla direzione che l’utente fornisce in modo continuo come un vettore (con la bacchetta magica / corno dell’unidrago). All’età prevista della storia (4-6 anni), il bambino non può leggere senza assistenza e scopre per la prima volta molte forme di base (cerchi, quadrati, ecc.).

Cosa definisce una forma? Di solito, le forme vengono presentate ai bambini come enti geometrici che soddisfano alcune condizioni:
un triangolo equilatero è una forma che ha tre lati uguali tra loro. Un quadrato ha quattro lati uguali e angoli uguali. I punti su un cerchio sono a una distanza fissa dal suo centro. Ma quando chiediamo a un bambino di disegnare un triangolo o un cerchio, ha bisogno di un metodo costruttivo per spostare la matita sul foglio. Come puoi costruire quelle forme di base (triangolo, quadrato, cerchio ...) o quelle più complesse come la forma di un 8? Assegnando una direzione a ogni passo, stiamo fornendo un metodo di costruzione della forma. Per un quadrato, mantieni la direzione “nord” per un po’, poi “est” per lo stesso tempo, poi “sud” e poi “ovest”; in alcuni punti dobbiamo ruotare bruscamente di 90 gradi il vettore di direzione. Per un triangolo equilatero, le direzioni formano angoli diversi (60 gradi internamente, ma il vettore di direzione deve ruotare di 120 gradi). Per un cerchio è necessario un continuo cambio di direzione. Per un “8”, è necessaria una costruzione più complessa. Il bambino sviluppa così le idee dell’azione a distanza e della codifica delle informazioni, così come una certa intuizione spaziale e coordinazione occhio-mano necessaria per risolvere i problemi posti nelle app.

In una fase successiva (intorno ai 10 anni), il bambino può elaborare l’idea della velocità fisica (e più precisamente, la velocità come vettore). Sebbene tutti noi abbiamo un’idea intuitiva dalla nostra esperienza quotidiana, non è affatto intuitivo che possiamo rappresentare una velocità con una freccia.

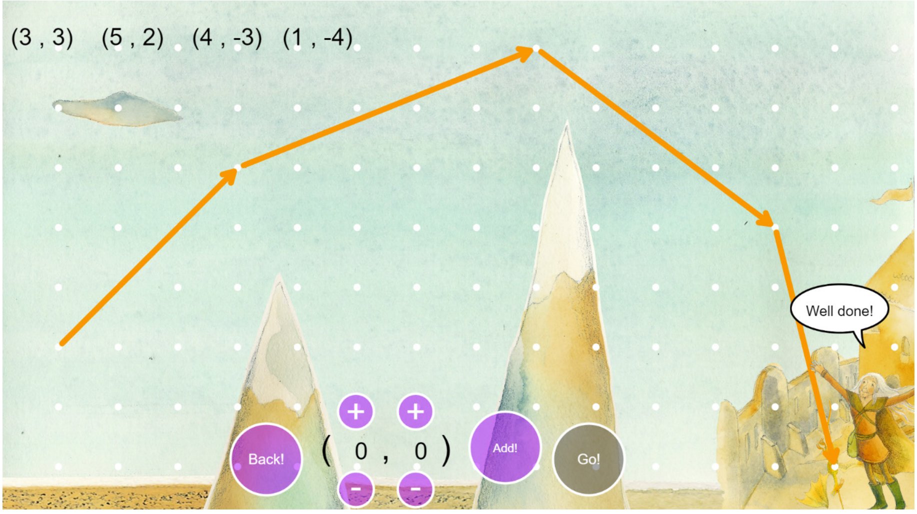
In una fase più avanzata, quando lo studente ha le capacità algebriche complete per definire le funzioni e conosce le nozioni come derivate e integrali, queste app offrono ancora alcune riflessioni utili. La curva percorsa dall'unidrago può essere descritta come una curva parametrica: le coordinate dell'unidrago al tempo t sono (x(t), y(t)) e la direzione della curva (il vettore tangente) ha componenti (dx/dt, dy/dt).
Il vettore tangente è quindi il vettore che ha per componenti le derivate delle funzioni che definiscono la curva. Viceversa, la curva è ottenuta dal vettore tangente per integrazione. Numericamente, ciò che il programma fa è un'integrazione numerica. Se il vettore tangente è (dx/dt, dy/dt) e la posizione dell'unidrago è (x, y), il programma sposta l'unidrago nella posizione
$(x, y) + (dx/dt, dy/dt)^{*}dt = (x+dx, y+dy)$
Qui dt è una quantità piccola (ma finita) e il processo si ripete nell'applicazione diverse volte al secondo.

Questa comprensione numerica di ciò che la app fa internamente aiuta a cogliere le idee fondamentali del calcolo infinitesimale, dove dt è una rappresentazione simbolica, di una quantità infinitamente piccola. L'esistenza di questi infinitesimi è controintuitiva e, talvolta, anche negata in alcuni approcci deduttivi. Spesso, l'espressione dx/dt viene omessa a favore della notazione principale x', e gli infinitesimi sostituiti dalla nozione di limite, che sono storicamente posteriori e molto più utilizzati dal punto di vista didattico.

In sintesi, il volo dell'unidrago può essere utilizzato in un'ampia gamma di fasi di apprendimento in matematica, dal costruttivismo nella geometria elementare alla teoria dell'integrazione.

Argomento: somme di vettori
Nelle app di "Parlare a un unidrago" partiamo dall'idea intuitiva di vettori e velocità data in "L'addestratrice degli uccelli del fuoco", ma aggiungiamo un livello algebrico per rappresentare un vettore con una coppia di numeri, e non solo graficamente. Le app consentono di inserire (in sequenza) una serie di coppie di numeri, che si trasformano in frecce che delineano la traccia su cui l'unidrago volerà.

Diversi concetti possono essere qui elaborati: possiamo innanzitutto codificare le informazioni grafiche attraverso dei numeri. Ciò equivale a misurare in due dimensioni (misurare le componenti verticale e orizzontale). Inoltre possiamo introdurre i numeri negativi, per indicare il verso opposto a quello inizialmente fissato per il movimento dell'unidrago. L'età in cui i bambini apprendono i numeri negativi a scuola varia, nei programmi europei, tra i 7 e gli 11 anni, ciononostante questa prima esposizione può avvenire semplicemente supponendo che il segno negativo segni, appunto, la direzione all'indietro. Nella parte superiore di questo intervallo di età (11 anni), i bambini possono comunque già esplorare anche l'aritmetica con numeri negativi. In terzo luogo, i bambini possono familiarizzare con il fatto che i vettori sono lineari, è cioè possibile sommarli e sottrarli. Poiché non stiamo utilizzando calcoli vettoriali più avanzati (prodotti scalari, norme, angoli...), possiamo introdurre i vettori nello stesso momento in cui i bambini imparano a conoscere i numeri negativi (queste due fasi dell'istruzione sono separate da un lungo periodo nel sistema scolastico formale).



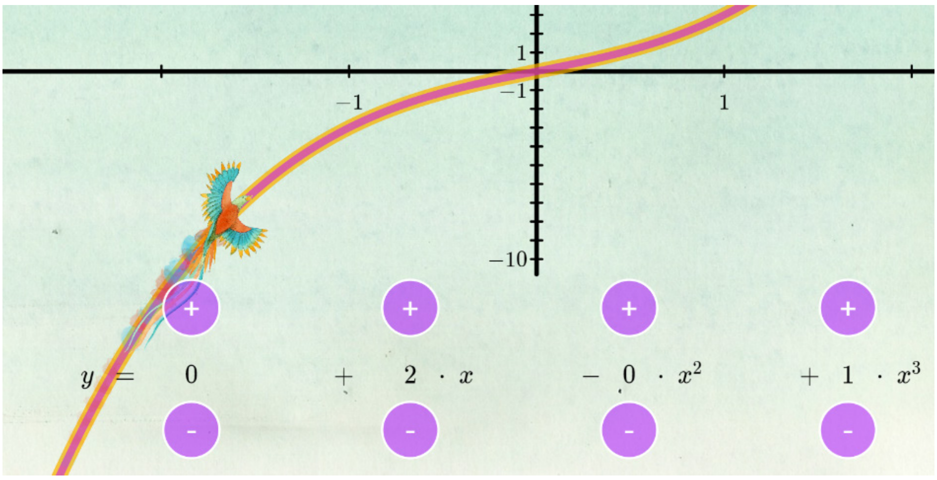
Introduciamo implicitamente l'idea che la somma di un punto più un vettore dia come risultato un altro punto (concetti di geometria affine) e che possiamo calcolare le traiettorie (poligonali) con questo metodo.

I concetti qui esposti (numeri negativi, aritmetica vettoriale...) non sono pensati per essere presentati dall'educatore durante l'utilizzo di queste storie, ma solo per dare un suggerimento e lasciare che il ragazzo scopra da solo i concetti intuitivi, mediante l'esplorazione.

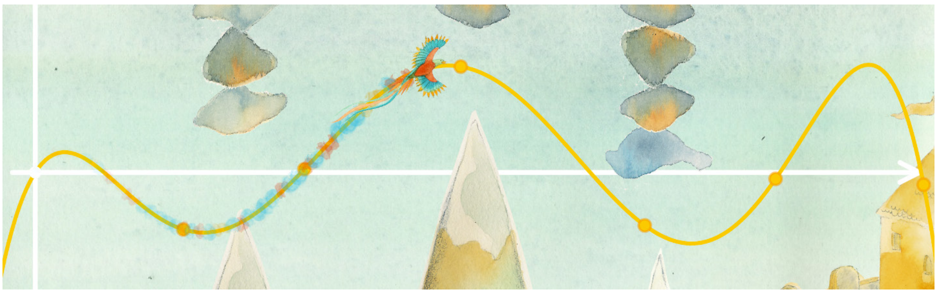
Argomento: funzioni e analisi matematica
Ne "La corsa delle fenici", introduciamo le funzioni del tipo y=f(x). Modificando l'animale (unidrago prima e fenici ora), facciamo una distinzione sugli strumenti che abbiamo ora a disposizione per disegnare curve esplicite.

Qui assumiamo che gli studenti (ormai adolescenti più che bambini) abbiano già familiarità con espressioni algebriche di base, equazioni di primo (e, almeno intuitivamente, secondo) grado e siano in grado di effettuare manipolazioni simboliche.

La storia offre varie app per disegnare curve esplicite. La prima app è un plotter per funzioni polinomiali. I coefficienti del polinomio possono essere regolati per disegnare una data curva target. Lo studente può apprendere attraverso la sperimentazione i diversi ruoli dei termini del polinomio e dei coefficienti.



La seconda app fornisce un'interpolazione polinomiale che passa attraverso cinque punti noti. L'utente può vedere la costruzione che rende possibile la rappresentazione della curva. La app chiede di creare un polinomio che attraversi i punti dati evitando alcuni ostacoli. Ciò non è banale a causa di alcuni casi patologici, come il cosiddetto polinomio di Runge.



La terza app esplora la nozione di derivata, simile all'app in "L'addestratrice degli uccelli del fuoco", ma qui in modo più esplicito; possiamo vedere la derivata come il tasso di crescita o decrescita della funzione. Lo studente può scoprire autonomamente la relazione tra massimi e minimi della funzione e zeri della derivata.

La quarta e ultima app mescola le due tecniche che abbiamo appena visto: all'utente viene chiesto di utilizzare un'interpolazione polinomiale per definire una curva che è la derivata della nostra funzione obiettivo, ovvero il programma integra il polinomio.

La storia esplora graficamente tutte queste nozioni, ma a questo livello l'educatore può chiedere allo studente di prendere carta e matita e risolvere algebricamente alcune domande. Per esempio:

- Come puoi generalizzare l'interpolazione polinomiale per passare attraverso più punti?
- Come si può realizzare un polinomio che passa per alcuni punti con delle derivate definite?
- Come possiamo definire i gli "zeri doppi" di una funzione? Come possiamo identificarli?
- Come fa l'ultimo programma a disegnare il grafico della funzione (cioè l'integrazione numerica?

Argomento: funzioni implicite e geometria algebrica
In quest'ultima storia nella terra degli uccelli del fuoco, rivolta agli studenti adolescenti più maturi, l'ambientazione è molto diversa. Lo scenario della foresta incantata, un po' più spaventoso, è più adatto agli adolescenti; la magia è meno spettacolare ma più intrigante e l'idea delle libellule scintillanti come singoli punti di luce nello spazio, idealmente senza alcuna larghezza, richiede più astrazione rispetto ai grandi animali che volano nel cielo nelle storie precedenti. Inoltre, alla fine della storia, Flamma rompe la quarta parete, parlando al lettore della matematica e dei matematici del mondo reale. Speriamo di fare appello in questo modo alla maturità dei lettori, che possono godersi la storia di Mathina e Leo nella foresta, ma che troveranno nelle app una sfida più stimolante.

La storia utilizza dei microscopici animali, le libellule scintillanti, come elementi del disegno per tracciare superfici implicite.

Se consideriamo una funzione di due variabili F(x, y), il grafico è costituito da tutti i punti le cui coordinate soddisfano F(x, y)=0. Questa idea risulterà abbastanza chiara per gli studenti che hanno già familiarità con retta e coniche, ma le implicazioni hanno poi un più ampio spettro.

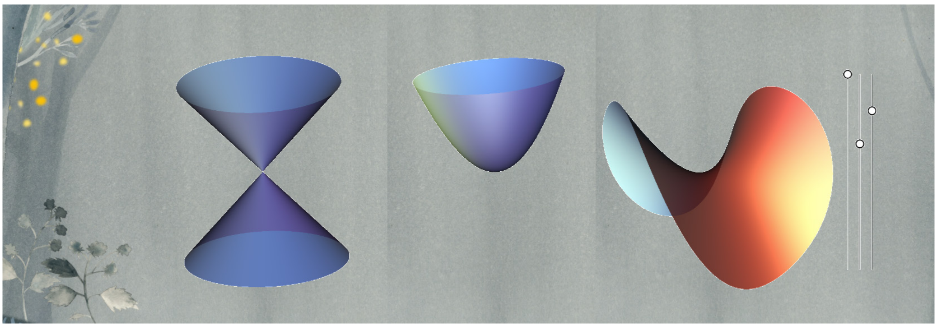
Dopo aver giocato un po' con la app a esplorazione libera, l'educatore può paragonare questo metodo di descrizione delle curve con i precedenti, anche giocando un po' con le app di "L'allenatrice degli uccelli del fuoco". Il metodo della funzione implicita utilizza le proprietà della curva per definirla, invece di un metodo costruttivo. L'esempio del cerchio è particolarmente illustrativo (si veda a proposito la piattaforma per educatori e insegnanti).

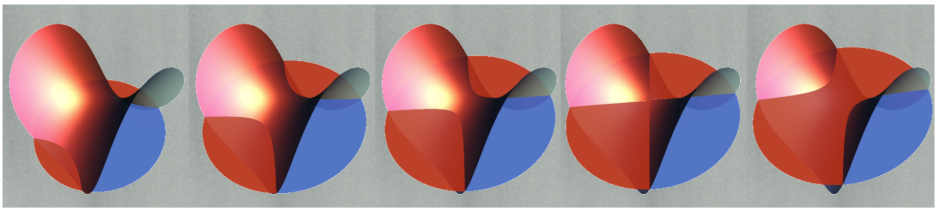
Successivamente, può essere utile sviluppare l'intuizione relativa alla forma delle equazioni. La seconda app offre proprio questa possibilità. Gli insegnanti possono aggiungere altri esempi ed esercizi, oltre a proporre ulteriori tecniche e approfondimenti. Ne proponiamo qui alcuni esempi.

- Mostrare e allenare le tecniche di deformazione, unione e intersezione delle curve (vedi la piattaforma per educatori e insegnanti). Queste tecniche consentiranno di imparare a combinare e modificare le curve esistenti in modo diretto e intenzionale, non solo esplorando gli effetti per tentativi ed errori.
- Dalla tecnica di deformazione (disegnando la funzione F(x, y)-a = 0 per valori di a piccoli), disegnare diverse curve con valori diversi di a. L'educatore può quindi guidare l'esplorazione verso la scoperta del concetto di gradiente e di vettore normale alla curva: il vettore normale alla curva F(x, y) = 0 è dato da (dF/dx, dF/dy).

Il racconto termina con l'analoga costruzione in tre dimensioni, per funzioni implicite F(x, y, z)=0. All'interno della storia, la terza app propone nuovamente un'esplorazione libera, ma un educatore può sfruttare questo strumento 3D in relazione all'attività precedente.

- Usare lo strumento 3D per disegnare le superfici z=F(x, y) nello spazio tridimensionale. Alcuni buoni esempi sono il cono z=sqrt(x^2+y^2), e i paraboloidi z=x^2+y^2 e z=x^2-y^2 (figura sotto);
- Visualizzare un'intersezione con un piano ad altezze diverse (per esempio disegnare (x^2-y^2-z)*(z-a)=0) per metterlo in relazione con la curva F(x, y)=a.
- Andare oltre ed esplorare il ruolo delle derivate parziali, per esempio in relazione a un punto di sella.





2. Ulteriori sviluppi

Con tutte le storie di Mathina, miriamo a offrire ai giovani studenti alcuni strumenti che possono utilizzare per esplorare e affinare la loro creatività. Le storie forniscono un primo punto di accesso a molte idee matematiche, probabilmente prima di quando vengono studiate a scuola. Tuttavia, la sinergia tra le presentazioni di Mathina e la guida di un educatore è ciò che, crediamo, aumenterà le capacità matematiche e l'interesse degli studenti. Alla fine delle storie di Mathina, l'educatore ha l'opportunità di presentare agli studenti altri strumenti più versatili, per esempio, software di geometria dinamica come GeoGebra o Desmos, o anche sistemi di computer algebra più potenti come SageMath. Ciò consentirà agli studenti di portare le proprie avventure matematiche oltre le storie di Mathina.

Mathina

AN INTERACTIVE STORYBOOK BETWEEN MATHEMATICS AND FANTASY