Statistique
des risques extrêmes

Support de cours III

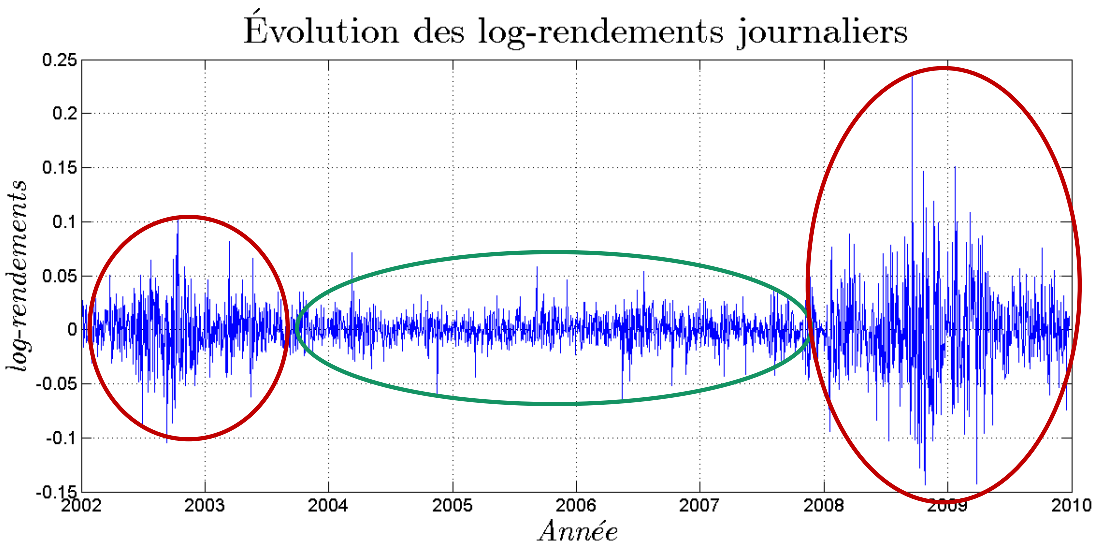
Nicolas Jeannelle

Direction des Risques – Risques Financiers

Confédération Nationale du Crédit Mutuel

Sommaire

Introduction



Observation **:**

- Périodes de **relative stabilité**
- Périodes de **forte volatilité**

- **Jusqu'à présent, la modélisation statique présupposait des rentabilités…**
  i. De **moyenne constante** au cours du temps
  ii. De **volatilité constante** au cours du temps
  iii. **Non auto-corrélées** dans le temps

➢ **L'utilisation de séries temporelles va permettre de s'affranchir de ces hypothèses**

Sommaire

1. Modèles ARMA

Notions fondamentales de séries temporelles

- ***Processus aléatoire*** **: Suite de variables aléatoires (X_t) indicées par le temps**

- ***Processus aléatoire stationnaire*** **: (X_t) est stationnaire lorsque sa structure est sable dans le temps, en d'autres termes**

$$\mathcal{L}\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right) \sim \mathcal{L}\left(X_{t_1+k}, \ldots, X_{t_n+k}\right)$$

  - En particulier, X_t et X_s ont **même loi**
  - Hypothèse très **restrictive** dans la plupart des cas

- ***Processus aléatoire stationnaire du second ordre*** **: (X_t) est dit stationnaire au second ordre lorsqu'il vérifie :**

  1. $\mathbb{E}[X_t] = m$
  2. $cov(X_t, X_s) = \gamma(t-s)$

  - La seconde propriété implique l'égalité des variances

- ***Bruit blanc*** **:**

Bruit blanc fort

1. $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$
2. $\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma^2$
3. ε_t et ε_s *ind.*

Bruit blanc faible

1. $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$
2. $\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma^2$
3. $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$

1. Modèles ARMA

Notions fondamentales de séries temporelles

- ***Corrélogramme*** **: Il représente les coefficients d'autocorrélation d'ordre h du processus (X_t) donnés par**

$$\rho(h) = \frac{cov(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{\mathbb{V}[X_t]\mathbb{V}[X_{t+h}]}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

- ***ACF (Auto Correlation Function)*** **: fonction des autocorrélations d'ordre h de (X_t) qui s'étudie simplement à l'aide du corrélogramme**

- ***PACF (Partial Auto Correlation Function)*** **: s'interprète par la régression de (X_t) sur lui-même, et plus précisément à la meilleure prévision linéaire moyenne de X_t par un passé de longueur h**

$$\mathbb{E}[X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-h}] = a_1(h)X_{t-1} + \cdots + a_h(h)X_{t-h}$$

  - Le coefficient $a_h(h)$, noté $r(h)$, est appelé **coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre h**
  - Il représente la **contribution** de la $h$ème valeur précédente à l'estimation de la moyenne à l'instant t
  - Le PACF correspond au graphe des $r(h)$

1. Modèles ARMA

Modèles ARMA

- ***Principe*** **: Une large famille de processus stationnaires peut être modélisée par des processus ARMA, composés de deux processus élémentaires :**

- ***AR (Processus autorégressif)*** **: (X_t) est un AR d'ordre p, $AR[p]$, s'il peut s'écrire**

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad \leftrightarrow \quad \Phi(B) X_t = \varepsilon_t$$

  - Où $\Phi(B) = \left(1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^p\right)$ et $B X_t = X_{t-1}$
  - ε_t est un **bruit blanc décorrelé** de $\mathcal{F}_{t-1}$
  - ***Identification***
    - PACF théoriquement **nul** à partir de $h = p + 1$
    - ACF à décroissance **lente**

- ***MA (Processus à moyenne mobile)*** **: (X_t) est un MA d'ordre q, $MA[q]$, s'il peut s'écrire**

$$X_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad \leftrightarrow \quad X_t = \Theta(B) \varepsilon_t$$

  - Où $\Theta(B) = \left(1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q\right)$
  - (ε_t) est une série temporelle de **bruit blanc**
  - ***Identification***
    - ACF théoriquement **nul** à partir de $h = q + 1$
    - PACF à décroissance **lente**

1. Modèles ARMA

Modèles ARMA

- ***Principe*** **: Un processus ARMA d'ordre p et q, $ARMA[p,q]$, est la superposition d'un $AR[p]$ et d'un $MA[q]$**

$$X_t = \theta_0 + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad \leftrightarrow \quad \Phi(B) X_t = \theta_0 + \Theta(B)\varepsilon_t$$

  - La constante θ_0 n'est pas gênante est peut être éliminée en travaillant sur $X_t - \mathbb{E}[X_t]$
  - L'identification des ordres du modèle n'est **pas si simple**, en général on procède comme suit :
    - Identification de couples de paramètres potentiels (p, q) avec les graphes de l'ACF et du PACF
    - Estimation des paramètres (φ_i) et (θ_j)
    - Vérification de la significativité des coefficients et du bruit blanc
    - Sélection d'un modèle final

- ***Processus ARIMA*** **: Dans le cas où le processus présente une tendance polynomiale d'ordre d**
  - On **différencie** d fois le processus, $\nabla^d X_t$, avec $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$, puis on modélise un ARMA

- ***Processus SARIMA*** **: Dans le cas où le processus présente une saisonnalité de période s**
  - On **différencie** 1 fois le processus à l'ordre s, $\nabla_s X_t$, avec $\nabla_s X_t = X_t - X_{t-s}$, puis on modélise un ARMA

Sommaire

2. Modèles ARCH / GARCH

Introduction

- ***Historique*** **: Les modèles ARCH ont été introduits par Engel en 1982 afin de mieux modéliser les données financières que ne le faisaient les modèles ARMA.**

  Ils ont été généralisés par Bollerslev quelques années plus tard avec le modèle GARCH.

- ***Motivations*** **:**

i. **Les queues épaisses que présentent les log rendements rejettent l'idée d'une distribution gaussienne des bruits blancs.**

ii. **De plus, la présence de clusters de volatilité remet également en cause l'hypothèse d'homoscédasticité du processus observé, hypothèse utilisée dans la modélisation ARMA.**

2. Modèles ARCH / GARCH

Introduction au modèle ARCH

- ARCH signifie Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique

- ***Cas de l'AR*[1]** : Considérons le processus $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ où $\varepsilon_t \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$

  - $\mathbb{V}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$ $\Rightarrow$ Modèle **non-conditionnellement homoscédastique**
  - $\mathbb{V}(X_t | X_{t-1}) = \sigma^2$ $\Rightarrow$ Modèle **conditionnellement homoscédastique**

  - Ne permet pas de prendre en compte des périodes de forte volatilité
  - Nécessité d'avoir un terme d'erreur dépendant du passé

- ***Modèle ARCH*[1]** : Il se définit par

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{a_0 + a_1 {X_{t-1}}^2}$$

  - $\mathbb{V}(X_t) = \frac{a_0 \sigma^2}{1-a_1 \sigma^2}$ $\Rightarrow$ Modèle **non-conditionnellement homoscédastique**
  - $\mathbb{V}(X_t | X_{t-1}) = \left[a_0 + a_1 {X_{t-1}}^2\right] \sigma^2$ $\Rightarrow$ Modèle **conditionnellement hétéroscédastique**

2. Modèles ARCH / GARCH

Modèle ARCH

- ***Définition*** : (X_t) est un ARCH d'ordre p, $ARCH[p]$, s'il peut s'écrire

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

où $h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i {X_{t-i}}^2$ et ε_t un bruit blanc de variance σ^2 indépendant du passé

- ***Propriétés*** :
  - **Conditions de stationnarité** : $a_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{p} a_i < 1$
  - Moyenne conditionnelle est nulle
  - Covariance entre X_t et X_{t-h} est nulle
    - Un processus ARCH s'apparente donc à un **bruit blanc faible non gaussien**
    - Corrélogramme d'un bruit blanc
  - Loi conditionnelle de X_t est une loi **normale centrée** de variance $h_t\sigma^2$
  - Si on note $u_t = {X_t}^2 - h_t$, un processus centré, décorrélé, à variance non constante, alors

$${X_t}^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i {X_{t-i}}^2 + u_t$$

  - La représentation de ${X_t}^2$ est **proche d'un $AR[p]$**

2. Modèles ARCH / GARCH

Modèle GARCH

- ***Définition*** : (X_t) est un GARCH d'ordre p et q, $GARCH[p,q]$, s'il peut s'écrire

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

où $h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i {X_{t-i}}^2 + \sum_{j=1}^{q} b_j h_{t-j}$ et ε_t un bruit blanc de variance σ^2 indépendant du passé

- ***Propriétés*** :
  - **Conditions de stationnarité** : $a_i, b_j \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1$
  - Moyenne conditionnelle est nulle
  - $\mathbb{V}(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum a_i - \sum b_j}$ donc **non-conditionnellement homoscédastique**
  - $\mathbb{V}(X_t|X_{t-1}) = h_t\sigma^2$ mais **conditionnellement hétéroscédastique**
  - Difficile de spécifier les ordres d'un modèle GARCH
  - En général, les applications ne se basent que sur des processus de type $GARCH[1,1]$

  - ***Interprétation*** : un modèle $GARCH[1,1]$ exprime le fait que la variance d'aujourd'hui est la **pondération** de la variance d'hier et du choc constaté la veille sur le processus sous-jacent.

2. Modèles ARCH / GARCH

Estimation et validation

- ***Test de l'hétéroscédasticité*** **: Plusieurs tests peuvent être réalisés pour savoir si un de ces modèles peut être applicable**
    - Considération graphique : persistance de volatilité, clustering apparent
    - Observation d'un kurtosis significativement **supérieur à 3**
    - Considération graphique : ACF et PACF de la **série au carré** proche de ceux d'un ARIMA
    - Test du portemanteau (**Ljung-Box *Q*-test**) sur la série au carré pour tester la présence d'un processus GARCH

- ***Estimation des paramètres*** **: principalement 2 méthodes**
    - Méthode des moindres carrés
    - Méthode du maximum de vraisemblance en supposant des résidus provenant d'un **bruit blanc gaussien**

- ***Validation du modèle*** **:**
    - **Significativité** des paramètres estimés
    - Validation du caractère **bruit blanc** des résidus :
        - Test du portemanteau afin de vérifier la non présence d'autocorrélation
        - Test de normalité des résidus (Jarque-Bera, Shapiro Wilk, KS…)

Sommaire

3. Application

Idée de l'article

- ***Principe*** **: Calcul de VaR dynamique avec utilisation de modèle GARCH**

- ***Mise en œuvre*** **:**

  i. Construction de l'échantillon des log-rendements

  ii. Modélisation de la **dynamique** de la série par un $AR[1]$

  iii. Modélisation d'un **phénomène hétéroscédastique** des résidus de l'$AR[1]$ par un modèle $GARCH[1,1]$

  iv. Test de **différentes modélisations** du processus des résidus du modèle $GARCH[1,1]$

  v. Calcul des VaR associées

  vi. Backtest dynamique

➢ ***Remarque*** : dans la pratique, l'estimation des paramètres liés aux étapes ii et iii est réalisée en une seule étape.

3. Application

Dynamique des log-rendements

- ***Modèle*** $\boldsymbol{AR[1]-GARCH[1,1]}$ **: la dynamique des log-rendements** (r_t) **est modélisée par**

$$r_t = \mu_t + \sigma_t \times \varepsilon_t$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \mu_t = \mu + \varphi r_{t-1} \\ {\sigma_t}^2 = \omega + a(r_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + b{\sigma_{t-1}}^2 \end{cases}$$

- ***Estimation*** **:**
  - **5 paramètres à estimer**
  - **Utilisation du maximum de vraisemblance même si :**
    - Il suppose normalement les résidus comme un bruit blanc **gaussien**
    - Cependant les estimateurs sont convergents
  - **On s'assure de la stationnarité de la série en fonction des paramètres estimés**

- ***Validation*** **:**
  - **Vérification antérieure sur** (r_t) **de la présence d'hétéroscédasticité**
  - **Validation de la présence d'un bruit blanc des** (ε_t)

3. Application

Calcul de VaR

- ***Principe*** : Estimation d'une **VaR en $t+1$** à partir de l'ensemble des **informations disponibles en t**, et de l'estimation des paramètres du modèle

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{t+1} = \hat{\mu} + \hat{\varphi} r_t \\ \hat{\sigma}_{t+1}{}^2 = \hat{\omega} + \hat{a}(r_t - \hat{\mu}_t)^2 + \hat{b}\hat{\sigma}_t{}^2 \end{cases}$$

  - ❑ Nécessité d'initialiser la première valeur des volatilités : on utilise la **variance long terme :** $\frac{\omega}{1-a-b}$

$$\mu_1 = \hat{\mu} \quad ; \quad \sigma_1 = \sqrt{\frac{\omega}{1-a-b}}$$

- ***Calcul*** : En notant **$q_{1-\alpha}$ le quantile de niveau $1-\alpha$ des résidus ε_t** on a

$$VaR_{h,t+1}(\alpha) = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \times q_{1-\alpha} = \hat{\mu} + \hat{\varphi} r_t + \sqrt{\hat{\omega} + \hat{a}(r_t - \hat{\mu}_t)^2 + \hat{b}\hat{\sigma}_t{}^2} \times q_{1-\alpha}$$

  - ❑ Comment estimer $q_{1-\alpha}$? → *cf.* Parties *I & II*
    - Estimations non paramétriques
    - Estimations paramétriques
    - TVE
  - ❑ Justification de la modélisation utilisée : analyse ex-ante

3. Application

Backtest

- ***Principe*** **: Le backtest peut encore se faire en scindant la série en deux échantillons d'apprentissage et de test. Il s'agit alors se reproduire la dynamique de la série, apprise sur l'apprentissage, sur la période de test. Les VaR sont alors recalculées chaque jour en intégrant l'information du rendement du jour passé.**

- **S'agissant du backtest ex-post, on peut également chercher à identifier une loi du nombre de dépassements.**

- **En notant I_t la variable binaire de dépassement en $t+1$ de la VaR estimée en t, on a**

$$I_t = \mathbf{1}_{\{r_{t+1} > VaR_{h,t+1}(\alpha)\}} \sim \mathcal{B}(1-\alpha)$$

- **Les variables I_t étant *iid*, le nombre total de dépassements est donc défini par**

$$\sum_{t=1}^{n} I_t \sim \mathcal{B}(n, 1-\alpha)$$

- **On peut effectuer des tests pour juger s'il est statistiquement probable que le nombre de dépassements observés provienne bien de la loi binomiale théorique**