ПРИМЕР 6. $R \subseteq A^2$, A={1,2,3,4}, R={(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (2,4)}

Рефлексивность

- Высказывание $(x,x) \in R$ для всех $x \in A$ ложно. Контрпример: x=3, $3 \in A$, *но* $(3,3) \notin R$. Следовательно, отношение *R не является рефлексивным.*

Иррефлексивность

- Высказывание $(x,x) \notin R$ для всех $x \in A$ ложно. Контрпример: *x=1*, но *(1,1)*$\in$ R. Следовательно, отношение *R не является ирррефлексивным*.

Симметричность

- Высказывание если $(x,y) \in R$ => $(y,x) \in R$ ложно. Контрпример: $(1,2) \in R$, *но* $(2,1) \notin R$. Следовательно, отношение *R не является симметричным.*

Антисимметричность

- Высказывание если $(x,y) \in R$ *и* $(y,x) \in R$ => $x = y$ истинно. Контрпример подобрать невозможно. Нет подходящих пар. Следовательно отношение *R является антисимметричным.*

Транзитивность

- Высказывание если $(x,y) \in R$ *и* $(y,z) \in R$ => $(x,z) \in R$ ложно. Контрпример: пары (1,2),(2,3) $\in R$, но пара $(1,3) \notin R$. Следовательно отношение *R не является* транзитивным.

Отношение эквивалентности

Отношение $R \subseteq M^2$ называется ***отношением эквивалентности*** (или просто ***эквивалентностью***) на множестве M, если оно ***рефлексивно, симметрично и транзитивно.***

Пример: Пусть $R \subseteq N^2$, $R = \{(x,y) \mid (x-y)/2$ - *целое число*$\}$. Доказать, что R есть эквивалентность на множестве N.

Решение: Если R есть эквивалентность на N, то R должно быть ***рефлексивно, симметрично и транзитивно.*** Проверим это:

1. Если отношение рефлексивно, то $[(\forall x \in N)\ xRx]$

$xRx \Rightarrow (x-x)/2 = 0$ - целое число $\Rightarrow$ ***R – рефлексивно***

2. Если отношение симметрично, то $[xRy \rightarrow yRx]$

$xRy \Rightarrow (x-y)/2 = k,\ k \in Z \Rightarrow (y - x)/2 = -k$ - целое число $\Rightarrow yRx$

R – симметрично

3. Если отношение транзитивно, то $[xRy \wedge yRz \rightarrow xRz]$

$xRy \Rightarrow (x-y)/2 = k,\ k \in Z$

$+$

$yRz \Rightarrow (y-z)/2 = n,\ n \in Z$

$= (x-z)/2 = k + n$ - целое число $\Rightarrow xRz$

R – транзитивно

Эквивалентность и разбиение множества

Пусть М – произвольное множество. ***Семейство P непустых, попарно непересекающихся подмножеств называется разбиением множества M,*** если **их объединение образует множество М.**

Другими словами: семейство ***P*** есть разбиение множества ***M***, если каждый элемент множества ***M*** принадлежит точно одному подмножеству из ***P***.

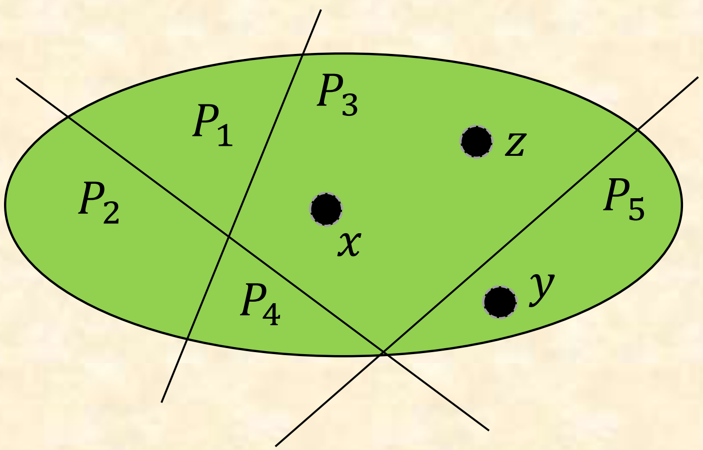
Пример: М = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

$P_1 = \{1, 3, 5\}$, $P_2 = \{2\}$, $P_3 = \{4, 6\}$

$\boldsymbol{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ – есть разбиение М на 3 части.

Пусть ***P*** есть разбиение множества ***M.*** Определим отношение $R \subseteq M^2$ следующим образом:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ принадлежат одной части разбиения}$$



$(x, z) \in R$ $\quad (x, y) \notin R$

Очевидно, что ***R* есть эквивалентность на *M*.**

Эквивалентность и разбиение множества

Теорема *(о факторизации)***.** Пусть *R* есть эквивалентность на множестве *M*. Тогда существует такое разбиение Р множества *M*, что элементы *x* и *y* находятся в отношении *R* тогда и только тогда, когда они принадлежат одной части разбиения Р.

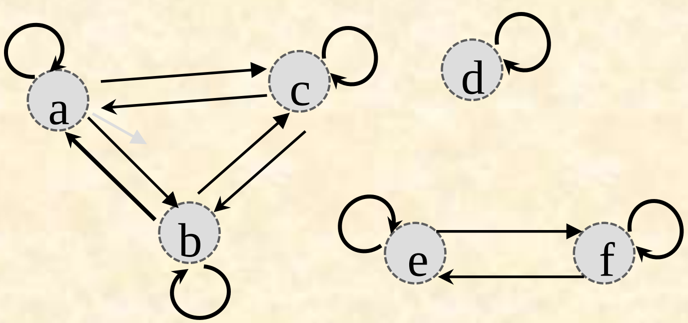
Доказательство:

1. Построим семейство Р подмножеств множества М следующим образом

Для каждого элемента $x \in$ М положим $P(x) = \{y | xRy\}$ $\Rightarrow$ Р $= \{P(x) | x \in$ М$\}$

Замечание: может быть $x \neq y,$ но $P(x) = P(y)$

Например, пусть R – есть эквивалентность, представленная графом



Тогда: $P(a) = P(b) = P(c) = \{a, b, c\}$

$P(d) = \{d\}$

$P(e) = P(f) = \{e, f\}$

$\boldsymbol{P} = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e, f\}\}$

Эквивалентность и разбиение множества

2. Покажем, что P есть разбиение множества M. $\mathrm{P} = \{P(x) | x \in \mathrm{M}\}$

1) R - рефлексивно ⇒ $(\forall x \in M)\ xRx$, $P(x) = \{y | xRy\}$ ⇒ $(\forall x \in M)\ x \in P(x)$

То есть каждый элемент $x \in M$ содержится в хотя бы в одном подмножестве P, т.е. в объединение подмножеств из P войдут все элементы множества.

$$\bigcup_{x \in \mathrm{M}} P(x) = M$$

2) Покажем теперь, что если части разбиения $P(x) \neq P(y)$, то они не пересекаются.

Пусть $P(x) \cap P(y) \neq \emptyset$ ⇒ $\exists z: z \in P(x) \cap P(y)$ ⇒ $z \in P(x)$, $z \in P(y)$ ⇒ xRz, yRz ⇒ xRy

---

Рассмотрим теперь произвольный элемент $h \in M$

$h \in P(x)$ ⇒ xRh и xRy ⇒ hRy ⇒ $h \in P(y)$

$h \in P(y)$ ⇒ yRh и xRy ⇒ hRx ⇒ $h \in P(x)$

⇒ $P(x) = P(y)$

Таким образом мы доказали, что если части разбиения пересекаются, то они совпадают.

Следовательно, если части разбиения не совпадают, то они не пересекаются.

Эквивалентность и разбиение множества

3. Осталось доказать, что $xRy \Leftrightarrow x$ и y принадлежат одной части разбиения Р.

$P(x) = \{y|xRy\}$

Если xRy, то $y \in P(x)$, но $x \in P(x)$ $\Rightarrow$ $x, y \in P(x)$

И наоборот, если $x \in P(z)$, $y \in P(z)$ для некоторого z $\Rightarrow$ xRz, yRz $\Rightarrow$ xRy

---

Таким образом отношение эквивалентности R разбивает все множество M на части таким образом, что любые два элемента одной части находятся в отношении R, а любые два элемента разных частей не находятся в отношении R.

Эти части разбиения называются ***классами эквивалентности***.

Классом эквивалентности элемента $x \in M$ по эквивалентности R называется множество $[x]_R = \{y|(x,y) \in R\}$.
Семейство классов эквивалентности называется ***фактор множеством*** M по R и обозначается M/R

Классы эквивалентности

Пример: Пусть $R \subseteq N^2$, $R = \{(x,y) \mid (x\text{-}y)/2$ - *целое число*$\}$. Найти фактор множество.

Решение: $[x]_R = \{y|(x,y) \in R\}$
Найдем классы эквивалентности каждого элемента множества $N = \{1,2,3,\ldots\}$ по заданному отношению

Для элемента «1»: $[1]=\{y|(1,y) \in R\} = \{y|\frac{1-y}{2} -$ целое число$\} = \{1, 3, 5, 7,\ldots\}$

Для элемента «2»: $[2]=\{y|(2,y) \in R\} = \{y|\frac{2-y}{2} -$ целое число$\} = \{2, 4, 6, 8,\ldots\}$

Фактор множество $N/R = \{[1],[2]\}$

Таким образом:

1. Отношение эквивалентности разбивает *все множество* натуральных чисел на два *непустых непересекающихся* подмножества.

2. Элементы одного класса находятся в отношении R друг с другом, элементы разных классов не находятся в отношении R друг с другом.

ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА

Отношение $R \subseteq M^2$ называется ***отношением частичного порядка,*** если оно ***рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.***

При этом само множество M называется ***частично упорядоченным*** по отношению R.

Если R – (частичный) порядок на М, то запись xRy читается как «элемент x предшествует элементу y».

Пример: Пусть отношение R задано на множестве **N** следующим образом

$R = \{(a,b) \mid b/a$ – целое число$\}$. Покажем, что R – есть частичный порядок на **N**.

Решение: Проверим, что R – рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

1. $[(\forall a \in N) \quad aRa]$ $\Leftrightarrow$ a / a - целое число $\Rightarrow$ *R – рефлексивно*

2. $[(aRb$ и $bRa) \rightarrow a = b]$ $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} b/a = k, k \in Z \\ a/b = n, n \in Z \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $a = b$ $\Rightarrow$ *R – антисимметрично*

3. $[aRb \wedge bRc \rightarrow \quad aRc]$ $\Leftrightarrow$ $b/a = k$, $c/b = n$ $\Rightarrow$ $c/a = k \cdot n$ - целое число $\Rightarrow$ *R – транзитивно*

Следовательно R – есть частичный порядок на N.

Почему частичный? Не все пары элементов ***не все элементы сравнимы по заданному отношению***. Например, пара $(2,4) \in R$, пара $(2,5) \notin R$. Говорят, что элементы 2 и 5 ***несравнимы по данному отношению.***

ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА

Отношение R называется ***строгим порядком, если оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно.***

Частичный порядок называется ***линейным***, если ***любые два элемента множества сравнимы по данному отношению.*** Множество, вместе с установленным на нем линейным порядком называется ***линейно упорядоченным.***

Пример: Пусть отношение R задано на множестве **N** следующим образом $R = \{(a,b) \mid a \leq b\}$. Такой порядок называют ***естественным***. Покажем, что R – линейный порядок на **N**.

Решение: Проверим, что R – рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

1. $[(\forall a \in N) \quad aRa]$ $\Leftrightarrow$ $a \leq a$ - истинно $\Rightarrow$ *R – рефлексивно*

2. $[(aRb$ и $bRa) \to a = b\ ]$ $\Leftrightarrow$ $a \leq b$ и $b \leq a$ $\Rightarrow$ $a = b$ $\Rightarrow$ *R – антисимметрично*

3. $[aRb \wedge bRc \to \ aRc]$ $\Leftrightarrow$ $a \leq b$ и $b \leq c$ $\Rightarrow$ $a \leq c$ $\Rightarrow$ *R – транзитивно*

Следовательно R – есть частичный порядок на N.

Любые 2 натуральных числа можно сравнить по данному отношению $\Rightarrow$

Естественный порядок на множестве натуральных чисел является линейным.

Непосредственное предшествование

Пусть (A, R) – упорядоченное множество, xRy и $x \neq y$.

Говорят, что элемент x ***непосредственно предшествует*** элементу y, если не существует такого элемента z, отличного от элементов x и y, что xRz и zRy.

Отношение непосредственного предшествования для отношения R будем обозначать R^*

Примеры:

1) В множестве $(\mathbb{Z}, \leq)$ каждому элементу $z \in Z$ непосредственно предшествует элемент $z - 1$.
2) В множестве $(\mathbb{R}, \leq)$ ни один элемент не имеет непосредственно предшествующего элемента, т.е. $R^* = \emptyset$.

Непосредственное предшествование

Пусть R – есть порядок на множестве А и xRy. Последовательность элементов $z_1, z_2, \dots, z_n$ множества А, где $z_1 = x, z_n = y$, и $z_k R z_{k+1}$ $(k = 1,2, \dots, n-1)$, называется **цепочкой между $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$**.

Теорема *(о конечных упорядоченных множествах)***.** Пусть (A, R) – конечное упорядоченное множество, x и y – различные элементы множества А, и xRy. Существует цепочка $z_1, z_2, \dots, z_n$ между элементами x и y в которой $z_k R^* z_{k+1}$ для каждого $k = 1,2, \dots, n-1$.

Доказательство:

Среди всех цепочек между элементами x и y выберем цепочку наибольшей длины. Пусть это будет цепочка $z_1, z_2, \dots, z_n$. Эта цепочка удовлетворяет условиям теоремы: каждый ее элемент цепочки, кроме z_n, непосредственно предшествует следующему элементу, т.е. $z_k R^* z_{k+1}$.

Действительно, если это не так, то между элементами z_k и z_{k+1} найдется промежуточный элемент u, такой что $z_k R u$ и $u R z_{k+1}$. Но в этом случае мы получим более длинную цепочку: $z_1, z_2, \dots z_k, u, z_{k+1}, z_n$ между x и y .

ДИАГРАММЫ ХАССЕ

Граф отношения R^* называют диаграммой Хассэ упорядоченного множества (A, R).

Диаграмма Хассэ дает полное описание множества, вместе с заданным на нем порядком. Обычно на диаграмме предшествующая вершина изображается ниже последующей. Поэтому связь между вершинами на диаграмме изображаются линиями, а не стрелками.

Пример: Пусть $M=\{2,3,4,6,7,9,12\}$, $R = \{(a,b) | b/a$ – *целое число*, $a,b \in M\}$.