Перестановки

Пусть имеется *n* различных элементов из которых нужно сформировать набор из *k* элементов. Такой набор называется ***размещением*** или ***k-перестановкой*** из *n* элементов. Обозначение: $\boldsymbol{P_n^k}$

Номер элемента *k* - перестановки	**Число способов выбора**
1	$\boldsymbol{n}$
2	$\boldsymbol{n-1}$
3	$\boldsymbol{n-2}$
……………………..	**…………………………….**
k	$\boldsymbol{n-(k-1)}$

В соответствии с правилом *последовательного выбора*, выбор всей *k* – перестановки может быть осуществлен $\boldsymbol{P_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}$ способами.

Перестановки

Итак мы установили, что выбор *k* элементов из *n* элементов *с учетом порядка* может быть осуществлен $\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$ способами.

Чтобы преобразовать последнее выражение воспользуемся **определением факториала**

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(n\text{-}2)\cdot(n\text{-}1)\cdot n$ и некоторыми его **свойствами** $n! = (n-1)!\cdot n, 0! = 1$

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\boldsymbol{P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}.$$

Рассмотрим теперь упорядоченную выборку **всех n объектов**. Положим $\boldsymbol{n = k}$ и учтем, что $0! = 1$.

$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$\boldsymbol{P_n = n!}$ - число перестановок всех элементов

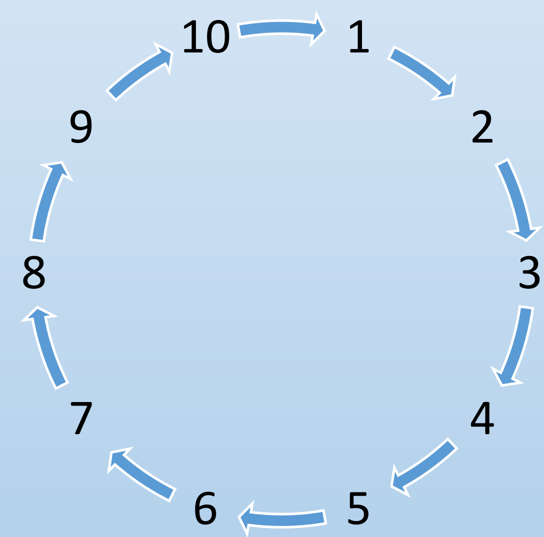
Перестановки

Пример. Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9, если все цифры в числе различны?

Решение. Задача сводится к нахождению числа способов выбрать 4 цифры из 9-ти с учетом порядка.

$$P_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 3024$$

Пример. Сколькими способами можно рассадить 10 человек за круглым столом, если имеет значение лишь порядок соседей.



Решение. Посадим одного человека на какое-то место. Выбор места не важен, т.к. он не влияет на порядок соседей. После этого оставшихся 9 человек можно рассадить 9! способами.

Сочетания

Пусть теперь имеется **n – различных элементов,** из которых нужно выбрать **k элементов** без учета порядка**.** Сколькими способами это можно сделать? **Число таких способов называется числом сочетаний и обозначается** $\boldsymbol{C_n^k}$ или $\binom{n}{k}$**.**

Читается как «число сочетаний из n по k»

Из определения перестановок и сочетаний видно, что они отличаются только *учетом порядка следования элементов.* Исходя из этого, найдем число перестановок следующим образом:

$$\underbrace{P_n^k = \overbrace{C_n^k}^{}}_{} \cdot k!$$

число способов упорядочить эти k элементов

число способов выбрать k из n элементов без учета порядка

$$P_n^k = C_n^k \cdot k! \quad = \quad \frac{n!}{(n-k)!} = C_n^k \cdot k! \quad \Rightarrow \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Сочетания

Пример. Сколько трехэлементных подмножеств имеет множество из 10-ти элементов?

Решение. По сути нужно определить, сколькими способами можно выбрать 3 элемента из 10-ти элементов без учета порядка:

искомое число способов $$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!}$$

Сочетание из n по k определяют также **как k-элементное подмножество множества из n элементов**

Сочетания

Пример. Сколько имеется слов длины n в алфавите $\{a, b\}$, в которых буква a встречается ровно k раз?

Решение: Занумеруем позиции букв в слове числами 1, 2, …, n.

		a	a		a	
1	2	3	4	5	6	7

Чтобы задать любое слово в алфавите $\{a, b\}$, достаточно указать *номера позиций, в которых стоит буква* a. Тогда буква b будет находится *в оставшихся позициях*.

Для выбора слова, в котором буква a встречается k раз, нужно выбрать k позиций из n возможных.

Имеется взаимно-однозначное соответствие между числом слов длины n в которых буква a встречается ровно k раз и числом k-элементных подмножеств множества.$\{1, 2, \ldots, n\}$

число таких слов = числу k-элементных подмножеств множества.$\{1, 2, \ldots, n\}$ = C_n^k

Биномиальная теорема

Рассмотрим выражение $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}}$. Раскроем скобки *не группируя* слагаемые:

$$\boxed{(a+b)^2 = aa + ab + ab + bb}$$

слова длины 2, в которых
буква a встречается 1 раз

В правой части имеем **все слова длины 2 в алфавите** $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$

Если *не учитывать порядок вхождений* символов a и b в слово,
то приходим к формуле:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

буква $\boldsymbol{a}$ встречается 3 раза **буква $\boldsymbol{a}$ встречается 0 раз**

Аналогично для степени 3: $\boxed{(a+b)^3 = aaa + \underbrace{aab + aba + baa}_{\text{буква } a \text{ встречается 1 раз}} + bbb + \underbrace{bba + bab + abb}_{\text{буква } a \text{ встречается 2 раза}}}$

буква $\boldsymbol{a}$ встречается 1 раз $= \boldsymbol{C_3^1} = 3$

буква $\boldsymbol{a}$ встречается 2 раза $= \boldsymbol{C_3^2} = 3$

В общем случае, раскрывая бином $(a+b)^n$, получим **все слова длины $\boldsymbol{n}$ в алфавите** $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$

Биномиальная теорема

Последнее утверждение легко доказывается **индукцией по $\boldsymbol{n}$.**

При $n = 2$ утверждение верно. Считаем утверждение верным при всех $k < n$.

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1} \cdot (a+b)$$

все слова длины $(\boldsymbol{n-1})$
в алфавите $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$

Умножение на $(a+b)$ соответствует тому, что
из каждого слова длины $(\boldsymbol{n-1})$ получится
2 слова длины $\boldsymbol{n}$ с добавлением в конце букв a и b.

получили все слова длины $\boldsymbol{n}$ в алфавите $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$

Группируя сомножители получим слагаемые вида $\boldsymbol{a^k b^{n-k}}$, где $k = 0,1, \dots, n$.
(k – число вхождений буквы a в слово)

При **заданном значении $\boldsymbol{k}$**

число таких слагаемых = числу слов длины n в которые буква a входит ровно k раз = $\boldsymbol{C_n^k}$

Биномиальная теорема

Группируя слагаемые с одинаковым числом вхождений буквы a получим:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{C_n^0}\cdot \boldsymbol{a^0 b^n}+\boldsymbol{C_n^1}\cdot \boldsymbol{a^1 b^{n-1}}+\boldsymbol{C_n^2}\cdot \boldsymbol{a^2 b^{n-2}}+\cdots+\boldsymbol{C_n^n}\cdot \boldsymbol{a^n b^0}$$

Суммируя по k получаем формулу бинома Ньютона

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}=\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{C_n^k}\cdot \boldsymbol{a^k b^{n-k}}}$$

Числа сочетаний, которые являются коэффициентами разложения, называют также **биномиальными коэффициентами**

Пример: сколько рациональных чисел содержится в разложении $(2^{1/2}+3^{1/3})^{20}$?

Решение: Воспользуемся биномиальной теоремой

$$\boxed{(2^{1/2}+3^{1/3})^{20}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^k 2^{k/2}\,3^{(20-k)/3}}$$

Чтобы числа были рациональными, должно выполняться:
k $-$ четное, $(20-k)$ $-$ делится на 3

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{k=2,8,14,20}$ **(4 числа)**

Некоторые свойства биномиальных коэффициентов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

1. $\boldsymbol{C_n^0 = C_n^n = 1}$

Действительно, $C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = C_n^n = 1$

2. $\boldsymbol{C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$

Действительно, $C_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!1!} = C_n^{n-1} = n$

3. $\boldsymbol{C_n^k = C_n^{n-k}}$

симметрия биномиальных коэффициентов

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = C_n^{n-k}$$

4. $\boldsymbol{C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}}$

это выражение удобно применять при малых значения k

Например, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

Некоторые свойства биномиальных коэффициентов

5. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \quad (1 \le k \le n)$

Докажем последнее утверждение

n элементов из которых мы выбираем *k* элементов

a_1 | a_2 | … | a_m | … | a_n

любой из этих *n* элементов либо войдет в выборку, либо нет

выборки, содержащие элемент a_m

a_m | $\underbrace{\ldots \mid \ldots \mid \ldots \mid \ldots \mid \ldots}_{}$

(*k*-1)-элемент

выборки, не содержащие элемент a_m

$\underbrace{\ldots \mid \ldots \mid \ldots \mid \ldots \mid \ldots \mid \ldots}_{}$

k-элементов

$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$

Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$$

$$C_0^0$$
$$C_1^0 \quad C_1^1$$
$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$
$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$
$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

……………………………………………………………………

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

……………………………………………………

1. $\boldsymbol{C_n^0 = C_n^n = 1}$ **–** крайние элементы в каждой строке равны 1.

2. Каждый из внутренних элементов треугольника равен сумме двух элементов, расположенных над ним. Например: $\boldsymbol{C_4^2 = C_3^1 + C_3^2}$

Таким образом можно заполнять строчку за строчкой, используя только операцию сложения.

Свойства биномиальных коэффициентов.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k b^{n-k}$$

положим $a = 1, b = 1$

положим $a = -1, b = 1$

6. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

7. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

Сумма биномиальных коэффициентов равна числу всех подмножеств n – элементного множества

6 + 7

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k [1 + (-1)^k] = \sum_{\substack{k=0 \\ k-\text{четное}}}^{n} 2 \cdot C_n^k = 2^n$$

6 - 7

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k [1 - (-1)^k] = \sum_{\substack{k=1 \\ k-\text{нечетное}}}^{n} 2 \cdot C_n^k = 2^n$$

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k-\text{четное}}}^{n} C_n^k = 2^{n-1}$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k-\text{нечетное}}}^{n} C_n^k = 2^{n-1}$$

Суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных и на четных местах равны между собой и каждая из них равна $=2^{n-1}$

Упорядоченные и неупорядоченные разбиения

Сколькими способами можно разбить n элементное множество на k частей?

Чтобы ответить на этот вопрос необходимо уточнить, считаем ли мы различными разбиения, отличающиеся только порядком следования частей или нет.

Например:

$$\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7}\} = \{\mathbf{1},\mathbf{2}\} \cup \{\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6}\} \cup \{\mathbf{7}\}$$

$$\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7}\} = \{\mathbf{7}\} \cup \{\mathbf{1},\mathbf{2}\} \cup \{\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6}\}$$

это одинаковые разбиения или разные?

Если разбиения считаются различными, то говорят об **упорядоченных разбиениях**.

Если же порядок следования частей не важен, то говорят о **неупорядоченных разбиениях.**

Упорядоченные разбиения

Задача: Сколько существует упорядоченных разбиений множества в предположении, что некоторые *части разбиения могут быть пустыми*.

Решение: Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - элементы разбиваемого множества.

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ - части разбиения

Каждый элемент можно поместить в любую из k −частей. Всего элементов n.

Теорема: число упорядоченных разбиений множества мощности n на k частей, среди которых могут быть пустые части равно k^n.

Упорядоченные разбиения

Пусть S_n - n элементное конечное множество. Рассмотрим разбиение этого множества на k попарно непересекающихся подмножества, каждое из которых содержит n_i элементов:

$$S_n = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k \left(S_i \cap S_j = \emptyset\right), |S_i| = n_i, . (n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n).$$

Сколько существует таких разбиений?

Задача легко решается с помощью последовательного выбора

$\boldsymbol{n}$ **– различных элементов**

$|\boldsymbol{S_1}| = \boldsymbol{n_1}$ | $|\boldsymbol{S_2}| = \boldsymbol{n_2}$ | $|\boldsymbol{S_3}| = \boldsymbol{n_3}$ | **… …** | $|\boldsymbol{S_k}| = \boldsymbol{n_k}$

выберем n_1 элемент из n элементов для S_1

затем выберем n_2 элемента для S_2 из оставшихся $n - n_1$ элементов

выберем n_k элементов для множества S_k после этого все элементы множества S выбраны

$\boldsymbol{C_n^{n_1}}$ | $\boldsymbol{C_{n-n_1}^{n_2}}$ | $\boldsymbol{C_{n-n_1-n_2}^{n_3}}$ | **… …** | $\boldsymbol{C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}}$

Искомое число разбиений

$$\boldsymbol{C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \cdots \cdot C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = C_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)}$$

Упорядоченные разбиения

Вычислим последнее выражение:

$$\frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!\,\underbrace{(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)}_{0!\,=\,1}!}=\frac{n!}{n_1!\cdot\,n_2!\cdot\ldots\cdot\,n_k!}$$

Теорема: число упорядоченных разбиений множества мощности n на k частей мощностей $n_1, n_2, \ldots, n_k$ равно

$$\boldsymbol{C_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot\,n_2!\cdot\ldots\cdot\,n_k!}}$$

Числа $\dfrac{n!}{n_1!\cdot\,n_2!\cdot\ldots\cdot\,n_k!}$ называют ***полиномиальными коэффициентами***

Упорядоченные разбиения

Задача: Сколько существует слов длины n в алфавите $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{\text{к}}\}$ в которых буква a_1 встречается n_1 раз, буква a_2 встречается n_2 раз, …. , буква a_k встречается n_k раз. $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$

Решение: занумеруем позиции букв в слове числами $1,2, \dots, n$

Нам нужно выбрать: n_1 позиций для буквы a_1

n_2 позиций для буквы a_2

… … … … … … … … … … … .

n_k позиций для буквы a_k

Пусть $\boldsymbol{S_i}$ *множество позиций для буквы* $\boldsymbol{a_i}$ $(i = 1,2, \dots, k)$. Тогда *семейство множеств* $\{\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}, \dots, \boldsymbol{S_n}\}$ есть *разбиение множества* $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$ на части с мощностями $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}, \dots, \boldsymbol{n_k}$.

$$\textbf{Искомое число слов} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}! \cdot \boldsymbol{n_2}! \cdot \dots \cdot \boldsymbol{n_k}!}$$

Упорядоченные разбиения

Задача: Сколько существует различных перестановок из букв слова Уссури?

Решение: Эта задача эквивалентна задаче о том, сколько различных слов длины 6 можно образовать из букв алфавита $\{у, с, р, и\}$, при условии, что буква «у» встречается в слове 2 раза, буква «с» – 2 раза, буква «р» и буква «и» – по одному разу.

занумеруем позиции букв в слове числами 1,2,3,4,5,6

нужно выбрать:

2 позиции для буквы «у»	S_1
2 позиции для буквы «с»	S_2
1 позицию для буквы «р»	S_3
1 позицию для буквы «и»	S_4

S_i множество позиций для буквы a_i

Например: $S_1 = \{1,3\}$ $S_2 = \{2,5\}$ $S_3 = \{6\}$ $S_4 = \{4\}$

это действительно разбиение множества 1,2,3,4,5,6

Этому разбиению соответствует слово «усуиср»

Всего таких разбиений (слов) будет $\dfrac{\mathbf{6}!}{\mathbf{2}! \cdot \mathbf{2}! \cdot \mathbf{1}! \cdot \mathbf{1}!}$

Полиномиальная теорема

Полиномиальная теорема является обобщением бинома Ньютона.

Теорема:

$$\boldsymbol{(x_1 + x_2 + \cdots x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}}$$

Пример: найти коэффициент при $a^3b^2c^3$ в разложении $(2a + 3b + \text{с})^8$.

Решение: найдем соответствующее слагаемое в сумме:

$$C_8(3,2,3) \cdot (2a)^3 \cdot (3b)^2 \cdot c^3 = \underbrace{\frac{8!}{3!\,2!\,3!} \cdot 2^3 \cdot 3^2}_{\text{искомый коэффициент}} \cdot a^3b^2c^3$$