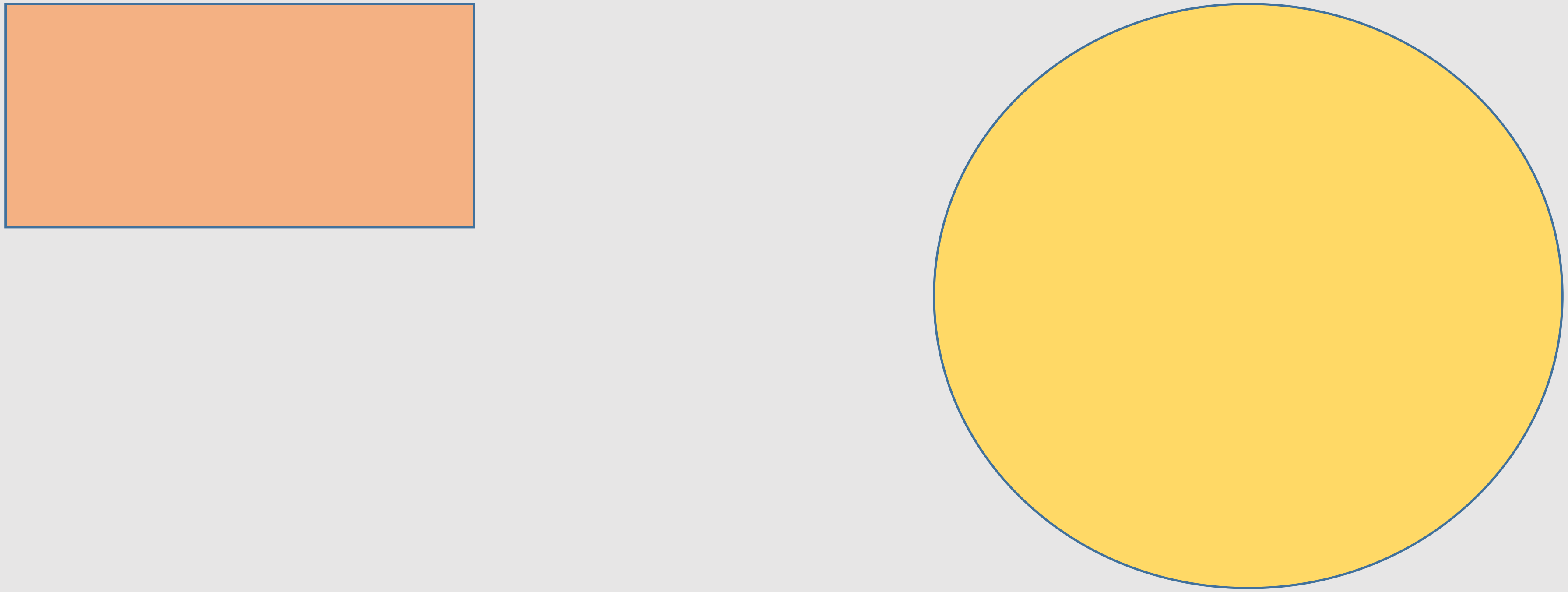


Свойства счетных множеств

Свойство 4. ***Если к счетному множеству добавить конечное число элементов, то мощность множества не изменится.***

Доказательство: Пусть A = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ – счетное множество, т.е. $|A| = |\mathbb{N}|$.

$B_n = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ – конечное множество, $|B_n|$ = n.

Нужно доказать, что $|A \cup B| = |A| = |\mathbb{N}|$.

Установим взаимно однозначное соответствие между множествами $(A \cup B)$ и A .

$A \cup B$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$	**…**	b_n	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_2}$	$\boldsymbol{a_3}$	**…**

N	1	2	**3**	**…**	***n***	***n*+1**	***n*+2**	***n*+3**	**…**

$|A \cup B| = |A|$ ч.т.д.

Несчетные множества

Теорема. ***Множество действительных чисел на интервале (0, 1) несчетно.***

Доказательство: Каждое из чисел интервала (0,1) можно представить в виде бесконечной десятичной дроби.

Предположим, что данное множество счетно, тогда каждой такой дроби можно сопоставить номер:

$\alpha_1 = 0.\, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$

$\alpha_2 = 0.\, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$

$\alpha_3 = 0.\, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$

$\alpha_4 = 0.\, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots$

…………………

Построим число вида $\beta = 0.\, b_1b_2b_3b_4\ldots$, *где* $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$ и т.д.

Число β лежит в интервале (0, 1) и не совпадет ни с одним из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Действительно, $\beta \neq \alpha_1$, т. к. $b_1 \neq a_{11}$,

$\beta \neq \alpha_2$, т. к. $b_2 \neq a_{22}$, и т.д.

⇓

у числа β ***нет номера***.

множество не является счетным

Этот способ доказательства называется ***диагональной процедурой Кантора***

Следствие: $|\mathbb{N}| < |(0,1)|$

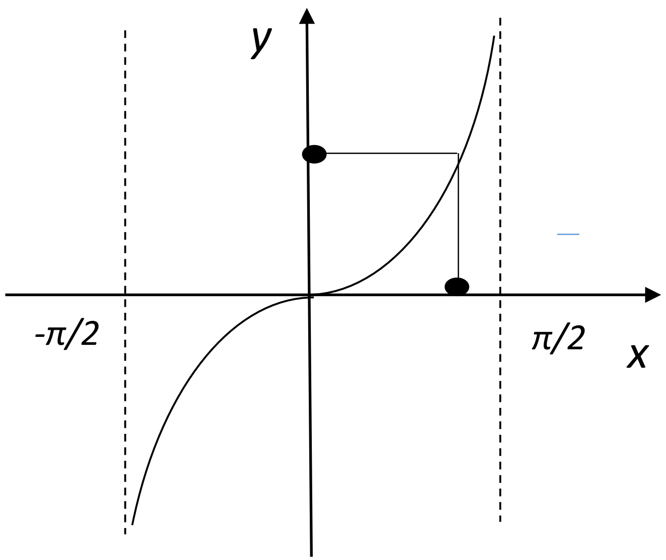
Действительно, множество $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ является счетным и содержится в множестве (0, 1). Но помимо множества A в множестве (0, 1) содержаться и числа β

Несчетные множества

Теорема. Множество всех действительных чисел несчетно.

Доказательство: Чтобы доказать несчетность множества $\mathbb{R}$, нужно доказать, что ***множество точек всей числовой прямой и множество точек интервала (0, 1) эквивалентны, т.е.*** **$|(0, 1)|=|\mathbb{R}|$**

Рассмотрим функцию y = tg$x$. Область определения этой функции интервал $(-\pi/2, +\pi/2)$.
Область значений – вся числовая прямая.



Функция y = tg$x$ каждой точке интервала $(-\pi/2, +\pi/2)$ ставит в соответствие точку на числовой прямой и наоборот.

⇓

$|(-\pi/2, +\pi/2)|=|\mathbb{R}|$

Можно доказать, что **$|(-\pi/2, +\pi/2)| = |(0, 1)|$**

⇓

$|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$ ч.т.д.

Континуальные множества

Каждое множество, равномощное множеству всех действительных чисел, называется ***континуальным*** множеством. Мощность такого множества называют ***мощностью континуума*** и обозначают $\boldsymbol{c}$.

Континуальными являются множества всех точек отрезка, прямой, плоскости.
Множество всех подмножеств счетного множества также континуально ($|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| = c$)

Мы уже установили, что $|\mathbb{N}| < \boldsymbol{c}$. Возникает вопрос: ***существуют ли множества, мощность которых меньше мощности континуума?***

Континуум-гипотеза Кантора утверждает, что *множеств промежуточной мощности не существует*. Установлено, что в современной аксиоматической теории множеств, данная гипотеза не может быть ни доказана, ни опровергнута.

Следующий очевидный вопрос: ***существуют ли множества наибольшей мощности?***

Теорема Кантора

Теорема Кантора. Для любого множества M выполняется $|2^M| > |M|$..

Доказательство: **1.** Покажем сначала, что $|2^M|$ ***не меньше, чем*** $|\boldsymbol{M}|$.

Все одноэлементные подмножества M содержатся в 2^M. Следовательно отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in M$ одноэлементное подмножество $\{x\}$ есть *инъекция.*

$$\Downarrow$$

$$\left|\boldsymbol{2^M}\right| \geq |\boldsymbol{M}|$$

2. *Предположим, что* $|2^M| = |M|$. Следовательно, *существует биекция* $f: M \to 2^M$.

Пусть $X \subseteq M$ и $X = \{x \in M | x \notin f(x)\}$.

$\Downarrow$ (т.к. f – биекция)

$\exists m \in M$ что $f(m) = X$

x	$\boldsymbol{M}$:	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	…	?	
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
$f(x)$	$\boldsymbol{2^M}$	$\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{E}$	…	$\boldsymbol{X}$	…

$\Downarrow$

1) если $m \notin f(m) = X,$ то $m \in X$

2) если $m \in f(m) = X,$ то $m \notin X$

$\Rightarrow$ получили противоречие $\Rightarrow$ биекции f не существует $\Rightarrow$ $|2^M| \neq |\mathbf{M}|$.

Теорема Кантора

Доказанная теорема показывает, что ***множества самой большой мощности не существует,*** *т.к. процесс образования множества всех подмножеств можно продолжать бесконечно:*

$$M \to \mathbf{2}^{\boldsymbol{M}} \to \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\boldsymbol{M}}} \to \ \dots$$

$$|M| < |\mathbf{2}^{\boldsymbol{M}}| < |\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\boldsymbol{M}}}| < \ \dots$$

Принципы подсчета. Правила равенства и суммы.

Комбинаторика – раздел дискретной математики, изучающий объекты, составленные из элементов конечных множеств. Один из основных типов комбинаторных задач – перечислительные задачи, т.е. подсчет числа объектов, обладающих заданными свойствами.

При решении многих комбинаторных задач, применяются следующие простые правила:

Правило равенства: если существует биекция $f: A \to B$, то $|A| = |B|$

Правило суммы: если A и B – конечные множества и $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$

Пример: Имеется 3 вида мороженного и 5 видов напитков. Сколькими способами можно купить что-то одно?

Правила суммы легко обобщается на случай любого количества конечных множеств:

Общее правило суммы:

Пусть $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n}$ **- попарно непересекающиеся множества.**

Тогда $|\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2} \cup \dots \cup \boldsymbol{A_m}| = |\boldsymbol{A_1}| + |\boldsymbol{A_2}| + \dots + |\boldsymbol{A_n}|$

Принципы подсчета. Правило произведения.

Правило произведения: если A и B – конечные множества, то $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Правило произведения можно пояснить так: по определению $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Элемент a в такой паре может принимать $|A|$ различных значений, при этом элемент b может принимать $|B|$ различных значений. Следовательно, существует $|A| \cdot |B|$ различных пар.

Пример: Имеется 3 вида мороженного и 5 видов напитков. Сколькими способами можно купить мороженное и напиток?

Решение: $\mathbf{3 \cdot 5 = 15}$ способов

Принципы подсчета. Правило произведения.

Общее правило произведения: Для любых конечных множеств $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n}$ выполняется равенство

$$|\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}| = |\boldsymbol{A_1}| \cdot |\boldsymbol{A_2}| \cdot \dots \cdot |\boldsymbol{A_n}| \quad (*)$$

Общее правило произведения легко ***доказать по индукции***.

При $\boldsymbol{n = 2}$ утверждение истинно. Пусть утверждение $(*)$ верно при некотором $\boldsymbol{n > 2}$.

Множество $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n}$ есть *множество последовательностей* вида $(\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n})$ где $a_i \in A_i$.

Последовательность $(\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n})$ можно рассматривать как пару $((\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}}), \boldsymbol{a_n})$.

Первая компонента пары $(\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}}) \in \boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}}$,
вторая компонента пары $\boldsymbol{a_n \in A_n}$

По *предположению индукции* первая компонента пары принимает $|\boldsymbol{A_1}| \cdot |\boldsymbol{A_2}| \cdot \dots \cdot |\boldsymbol{A_{n-1}}|$ значений.
вторая компонента пары принимает $|\boldsymbol{A_n}|$ значений.

По правилу произведения для двух множеств: $(\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}}) \times \boldsymbol{A_n} = |\boldsymbol{A_1}| \cdot |\boldsymbol{A_2}| \cdot \dots \cdot |\boldsymbol{A_{n-1}}| \cdot |\boldsymbol{A_n}|$ ■

Если $\boldsymbol{A_1, = A_2 = \dots = A_n}$ из общего правила произведения имеем: $|\boldsymbol{A^n}| = |\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{n}}$

Наборы и слова

Набор – это конечная упорядоченная последовательность элементов.

Набор принято обозначать как $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n})$. Число элементов в наборе называют ***длиной набора***.

Чем ***набор элементов*** отличается от ***множества элементов*****?**

- Элементы в наборе могут быть повторяться
- Порядок следования элементов в наборе важен (т.е. наборы, состоящие из одинаковых элементов, расположенных в разном порядке считаются различными)

Пример: $(a, a, b, c, b, b), (a, b, a, b, c, b), (a, a, a, c, c, b)$ – различные наборы длины 6, составленные из элементов множества $\{a, b, c\}$

Задача: сколько различных наборов длины n можно составить из элементов множества мощности k?

Решение: Наборы длины n, составленные из элементов множества $\boldsymbol{A}$ $(|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{k})$ это элементы множества $\boldsymbol{A^n}$.

По общему правилу произведения число таких наборов равно $|\boldsymbol{A^n}| = |\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{k^n}$

Задача: сколько различных слов длины n можно составить из букв алфавита мощности k?

Лексикографический порядок

Пусть А – некоторый *конечный алфавит*. Определим на этом множестве *отношение линейного порядка* на множестве букв алфавита. Для обозначения такого порядка будем использовать символы $\leq$ и <..Обычно это тот порядок, в котором расположены символы алфавита. Например: А < Б < В < …

Лексикографический порядок – это алфавитный порядок на множестве слов.

Пусть $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_k$ и $\beta = \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_m$ - слова в алфавите А. Будем говорить, что ***слово*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***лексикографически меньше слова*** $\boldsymbol{\beta}$, если выполняется одно из двух условий:

1. $\exists i\colon \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}$ и $\alpha_i < \beta_i$
2. $\alpha_i = \beta_i$ для всех $1 \leq i \leq k$ и $k < m$

Обозначать лексикографический порядок будем так же, как и алфавитный порядок:

$\alpha < \beta$ – если слово αлексикографически меньше слова β
$\alpha \leq \beta$ – если слово есть возможность равенства между словами.

Примеры: 2465789 < 2465978 абс < абсурд

Последовательный выбор

Теорема (*о последовательном выборе*). Пусть набор $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ формируется в результате последовательного выбора элементов $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$, причем

элемент x_1 может быть выбран k_1 способами

при любом x_1 элемент x_2 может быть выбран k_2 способами

при любых x_1 и x_2 элемент x_3 может быть выбран k_3 способами

…………………………………………………………………………....

при любых $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ элемент x_n может быть выбран k_n способами

Тогда ***весь набор*** можно выбрать $\boldsymbol{k_1} \cdot \boldsymbol{k_2} \cdot \cdots \boldsymbol{k_n}$ ***способами***.

По сути, последовательный выбор есть дальнейшее обобщение правила произведения.
Доказательство такое же, как для произведения n множеств.

Последовательный выбор

Пример: Сколько существует пятизначных чисел, делящихся на пять?

Решение: На 5 делятся числа, оканчивающиеся на 5 или на 0.

Числа пятизначные, следовательно имеем 5 позиций:

$\boxed{9} \times \boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{2} = \boxed{18000}$ искомое число

Пример: Сколько существует функций из множества $\boldsymbol{S_n}$ в множество $\boldsymbol{P_m}$?

Решение: Каждый из n элементов множества S может быть отображен в любой из m элементов множества P.

$$\underbrace{\boldsymbol{m \times m \times m \times \ldots \times m}}_{\textbf{n - раз}} = \boldsymbol{m^n}$$ число таких функций

Перестановки

Пусть имеется *n* различных элементов из которых нужно сформировать набор из *k* элементов. Такой набор называется ***размещением*** или ***k-перестановкой*** из *n* элементов. Обозначение: $\boldsymbol{P_n^k}$

Номер элемента *k* - перестановки	Число способов выбора
1	$\boldsymbol{n}$
2	$\boldsymbol{n-1}$
3	$\boldsymbol{n-2}$
……………………..	**……………………………**
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{n-(k-1)}$

В соответствии с правилом последовательного выбора, выбор всей *k* – перестановки может быть осуществлен

$\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$ способами.

Перестановки

Итак мы установили, что выбор k элементов из n элементов с учетом порядка может быть осуществлен $\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$ способами.

Чтобы преобразовать последнее выражение воспользуемся **определением факториала** $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(n\text{-}2)\cdot(n\text{-}1)\cdot n$ и некоторыми его **свойствами** $n! = (n-1)!\cdot n, 0! = 1$

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\cdot\frac{(n-r)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}.}$$

Рассмотрим теперь **упорядоченную выборку всех n объектов**. Положим $n = k$ и учтем, что $0! = 1$. Тогда получим

$$\boxed{P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!} \Rightarrow \boxed{P_n = n! \text{ - число перестановок всех элементов}}$$

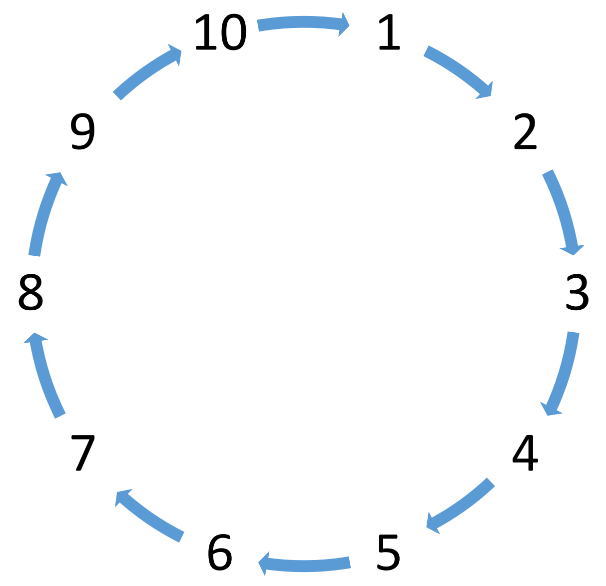
Перестановки

Пример. Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9, если все цифры в числе различны?

Решение. Задача сводится к нахождению числа способов выбрать 4 цифры из 9-ти с учетом порядка.

то есть нужно вычислить перестановку $P_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$

Пример. Сколькими способами можно рассадить 10 человек за круглым столом, если имеет значение лишь порядок соседей.



Решение. Посадим одного человека на какое-то место. Выбор места не важен, т.к. он не влияет на порядок соседей. После этого оставшихся 9 человек можно рассадить 9! способами.

Сочетания

Пусть теперь имеется **n – различных элементов,** из которых нужно выбрать **k элементов** без учета порядка**.** Сколькими способами это можно сделать? **Число таких способов называется числом сочетаний и обозначается C_n^k.**

Из определения перестановок и сочетаний видно, что они отличаются только учетом порядка следования элементов. Исходя из этого, найдем число перестановок следующим образом:

число способов упорядочить эти r элементов

$$P_n^k = C_n^k \cdot k!$$

число способов выбрать k из n элементов без учета порядка

$$\frac{n!}{(n-k)!} = C_n^k \cdot k! \quad \Rightarrow \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Пример. Сколько трехэлементных подмножеств имеет множество из 10-ти элементов?

Решение. По сути нужно определить, сколькими способами можно выбрать 3 элемента из 10-ти элементов без учета порядка:

искомое число способов

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!}$$

Сочетание из n по k определяют также **как k-элементное подмножество n-элементного множества**

Сочетания

Пример. Сколько имеется слов длины n в алфавите $\{a, b\}$, в которых буква a встречается ровно k раз?

Решение: Занумеруем позиции букв в слове числами $1, 2, \ldots, n$.

Чтобы задать любое слово в алфавите $\{a, b\}$, достаточно указать *номера позиций, в которых стоит буква* a. Тогда буква b будет находится *в оставшихся позициях*.

		a	a		a	
1	2	3	4	5	6	7

Для выбора слова, в котором буква a встречается k раз, нужно выбрать k позиций из n возможных.

Имеется взаимно-однозначное соответствие между числом слов длины n в которых буква a встречается ровно k раз и числом k-элементных подмножеств множества.$\{1, 2, \ldots, n\}$

По правилу равенства: число таких слов = числу k-элементных подмножеств множества.$\{1, 2, \ldots, n\}$ = C_n^k