对照,列表于下:

导数公式	微分公式
$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$ （μ 是任意常数）	$\mathrm{d}(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$ （μ 是任意常数）
$(\sin x)'=\cos x$	$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$
$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$
$(a^x)'=a^x\ln a$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）	$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）
$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$	$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）	$\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

由函数和、差、积、商的求导法则,可推得相应的微分法则.为了便于对照,列成下表(表中 $u=u(x)$,$v=v(x)$都可导).

函数和、差、积、商的求导法则	函数和、差、积、商的微分法则
$(u\pm v)'=u'\pm v'$	$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$
$(Cu)'=Cu'$ （C 是常数）	$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$ （C 是常数）
$(uv)'=u'v+uv'$	$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ （$v\neq 0$）	$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$ （$v\neq 0$）

现在我们以乘积的微分法则为例加以证明.

根据函数微分的表达式,有

$$d(uv)=(uv)'dx.$$

再根据乘积的求导法则,有

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

于是

$$d(uv)=(u'v+uv')dx=u'vdx+uv'dx.$$

由于

$$u'dx=du,\ v'dx=dv,$$

所以

$$d(uv)=vdu+udv.$$

其他法则都可以用类似方法证明.

3. 复合函数的微分法则

与复合函数的求导法则相应的复合函数的微分法则可推导如下:

设 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 都可导,则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分为

$$dy=y'_x dx①=f'(u)g'(x)dx.$$

由于 $g'(x)dx=du$,所以,复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$dy=f'(u)du \quad 或 \quad dy=y'_u du.$$

由此可见,无论 u 是自变量还是中间变量,微分形式 $dy=f'(u)du$ 保持不变.这一性质称为微分形式不变性.这性质表示,当变换自变量时,微分形式 $dy=f'(u)du$ 并不改变.

例 3　设 $y=\sin(2x+1)$,求 dy.

解　把 $2x+1$ 看成中间变量 u,则

$$\begin{aligned}dy&=d(\sin u)=\cos u du=\cos(2x+1)d(2x+1)\\&=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.\end{aligned}$$

在求复合函数的导数时,可以不写出中间变量.在求复合函数的微分时,类似地也可以不写出中间变量.下面我们用这种方法来求函数的微分.

例 4　设 $y=\ln(1+e^{x^2})$,求 dy.

解　$dy=d(\ln(1+e^{x^2}))=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}d(x^2)=\dfrac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}\cdot 2xdx=\dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx.$

例 5　设 $y=e^{1-3x}\cos x$,求 dy.

---

① 其中 y'_x 表示 y 对 x 的导数,它也是导数的一种表示方法.

解　应用积的微分法则,得

$$\begin{aligned} dy &= d(e^{1-3x}\cos x)=\cos x d(e^{1-3x})+e^{1-3x}d(\cos x) \\ &= (\cos x)e^{1-3x}(-3dx)+e^{1-3x}(-\sin x dx)=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx. \end{aligned}$$

例 6　在下列等式左端的括号中填入适当的函数,使等式成立.

(1) $d(\quad)=xdx$;　　　　(2) $d(\quad)=\cos \omega t dt\ (\omega\neq 0)$.

解　(1) 我们知道,

$$d(x^2)=2xdx.$$

可见

$$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)=d\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

即

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right)=xdx.$$

一般地,有

$$d\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=xdx\ (C\text{ 为任意常数}).$$

(2) 因为

$$d(\sin \omega t)=\omega\cos \omega t dt,$$

可见

$$\cos \omega t dt=\frac{1}{\omega}d(\sin \omega t)=d\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega t\right),$$

即

$$d\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega t\right)=\cos \omega t\ dt.$$

一般地,有

$$d\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega t+C\right)=\cos \omega t dt\ (C\text{ 为任意常数},\omega\neq 0).$$

四、微分在近似计算中的应用

1. 函数的近似计算

在工程问题中,经常会遇到一些复杂的计算公式.如果直接用这些公式进行计算,那是很费力的.利用微分往往可以把一些复杂的计算公式用简单的近似公式来代替.

前面说过,如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$,且 $|\Delta x|$ 很小时,我们有

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x.$$

这个式子也可以写为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x, \tag{5-4}$$

或

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{5-5}$$

在(5-5)式中令 $x=x_0+\Delta x$，即 $\Delta x=x-x_0$，那么(5-5)式可改写为

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{5-6}$$

如果$f(x_0)$与$f'(x_0)$都容易计算，那么可利用(5-4)式来近似计算 Δy，利用(5-5)式来近似计算$f(x_0+\Delta x)$，或利用(5-6)式来近似计算$f(x)$.这种近似计算的实质就是用 x 的线性函数$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$来近似表达函数$f(x)$.从导数的几何意义可知，这也就是用曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线来近似代替该曲线（就切点邻近部分来说）.

例 7　有一批半径为 1 cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01 cm.估计一下镀每只球需用多少克铜（铜的密度是 8.9 g/cm^3）？

解　先求出镀层的体积，再乘密度就可得到镀每只球需用铜的质量.

因为镀层的体积等于镀铜前、后两个球体体积之差，所以它就是球体体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$当 R 自 R_0取得增量 ΔR 时的增量 ΔV.我们求 V 对 R 的导数

$$V'\Big|_{R=R_0}=\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)'\Big|_{R=R_0}=4\pi R_0^2,$$

由(5-4)式得

$$\Delta V\approx 4\pi R_0^2\Delta R.$$

将 $R_0=1$，$\Delta R=0.01$ 代入上式，得

$$\Delta V\approx 4\times 3.14\times 1^2\times 0.01\approx 0.13(\mathrm{cm}^3),$$

于是镀每只球需用的铜约为

$$0.13\times 8.9\approx 1.16(\mathrm{g}).$$

例 8　利用微分计算 sin 30°30′的近似值.

解　把 30°30′化为弧度，得

$$30°30'=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}.$$

由于所求的是正弦函数的值，故设$f(x)=\sin x$.此时$f'(x)=\cos x$.如果取 $x_0=\frac{\pi}{6}$，那么$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$与$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$都容易计算，并且$\Delta x=\frac{\pi}{360}$比较小.应用(5-5)式便得

$$\sin 30°30' = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\times\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{360}\approx 0.500\ 0+0.007\ 6=0.507\ 6.$$

下面我们来推导一些常用的近似公式.为此,在(5-6)式中取$x_0=0$,于是得

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x. \tag{5-7}$$

应用(5-7)式可以推得以下几个在工程上常用的近似公式(下面都假定$|x|$是较小的数值):

(i) $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$ ($\alpha\in\mathbb{R}$),

(ii) $\sin x\approx x$ (x 以弧度为单位),

(iii) $\tan x\approx x$ (x 以弧度为单位),

(iv) $e^{x}\approx 1+x$,

(v) $\ln(1+x)\approx x$.

证 (i) 在第一章第九节例 7 中我们已经知道$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$ ($x\to 0$),从而得出这个近似公式.在这里,我们利用微分证明.取$f(x)=(1+x)^{\alpha}$,那么$f(0)=1$, $f'(0)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}\Big|_{x=0}=\alpha$,代入(5-7)式便得

$$(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x.$$

(ii) 取$f(x)=\sin x$,那么$f(0)=0$,$f'(0)=\cos x\Big|_{x=0}=1$,代入(5-7)式便得

$$\sin x\approx x.$$

其他几个近似公式可用类似方法证明,这里从略了.

例 9 计算$\sqrt{1.05}$的近似值.

解

$$\sqrt{1.05}=\sqrt{1+0.05},$$

这里$x=0.05$,其值较小,利用近似公式(i)($\alpha=\frac{1}{2}$的情形),便得

$$\sqrt{1.05}\approx 1+\frac{1}{2}\times 0.05=1.025.$$

如果直接开方,可得

$$\sqrt{1.05}=1.024\ 70.$$

将两个结果比较一下,可以看出,用 1.025 作为$\sqrt{1.05}$的近似值,其误差不超过 0.001,这样的近似值在一般应用上已够精确了.如果开方次数较高,就更能体现出用微分进行近似计算的优越性.

*2. 误差估计

在生产实践中，经常要测量各种数据.但是有的数据不易直接测量，这时我们就通过测量其他有关数据后，根据某种公式算出所要的数据.例如，要计算圆钢的截面积 A，可先用卡尺测量圆钢截面的直径 D，然后根据公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 算出 A.

由于测量仪器的精度、测量的条件和测量的方法等各种因素的影响，测得的数据往往带有误差，而根据带有误差的数据计算所得的结果也会有误差，我们把它叫做间接测量误差.

下面就讨论怎样利用微分来估计间接测量误差.

先说明绝对误差、相对误差的概念.

如果某个量的精确值为 A，它的近似值为 a，那么 $|A-a|$ 叫做 a 的绝对误差，而绝对误差与 $|a|$ 的比值 $\frac{|A-a|}{|a|}$ 叫做 a 的相对误差.

在实际工作中，某个量的精确值往往是无法知道的，于是绝对误差和相对误差也就无法求得.但是根据测量仪器的精度等因素，有时能够确定误差在某一个范围内.如果某个量的精确值是 A，测得它的近似值是 a，又知道它的误差不超过 δ_A，即

$$|A-a|\leqslant\delta_A,$$

那么 δ_A 叫做测量 A 的绝对误差限，而 $\frac{\delta_A}{|a|}$ 叫做测量 A 的相对误差限.

例 10 设测得圆钢截面的直径 $D=60.03$ mm，测量 D 的绝对误差限 $\delta_D=0.05$ mm.利用公式

$$A=\frac{\pi}{4}D^2$$

计算圆钢的截面积时，试估计面积的误差.

解 如果我们把测量 D 时所产生的误差当作自变量 D 的增量 ΔD，那么，利用公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 来计算 A 时所产生的误差就是函数 A 的对应增量 ΔA.当 $|\Delta D|$ 很小时，可以利用微分 $\mathrm{d}A$ 近似地代替增量 ΔA，即

$$\Delta A\approx\mathrm{d}A=A'\cdot\Delta D=\frac{\pi}{2}D\cdot\Delta D.$$

由于 D 的绝对误差限为 $\delta_D=0.05$ mm，所以

$$|\Delta D|\leqslant\delta_D=0.05,$$

而