1.Матрицы

Алгебраическое дополнение

$(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i$- алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя n-ого порядка

$$(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i = A_{ij}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \forall i \in \overline{i,n}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \forall j \in \overline{i,n}$$

Свойство алгебраического дополнения

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{для} \qquad \forall i \in \overline{i,n} \qquad\qquad \text{возьмем} \quad i = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2j}A_{1j} + \cdots + a_{2n}A_{1n} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

A_{11}

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

A_{11}

Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} \overset{1\text{стл} - 3\cdot 4\text{стл}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$$= a_{11}A_{11} + 0A_{21} + 0A_{31} + 0A_{41} = a_{11}A_{11} = \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} \overset{2\text{стл} - 2\cdot 1\text{стл}}{=} \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} =$$

$$8 \cdot \begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot 20 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot 20 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 20 \cdot 5 \cdot (5 - 4) = 800$$

Теорема (перемножение определителей). Для любых двух квадратных матриц одного порядка определитель произведения матриц равен произведению их определителей

$$\det(A * B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Обратная матрица

$B = A^{-1}$ $\quad A * B = B * A = E \quad$ E − единичная матрица

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$$

матрица A^{-1} единственная

$$A_1^{-1} * A = E \qquad A_2^{-1} * A = E \longrightarrow (A_1^{-1} - A_2^{-1}) * A = O$$

A – не нулевая матрица $\Rightarrow A_1^{-1} - A_2^{-1} = O$

$$A_1^{-1} = A_1^{-1} - A_2^{-1} + A_2^{-1} = O + A_2^{-1} \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}$$

Теорема. $A * A^{-1} = E \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Необходимость $A * A^{-1} = E \Rightarrow \det(A) \neq 0$

$$A * A^{-1} = E \rightarrow \det(A * A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

Достаточность $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A * A^{-1} = E$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow D^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C = A * B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{23} + \cdots + a_{1n}A_{2n} = 0$$

$$c_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \Delta$$

$$C = A * B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E \qquad A * B = E$$

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Delta(A) \equiv \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$A \to A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \to A_1^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \to B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$\Delta \neq 0$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = A * B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$c_{11} = \frac{1}{\Delta}(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) = \frac{1}{\Delta}\Delta = 1$$

$$c_{22} = \frac{1}{\Delta}(a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}) = \frac{1}{\Delta}\Delta = 1$$

$$c_{12} = \frac{1}{\Delta}(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{23}A_{13}) = \frac{1}{\Delta}0 = 0$$

$$c_{13} = \frac{1}{\Delta}(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{23}A_{33}) = \frac{1}{\Delta}0 = 0$$

Элементарные преобразования матриц

1. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
2. Прибавление одной строки (столбца) к другой строке (столбцу).

$$A \rightleftarrows A'$$

Пример 1 (прибавление умноженной на коэффициент одной строки к другой).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} = A'$$

$$A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\alpha a & -\alpha b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\alpha a & -\alpha b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

Пример 2 (меняем строки местами).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a + \mathrm{c} & b + d \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -a - \mathrm{c} & -b - d \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -a - \mathrm{c} & -b - d \\ c - a - c & d - b - d \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -a - \mathrm{c} & -b - d \\ -a & -b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -a - \mathrm{c} & -b - d \\ a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -a - \mathrm{c} + a & -b - d + b \\ a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\mathrm{c} & -d \\ a & b \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Теорема. (Об обратимости элементарных преобразований)
Если матрица A' получается из матрицы A при помощи конечного числа элементарных преобразований, то и наоборот, матрицу A можно получить из матрицы A' при помощи конечного числа элементарных преобразований.

Каждое элементарное преобразование строк матрицы A размером $\dim(A) = m \times n$ равносильно умножению матрицы A слева на некоторую квадратную матрицу S размером $\dim(S) = m$.

Каждое элементарное преобразование столбцов матрицы A размером $\dim(A) = m \times n$ равносильно умножению матрицы A справа на некоторую квадратную матрицу S размером $\dim(S) = n$.

Матрица S не зависит от матрицы A и полностью определяется преобразованием, которое матрица S осуществляет.

Определение. Матрица S, умножением на которую осуществляется элементарное преобразование называется элементарной матрицей.

$$\dim(A) = m \times n \qquad \dim(S_1) = m$$

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \dim(A) = 3 \times 4 \quad \dim(S_1) = 3$$

$$S_1 * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 \cdot 4 & 5 \cdot 4 & 6 \cdot 4 & 5 \cdot 4 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad \boxed{i = 2, \qquad j = 2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B * S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 4 & 3 \\ 4 & 5 \cdot 4 & 6 \\ 7 & 8 \cdot 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \boxed{i = 2, \qquad j = 2}$$

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{i = 2, \qquad j = 1}$$

$$S_2 * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 & 5+2 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B * S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2 & 3 \\ 4+5 & 5 & 6 \\ 7+8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \boxed{i = 2, \qquad j = 1}$$

Умножение строки с индексом *i* матрицы на число

Умножение слева матрицы A размерности $\dim(A) = m \times n$ на элементарную матрицу S, которая получена из единичной матрицы E порядка m заменой i-ой единицы на диагонали на число $\alpha \neq 0$, приводит к матрице $S * A$, отличающейся от матрицы A тем, что ее i-я строка умножена на α.

Прибавление к строке с индексом *i* строку с индексом *j*

Умножение слева матрицы A размерности $\dim(A) = m \times n$ на элементарную матрицу S, которая получена из единичной матрицы E порядка m заменой нуля, который стоит на пересечении i-ой строки с j-м столбцом на единицу , приводит к матрице $S * A$, отличающейся от матрицы A тем, что к i-ой строке прибавляется строка j.

Пример 3.

$$S_2 * S_1 * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 \cdot 4 & 5 \cdot 4 & 6 \cdot 4 & 5 \cdot 4 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 \cdot 4 + 1 & 5 \cdot 4 + 2 & 6 \cdot 4 + 3 & 5 \cdot 4 + 2 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Последовательность выполнения нескольких элементарных преобразований строк осуществляется умножением слева на произведение соответствующих элементарных матриц, причем множитель, который соответствует преобразованию, выполненному позже стоит левее.

Умножение столбца с индексом j матрицы на число

Умножение справа матрицы A размерности $\dim(A) = m \times n$ на элементарную матрицу S, которая получена из единичной матрицы E порядка n заменой i-ой единицы на диагонали на число $\alpha \neq 0$, приводит к матрице $A * S$, отличающейся от матрицы A тем, что ее j-й столбец умножен на α.

Прибавление к столбцу с индексом *j* строку с индексом *i*

Умножение справа матрицы A размерности $\dim(A) = m \times n$ на элементарную матрицу S, которая получена из единичной матрицы E порядка n заменой нуля, который стоит на пересечении i-ой строки с j-м столбцом на единицу, приводит к матрице $A * S$, отличающейся от матрицы A тем, что к j-му столбцу прибавляется столбец i.

Пример 4.

$$A * S_1 * S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 4 & 3 \\ 4 & 5 \cdot 4 & 6 \\ 7 & 8 \cdot 4 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 4 & 2 \cdot 4 & 3 \\ 4 + 5 \cdot 4 & 5 \cdot 4 & 6 \\ 7 + 8 \cdot 4 & 8 \cdot 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Последовательность выполнения нескольких элементарных преобразований <u>столбцов</u> осуществляется умножением <u>справа</u> на произведение соответствующих элементарных матриц, причем множитель, который соответствует преобразованию, выполненному <u>позже</u> стоит <u>правее</u>.

Квадратная матрица A , определитель которой $\det(A) \neq 0$, называется невырожденной матрицей, а у которой $\det(A) = 0$ называется вырожденной матрицей.

Теорема. Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде произведения элементарных матриц.