Statistique des risques extrêmes

Nicolas Jeannelle

Direction des Risques – Risques Financiers

Confédération Nationale du Crédit Mutuel

Sommaire

Introduction

I. Value-at-Risk : Fondements et modélisation

- Fondements de la VaR
- Méthodes non-paramétriques
- Méthodes paramétriques
- Evaluation de la mesure de risque
- Mesures de risque dérivées

II. Value-at-Risk par modélisation des extrêmes

III. Value-at-Risk dynamique

Conclusion

Sommaire

Introduction

I. Value-at-Risk : Fondements et modélisation
- Fondements de la VaR
- Méthodes non-paramétriques
- Méthodes paramétriques
- Evaluation de la mesure de risque
- Mesures de risque dérivées

II. Value-at-Risk par modélisation des extrêmes

III. Value-at-Risk dynamique

Conclusion

Introduction

Historique & Réglementation

- **Histoire simplifiée de la réglementation financière**
  - Une histoire jalonnée de **crises financières**…
  - … engendrant des **réglementations**…
  - … inspirées de **travaux indépendants.**

1929 · 1964 · 1973 · 1973 · 1974 · 80's · 1987 · 1988 · 1996 · 2000 · 2004 · 00's · 2008 · 2010

1929 – Krach de Wall Street
Marquant le début de la Grande Dépression

1964 – Modèle CAPM

1973 – Black & Scholes
Formule de valorisation d'une option européenne

1973 – Krach de 1973
Engendré par le premier choc pétrolier

1974 – Création du Comité de Bâle

80's – Value-at-Risk
Emergence d'une mesure synthétique des risques. Intégrée dans Bâle II & III

Till Guldimann
En tant que directeur de la recherche chez J.P. Morgan, il popularise la VaR à travers ***Risk Metrics (1994)***

1987 – Black Monday
Plus grosse chute journalière enregistrée

1988 – Accords de Bâle I
Risque de crédit

1996 – Amendements
Incorporation du risque de marché

2000 – Bulle internet

2004 – Accords de Bâle II
Incorporation du risque op.

00's – Modèle LDA
Estimation en modèle avancé du risque op.

2008 – Crise financière mondiale

2010 – Accords de Bâle III
Renforcement des couvertures

Introduction

Thèmes abordés & Compétences sollicitées

- **Statistique inférentielle**
  - Estimation paramétrique / non paramétrique
  - Tests statistiques d'adéquation
- **Outils statistiques usuels**
  - Bootstrap
  - Méthodes de Monte Carlo
- **Théorie des valeurs extrêmes**
  - Maxima par blocs
  - Distribution des excès
- **Séries temporelles**
  - Modèle GARCH
- **Apprentissage et utilisation de Python**

➢ **Evaluation :** Projet, Rédaction d'un rapport, Programmation

Sommaire

Introduction

I. Value-at-Risk : Fondements et modélisation

- Fondements de la VaR
- Méthodes non-paramétriques
- Méthodes paramétriques
- Evaluation de la mesure de risque
- Mesures de risque dérivées

II. Value-at-Risk par modélisation des extrêmes

III. Value-at-Risk dynamique

Conclusion

Sommaire

Introduction

I. Value-at-Risk : Fondements et modélisation

- Fondements de la VaR
- Méthodes non-paramétriques
- Méthodes paramétriques
- Evaluation de la mesure de risque
- Mesures de risque dérivées

II. Value-at-Risk par modélisation des extrêmes

III. Value-at-Risk dynamique

Conclusion

1. Fondements de la VaR

La VaR, une mesure synthétique du risque de marché

- **Risque de marché : risque de pertes des portefeuilles suite à l'évolution des prix de marché**
  - Marché des instruments de base (actions, obligations, devises…)
  - Marché des produits dérivés (options, contrats à terme…)

- **Dépendance du portefeuille à de nombreux facteurs de risque :**
  - Paramètres de marché explicites *(ex : cours de marché)*
  - Paramètres de marché implicites *(ex : volatilité)*
  - Paramètres intrinsèques du contrat *(ex : maturité d'une option)*
  - Corrélation au sein du portefeuille
  - …

- **Un premier outil de gestion du risque : la sensibilité**
  - Permet de mesurer la variation de la valeur d'un portefeuille relativement à un facteur de risque
  - Les « grecques » permettent de mesurer la sensibilité d'un produit financier par rapport à des paramètres de marché *(Delta, Vega…)*
  - Mais **mesure locale**, **trop spécifique** et **potentiellement non extrême** du risque encouru sur le portefeuille

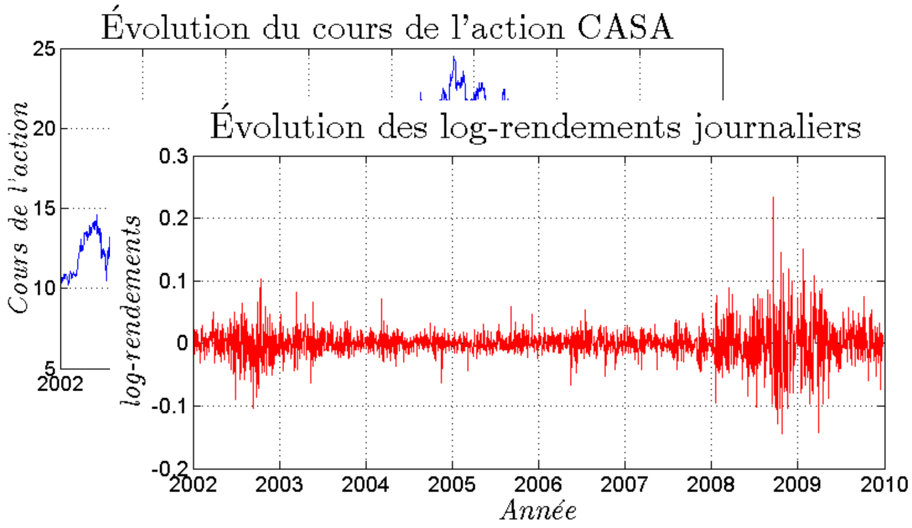
1. Fondements de la VaR

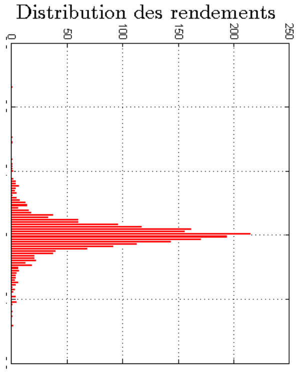
La VaR, une mesure synthétique du risque de marché

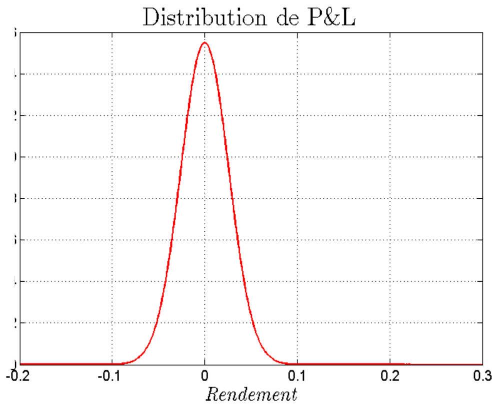
- On dispose d'un **historique** de valeurs du portefeuille : $p_t, t \in [1, T+h]$
- On raisonne en termes de **rendements** sur un **horizon h** :

$$r_{t|t+h} = \ln \frac{p_{t+h}}{p_t} \approx \frac{p_{t+h} - p_t}{p_t}$$

- On obtient une **distribution** des rendements
- Le **risque** va être estimé à partir de cette distribution, en faisant comme hypothèses :
  - Les rendements sont **indépendants**
  - Les rendements sont **identiquement distribués** selon une variable aléatoire R
  - R est définie par sa **fonction de répartition F**







1. Fondements de la VaR

La VaR, une mesure synthétique du risque de marché

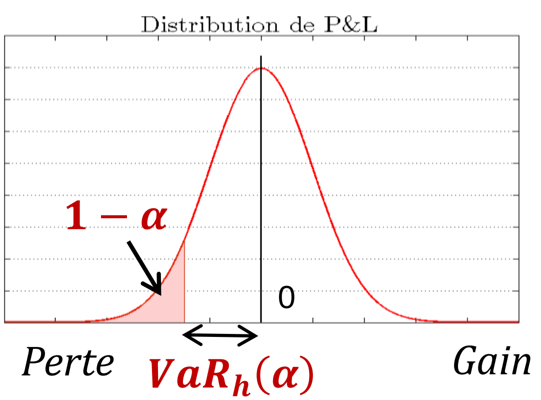
- ***Définition*** : La Value-at-Risk est définie comme la perte potentielle maximale que peut subir un portefeuille pour un <u>niveau de confiance donné</u> sur un <u>horizon fixé</u>.
  - Si la VaR d'un portefeuille est de 1MEUR pour un seuil de confiance de 99% à horizon 1jour, cela signifie qu'il y a 1 chance sur 100 pour qu'une perte subie soit supérieure à 1MEUR sur un jour.
  - Un niveau de 99% sur un horizon 1jour, suppose qu'une perte exceptionnelle supérieure à la VaR n'arrive que 2 à 3 fois par an (1 an = 251 jours ouvrés).

- ***Mathématiquement*** : Soit F la f.d.r de la variable aléatoire R des rendements de périodicité h du portefeuille. La VaR de niveau de confiance α à horizon d'investissement h est alors définie par

$$VaR_h(\alpha) = F^{-1}(1-\alpha)$$

ou encore

$$\mathbb{P}[R \leq VaR_h(\alpha)] = 1-\alpha$$



Rmq: la distribution n'est pas toujours centrée en 0.

- **Remarque :** on adopte ici une **vision rentabilité** où R est la distribution des rendements et $VaR_h(\alpha) = F^{-1}(1-\alpha)$.
  On pourrait adopter une **vision risque** où $P = -R$ est la distribution des pertes et dans ce cas $VaR_h(\alpha) = \mathrm{G}^{-1}(\alpha)$ avec G la f.d.r de P.

1. Fondements de la VaR

La VaR, une mesure synthétique du risque de marché

- **Mesure fonction de 3 paramètres :**
  - Le **niveau de confiance α**
    - Plus α est élevé, plus la VaR est élevée
    - Des niveaux trop extrêmes entrainent une mesure de faible qualité décorrelée de la réalité
      Un niveau de 99,99% à horizon 1 jour conduirait à un dépassement tous les 10000 jours, soit 40 ans.
  - L'**horizon temporel h**
    - Plus l'horizon est élevé, plus la VaR est élevée
    - Il doit être cohérent avec la profondeur d'historique disponible
  - La **distribution de pertes F**
    - Comment l'estimer ?

- **Changement d'horizon temporel : $h \to h \times \delta$**
  - Méthode du **Scaling**

$$VaR_{h\times\delta}(\alpha) = \sqrt{\delta} \times VaR_h(\alpha)$$

    - Provient du fait que les rendements sont supposés iid
    - Méthode peu rigoureuse
  - Construction d'une distribution de rentabilité à horizon $h \times \delta$ par **Méthode de Monte Carlo**
    1. Simulation de trajectoires de rentabilités sur $h \times \delta$ à partir de notre connaissance à horizon h
    2. Estimation du quantile de niveau $1 - \alpha$

1. Fondements de la VaR

La VaR, une mesure synthétique du risque de marché

- **La volatilité comme mesure de risque ?**

$$\sigma(R) = \sqrt{\mathbb{E}\left[\left(R - \mathbb{E}(R)\right)^2\right]}$$

- Toutes les rentabilités sont prises en compte
  - Positives ou non
  - Extrêmes ou non
- Appréhender le risque par la volatilité (moment d'ordre 2) suppose que les moments d'ordre supérieur n'ont pas besoin d'être pris en compte :
  - Le **skewness** (moment centré réduit d'ordre 3), représentant l'asymétrie de la distribution
  - Le **kurtosis** (moment centré réduit d'ordre 4), représentant l'aplatissement de la distribution
- C'est une **mesure de dispersion**, pas une mesure de risque

- ***Définition*** **: Une mesure de risque cohérente ρ sur l'espace $\mathcal{L}$ se caractérise par**

		σ	VaR
Normalité :	$\rho(0) = 0$	✓	✓
Homogénéité :	si $\lambda \geq 0, Z \in \mathcal{L}$ alors $\rho(\lambda Z) = \lambda\rho(Z)$	✓	✓
Invariance par translation :	si $a \in \mathbb{R}$ alors $\rho(Z + a) = \rho(Z) - a$	✗	✓
Monotonie :	si $Z_1 \leq Z_2$ alors $\rho(Z_1) \geq \rho(Z_2)$	✗	✓
Sous-additivité :	si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}$ alors $\rho(Z_1 + Z_2) \leq \rho(Z_1) + \rho(Z_2)$	✗	✗

- ***Illustration*** : 2 produits indépendants de probabilité de défaut respective de 4%, et VaR de niveau 5%

Sommaire

Introduction

I. Value-at-Risk : Fondements et modélisation

- Fondements de la VaR
- **Méthodes non-paramétriques**
- Méthodes paramétriques
- Evaluation de la mesure de risque
- Mesures de risque dérivées

II. Value-at-Risk par modélisation des extrêmes

III. Value-at-Risk dynamique

Conclusion

2. Méthodes non-paramétriques

La VaR Historique

- ***Principe*** **: Estimation de la distribution des rendements R par la fonction de répartition empirique du vecteur d'observations $\left(r_{1|1+h}, \dots, r_{T|T+h}\right)$**

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{1}_{\{r_{T|T+h} \leq x\}}$$

- ***Définition*** **: La VaR historique de niveau α correspond au quantile de niveau $1-\alpha$ de cette fonction de répartition empirique**

$$\widehat{VaR}_h(\alpha) = \widehat{F}_n^{-1}(1-\alpha)$$

- ***Calcul*** **: On l'évalue à partir des statistiques d'ordre du vecteur des rendements**

$$\min_t r_{T|T+h} = r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \cdots \leq r_{(T)} = \max_t r_{T|T+h}$$

En posant $t_\alpha = T \times (1-\alpha)$, et $\lfloor t_\alpha \rfloor$ l'entier inférieur le plus proche de t_α alors

- Au **sens strict** $\widehat{VaR}_h(\alpha) = r_{(\lfloor t_\alpha \rfloor)}$
- Par **interpolation linéaire** $\widehat{VaR}_h(\alpha) = r_{(\lfloor t_\alpha \rfloor)} + (t_\alpha - \lfloor t_\alpha \rfloor) \times \left(r_{(\lfloor t_\alpha \rfloor + 1)} - r_{(\lfloor t_\alpha \rfloor)}\right)$

\+ *Pas d'hypothèses de modèle, rapide à mettre en place*

− *Trop dépendant des données, peu robuste dans le temps, calcul peu précis si peu d'historique, simpliste*

2. Méthodes non-paramétriques

La VaR Bootstrap

- ***Principe*** : **Obtenir une distribution de la VaR historique par réplication de l'échantillon des rendements observés** $\left(r_{1|1+h}, \dots, r_{T|T+h}\right)$

- ***Mise en œuvre***
  - **i.** Choix d'un nombre de réplications B
  - **ii.** Construire B échantillons bootstrap obtenus via **tirage avec remise** dans l'échantillon initial

$$\left(r_{1|1+h}{}^{(b)}, \dots, r_{T|T+h}{}^{(b)}\right), \qquad b \in [\![1, B]\!]$$

  - **iii.** Calcul de la VaR historique pour chaque échantillon

$$\widehat{VaR}_h{}^{(b)}(\alpha) = \widehat{F}_n{}^{-1^{(b)}}(1-\alpha)$$

  - **iv.** Distribution de VaR historique

- ***Définition*** : **La VaR bootstrap de niveau α correspond à la moyenne des VaR historiques de cette distribution**

$$\widehat{VaR}_h(\alpha) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \widehat{VaR}_h{}^{(b)}(\alpha)$$

\+ *Pas d'hypothèses de modèle, réduit le biais d'échantillon, permet d'obtenir une distribution de la VaR*

− *Trop dépendant des données, peu robuste dans le temps*

Sommaire

Introduction

I. Value-at-Risk : Fondements et modélisation

- Fondements de la VaR
- Méthodes non-paramétriques
- **Méthodes paramétriques**
- Evaluation de la mesure de risque
- Mesures de risque dérivées

II. Value-at-Risk par modélisation des extrêmes

III. Value-at-Risk dynamique

Conclusion

3. Méthodes paramétriques

La VaR gaussienne

- ***Principe*** : Il est très commun de supposer la **normalité** de la distribution des rendements $\left(r_{1|1+h}, \dots, r_{T|T+h}\right)$. On émet alors l'hypothèse que $R \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ et on a

$$\mathbb{P}[R \leq VaR_h(\alpha)] = \mathbb{P}\left[\frac{R-\mu}{\sigma} \leq \frac{VaR_h(\alpha)-\mu}{\sigma}\right] = \phi\left(\frac{VaR_h(\alpha)-\mu}{\sigma}\right) = 1-\alpha$$

- ***Définition*** : En supposant que la rentabilité du portefeuille suit une loi normale, $R \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, la VaR gaussienne de niveau α se définit par

$$VaR_h(\alpha) = \mu + \sigma\phi^{-1}(1-\alpha)$$

- ***Calcul*** : On estime les paramètres de la loi à partir de l'échantillon

$$\hat{\mu} = \mu\left(r_{1|1+h}, \dots, r_{T|T+h}\right) \qquad \text{et} \qquad \hat{\sigma} = \sigma\left(r_{1|1+h}, \dots, r_{T|T+h}\right)$$

Et on obtient simplement $\widehat{VaR}_h(\alpha) = \hat{\mu} + \hat{\sigma}\phi^{-1}(1-\alpha)$

\+ *Rapide à mettre en place, simplicité de l'écriture de la VaR, hypothèse récurrente*

− *Distribution symétrique à queues fines*

➢ ***Distribution plus générique***

3. Méthodes paramétriques

La loi de Student

- ***Rappel*** **: Loi introduite pour la première fois dans l'estimation de l'intervalle de confiance lorsque la variance est inconnue.**
- ***Définition*** **: Soient $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $V \sim \chi^2(\nu)$ alors**

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/\nu}} \sim \mathcal{T}_\nu$$

de densité

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[1 + \frac{x^2}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

- ***Caractéristiques***
  - **L'espérance** de T vaut 0 *définie pour* $\nu > 1$

    La variance de T vaut $\frac{\nu}{\nu-2}$ *définie pour* $\nu > 2$

    Le skewness de T vaut 0 *définie pour* $\nu > 3$

    Le kurtosis de T vaut $\frac{3(\nu-2)}{\nu-4}$ *définie pour* $\nu > 4$
  - Lorsque $\nu \to \infty$, $T \to \mathcal{N}(0,1)$
  - Loi centrée et symétrique
    Mais non réduite, avec une épaisseur des queues de distribution **dépendante de ν**

La loi de Student généralisée

- ***Principe*** : Généralisation de la loi de Student
- ***Définition*** : Soient $T \sim \mathcal{T}_\nu$ et $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ alors

$$T_g = \mu + \sigma \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} T$$

suit une loi de **Student généralisée**, que l'on note $T_g \sim \mathcal{T}_{\mu,\sigma,\nu}$, de densité

$$f_{\mu,\sigma,\nu}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(\nu-2)\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[1 + \frac{1}{\nu-2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

- ***Caractéristiques***
  - **L'espérance** de T_g vaut μ
    La variance de T_g vaut σ^2
    Le skewness de T_g vaut 0
    Le kurtosis de T_g vaut $\frac{3(\nu-2)}{\nu-4}$
  - Lorsque $\nu \to \infty$, $T_g \to \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  - Avec $\mu = 0,\ \nu = \nu,\ \ \sigma = \sqrt{\nu/(\nu-2)}$, $T_g \sim \mathcal{T}_\nu$
  - $f_{\mu,\sigma,\nu}(x) = \frac{1}{\sigma_\nu} f_\nu\left(\frac{x-\mu}{\sigma_\nu}\right)$ avec $\sigma_\nu = \sigma\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$

\+ Distribution flexible, Formule de F

− Distribution symétrique

3. Méthodes paramétriques

La loi Skew Student

- ***Principe*** : Intégrer un paramètre d'asymétrie afin d'améliorer l'ajustement
- ***Définition*** : Soient $T_{g,1}, T_{g,2}$ deux variables aléatoires **indépendantes** de loi $\mathcal{T}_{0,1,\nu}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ alors

$$Z = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{1+\gamma^2}}\left(\gamma\left|T_{g,1}\right| + T_{g,2}\right)$$

suit une loi **skew Student**, que l'on note $Z \sim \mathcal{ST}_{\mu,\sigma,\gamma,\nu}$, de densité

$$f_{\mu,\sigma,\gamma,\nu}(x) = 2 f_{\mu,\sigma,\nu}(x) F_{\nu+1}\left(\gamma \frac{x-\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{\nu+1}{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2+\nu}}\right)$$

- ***Caractéristiques***
  - $\gamma > 0$ correspond à un skewness positif
    $\gamma < 0$ correspond à un skewness négatif
    $\gamma = 0$ correspond à une loi de Student généralisée

+ Distribution asymétrique, flexibilité du paramétrage

− Pas de formule analytique de F, possibilité d'overfitting

3. Méthodes paramétriques

Calculs des VaR

Démarche Générale

i. Choix d'un horizon h et d'un seuil de confiance α

ii. Choix d'une distribution de probabilité F_θ

iii. Estimation des paramètres de loi $\hat{\theta}$
   a. Méthode du maximum de vraisemblance
   b. Méthode des moments

iv. Validation de l'adéquation aux données
   a. Validation ex-ante
   b. Validation ex-post

v. Détermination de la VaR : $\boldsymbol{VaR_h(\alpha) = F_{\hat{\theta}}^{-1}(1-\alpha)}$

Sommaire

Introduction

I. Value-at-Risk : Fondements et modélisation

- Fondements de la VaR
- Méthodes non-paramétriques
- Méthodes paramétriques
- Evaluation de la mesure de risque
- Mesures de risque dérivées

II. Value-at-Risk par modélisation des extrêmes

III. Value-at-Risk dynamique

Conclusion

4. Evaluation de la mesure de risque

Protocoles d'évaluation

- ***Principe*** **: Une étape importante dans la mesure du risque de marché est l'évaluation de l'indicateur de risque. Des protocoles appropriés sont donc nécessaires pour évaluer la mesure.**

- ***Mise en œuvre*** **: On dispose de deux méthodes d'évaluation :**
  - **Une méthode <u>ex-ante</u> qui consiste à étudier l'ajustement des distributions estimées aux données**
    - Concerne les modèles paramétriques
    - Considérations graphiques
    - Tests statistiques d'adéquation
  - **Une méthode <u>ex-post</u> basée sur des backtests**
    - Concerne tout modèle
    - Partition des données en apprentissage / test
    - Calcul de la VaR sur l'échantillon d'apprentissage
    - Calcul du nombre d'<u>exceptions</u> sur l'échantillon de backtest (nombre de rentabilités inférieures à la VaR)
    - Confrontation du pourcentage d'exceptions et de leur probabilité théorique d'occurrence $1-\alpha$

4. Evaluation de la mesure de risque

Méthode ex-ante

- ***Principe*** **: Les méthodes ex-ante permettent de s'assurer de la qualité du modèle paramétrique établi. On utilise pour cela des critères graphiques (plutôt subjectifs) et des tests statistiques d'adéquation (plutôt objectifs)**

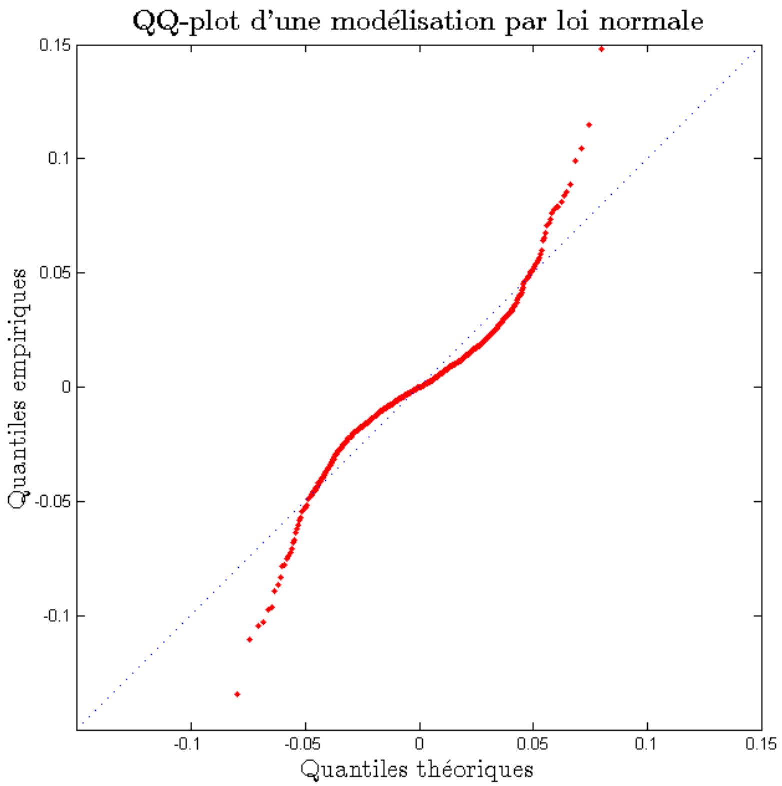
- ***Critères graphiques*** **: On peut citer :**
  - **Ajustement graphique global des densités empiriques et théoriques**
  - **Ajustement graphique des queues de distribution de ces même densités**
  - **Examen du QQ-plot**
    - Outil graphique confrontant **quantiles empiriques et théoriques**
    - Pour un échantillon de taille n, le QQ-plot représente les couples

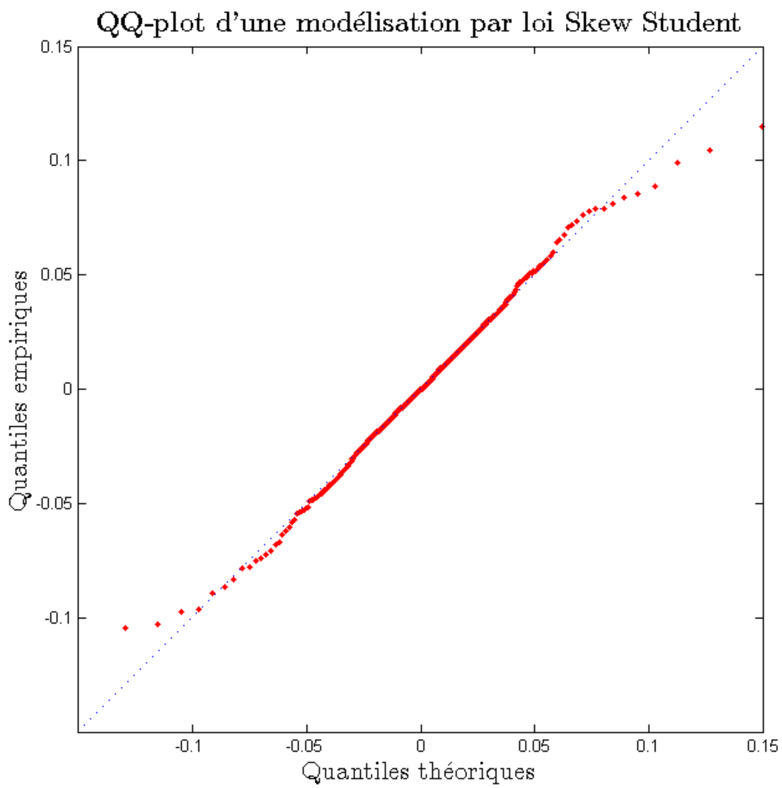
$$\left\{\left(F_{\hat{\theta}}^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right); r_{(k)}\right), \qquad k \in [\![1, n]\!]\right\}$$

    - Comparaison d'un couple de points à **niveau de quantile égal**
    - Une adéquation parfaite est caractérisée par une **représentation linéaire** du QQ-plot

4. Evaluation de la mesure de risque

Méthode ex-ante





4. Evaluation de la mesure de risque

Méthode ex-ante

- ***Tests statistiques d'adéquation*** : Consistent à évaluer s'il est **statistiquement probable** que les données observées soient issues de la distribution paramétrique estimée.
- ***Intuition*** : Plus les **fonctions de répartition empirique et théorique** sont semblables, Plus il est probable que l'échantillon provienne de cette loi paramétrique.
- ***Principe*** : La notion de similitude peut se voir en termes de **distance entre deux distributions**. La variété des tests provient de la diversité des mesures de distances :
  - Mesure locale : *Test de Kolmogorov Smirnov* (KS)

$$\Delta_n = \max_x \left| \widehat{F}_n(x) - F_{\widehat{\theta}}(x) \right|$$

  - Mesure globale :

$$\Delta_n = \int \omega(x).\left(\widehat{F}_n(x) - F_{\widehat{\theta}}(x)\right)^2 dx$$

- $\omega(x) = 1$ correspond au ***Test de Cramér-von-Mises (CvM)***
- $\omega(x) = \left[F_{\widehat{\theta}}(x)\left(1 - F_{\widehat{\theta}}(x)\right)\right]^{-1}$ correspond au ***Test d'Anderson-Darling (AD)***
- $\omega(x) = \begin{cases} [1 - F_{\widehat{\theta}}(x)]^{-2} \\ [F_{\widehat{\theta}}(x)]^{-2} \end{cases}$ correspond au ***Test d'Anderson-Darling modifié (ADup)***

4. Evaluation de la mesure de risque

Méthode ex-ante

- ***Mise en œuvre du test d'hypothèse*** :

i. Confrontation des deux hypothèses :

H_0 : Les données proviennent de la loi paramétrique estimée

H_1 : Les données n'en proviennent pas

ii. Calcul de la distance choisie Δ_n

iii. Estimation de la **p-value** associée à Δ_n sous hypothèse H_0

- **La loi de Δ_n est connue**
  - **Calcul direct de la p-value**
  - **Valeur généralement tabulée dans un logiciel pour les tests avec des lois paramétriques usuelles**

- **La loi de Δ_n est inconnue**
  - **Estimation indirecte de la p-value**
  - **Construction de la distribution de Δ_n par méthode de Monte Carlo**
    1. *Simulation de N_{MC} échantillons de même taille n*
    2. *Calcul de Δ_n pour chaque échantillon créé*

iv. Comparaison de la p-value calculée à un **seuil de confiance α_{test}**

v. Rejet de l'hypothèse H_0 si la p-value est inférieure α_{test}

Sommaire

Introduction

I. Value-at-Risk : Fondements et modélisation

- ❑ Fondements de la VaR
- ❑ Méthodes non-paramétriques
- ❑ Méthodes paramétriques
- ❑ Evaluation de la mesure de risque
- ❑ Mesures de risque dérivées

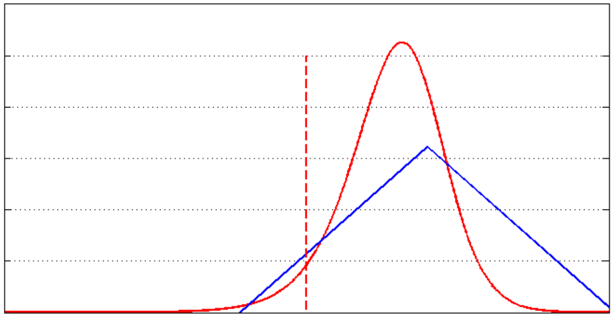
II. Value-at-Risk par modélisation des extrêmes

III. Value-at-Risk dynamique

Conclusion

5. Mesures de risque dérivées

- **Inconvénients de la VaR**
  - Non sous-additive
  - Ne renseigne pas sur le **profil de risque au-delà du quantile**



- **Même valeur de VaR à 95%**
- **Profil de risque bleu à <u>support fini</u>**
- **Profil de risque rouge à <u>queue épaisse et support infini</u>**
- **Même évaluation du risque des deux portefeuilles mais profils de risque extrêmement différents**

- ***Autres mesures de risque***
  - **Tail Value-at-Risk** *(TVaR)* : $$TVaR_h(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_h(\alpha)\,d\alpha$$
  - **Conditional Tail Expectation** *(CTE)* : $$CTE_h(\alpha) = \mathbb{E}[X|X < VaR_h(\alpha)]$$
  - **Expected Shortfall** *(ES)* : $$ES_h(\alpha) = \mathbb{E}[X - VaR_h(\alpha)|\, X < VaR_h(\alpha)]$$

- ***Propriétés :***
  1. $TVaR_h(\alpha) = VaR_h(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha} ES_h(\alpha)$
  2. $CTE_h(\alpha)$ et $TVaR_h(\alpha)$ coïncident lorsque la fonction de répartition est connue