№8

3) $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1} = 11a$,

1. $n=1$. ✓

2. $n=k$, ✓

3. $n=k+1$. $6^{2k}+3^{k+2}+3^{k} = \frac{6^{2k-2}}{36}+3\cdot 3^{k+1}+3^{k-1}\cdot 3 = 3\left(\frac{6^{2k-2}}{12}+3^{k+1}+3^{k-1}\right)$

$= 3\left(11a+\frac{6^{2k-2}}{12}-6^{2k-2}\right) = 3\left(11a+\frac{6^{2k-2}}{11}\right)$.

№12

$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1$ 1. $n=1$, ✓ 2. $n=k$, ✓ 3. $n=k+1$.

$x_1+x_2+\ldots+x_n\geq n$ $x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}\geq k+1$, $k+x_{k+1}\geq k+1$.

$x_{k+1}\geq 1$.

№13

$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$ 1. $x=1$, ✓ 2. $n=k$, ✓ 3. $n=k+1$.

$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\geq\sqrt{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{k+1}}$;

Лекция 27.09.2023 г.

Верхняя и нижняя грани числового мн-ва

1. Промежутки в $\mathbb{R}$; $a,b\in\mathbb{R}$, $(a,b)\overset{def}{=}\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$,

$[a,b]\overset{def}{=}\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$. $(-\infty;b)\overset{def}{=}\{x\in\mathbb{R}: x<b\}$.

$(a;+\infty)\overset{def}{=}\{x\in\mathbb{R}: a<x\}$ $[a;+\infty)\overset{def}{=}\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\}$.

$\mathbb{R}\equiv(-\infty;+\infty)$, $\forall x\in\mathbb{R}: -\infty<x<-\infty$;

2. Огранич. мн-ва, макс и мин. (max и min)

Опр: Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, тогда X называется:

а) огр. сверху, если $\exists y \in \mathbb{R}: X \leq y$. $(\forall x \in X: x \leq y)$

$\forall y$ называется верхней границей мн-ва X.

U_x - мн-во всех верхних границ для мн-ва X

$U_x = \{y \in \mathbb{R}: X \leq y\}$,

б) огр. снизу, если $\exists z \in \mathbb{R}: X \geq z$ $(\forall x \in X: x \geq z)$,

$\forall z$ назыв. нижн. границей мн-ва X.

$L_x = \{z \in \mathbb{R}: X \geq z\}$.

в) назыв. ограниченным, если X огр. и сверху, и снизу. $\exists a, b \in \mathbb{R}: X \subset [a, b]$.

Вывод: X огр. сверху $\Leftrightarrow U_x \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}: \forall x \in X: x \leq y$.

X неогр. сверху $\Leftrightarrow U_x = \varnothing \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}: \exists x_0 \in X: x_0 > y$.

Опр: Пусть $X \in \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $a, b \in \mathbb{R}$;

$(a = \max(X)) \Leftrightarrow (a \in X) \wedge (\forall x \in X: x \leq a) \Leftrightarrow (a \in X) \wedge (a \in U_x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \in X \cap U_x$ - a - максимум

$b = \min X \Leftrightarrow (b \in X) \wedge (\forall x \in X: x \geq b) \Leftrightarrow (b \in X) \wedge (b \in L_x) \Leftrightarrow b \in X \cap L_x$

b - минимум.

Основные свойства максимума и минимума

1) Если $X \subset Y$: $\min Y \leq \min X \leq \max X \leq \max Y$.

2) Если $X \neq \varnothing$, $Y \subset \mathbb{R}$, $X \leq Y$: $\max X \leq \min Y$

3) Sup, Inf; Высший / Низший;

Пример; $X = [0; 1]$ $\min X = 0$, $\max X = \varnothing$

$\operatorname{Inf} X = 0$, $\operatorname{Sup} X = 1$