Mathina

AN INTERACTIVE STORYBOOK BETWEEN MATHEMATICS AND FANTASY

HANDBUCH FÜR PÄDAGOGINNEN UNF PÄDAGOGEN

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

This Erasmus+ project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects only the views of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

	4-6 Jahre	7-10 Jahre	11-14 Jahre	15+ Jahre
Logisch	Mathinas Ampel-Abenteuer	Die Fliesenboden-Falle	Mathina hilft der Polizei	Wo ist mein Gold?
Symmetrie und Polyeder	Mathina schützt den Symmel-Rummel	Das Rosettenspiel und die magischen Labyrinthe	Zauberhafte Muster	Das Polyeder-Karussell
Kryptografie	Mathina und die geheime Botschaft	Mathina und der sprechende Papagei	Der verlorene Schatz	Der Schlüsselaustausch
Räumliches Vorstellungsvermögen	Die Feuervogel-trainerin	Wie spricht man mit einem Einhorndrachen?	Das Phönix-Rennen in Arisa	Die geheimnisvollen Funkelflöhe

EINLEITUNG

1. Die Entwicklung des mathematischen Denkens in der Zeit des Problemlösens

Das 21. Jahrhundert ist das Jahrhundert des Problemlösens. Mathematische Denkfähigkeiten sind notwendig, um die komplexen Herausforderungen unserer Zeit zu verstehen und zu begreifen. Kinder profitieren vom frühen Erleben der kreativen Kraft des mathematischen Denkens, die formale Schulbildung erweist sich jedoch mitunter als wenig geeignet, die breite, alltägliche Anwendbarkeit der Mathematik und die Schönheit des mathematischen Denkens zu vermitteln.

Die Welt von Mathina fördert das Lösen von Problemen durch mathematisches Denken. Wir bieten eine innovative Ausstattung und fesselnde Geschichten mit digitalen Aktivitäten über die Themen:

- Räumliche Vorstellungsvermögen,
- und abstraktes Denken,
- Kryptografie und
- Symmetrie

Studien bestätigen, dass nicht-formale Ansätze die Lernenden beim Aufbau einer differenzierteren Wissensbasis unterstützen, indem sie mit der Vielfalt mathematischer Situationen experimentieren und die Verbindungen zwischen der Mathematik im täglichen Leben und der Schulmathematik explizit machen [1]. Unser Ziel ist es, motivierende nicht-formale Ansätze, wie die Integration von Storytelling und interaktiven Apps, mit dem formalen Mathematiklernen zu verbinden.

Das Projekt Mathina steht somit im Einklang mit den bildungspolitischen Zielen der Europäischen Union, die den wirkungsvollen Einsatz digitaler Lerntechnologien und -ressourcen in der Bildung und Ausbildung betonen. Eine Reihe von Erhebungen und Studien, die beispielsweise von der Europäischen Kommission, der OECD und dem Weltwirtschaftsforum durchgeführt wurden, zeigen jedoch, dass es noch eine Lücke bei der Integration digitaler Lerntechnologien und -ressourcen in den europäischen Bildungssystemen gibt [2]. Dies betrifft unter anderem die Entwicklung digitaler Fertigkeiten:

- Digitale Fertigkeiten sind technische Fähigkeiten, die für die Nutzung digitaler Technologien erforderlich sind;
- Kenntnisse über digitale Navigation sind eine umfassendere Reihe von Fähigkeiten, die benötigt werden, um in der digitalen Welt erfolgreich zu sein, einschließlich des Auffindens, der Priorisierung und der Bewertung der Qualität und Zuverlässigkeit von Informationen.

Daher ist es von entscheidender Bedeutung, Aktivitäten für den Mathematikunterricht zu entwickeln, die sich leicht in ein breites Spektrum von Bildungswerkzeugen integrieren lassen.

[1] Barron, B., Cayton-Hodges, G., Bofferding, L., Copple, C., Darling-Hammond, L., & Levine, M. H. (2011). Take a giant step: A blueprint for teaching young children in a digital age. Joan Ganz Cooney Center at Sesame Workshop.
[2] Kalogeras, S. (2014). Transmedia storytelling and the new era of media convergence in higher education. Springer.

2. Eine Brücke schlagen zwischen formaler und nicht-formaler mathematischer Bildung

Das Projekt *Mathina* schlägt mit seinem modularen und benutzerfreundlichen System eine Brücke zwischen formaler und nicht-formaler mathematischer Bildung. Auf Mathina kann auf verschiedene Arten zugegriffen werden (online, offline) und die Geschichten können auf verschiedenen Geräten (Smartphone, Tablet, Computer-Desktop, Smartboard, etc.) gespielt werden, je nach Standort und Verwendungszweck. Die Ausstattung von Mathina ermöglicht es Pädagoginnen und Pädagogen junge Lernende durch eine Vielzahl von mathematischen Herausforderungen zu führen und sie zu unterstützen, indem sie ihrem eigenen Lerntempo und -weg folgen. Es ermutigt Lehrkräfte, die individuellen Bedürfnisse der Lernenden zu respektieren. Darüber hinaus unterstützt das Projekt neue Lehrmethoden, einschließlich Gamification und Storytelling, indem es modulare Anwendungen anbietet, die mit den gesetzlichen Lehrplänen abgestimmt sind.

Die Innovation von Mathina liegt in der Verknüpfung von nicht-formalem und formalem Lernen durch die Kombination von vier zentralen Merkmalen: Mathina ist

1. EINFACH ZU BEDIENEN
2. EINFACH ZU VERSTEHEN
3. EINFACH ANPASSBAR
4. EINFACH EINZUBINDEN.

3. Mathinas Geschichten unterstützen das Problemlösen

Die Beschäftigung mit den Geschichten und Aktivitäten von Mathina fühlt sich eher an wie Spielen und nicht wie Lernen. Die fiktiven Charaktere in Mathinas Geschichtenwelt motivieren Kinder, wecken ihr Interesse und unterstützen die Integration von Problemlösen mit Geschichtenerzählen auf emotionale und unterhaltsame Weise.

Mathina nutzt einen transmedialen Storytelling-Rahmen, um Kinder zum mathematischen Denken und Problemlösen in verschiedenen Bereichen zu motivieren. Die primäre Funktion von Mathinas themenbasierten Geschichten ist es, ein vielseitiges Erlebnis und einen emotionalen Zugang zum Denkprozess zu bieten. Eine künstlerisch anspruchsvolle visuelle Umgebung unterstützt die textbasierte Geschichte in Form von Bildern und kleinen Animationen. Jede Geschichte bietet interaktive Aufgaben in digitalen Apps, mit denen sich Kinder und Jugendliche entweder einzeln oder in Gruppen beschäftigen können, bei Bedarf unterstützt von ihren Eltern oder Lehrerinnen und Lehrern.

Die Apps und das visuelle Erlebnis fördern die kognitive Präsenz der Kinder und Jugendlichen im Prozess der Denkentwicklung. Die soziale Präsenz (Eintauchen in Mathinas Welt in kleinen Gruppen / Teilen der Erfahrungen in einer Gemeinschaft von Lernenden) und die pädagogische Präsenz (Eintauchen in Mathinas Welt in Begleitung einer Lehrkraft oder eines Elternteils) können den Lernprozess nach dem Modell des Community Inquiry effektiv unterstützen.

Dr. Stavroula Kalogeras, die Autorin des Buches „Transmedia Storytelling and the New Era of Media Convergence in Higher Education“, fasst die wissenschaftlichen Hintergründe dieses Ansatzes in der folgenden Videopräsentation zusammen:

https://www.youtube.com/watch?v=MmngfqCKHFo (auf Englisch)

Neuere Ergebnisse der Neurowissenschaften unterstreichen die Effektivität des Lernens durch Geschichten. Basierend auf dem oben vorgestellten Modell bietet Mathina vor allem kleinere Lerneinheiten für kurze und fokussierte Aktivitäten, das sogenannte Microlearning. Auf diese Weise müssen nicht alle Mathina-Geschichten durchgegangen werden, um eine umfassende Erfahrung im Problemlösen zu machen. Zudem sind die Geschichten und Werkzeuge des Mathina-Projekts für verschiedene Altersgruppen verfügbar.

ENTWICKLUNG DES LOGISCHEN DENKENS: MATHINAS ABENTEUER IN LOGI-CITY

1. Die wichtigsten mathematischen Konzepte der Geschichten

Thema: Kombinatorik

Vorschulkinder im Alter von 4-6 Jahren beginnen, logisches Denken zu entwickeln und gleichzeitig vergrößert sich ihr Wortschatz enorm. Als Teil der Entwicklung des mathematischen Denkens und der Argumentationsfähigkeit beginnen sie zu lernen, wie man Problemlösungs- und Argumentationsstrategien verwendet, die nicht angeboren sind, sondern sich in den ersten Jahren als Kern logischer Fähigkeiten herausbilden. Dies ist das Alter, in dem der endlose Strom von „Warum"-Fragen beginnt. Kinder sind von Gesprächen begeistert, interessieren sich für kurze Textaufgaben und zunehmend auch für längere Geschichten. Sie sind damit beschäftigt, ihre Umgebung zu erkunden, Gegenstände in verschiedene Mengen zu sortieren, sie begeistern sich für Muster und Reihenfolgen, wollen Verbindungen herstellen und zählen.

Kinder lernen in diesem Alter, nach Strukturen und Regelmäßigkeiten zu suchen, umzuorganisieren, vorherzusagen und Zusammenhänge herzustellen. Muster, Funktionen und Beziehungen stehen im Mittelpunkt ihres mathematischen Denkens und ihrer Argumentationsfähigkeit. Vergleich, Klassifizierung und Reihung ordnen sich diesen Kernfähigkeiten nach, ebenso grundlegendes analytisches Denken und erste Problemlösungsstrategien. Einfachere Probleme in der Kombinatorik --- unter Beteiligung von Lehrkräften oder anderen Erwachsenen--- unterstützen die gleichzeitige Entwicklung mathematischer Fähigkeiten und das Erkennen weiterer Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fähigkeitskategorien (z.B. mathematische Denk- und Schlussfolgerungsfähigkeiten, numerische Fähigkeiten, räumliches Denken).

Thema: "Rückwärts" denken

Im Alter von 6-7 Jahren sind Kinder zwar noch keine vollkommen logischen Denker, aber sie beginnen, logisches Denken zu entwickeln. Sie sind in der Lage, Gegenstände zunehmend selbstständig zu klassifizieren und auf verschiedene Arten zu sortieren, und ihre Fähigkeiten zur Mustererkennung und Musterbildung entwickeln sich enorm. Dies sind wichtige Fähigkeiten, die entwickelt werden müssen, bevor die Kinder an komplexere mathematische Probleme herangeführt werden, die kreative Ansätze erfordern.

Im Alter von 8 Jahren wenden Kinder bereits Logik und logisches Denken auf bestimmte Ereignisse um sie herum an. Hypothetisches Denken ist eine wichtige Fähigkeit, die die Entwicklung von Gedächtnis, Aufmerksamkeit und Kreativität erfordert. "Rückwärts" denken ist ein kognitiver Prozess, der bei der Entwicklung kreativer Ideen eine wichtige Rolle spielen kann, ähnlich wie das assoziative und analoge Denken.

Thema: Das Problem der Museumswächter

Kinder im Alter von 11-14 Jahren betreten die Welt der formalen Operationen. Sie denken bereits logisch und strategisch, indem sie Methoden anwenden, und sie sind ebenso in der Lage, deduktive Logik (d.h. das Überlegen, um aus einer oder mehreren Aussagen, zu einer logischen Schlussfolgerung zu gelangen) umzusetzen. Vorausschauendes und abstraktes Denken entwickeln sich in diesem Alter schnell, ebenso wie die Metakognition (Selbstreflexion, Bewusstheit und Verständnis des eigenen Denkprozesses), die zu einer entscheidenden Unterstützung bei der Problemlösung wird.

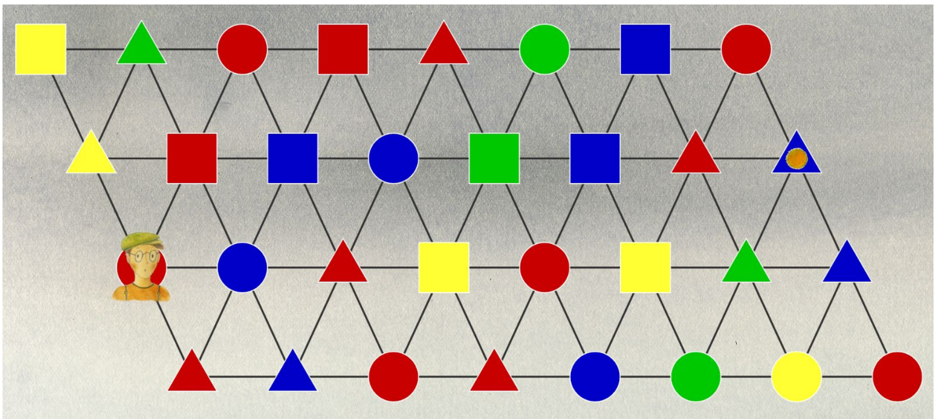
Thema: Die Teilbarkeitsregel
Die kognitiven Fähigkeiten von **Teenagern** steigen mit den analytischen und argumentativen Fähigkeiten. Die logische Herangehensweise an das Lösen von Problemen wird durch das Fortschreiten des Hinterfragens unterstützt. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Darstellung von Daten und komplexe Berechnungen helfen, komplexe Probleme und Situationen zu lösen. Auch Gleichungen werden besser verstanden.

2. Digitale Apps für interaktives Problemlösen

Mathinas Ampel-Abenteuer
Mathematischer Gegenstand: Kombinatorik
Da diese Altersgruppe (4-6) für gewöhnlich noch nicht in der Lage ist, die Geschichte ohne die Hilfe von Erwachsenen zu lesen, gibt es mehrere Möglichkeiten, sie in einer Vorschul-/Grundschulumgebung zu verwenden. Die Lehrkraft könnte den Kindern die Geschichte vorlesen und sie bei der Nutzung der Apps unterstützen. Es ist auch denkbar, die App als Modell zur Unterstützung des Denkprozesses zu verwenden. Diejenigen Kinder, die einen starken visuellen Sinn haben, werden sich mit dieser Unterstützung zurechtfinden. Motorisch Lernende könnten es hilfreich finden, das Problem

mit anderen Kindern oder mit Familienmitgliedern, die z. B. ein buntes Papier halten, um jede Farbe darzustellen, nachzuspielen. Die Kinder können die “Darsteller” neu anordnen, um jeden Fall darzustellen, und die Assoziation von Farben mit Personen kann den spielerischen Charakter des Problemlösungsprozesses erhöhen.

Die Fliesenboden-Falle
Mathematischer Gegenstand: “Rückwärts” denken
Typisch für diese Altersgruppe ist die Entwicklung neuer Fähigkeiten wie Logik und Beweisführung. In der Geschichte “Die Fliesenboden-Falle” wird der Problemlösungsprozess durch eine kreative Wendung, nämlich das Rückwärtsdenken, gefordert. Dies kann Kinder motivieren, eine neue, systematische Denkmethode zu erlernen, während sie Probleme lösen.



Mathina hilft der Polizei

Mathematischer Gegenstand: Das Problem der Museumswächter

Die Beschäftigung mit der Geschichte "Mathina hilft der Polizei" erfordert vorausschauendes sowie abstraktes Denken, Metakognition, die Fähigkeit, die eigene Denkweise zu reflektieren, und auch die Fähigkeit, logisches Denken in einen geometrischen Kontext zu erweitern.

Wo ist mein Gold?

Mathematischer Gegenstand: Teilbarkeitsregeln

Um das in der Geschichte „Wo ist mein Gold?" vorgestellte Problem zu lösen, werden analytische und argumentative Fähigkeiten benötigt.

Number of the player	Remaining amount to give away	Amount received in first round	Remaining amount to give away	Amount received in second round	Total amount received
Player 1	123	6			
Player 2	117	9			
Player 3	108	9			

3. Wege zur Fortentwicklung des Denkens

George Polya, Pionier der Problemlösungsdidaktik, schlug in seinem berühmten Buch „How to Solve It“ einen vierstufigen Prozess zur Problembearbeitung vor:

(1) Verstehe das Problem
(2) Entwirf einen Plan
(3) Führe den Plan aus
(4) Überprüfe das Ergebnis

Pädagoginnen und Pädagogen sowie Schülerinnen und Schüler können dieses Schema auf jedes mathematische Problem in Mathina - und darüber hinaus - anwenden.

Wenn Kinder eine falsche Antwort geben, ist es in der Regel konstruktiver, positiv zu reagieren, statt sofort die Lösung zu korrigieren und sie auf den Fehler aufmerksam zu machen. Vielmehr ist es sinnvoll, die Anstrengung des Kindes zu würdigen und den Denkprozess gemeinsam zu untersuchen.

Die Reflexion kann auf diese Weise eingeleitet werden:

- Willst du damit sagen...?
- Wie ich verstanden habe, schlussfolgerst du, dass...
- Ich verstehe, du denkst also, dass...
- Was hat dich dazu gebracht, so zu denken?

Um logische Fähigkeiten im Vorschulalter zu entwickeln, können Erzieherinnen und Erzieher Sortierspiele mit realen Gegenständen (Alltagsgegenstände, Spielzeug, geometrische Formen usw.) oder Bildern verwenden. Die Sortierung kann z.B. auf Größe, Farbe, Dimension und anderen Merkmalen basieren. Es können spannende Spiele erfunden werden, die auf rhythmischen Klatschmustern, Tanzmustern oder dem Erstellen von Mustern mit physischen Objekten basieren. Das Modellieren von Problemen durch Nachspielen kann ebenfalls viel Spaß machen.

Für Kinder im Alter von 5-7 Jahren bietet die “Mustervorhersage” spannende Möglichkeiten zur Entwicklung von Denkfähigkeiten. Klötze, farbige Steine, Formen aus farbigem Papier, Obst, Gemüse oder jede andere Menge von Objekten können verwendet werden, um Muster zu erstellen. Die Kinder können sich gegenseitig (und auch ihre Lehrkräfte) herausfordern, ein Muster fortzusetzen. Im Alter von 6-7 Jahren können den Mustern auch Zahlen zugeordnet werden. Es ist möglich, Muster zu erstellen, die mehr als eine Antwort haben. Man kann beginnen, Ratespiele zu spielen, wie z.B. “Errate mich” oder “Zwanzig Fragen”. Dies geht auch mit Zahlen, z.B. in Verbindung mit Anzahl von Jahren, der Anzahl von Gegenständen in der Umgebung, von Gebäuden, Tieren, Pflanzen oder anderen Alltagsgegenständen. Hieraus kann man Frage-, Klassifizierungs- und Argumentationsfähigkeiten entwickeln. Auch die Beteiligung an täglichen Hausarbeiten, wie z.B. das Ordnen der Spielsachen, der Alltagsgegenstände oder das Bettenmachen, Kochen, Backen und Sortieren von Besteck, kann ebenfalls sehr hilfreich sein, um Denkfähigkeiten zu entwickeln.

Kinder im Alter von 11-14 Jahren können komplexere Muster erkennen, erforschen und erklären, auch in einem mathematischen und geometrischen Kontext. Zum Beispiel können Brüche auf der Zahlengeraden, als Teil einer geometrischen Form (Kreis, Quadrat, Dreieck usw.), auf einem Banddiagramm oder mit Hilfe von Bruchstrichen dargestellt werden. Das Erstellen von systematischen Listen und das Identifizieren von Teilproblemen bei der Arbeit an einem komplexen Problem kann helfen, Denkfähigkeiten zu entwickeln, und fördert den Gebrauch verschiedener Problemlösungsstrategien.

Teenager im Alter von 14-18 Jahren können reale Probleme erforschen, wie z.B. die Planung von Einkäufen bei einem Ausverkauf am Ende der Saison, die Planung von Investitionen oder das Verstehen von Prozessen in der realen Welt mit Hilfe von Diagrammen und Datenanalysen. Sie können versuchen, Logikrätsel zu erfinden oder Brettspiele zu bestimmten Problemen zu erstellen, die mit ihren Interessen oder Schulfächern zu tun haben. Außerdem können sie die Fairness eines Wahlsystems analysieren, komplexe Systeme in der Umwelt oder von der Technologie bereitgestellte Systeme erforschen.

Verwendete Literatur

- Germain-Williams, T. (2017). Teaching Children to Love Problem Solving. A Reference from Birth through Adulthood. World Scientific.
- Parviainen, P. (2019). The Development of Early Mathematical Skills – A Theoretical Framework for a Holistic Model. Journal of Early Childhood Education Research Volume 8 Issue 1 2019, 162–191.
- Polya, G. (1945). How to solve it; a new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

SYMMETRIE UND POLYEDER: MATHINA AUF DEM SYMMEL-RUMMEL

1. Die wichtigsten mathematischen Konzepte der Geschichten

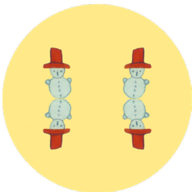
Thema: Achsensymmetrie

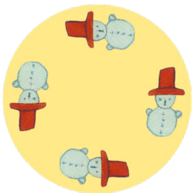
Für die Altersgruppe 4-6 Jahre geht es vor allem darum, eine bestimmte Symmetrie, die schon kleinen Kindern vertraut ist, auf empirische Weise zu erkunden: die Achsen- oder auch Spiegelsymmetrie. Wenn wir bei der Ebene bleiben, bedeutet dies, zu überprüfen, ob ein Bild Symmetrieachsen hat oder nicht. Der Einfachheit halber werden nur vertikale und horizontale Symmetrieachsen betrachtet.

Thema: Achsen- und Rotationssymmetrie

In der Altersgruppe von 7-10 Jahren lernen die Kinder die Spiegelsymmetrie besser kennen und sie werden auch mit der Rotationssymmetrie vertraut. So können Konzepte wie der Begriff der **Symmetrie, Eigenschaften in Bezug auf Reflexion und Rotation** und die **Klassifizierung von Rosetten nach ihrer Symmetrie** erkundet werden.

Unter dem Stichwort **Symmetrie einer Figur** verstehen wir eine **Isometrie**, d.h. eine abstandserhaltende Funktion, die die Figur genau auf sich selbst abbildet, so dass sie vor und nach der Abbildung gleich aussieht. Es sollte nicht möglich sein, die Ausgangsfigur von der Endfigur zu unterscheiden (weder durch Form, Position oder Farbe).





Die beiden obigen Rosetten mögen ähnlich aussehen, aber sie haben einen bedeutenden Unterschied in Bezug auf ihre Symmetrie: Während die linke Rosette Achsenssymmetrien hat - sie wird als **zweiflächig (dihedral)** bezeichnet -, hat die rechte Rosette diese nicht - sie ist eine **zyklische** Rosette. Wir können dihedrale Rosetten nach der Anzahl der Achsenssymmetrien unterscheiden, die sie aufweisen (zum Beispiel hat die Rosette links 2 Symmetrieachsen, sie wird als D_2 bezeichnet). In ähnlicher Weise können wir die zyklischen Rosetten nach der Anzahl der Rotationssymmetrien klassifizieren (die rechts ist eine C_4).

Thema: Achsen- und Rotationssymmetrie, Gleitspiegelung und Symmetrie

In der Altersgruppe von 11-14 Jahren sind die Kinder neben Achsen- und Rotationssymmetrien auch in der Lage, sich mit zwei weniger "intuitiven" Isometrien zu beschäftigen: Translation und Gleitspiegelung.

Was den Begriff der Symmetrie betrifft, so betrachten wir zunächst den im vorigen Unterabschnitt vorgestellten Begriff (Achsen- und Rotationssymmetrie).

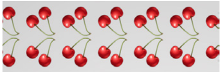
Sobald die vier Isometrien in der Ebene bekannt sind - **Spiegel- und, Rotationssymmetrie, Translation und Gleitspiegelung**[1] -, können die Kinder beginnen, die Symmetrien von Friesen zu erforschen.

Es gibt ein sehr wichtiges und verblüffendes Ergebnis bezüglich der

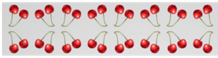
[1] Es ist möglich zu beweisen, dass es in der Ebene keine anderen Isometrien gibt.

Symmetrie von Friesen: Obwohl wir eine riesige Vielfalt an Friesen herstellen können, gibt es nur sieben **Friesarten mit unterschiedlichen Symmetrien**. Der Nachweis eines solch überraschenden Ergebnisses ist für Kinder im Alter von 11-14 noch nicht gut nachzuvollziehen und wird deshalb nicht aufgeführt. Die Unterschiede zwischen den sieben Friesentypen zu verstehen und Friese nach ihrer Symmetrie zu klassifizieren, ist jedoch ein Thema, das von Kindern auf spielerische Weise erforscht werden kann.
In der Tabelle unten sehen wir Beispiele für die sieben Friesarten und eine Liste der entsprechenden Symmetrien.

Translation, vertikale Spigelung



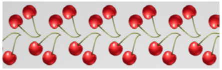
Translationen, horizontale Spiegelung, Gleitspiegelung



Translationen, vertikal Spiegelung, horizontale Spiegelung, Rotationen, Gleitspiegelung

Translationen, Rotationen

Translationen, vertikale Spiegelungen, Rotationen, Gleitspiegelungen

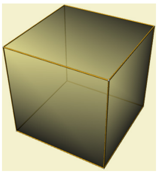


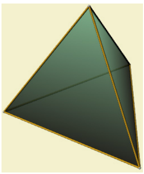
Translationen, Gleitspiegelungen

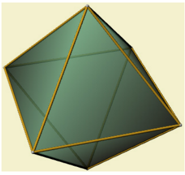
Translation

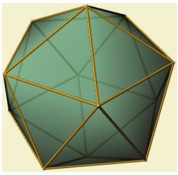
Thema: Symmetrie and Polyeder

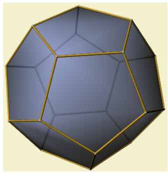
Dreidimensionales Denken ist eine Fähigkeit, die erst mit zunehmendem Alter erworben wird, weshalb sich dieses Thema an die Altersgruppe 15-19+ richtet. Wir haben uns auf eine bestimmte Art von 3D-Objekten konzentriert, die den Jugendlichen vertraut sind: **Polyeder**. Zu diesem Zweck haben wir zwei Klassen von sehr „symmetrischen" Polyedern ausgewählt: **Platonische Körper** und **uniforme Polyeder**.







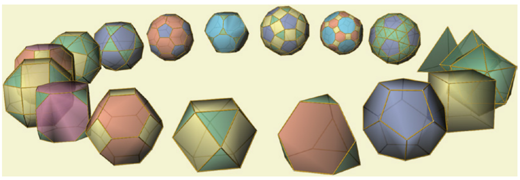




Ein **platonischer Körper** ist ein Polyeder „so regelmäßig wie möglich". Ein platonischer Körper sollte also die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Seine Flächen sind alle regelmäßige Polygone und gleich zueinander (gleiche Anzahl von Kanten, alle mit gleicher Länge und gleichen Winkeln);
- an jedem Scheitelpunkt treffen die gleiche Anzahl von Flächen zusammen;
- die Flächenwinkel, d.h. die Winkel zwischen aneinandergrenzenden Flächen, sind gleich;
- die Raumwinkel an jedem Scheitelpunkt sind gleich.

Es gibt nur 5 platonische Körper (Bild oben): Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder. Es ist möglich, die Jugendlichen auf konstruktive Weise zu allen platonischen Körpern zu führen und zu dem Schluss zu kommen, dass es keine anderen gibt.
Nachdem wir die platonischen Körper erforscht haben, können wir zu den gleichförmigen Polyedern übergehen. Ein uniformes Polyeder ist ein Polyeder



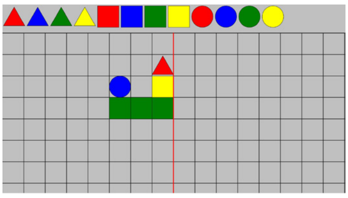
- dessen Flächen alle regelmäßige Polygone sind, aber nicht alle die gleiche Anzahl von Seiten haben;
- bei dem es für jedes Paar von Scheitelpunkten mindestens eine Symmetrie des Polyeders gibt, die den einen Scheitelpunkt auf den anderen überträgt.

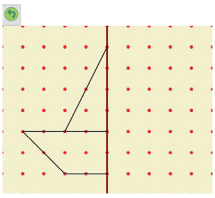
Im Gegensatz zu den platonischen Körpern ist die Klasse der uniformen Polyeder nicht endlich - sie umfasst 1) eine unendliche Familie von Prismen, deren Basen regelmäßige Vielecke und deren Seitenflächen Quadrate sind; 2) eine unendliche Familie von Antiprismen, deren Basen regelmäßige Vielecke und deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind; 3) 13 weitere Polyeder (Bild unten).

2. Digitale Apps für ein interaktives Problemlösen

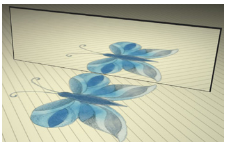

App 1.1

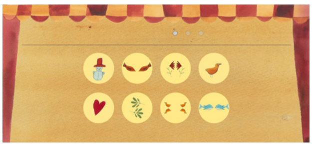

App 1.2

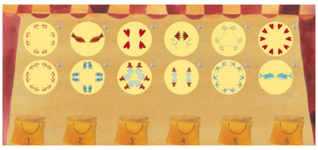

App 1.3


App 1.4

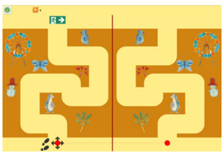
Apps für die Altersgruppe 4-6 Jahre
Mathematisches Gegenstand: Spiegelsymmetrie
Wie bereits erwähnt, geht es in dieser Altersgruppe darum, den Begriff der Symmetrieachsen zu erforschen. Alle Apps sind diesem Ziel gewidmet, weisen aber unterschiedliche Schwierigkeitsgrade auf: In den Apps 1.1 und 1.2 sollen die Kinder prüfen, ob ein gegebenes Bild Symmetrieachsen hat, während sie in den Apps 1.3 und 1.4 selbständig symmetrische Bilder erstellen sollen.
Was die Apps 1.1 und 1.2 betrifft, so kann die erste als Trainingsmodus für die zweite betrachtet werden: In App 1.1 müssen die Kinder nämlich nur ein Bild auf einmal bearbeiten, während in App 1.2 mehrere Bilder gleichzeitig präsentiert werden.
Auch App 1.4 ist schwieriger als App 1.3: In letzterer müssen die Kinder nur bereits vorhandene Formen greifen, während sie in App 1.4 symmetrische Bilder fertig zeichnen müssen.

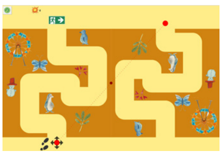

App 2.1


App 2.2


App 2.3


App 2.4


App 2.5


App 2.6

Apps für die Altersgruppe 7-10

Mathematischer Gegenstand: Spiegel- und Rotationssymmetrie

Das Ziel von App 2.1 ist es, dass die Kinder mit Hilfe eines Spiegels überprüfen, ob ein gegebenes Bild eine Symmetrieachse hat.

Die Apps 2.2 bis 2.4 sind einem mathematischen Thema gewidmet, das in diesem Abschnitt behandelt wird: die Klassifizierung von Rosetten. Diese Apps wurden entwickelt, um die Kinder in diesem Prozess anzuleiten. Mit App 2.2 trainieren die Kinder, wie sie zweiflächige (dihedrale) Rosetten von zyklischen Rosetten unterscheiden können. Die Apps 2.3 und 2.4 widmen sich dann der Klassifizierung von zweiflächigen (dihedralen) bzw. zyklischen Rosetten.

Die Apps 2.5 und 2.6 decken ein weiteres mathematisches Thema ab, das in diesem Abschnitt behandelt wird - mathematische Eigenschaften im Zusammenhang mit Spiegelung und Drehung: Während App 2.5 den Eigenschaften im Zusammenhang mit Spiegelungen gewidmet ist, behandelt App 2.6 Drehungen.

Apps für die Altersgruppe 11-14

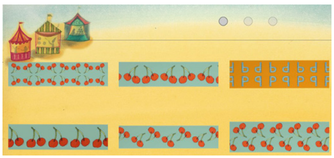
Mathematischer Gegenstand: Spiegel-, Rotations-, Translationssymmetrie und Gleitspiegelung sowie Klassifizierung von Friesen

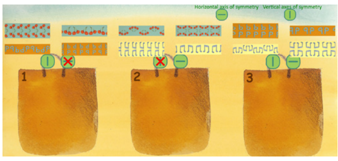
Alle Apps sind der Klassifizierung und dem Stempeln von Friesen gewidmet.

Die Apps 3.1 und 3.3 sind eher zur Unterhaltung gedacht: Sie sollen zeigen, wie ein Zylinder oder ein „Brett" Friese eines bestimmten Typs stempeln kann. Die Apps 3.2 und 3.4 bis 3.8 hingegen wurden entwickelt, um die Kinder in einem Prozess anzuleiten, um die **7 Friesarten** zu erhalten. Mit App 3.2 beginnen die Kinder damit, die Friese mit Symmetrieachsen zu trennen. In App 3.3 lernen die Kinder dann 3 verschiedene Klassen der Friese kennen, je nach den vorhandenen Symmetrieachsen (horizontal, vertikal oder beides). In App 3.5 erhalten die Kinder eine neue Klasse von Friesen, indem sie die Friese mit Rotationssymmetrie von den übrigen Friesen trennen. In App 3.6. teilen die Kinder eine vorherige „Friesklasse" in zwei neue Klassen auf („Spiegelsymmetrie + keine Rotationssymmetrie" und „Spiegelsymmetrie + Rotationssymmetrie"), so dass insgesamt 5 Friesklassen entstehen. In App 3.7 schließlich entdecken die Kinder durch die Trennung der Friese mit Gleitspiegelung alle möglichen Arten von Friesen: sieben.

App 3.8 ist einer Systematisierung der bereits gewonnenen Erkenntnisse gewidmet. Hier sollen die Kinder für jede der 7 Friesklassen die zugehörigen Symmetrien finden.

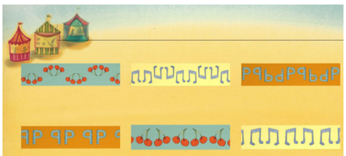

App 3.1

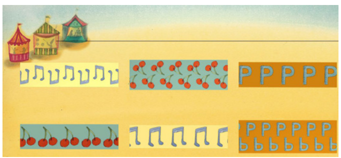

App 3.2

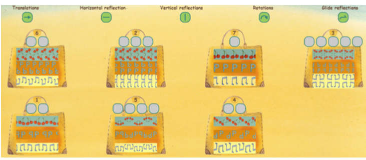

App 3.3

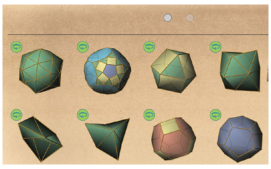

App 3.4

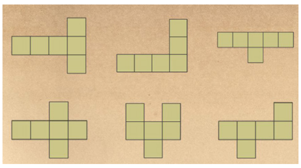

App 3.5

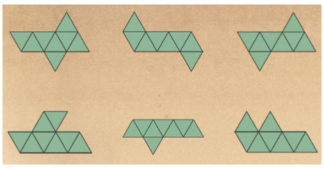

App 3.6

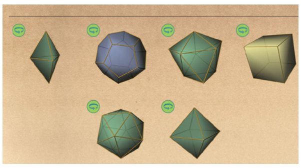

App 3.7

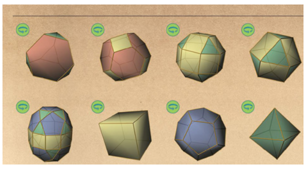

App 3.8


App 4.1


App 4.2


App 4.3


App 4.4


App 4.5

Apps für die Altersgruppe 15-19+
Mathematischer Gegenstand: Symmetrie and Polyeder
Alle Apps sind den im Kapitel vorgestellten Hauptkonzepten gewidmet: Klassifizierung von Polyedern und Erstellung guter Netze für sie.
Die Apps 4.2 und 4.3 sind der Suche nach guten Netzen für den Würfel bzw. das Oktaeder gewidmet.
Die Anwendungen 4.1, 4.4 und 4.5 sind hingegen der Klassifizierung von Polyedern gewidmet. Nachdem die Jugendlichen aus einer Gruppe von Polyedern die konvexen ausgewählt haben, können sie zu „nicht-platonischen Polyedern, deren Flächen alle regelmäßige und gleiche Polygone sind" übergehen. Diese App (4.4) soll zeigen, dass es zwar möglich ist, Polyeder zu finden, die den platonischen Körpern ähneln, dass wir aber wenig Freiheit haben, wenn wir versuchen, platonische Körper zu bauen.
Mit der letzten App können sich die Jugendlichen mit uniformen Polyedern vertraut machen.

3. Weiterführung

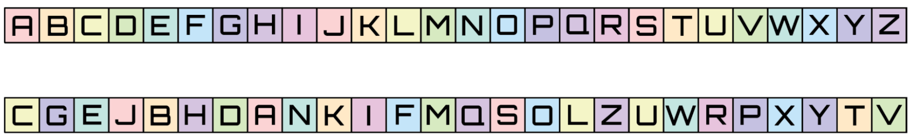
Es gibt mehrere Themen, die im Mathina-Projekt nicht behandelt werden, die aber mit Symmetrie verbunden sind und mit Kindern/Jugendlichen erforscht werden können. Im Folgenden sind einige Beispiele aufgeführt.
Für die Altersgruppe 7-10 Jahre ist es möglich, neben der Rotations- und Spiegelsymmetrie auch mit der Translationssymmetrie zu arbeiten. So können weitere Erkundungen mit „einfachen" Friesarten (z.B. ohne Gleitspiegelung) durchgeführt werden.
Für die Altersgruppe 11-14 Jahre können auch umfangreichere Experimente entwickelt werden, die nicht nur Friese, sondern auch die Klassifizierung von Wandmustergruppen beinhalten (beachten Sie, dass in diesem Fall Translationen in verschiedene Richtungen berücksichtigt werden sollten). Bei der Arbeit mit Wandmustergruppen ist es jedoch ratsam, bei der Auswahl der Bilder vorsichtig zu sein, um die Kinder nicht mit zu komplexen Beispielen zu entmutigen.
Für die Altersgruppe 15-19+ können neben der 3D-Geometrie/Symmetrie auch Aktivitäten zur Symmetrie in der Ebene entwickelt werden, nämlich Aktivitäten zur Klassifizierung der beiden Friese und aller Wandmustergruppen.

KRYPTOGRAFIE: MATHINA AUF DER SCHATZINSEL

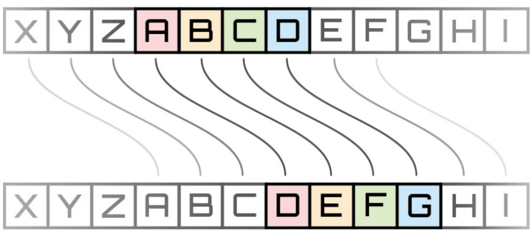
1. Zentrale mathematische Konzepte, die in den Geschichten umgesetzt werden

Thema: Einführung in Kryptografie
Für die Altersgruppe der 4-6-jährigen ist das Hauptziel, die Grundlagen der Kryptographie zu erkunden, insbesondere das Konzept von Schlüssel und Methode. Daher liegt der Schwerpunkt auf der Abstraktion, insbesondere auf der Idee, ein Symbol und nicht eine bestimmte Nachricht zu wählen. In dieser Altersgruppe haben die meisten Kinder noch nicht lesen gelernt. Beachten Sie daher, dass alle Geschichten und Apps Text enthalten, und die Hilfe einer Erzieherin oder eines Erziehers erforderlich sein könnte, um die Geschichte zu verstehen.

Thema: Cäsar-Chiffre
In der Altersgruppe von 7-10 Jahren haben die Kinder bereits lesen gelernt, so dass es möglich ist, alphabetische Verschlüsselungen, wie die Cäsar-Chiffre, einzuführen. Der Schwerpunkt liegt hier auf der Einführung der Konzepte von Monoalphabetischer Substitution und der Idee, dass der jeweilige Schlüssel für die Ziffern in der Geschichte auf einen einzigen Buchstaben reduziert werden kann. Die Art und Weise, wie die Buchstaben bei der Monoalphabetischen Substitution miteinander verbunden sind, wird als **Schlüssel der Chiffre**



bezeichnet, so dass man eine Nachricht einfach dadurch verschlüsselt, in dem man jeden Buchstaben durch den entsprechenden Buchstaben gemäß dem Schlüssel ersetzt. Die Dekodierungsmethode ist die gleiche, aber die Zuordnung erfolgt in umgekehrter Reihenfolge. Zum Beispiel wird mit dem Schlüssel aus dem folgenden Bild das Wort „GEHEIM" in das Wort „DBABNM"



verschlüsselt.
In ihrer ursprünglichen Form ordnet die **Cäsar-Chiffre** jedem Buchstaben den dritten Buchstaben nach ihm im Alphabet zu: der Buchstabe "A" ist mit dem Buchstaben "D" verbunden, "B" mit "E" und so weiter. Sie kann verallgemeinert werden, indem man statt der 3 wie im Original eine andere Zahl verwendet wird. Um den Schlüssel zu kennen, müssen wir nur die Anzahl der "Sprünge" kennen, die wir machen müssen.
Dieses Thema wird für die Altersgruppe 11-14 Jahre weiter ausgeführt. Die Schülerinnen und Schüler in dieser Altersgruppe sind mit arithmetischen Operationen vertrauter, daher ist es möglich, die Analyse der Cäsar-Chiffre

zu vertiefen. Insbesondere können wir das Konzept der Division mit Rest und **somit der modularen Arithmetik** einführen. Die Arithmetik mit "Modulus n" funktioniert wie die übliche Arithmetik, aber sie verwendet nur Zahlen zwischen 0 und n-1. Wenn wir zwei Zahlen a und b haben, die zwischen 0 und n-1 liegen, können wir sie addieren, subtrahieren oder multiplizieren. Um dies zu tun, führen wir die Operation normal durch und berechnen dann den Rest der ganzzahligen Division der erhaltenen Zahl durch n: dies wird das Ergebnis der Operation mit modularer Arithmetik sein (wir sagen in der mathematischen Sprache, dass man die Summe, die Differenz oder das Produkt „Modulo n" berechnet).

Thema: Schlüsselaustausch-Systeme

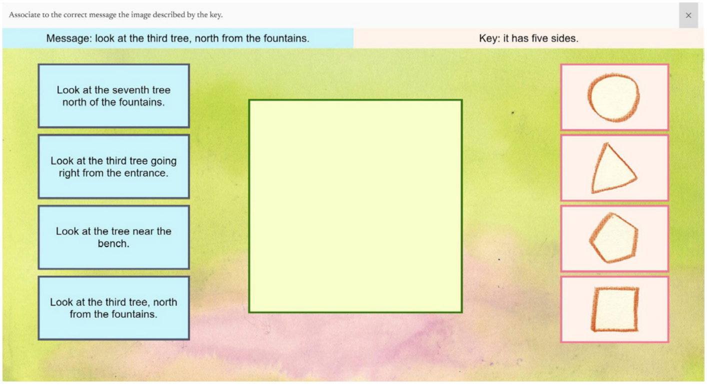
Die Altersgruppe der 15- bis 19-Jährigen ist mit dem mathematischen Denken im Zusammenhang mit inversen Funktionen und Abstraktion ausreichend vertraut, sodass wir ein einfaches Schlüsselaustausch-System einführen können. Wir entscheiden uns, den Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch zu behandeln, der es ermöglicht, ein gemeinsames Geheimnis über einen öffentlichen, unverschlüsselten Kommunikationskanal zu erhalten. Die Diffie-Hellman-Methode basiert auf sogenannten "Einwegfunktionen", d.h. invertierbaren Funktionen, die in einer Richtung sehr leicht, in der anderen Richtung jedoch extrem schwer zu berechnen sind.

Der Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch verwendet einen diskreten Logarithmus, d.h. die Berechnung eines Logarithmus in modularer Arithmetik, eine Operation, die vom Standpunkt der Rechenschwierigkeit her viel komplexer ist als die (ebenso diskrete) Potenzierung.

2. Digitale Apps für ein interaktives Problemlösen

Apps für die Altersgruppe 4-6 Jahre

Mathematischer Gegenstand: Einführung in Kryptografie

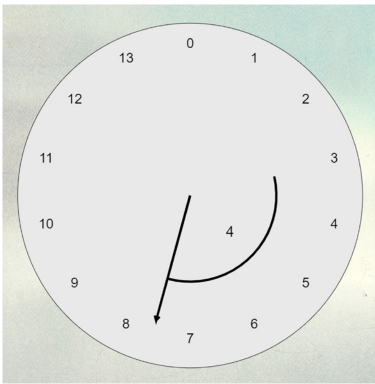


Wie bereits erwähnt, geht es in dieser Altersgruppe darum, die Konzepte von Schlüssel und Methode zu erforschen. In App 1.1 muss die Benutzerin oder der Benutzer die richtige Nachricht auswählen (die mit der vorgegebenen übereinstimmt) und den Schlüssel finden, der in Form eines Hinweises gegeben wird. In App 1.2 und 1.3 wird dieses Thema weiter vertieft: In App 1.2 wird mehr als ein Bild präsentiert und es wird eine Mehrdeutigkeit in Bezug auf den Schlüssel eingeführt, da der Hinweis auf mehr als einen richtigen Schlüssel zurückgeführt werden kann, was die Bedeutung von Klarheit in

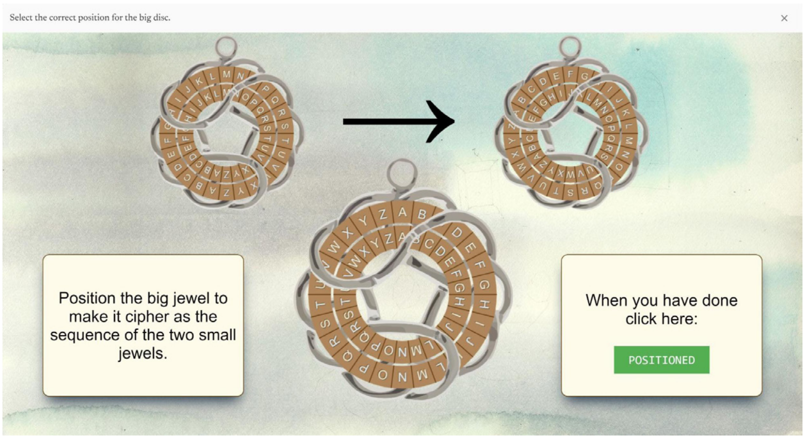
der mathematischen Kommunikation hervorhebt. App. 1.3 fasst schließlich alle Konzepte zusammen: Die Benutzerin oder der Benutzer soll diesmal die richtige Nachricht über den gegebenen Hinweis auf den Schlüssel finden. Die Apps werden in ansteigender Schwierigkeit präsentiert, was das Verständnis des Themas fördert.

Apps für die Altersgruppe 7-10
Mathematischer Gegenstand: Cäsar-Chiffre (Teil 1)

Die Apps 2.1 und 2.2 sind der Einführung der Cäsar-Chiffre gewidmet. Sie funktionieren auf ähnliche, aber entgegengesetzte Weise - App 2.1 wird zum Verschlüsseln und App 2.2 zum Entschlüsseln einer versteckten Nachricht verwendet.



Das gemeinsame Ziel dieser beiden Apps ist es, das Konzept des Schlüssels hervorzuheben und das Verschlüsseln und Entschlüsseln von Nachrichten zu üben. Bei der Verwendung in einem Klassenzimmer ist es möglich, die bereitgestellten Nachrichten zu ignorieren und nur den mittleren Teil der Apps mit eigenen Nachrichten zu verwenden.



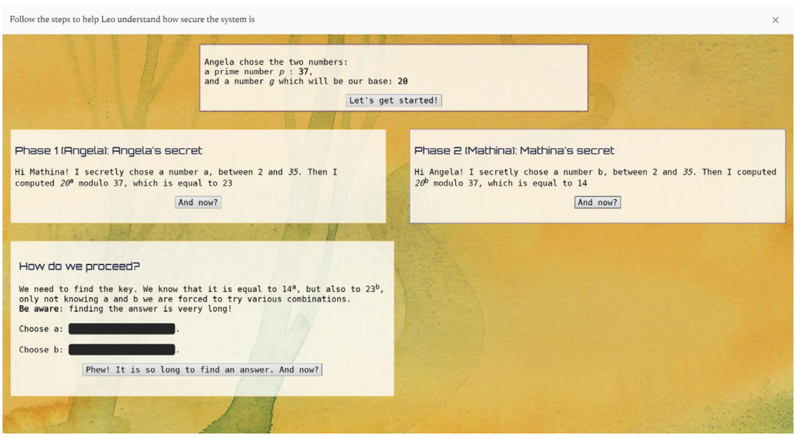
Apps für die Altersgruppe 11-14
Mathematischer Gegenstand: Cäsar-Chiffre und modulare Arithmetik

Die Apps 3.1 und 3.2 sind vom Konzept her ähnlich wie die Apps 2.1 und 2.2 und bieten die gleiche Erfahrung, jedoch mit einem erhöhten Schwierigkeitsgrad, der an die höhere Altersgruppe angepasst ist. In App 3.3 wird das Konzept der modularen Arithmetik eingeführt. In der Geschichte wird festgestellt, dass die Wahl eines Schlüssels für die Cäsar-Chiffre bedeutet, eine Zahl von 1 bis 25 als Schlüssel zu wählen. Damit bleiben nur 25 Versuche für einen Eindringling, die Nachricht zu knacken, so dass Brute-Force-Angriffe möglich sind.

Die Apps 3.4 und 3.5 zeigen, dass die Cäsar-Chiffre nicht sicherer wird, wenn sie zweimal hintereinander angewendet wird (dies wird durch Eigenschaften der modularen Arithmetik verifiziert). So werden in App 3.4 zwei aufeinanderfolgende Iterationen der Cäsar-Chiffre verwendet, während in App 3.5 die Äquivalenz zu einer einzigen Iteration gezeigt wird.

Darauf aufbauend zeigen die Apps 3.6 und 3.7 den Schülerinnen und Schülern eine weitere Art von Verschlüsselung, mit der Nachrichten mit den bisher kennen gelernten Methoden nicht entschlüsselt werden können. Die Apps 3.8 und 3.9 dienen dazu, eine mögliche Rekonstruktion sowohl der Methode als auch eines möglichen Schlüssels auszuprobieren, indem zwei Cäsar-Chiffren mit unterschiedlichen Schlüsseln auf ungerade und gerade Wörter (App 3.8) auf einzelne Buchstaben (App 3.9) angewendet werden. Diese letzte Verschlüsselung ist in der Tat ein besonderer Fall, die sogenannte Vigénére-Chiffre.

Apps für die Altersgruppe 15-19+
Mathematischer Gegenstand: Schlüsselaustausch



Alle Apps sind so aufgebaut, dass sie den jungen Lernenden durch die Konstruktion des Diffie-Hellman-Schlüsselaustauschs führen. Insbesondere App 4.1 stellt eine stärker geführte Erfahrung dar, bei der die Rechenschritte bereits vorgegeben sind. App 4.2 und 4.4 replizieren ein ähnliches Vorgehen, aber mit weniger vorgefertigten Schritten, so dass die Schülerinnen und Schüler überprüfen müssen, ob ihre Vertrautheit mit dem Thema eine solide Basis erreicht hat. App 4.3 veranschaulicht auch, wie schwierig ein möglicher Angriff auf die Verschlüsselung ist, indem die in der Geschichte dargestellte „Man in the middle"-Aktion wiederholt wird.

3. Weiterführung

Die Mathina-Geschichten decken einen historischen Teil der Private-Key-Kryptografie ab und stellen die Cäsar-Chiffre vor. Eine Weiterentwicklung für die Altersgruppe der 7-10-jähren besteht darin, dass Lehrkräfte im Unterricht ausführen können, wie sicher diese Verschlüsselung ist. Insbesondere könnte darauf hingewiesen werden, dass die Wahl eines Schlüssels für die Cäsar-Chiffre bedeutet, eine Zahl von 1 bis 25 als Schlüssel zu wählen. Damit bleiben einem Eindringling nur 25 Versuche, die Nachricht zu knacken, so dass Brute-Force-Angriffe möglich sind. Dies erweitert das Thema auf Inhalte, die in der Geschichte für die Altersgruppe der 11-14-jähren behandelt werden.

Da Kryptografie normalerweise nicht Teil des Schullehrplans ist, kann es als Zusatzthema für außerschulische Aktivitäten verwendet werden.

Eine Weiterführung für die Altersgruppe 11-14 ist die Frage, wie sicher die Vigénére-Chiffre ist (beachten Sie, dass der Name in den Mathina-Geschichten den Lernenden nicht erwähnt wird), wobei die Frequenzanalyse und ähnliche Techniken eingeführt werden.

Für den Schlüsselaustausch, die Einwegfunktionen und die öffentliche Kryptographie im Allgemeinen kann den Lernenden eine Weiterführung vorgeschlagen werden, die sich auf Verschlüsselungen wie Kid-RSA bezieht (eine vereinfachte Version von RSA mit mathematischen Konzepten, die für die Altersgruppe von 15-19 Jahren geeignet ist).

RÄUMLICHES VORSTELLUNGSVERMÖGEN: FEUERLAND

Unter dem Begriff “räumliches Vorstellungsvermögen” verstehen wir Beziehungen zwischen symbolischen/algebraischen Vorstellungen und grafischen räumlichen Darstellungen, wie z. B. Vektoren oder Funktionen. In Feuerland beschäftigen wir uns speziell mit der Beschreibung und Konstruktion von Kurven in der Ebene. Dieses in der Mathematik fundamentale Zusammenspiel wird in der mathematischen Bildung mit unterschiedlichen Werkzeugen und Blickwinkeln immer wieder aufgegriffen.

Grundlegend in den Mathina-Geschichten ist, dass mathematische Konzepte den Kindern viel früher als im formalen Bildungssystem vorgestellt werden, wenn auch auf eine zunächst oberflächlichere, verstecktere und intuitivere Weise als dies im formalen Schulsystem der Fall ist. Die Geschichten können jedoch in jedem Alter gelesen (oder wiedergelesen) werden, insbesondere zu dem Zeitpunkt, an dem das Schulsystem den mathematischen Gegenstand formell einführt. Mit Lehrkräften und/oder Eltern, die Hinweise geben, können die Kinder neue Erkenntnisse aus den Geschichten gewinnen.

1. Die wichtigsten mathematischen Konzepte der Geschichten

Parametrische Kurven

In den Apps von “Die Feuervogeltrainerin” zeichnet ein Einhorndrache eine Kurve in den Himmel (einen ebenen, also zweidimensionalen, Himmel) aus jener Richtung, die der Benutzer kontinuierlich als Vektor (mit dem Zauberstab/Horn) vorgibt. Im angestrebten Alter der Geschichte (4-6 Jahre) können Kinder noch nicht ohne Hilfe lesen, und sie entdecken viele Grundformen (Kreise, Quadrate, etc.) eventuell zum ersten Mal.

Was definiert eine Form? Normalerweise werden den Kindern Formen so präsentiert, dass sie einige Bedingungen erfüllen:
Ein gleichseitiges Dreieck ist eine Form, die drei gleiche Seiten hat. Ein Quadrat hat vier gleiche Seiten und gleiche Winkel. Die Punkte auf einem Kreis haben einen festen Abstand von seinem Mittelpunkt. Aber wenn wir Kinder bitten, ein Dreieck oder einen Kreis zu zeichnen, brauchen sie eine konstruktive Methode, um den Bleistift auf dem Papier zu bewegen. Wie kann man diese Grundformen (Dreieck, Quadrat, Kreis...) oder komplexere Formen wie die Form einer 8 konstruieren? Indem wir jeweils eine Richtung angeben, geben wir eine Konstruktionsmethode für die Form vor. Bei einem Quadrat ist die Richtung eine Zeit lang “Norden”, dann “Osten”, danach “Süden” und schließlich “Westen”. Wir müssen also an einigen Stellen den Richtungsvektor scharf um 90 Grad drehen. Für ein gleichseitiges Dreieck bilden die Richtungen unterschiedliche Winkel (60 Grad im Inneren, aber der Richtungsvektor muss sich um 120 Grad drehen). Für einen Kreis ist eine kontinuierliche Richtungsänderung notwendig. Für eine „8“ ist eine aufwändigere Konstruktion erforderlich. Die Kinder erschließen sich so die Ideen von Aktionen auf Distanz und der Kodierung von Informationen. Auf diese Weise entwickeln sie zudem räumliche Intuition und üben die Hand-Augen-Koordination ein, die zur Lösung der Rätsel erforderlich sind.

In der darauffolgenden Altersgruppe (ab dem Alter von etwa 10 Jahren) können die Kinder die Idee der physikalischen Geschwindigkeit (genauer gesagt, der Geschwindigkeit als Vektor) erarbeiten. Während wir alle durch unsere Alltagserfahrung eine intuitive Vorstellung von Geschwindigkeit haben, ist es überhaupt nicht intuitiv, dass wir die Geschwindigkeit durch einen Pfeil darstellen können.

Wenn die Schülerinnen und Schüler noch etwas älter sind, und somit über vollständige algebraische Fähigkeiten verfügen, um Funktionen zu definieren, und Begriffe wie Ableitungen und Integrale kennen, bieten diese Apps noch weitere nützliche Inhalte. Die Kurve, die der Einhorndrache fliegt, kann als parametrische Kurve beschrieben werden: Die Koordinaten des Einhorndrachen sind (x(t), y(t)) zum Zeitpunkt t, und die Richtung der Kurve (der Tangentenvektor) hat die Komponenten (dx/dt , dy/dt).

Der Tangentenvektor ist also der Vektor der Ableitungen der Funktionen, die die Kurve definieren. Umgekehrt wird die Kurve durch Integration aus dem Tangentenvektor gewonnen. Was das Programm macht, ist eine numerische Integration. Wenn der Tangentenvektor (dx/dt, dy/dt) ist und die Position des Einhorndrachens aktuell (x,y) ist, dann bewegt das Programm den Einhorndrchen an die Position:

$$(x,y) + (dx/dt, dy/dt) * dt = (x+dx, y+dy)$$

Hier ist dt eine kleine (aber endliche) Größe und der Vorgang wiederholt sich viele Male pro Sekunde.

Das numerische Verständnis dessen, was das Programm intern tut, hilft, die Kernideen der Infinitesimalrechnung zu begreifen, bei der dt eine symbolische Darstellung einer unendlich kleinen Größe ist. Die Existenz dieser Infinitesimalzahlen ist kontraintuitiv und wird in einigen deduktiven Ansätzen sogar manchmal geleugnet. Allzu oft wird der Ausdruck dx/dt zugunsten der Schreibweise x‘ weggelassen und Infinitesimale zugunsten von Grenzwerten negiert, die historisch nachrangig und didaktisch aufwendiger sind.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der bescheidene Einhorndrachenflug in einer Vielzahl von Lernstufen der Mathematik eingesetzt werden kann, vom Konstruktivismus in der Elementargeometrie bis zur Integrationstheorie.

Vektor-Arithmetik

In den Apps von "Wie spricht man mit einem Einhorndrachen" bauen wir auf der intuitiven Idee von Vektoren und Geschwindigkeit aus "Die Feuervogeltrainerin" auf, aber wir fügen die algebraische Ebene der Darstellung eines Vektors durch ein Zahlenpaar hinzu, und dies nicht nur grafisch. Die Apps ermöglichen die Eingabe (nacheinander) einer Reihe von Zahlenpaaren, die in Pfeile umgewandelt werden, die der Einhorndrache fliegt (siehe Abbildung 1).

Hier kann mit vielen Konzepten gearbeitet werden: Erstens: Kodierung der grafischen Information als Zahlen. Dies ist äquivalent zum Messen in zwei Dimensionen (Messen der vertikalen und horizontalen Komponente). Zweitens: negative Zahlen. Obwohl das Alter, in dem Kinder in der Schule etwas über negative Zahlen lernen, variiert, kann eine frühe Einführung erfolgen, indem einfach angenommen wird, dass das negative Zeichen die Rückwärtsrichtung markiert. Ältere Kinder können die Arithmetik mit negativen Zahlen erkunden. So können Kinder drittens erforschen und entdecken, dass Vektoren linear sind, das heißt, wir können sie addieren und subtrahieren. Da wir keine

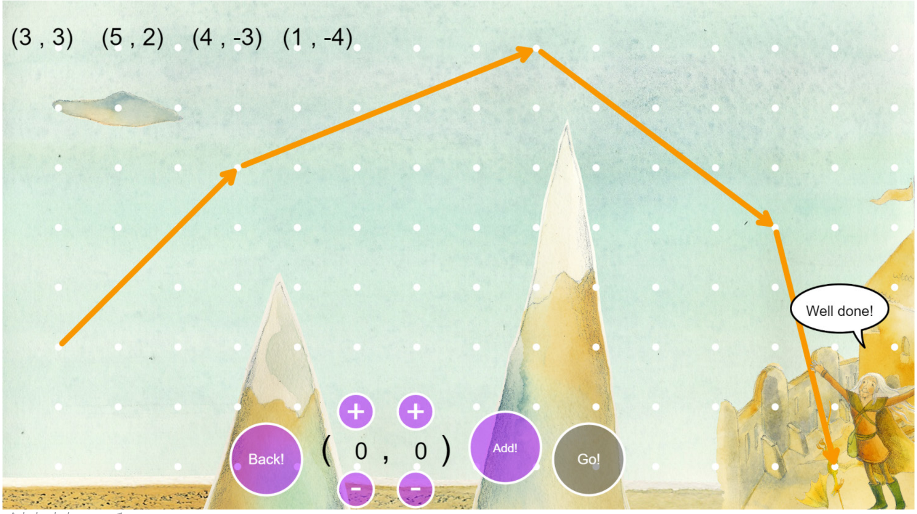


Abbildung 1

fortgeschrittenen Vektorberechnungen (Skalarprodukte, Normen, Winkel...) verwenden, können wir Vektoren zur gleichen Zeit einführen, in der Kinder negative Zahlen kennenlernen (diese zwei Bildungsstufen sind im formalen Schulsystem voneinander getrennt). Wir führen implizit die Idee ein, dass ein Punkt plus ein Vektor einen anderen Punkt ergibt (affine Geometrie), und dass wir mit dieser Methode (polygonale) Trajektorien berechnen können.

Diese Ideen (negative Zahlen, Vektorarithmetik...) sollen von der Lehrkraft in diesen Geschichten nicht herausgestellt werden. Es kann ein Hinweis darauf gegeben werden, aber ansonsten sollte es den Kindern selbst überlassen sein, dies durch Erkundung und Eigeninteresse zu entdecken.

Funktionen und Infinitesimalrechnung

In "Das Phönix-Rennen in Arisa" führen wir Funktionen y=f(x) ein. Durch den Wechsel des Tieres (statt eines Einhorndrachens nun ein Phönix) machen wir eine Unterscheidung zu den Werkzeugen, die wir jetzt zur Verfügung haben, um explizite Kurven zu zeichnen. Hier gehen wir davon aus, dass die Schülerinnen und Schüler (nun keine Kinder mehr, sondern Teenager) bereits mit grundlegenden algebraischen Ausdrücken sowie Gleichungen ersten und zweiten Grades vertraut sind und symbolische Manipulationen vornehmen können.

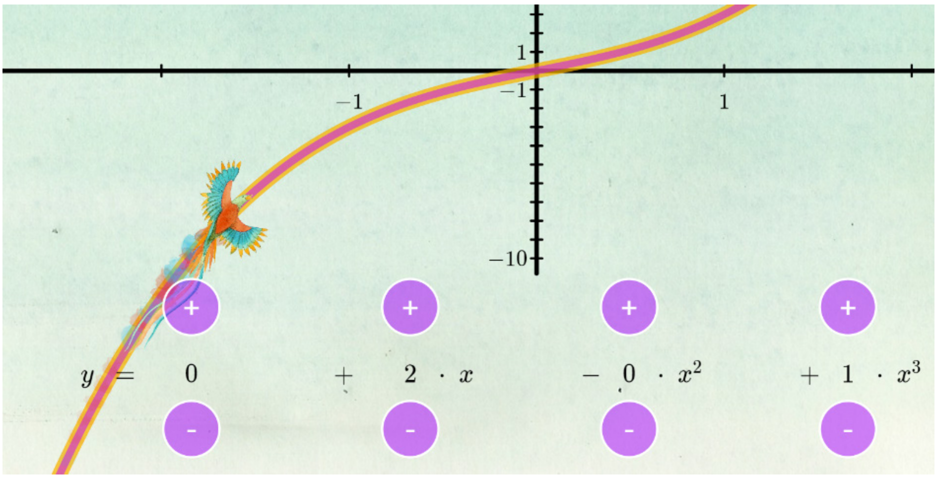


Abbildung 2

Die Geschichte bietet verschiedene Apps zum Zeichnen expliziter Kurven. Die erste App (siehe Abbildung 2) ist ein Plotter für Polynomfunktionen. Die Koeffizienten des Polynoms können eingestellt werden, um eine vorgegebene Zielkurve zu zeichnen. Die Schülerinnen und Schüler können durch Experimentieren die verschiedenen Rollen des unabhängigen Terms,

des Terms erster Ordnung und des führenden Terms usw. lernen.
Die zweite App (siehe Abbildung 3) gibt eine Polynominterpolation an, die durch sieben gegebene Punkte geht. Man kann die Konstruktion sehen, die das möglich macht. Die App fordert dazu auf, ein Polynom zu erstellen, das durch die gegebenen Punkte geht und dabei bestimmte Hindernisse vermeidet. Das ist aufgrund des Runge-Phänomens nicht trivial[1].

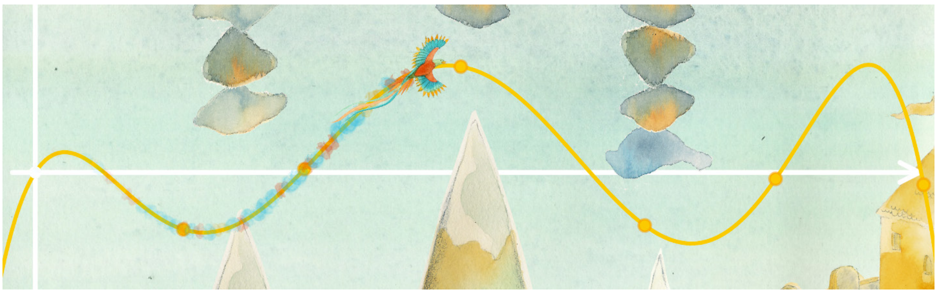


Abbildung 3

Die dritte App erforscht den Begriff der Ableitung, ähnlich wie die App in " Die Feuervogeltrainerin", aber viel expliziter, so dass wir die Ableitung als die Rate des Aufstiegs oder Abstiegs sehen können. Die Schülerinnen und Schüler können selbst die Beziehung zwischen Maxima und Minima der Funktion und Nullstellen der Ableitung entdecken.

Die vierte und letzte App vermischt die beiden Techniken, die wir gesehen haben: Man wird gebeten, eine Polynominterpolation zu verwenden, um eine Kurve zu definieren, die die Ableitung unserer Zielfunktion ist, oder anders gesagt, das Programm integriert das Polynom.

In der Geschichte werden all diese Begriffe grafisch dargestellt, aber bei dieser Altersstufe kann die Lehrkraft die Schülerinnen und Schüler auffordern, Papier und Bleistift zu nehmen und einige Fragen algebraisch zu lösen. Zum Beispiel:

- Wie kann man die Polynominterpolation so verallgemeinern, dass sie durch mehr Punkte geht?
- Wie kann man ein Polynom, das durch einige Punkte geht, mit einigen definierten Ableitungen bilden?
- Wie kann man „Doppelnullstellen" einer Funktion definieren? Wie kann man sie identifizieren?
- Wie findet das letzte Programm den Graphen der Funktion (also die numerische Integration)?

Implizite Funktionen und algebraische Geometrie
In der letzten Geschichte mit den Funkelflöhen, die sich an ältere Teenager richtet, ist das Setting ganz anders. Das Szenario des verwunschenen Waldes, etwas gruseliger, eignet sich besser für Teenager. Die Magie ist weniger spektakulär, aber faszinierender und die Idee der Funkelflöhe als einzelne Lichtpunkte im Raum, idealerweise ohne jegliche Breite, erfordert mehr Abstraktion als die großen Tiere, die am Himmel fliegen. Außerdem durchbricht Flamma am Ende der Geschichte die vierte Wand und spricht mit der Benutzerin bzw. dem Benutzer über Mathematik und Mathematiker*innen aus der realen Welt. Wir hoffen, auf diese Weise die Reife der Leserinnen und

[1] Eine Eigenschaft der Polynominterpolation, nach der eine Erhöhung des Grades des Interpolationspolynoms zu einer Verschlechterung der Interpolationsqualität führen kann.
(siehe auch: https://de.wikipedia.org/wiki/Polynominterpolation#Runges_Ph%C3%A4nomen)

Leser anzusprechen, die zwar die Geschichte von Mathina und Leo im Wald genießen können, aber in den Apps eine größere Herausforderung finden werden.

Die Geschichte nutzt mikroskopisch kleine Lichttiere, die Funkelflöhe, als Zeichenelemente, um implizite Flächen darzustellen. Für eine Funktion mit zwei Variablen F(x,y) besteht der Plot aus allen Punkten, deren Koordinaten F(x,y)=0 erfüllen. Diese Idee ist für 15-jährige Schülerinnen und Schüler einfach genug, aber die Implikationen haben eine große Reichweite.

Nachdem die Jugendlichen ein wenig mit der App zur freien Erkundung gespielt haben, könnte die Lehrkraft diese Methode der Kurvenbeschreibung mit den vorherigen vergleichen,und hierbei sogar die Apps von "Die Feuervogeltrainerin" hinzuziehen. Die Methode der impliziten Funktion verwendet Eigenschaften der Kurve, um sie zu definieren, statt einer konstruktive Methode des Zeichnens. Das Beispiel des Kreises ist besonders anschaulich (siehe die Kommentare und Details im didaktischen Leitfaden der online-Plattform).

Als nächstes wäre es gut, eine gewisse Intuition für die Gleichungen zu entwickeln. Die zweite App bietet ein Ratespiel, das dabei helfen kann. Die Lehrkraft kann weitere Beispiele und Übungen hinzufügen. Dann können weitere Techniken und Einblicke vorgestellt werden. Wir schlagen hier ein paar vor:

- Zeigen und üben Sie die Techniken der Verformung, Vereinigung und Schnittmengen von Kurven (siehe Didaktischer Leitfaden). Diese Techniken eröffnen die Möglichkeiten, bestehende Kurven gezielt

  und absichtlich zu kombinieren und zu verändern und nicht nur die Auswirkungen durch Ausprobieren zu erkunden.
- Ausgehend von der Verformungstechnik (Zeichnen der Funktion F(x,y)-a=0 für kleines a), zeichnen Sie mehrere Kurven mit verschiedenen Werten von a. Die Lehrkraft kann dann die Erkundung in Richtung der Steigung und des Normalenvektors zur Kurve lenken. Kurz gefasst: Der Normalenvektor zur Kurve F(x,y)=0 ist gegeben durch (dF/dx , dF/dy).

Die Geschichte endet mit der analogen Konstruktion in drei Dimensionen, für implizite Funktionen F(x,y,z)=0. Innerhalb der Geschichte schlägt die dritte App nur lediglich eine freie Erkundung vor, aber eine Lehrkraft kann dieses 3D-Werkzeug in Bezug auf die vorherige Aktivität nutzen:

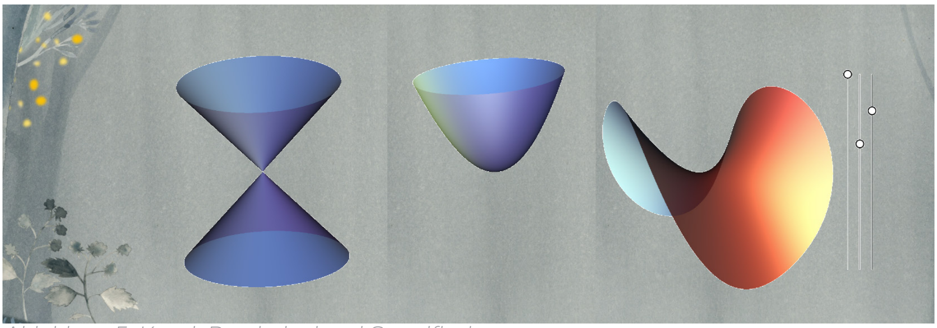


Abbildung 5: Kegel, Paraboloid und Sattelfläche

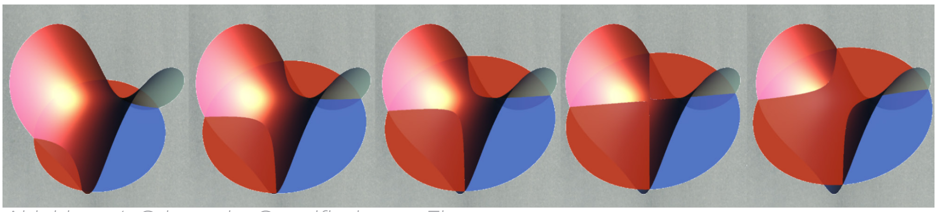


Abbildung 6: Schnitt der Sattelfläche mit Ebenen z=a

- Verwenden Sie das 3D-Werkzeug zum Zeichnen der Flächen z=F(x,y) im dreidimensionalen Raum. Einige gute Beispiele sind (siehe Abbildung 5): Der Kegel $z = \text{sqrt}(x^2+y^2)$, Das Paraboloid $z=x^2 + y^2$, Und die Sattelfläche $z=x^2-y^2$.
- Verwenden Sie den Schnitt mit einer Ebene in verschiedenen Höhen, um diese mit der Kurve F(x,y)=a in Beziehung zu setzen. Beispiel: Geben Sie $(x^2-y^2-z)^*(z-a)=0$ ein und bewegen Sie den ersten Schieberegler, um den Parameter a, um damit die Höhe der Schnittebene zu verändern (siehe Abbildung 6).
- Gehen Sie noch weiter und erkunden Sie die Rolle der partiellen Ableitungen zum Beispiel mit der Sattelfläche.

2. Hinter den Geschichten

Mit allen Mathina-Geschichten möchten wir den jungen Lernenden einige Werkzeuge anbieten, mit denen sie ihre Kreativität weiter fördern und nutzen können. Die Geschichten bieten einen ersten Einstieg in viele mathematische Ideen, wahrscheinlich schon bevor diese in der Schule behandelt werden. Die Synergie zwischen den Mathina-Einführungen und der Anleitung durch eine Lehrkraft ist jedoch das, was unserer Meinung nach die mathematischen Fähigkeiten und das Interesse der Lernenden fördern wird. Am Ende der Mathina-Geschichten empfeheln wir, dass die Lehrkraft die Schülerinnen und Schüler in andere, vielseitigere Werkzeuge einführt, zum Beispiel in dynamische Geometrie-Software wie GeoGebra oder Desmos oder sogar in leistungsfähigere Computer-Algebra-Systeme wie SageMath. Dies wird die Schülerinnen und Schüler dazu befähigen, ihre eigenen mathematischen Abenteuer jenseits der Mathina-Geschichten zu erleben.

Mathina

AN INTERACTIVE STORYBOOK BETWEEN MATHEMATICS AND FANTASY