Литература

1. Беклемишев Д.В. - Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник - Издательство "Лань" - 2020 - 448с. - ISBN: 978-5-8114-4748-0 - Текст электронный // ЭБС ЛАНЬ - URL: https://e.lanbook.com/book/126146.

2. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю. - Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие - Издательство "Лань" - 2019 - 496с. - ISBN: 978-5-8114-4577-6 - Текст электронный // ЭБС ЛАНЬ - URL: https://e.lanbook.com/book/122183

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра учебник/В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд. стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.

4. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебное пособие/ Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейман В.Б Под редакцией Воднева В.Т. – 2-е изд., Мн.: 1986. – 272 с.

1_DD-MM_Иванов - имя файла

veshaposhnikov@yandex.ru - электронный адрес

1.Матрицы

Понятие матрицы. Виды матриц -3

Линейные операции над матрицами -7

Перемножение матриц -12

Матрицы

Понятие матрицы. Виды матриц

Прямоугольная матрица

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\| \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A \qquad dim(A) = m \times n$$

$$\left\|a_{ij}\right\| \equiv \left(a_{ij}\right) \qquad (\mathrm{i} = 1,2,\cdots,m\,; j = 1,2,\cdots,n)$$

Пример прямоугольной матрицы
Размерности $\dim(A) = 2 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$dim(B) = n \times n$$

$$dim(B) = n$$

Пример квадратной матрицы
Размерности $\dim(B) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B \equiv A^T$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\dim(A) = 2 \times 3 \qquad \dim(A^T) = 3 \times 2$$

Некоторые виды квадратных матриц

1. Симметричная матрица $A^T = A, \qquad a_{ij} = a_{ji} \quad (\forall\, i, j)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Кососимметричная (антисимметричная) матрица

$$B^T = -B, \qquad b_{ij} = -b_{ji} \quad (\forall\, i \neq j, \qquad b_{ii} = 0 \quad \forall\, i = j)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -6 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Треугольная матрица

Верхняя треугольная матрица $a_{ij} = 0 \quad i > j$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Нижняя треугольная матрица $a_{ij} = 0 \quad i < j$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Диагональная матрица $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

$$E\ (\equiv I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Нулевая матрица $a_{ij} = 0 \quad (\forall\, i, j)$

$$O_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(O_1) = 2 \qquad \dim(O_2) = 2 \times 3$$

Линейные операции над матрицами

1. Равенство матриц

$$A=(a_{ij}),\ \ B=(b_{ij}) \qquad \mathbf{dim}(\boldsymbol{A})=\mathbf{dim}(\boldsymbol{B}) \qquad \boldsymbol{a_{ij}=b_{ij}} \quad i=1\cdots m,\ \ j=1\cdots n$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 9 & 8 & 7\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 9 & 8 & 7\end{pmatrix}$$

2. Сумма матриц $A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij}),\quad C=(c_{ij})$

$$C=A+B \qquad \mathbf{dim}(\boldsymbol{A})=\mathbf{dim}(\boldsymbol{B})=\mathbf{dim}(\boldsymbol{C}) \qquad \boldsymbol{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}} \qquad i=1\cdots m,\ \ j=1\cdots n$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix} \quad C=A+B=\begin{pmatrix}2+1 & 1+3 & 7+5\\ 4+2 & 5+4 & 8+6\end{pmatrix}$$

3. Произведение матрицы на число $A=(a_{ij}),\ \ B=(b_{ij}),\quad \dim(A)=\dim(B)=m\times n$

$$B=\alpha A \qquad \boldsymbol{b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}} \qquad i=1\cdots m,\qquad j=1\cdots n$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix} \qquad D=3A=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot 7\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot 8\end{pmatrix}$$

Свойства линейных операций над матрицами

1. Переместительное свойство (коммутативность относительно операции сложения)

$$A + B = B + A$$

2. Сочетательное свойство (ассоциативность относительно операции сложения)

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

3. Сочетательное свойство относительно числового множителя (ассоциативность относительно операции с числовым множителем)

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) = \beta \cdot (\alpha \cdot A)$$

4. Распределительное свойство (дистрибутивность, т.е. согласованность операций) относительно суммы матриц

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

5. Распределительное свойство (дистрибутивность) относительно суммы чисел

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

$$A + O = A \qquad \mathbf{\dim(}\boldsymbol{A}\mathbf{)} = \mathbf{\dim(}\boldsymbol{O}\mathbf{)} \quad !$$

$C = (-1) \cdot A = -A$ $\quad -A$ матрица противоположная матрице A

$$A + (-A) = O \qquad \dim(O) = \dim(A)$$

$B + (-A) = B - A$ $\quad$ разность матриц B и A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (-1) \cdot A = -A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B - A = B + (-1)A = \begin{pmatrix} 5-2 & 0-0 & 1-1 \\ 0+1 & 4-3 & 1-4 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n}$$ - обозначение для большого числа слагаемых

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) = \quad a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{mn} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}) = a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1} + a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{mn}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Перемножение матриц

$$A = (a_{ij}) \qquad i = 1 \cdots m, \;\; j = 1 \cdots n \qquad \dim(A) = m \times n$$

$$B = (b_{ij}) \qquad i = 1 \cdots n, \;\; j = 1 \cdots p \qquad \dim(B) = n \times p$$

$$C = (c_{ij}) \qquad i = 1 \cdots m, \;\; j = 1 \cdots p \qquad \dim(C) = m \times p$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{in}b_{nj} \qquad C = A * B \qquad \cancel{C = B * A}$$

$$B * A \qquad \dim(B) = n \times m \qquad \dim(A) = m \times p$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \times \underset{B}{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}}$$

Пример $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \dim(A) = 2 \times 2 \quad \dim(X) = 2 \times 1$

$$A * X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2} a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^{2} a_{2i}x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = C$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_{21} \end{cases}$$

Пример $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \quad \dim(A) = 2 \times 2 \quad \dim(X) = 1 \times 2$

$$\cancel{A * X}$$

$X * A \qquad \dim(X) = 1 \times 2 \qquad \dim(A) = 2 \times 2$

$$X * A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{21} & x_1a_{12} + x_2a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2} x_i a_{i1} & \sum_{i=1}^{2} x_1 a_{i2} \end{pmatrix}$$

Пример $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ $\dim(A)=2\times 2$ $\dim(B)=2\times 2$

$$A*B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{2}a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{2}a_{1i}b_{i2}\\ \sum_{i=1}^{2}a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{2}a_{2i}b_{i2}\end{pmatrix}$$

Пример $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$

$$A*B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 5+3\times 7 & 1\times 6+3\times 8\\ 4\times 5+2\times 7 & 4\times 6+2\times 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & 30\\ 34 & 40\end{pmatrix}$$

Свойства произведения матриц

1. Произведение матриц не коммутативно $\quad A * B \neq B * A$

$$A * B \qquad B * A \qquad \dim(A) = m \times n \qquad \dim(B) = n \times m$$

$$C = A * B \qquad \dim(C) = \dim(A * B) = m \times m$$

$$D = B * A \qquad \dim(D) = \dim(B * A) = n \times n$$

C и D квадратные матрицы

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+1 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = B * A = \begin{pmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 1+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Если $A * B = B * A$, то эти матрицы называются перестановочными

Единичная матрица E является перестановочной с любой квадратной матрицей того же порядка

$A * E = E * A$ $\qquad$ $\dim E = \dim A = n \times n$

Нулевая матрица не является перестановочной

$\dim(A) = m \times n$ $\qquad$ $A * O = O'$ $\qquad$ $\dim(O') = m \times m$

$\dim(O) = n \times m$ $\qquad$ $O * A = O''$ $\qquad$ $\dim(O'') = n \times n$

$\Rightarrow$ $O' \neq O''$

Пример $\qquad$ $\dim A = 2 \times 3$ $\qquad$ $\dim O = 3 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O' \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O''$$

2. Сочетательное свойство

Если определены произведения $A * B$ и $(A * B) * C$, **то** определены произведения матриц $B * C$ и $A * (B * C)$ и выполняется равенство

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

3. Распределительное свойство (дистрибутивность) относительно суммы матриц

$A * (B + C)$ $\Rightarrow$ $A * (B + C) = A * B + A * C$

$(B + C) * A$ $\Rightarrow$ $(B + C) * A = B * A + C * A$

4. Сочетательное свойство относительно числового множителя

$A * B$ $\Rightarrow$ $\alpha \cdot (A * B) = (\alpha \cdot A) * B = A * (\alpha \cdot B)$

5. $A * B$ $\Rightarrow$ $B^T * A^T$ $\Rightarrow$ $(A * B)^T = B^T * A^T$