4. Определение (линейной независимости матриц). Система матриц одинакового размера $A_1, A_2, \cdots A_k$ линейно независима, если нулевая матрица раскладывается по ней однозначно, т.е. из равенства

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k = O$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

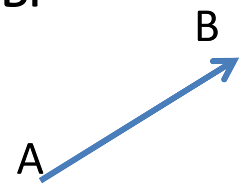
5. Система линейных уравнений является невырожденной, если определитель матрицы, составленной из коэффициентов системы, квадратный и отличен от нуля, т.е. если число уравнений системы равно числу неизвестных и определитель матрицы системы отличен от нуля.

6. Теорема Кронекера-Капелли. Для совместимости системы m линейных уравнений с n неизвестными необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

https://hse.webinar.ru/21466828/500263758

Векторная алгебра

Векторы



1. Направленный отрезок. $\overrightarrow{AB}$

2. Длина направленного отрезка. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$

3. Сонаправленные отрезки. $[AB)$ $(CD]$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$

4. Эквивалентные отрезки. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|$

5. Свободный вектор (вектор). $\vec{a}$

6. Длина вектора. $|\vec{a}\,| = a$

7. Коллинеарные векторы.

8. Компланарные векторы.

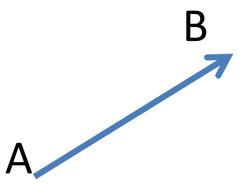
9. Угол между векторами. $\vec{a},\ \vec{b}$ $\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{AC}$ $\widehat{\vec{a}, \vec{b}}$

10. Равенство векторов.

1. Определение. Направленным отрезком, или связанным вектором называется отрезок прямой одна из граничных точек которого принята за начало, а другая за конец.

или Отрезок прямо, концы которого упорядочены, т.е. известно какой конец первый, а какой второй

1. Направленный отрезок.



$\overrightarrow{AB}$

2. Определение. Длиной или модулем направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между точками A и B

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$$

3. Определение. Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются сонаправленными, если лучи $[AB)$ и (CD] сонаправлены.

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$$

3а. Определение. Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются противоположно направленными, если лучи $[AB)$ и (CD] противоположно направлены.

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$$

4. Определение. Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называется нулевым направленным отрезком.

Направление нулевого направленного отрезка не определено, а длина его считается равной нулю.

5. Определение. Два ненулевых направленных отрезков называются <u>эквивалентными</u>, если их <u>длины равны и они сонаправлены</u>.

Все нулевые отрезки эквивалентны.

6. Определение. Вектором или свободным вектором называется множество всех направленных отрезков, эквивалентных между собой.

Обозначение $\vec{a}$

Длиной (модулем, нормой) вектора $\vec{a}$ называется длина его любого представителя из множества эквивалентных направленных отрезков.

Обозначение $|\vec{a}| = a$

7. Определение. Векторы называются коллинеарными, если существует такая прямая, которой они параллельны, т.е. они сонаправлены или противоположно направлены.

8. Определение. Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

9. Определение. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ это угол между их представителями $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, имеющие общее начало. За угол φ между ними принимают угол $\leq\ \pi$.

Обозначение $\widehat{\vec{a},\vec{b}}$

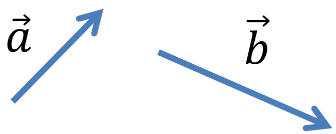
Два вектора называются ортогональными, если угол между ними равен $\pi/2$

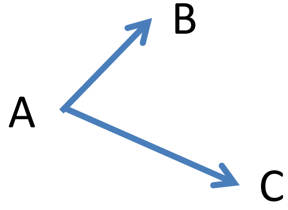
10. Определение. Два вектора называются равными, если они коллинеарные, одинаково направлены и имеют равные длины.

Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются сложение векторов или умножение вектора на число

Пример. Угол между векторами $\widehat{\vec{a},\vec{b}}$



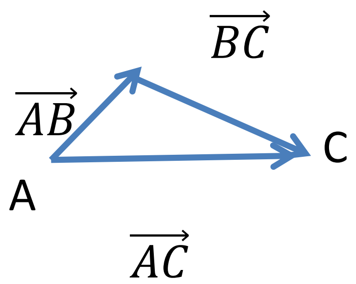


$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

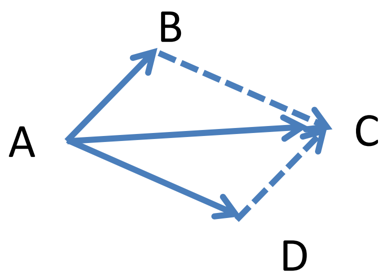
11. Сумма векторов.

Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем направленный отрезок $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ в качестве представителя вектора $\vec{a}$, а представителем вектора $\vec{b}$ возьмем направленный отрезок $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, выходящий из точки B, тогда направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

Из этого определения суммы векторов следует правило треугольника и правило параллелограмма.



$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



12. Умножение вектора на число. $\alpha\vec{a}$

$a)$ $\left|\vec{b}\right| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$

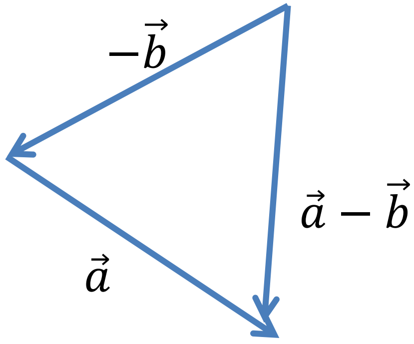
b) $\vec{b}$ коллинеарен $\vec{a}$

$c)$ $\alpha > 0$ $\vec{b}$ и $\vec{a}$ сонаправлены

$\alpha < 0$ $\vec{b}$ *и* $\vec{a}$ противоположно направлены

Свойства линейных операций над векторами

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4) (-1)$\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$
5) $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$
6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
7) $\alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$



$-\vec{b} = (-1) \cdot \vec{b}$

$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$

<u>Теорема.</u> Необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является условие

$$\vec{b} = \alpha\vec{a},$$

где α - отличное от нуля число.

Доказательство. **Необходимость.** 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены. Тогда

$$\vec{a} \neq \vec{0} \qquad \vec{b} = +\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Вводим обозначение $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \alpha$ Тогда получаем $\vec{b} = \alpha\vec{a},$

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены. Тогда

$$\vec{a} \neq \vec{0} \qquad \vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Вводим обозначение $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \alpha$ Тогда получаем $\vec{b} = \alpha\vec{a},$

Достаточность. Пусть выполнено $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Тогда, согласно определению умножения вектора на число векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{a}_k$ - линейная комбинация векторов

$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_k$ - коэффициенты линейной комбинации

Свойства линейной комбинации:

Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_k$ - коллинеарные, то их линейная комбинация им коллинеарна.

Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_k$ - компланарны, то их линейная комбинация им компланарна.

Определение. Множество векторов, замкнутое относительно линейных операций называется **векторным пространством**.

Линейная зависимость векторов

$\vec{b}$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_k$ $\beta_{1,} \beta_2, \cdots, \beta_k$

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \cdots + \beta_k \vec{a}_k$$

Пример. $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ $\vec{b} = -\vec{a}_3$ $\vec{b} = -\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ $\vec{b} = \vec{a}_3 - 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2$ и т.д.

Свойства линейно-зависимых и линейно-независимых векторов

1. Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_k$ есть нулевой вектор, то такая система линейно-зависима.

2. Система, содержащая один вектор, линейно-зависима, если он нулевой.

3. Если к линейно-зависимой системе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_k$ добавить какие-то векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_s$, то полученная система векторов будет линейно-зависима.

4. Если в системе векторов какая-то часть линейно-зависима, то и вся система линейно-зависима.

5. Любая часть линейно-независимой системе линейно-независима.

<u>Теорема.</u> Если вектор $\vec{b}$ раскладывается по система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_k$, то это разложение единственное тогда и только тогда, когда система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_k$ - линейно-независимая система.

Доказательство.

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{a}_k$$

$$\vec{b} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \cdots + \beta_k\vec{a}_k$$

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{a}_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)\vec{a}_k$$

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 - \beta_2, = 0 \quad \cdots, \quad \alpha_k - \beta_k = 0$$

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \cdots, \quad \alpha_k = \beta_k$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_k$ - линейно-зависимая система $\quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0$

$$\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{a}_k$$

$$\vec{b} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \cdots + \beta_k\vec{a}_k$$

$$\vec{0} + \vec{b} = \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{a}_2 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)\vec{a}_k$$

Теорема. Для того, чтобы система из $k > 1$ векторов линейно-зависима, необходимо и достаточно, чтобы один из векторов системы раскладывается по остальным векторам системы.

Доказательство. Необходимость.

Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_k$ линейно зависима

Это означает, что существует $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$, где

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0.$ Пусть $\alpha_1 \neq 0 \rightarrow \vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a}_3 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\vec{a}_k$

Получили разложение $\vec{a}_1$ по остальным векторам

$$\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \beta_3\vec{a}_3 + \cdots + \beta_k\vec{a}_k$$

Достаточность. Пусть один из векторов системы, например, $\vec{a}_1$

является комбинаций остальных $\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \beta_3\vec{a}_3 + \cdots + \beta_k\vec{a}_k$

$\vec{0} = -1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \cdots + \beta_k\vec{a}_k,$ где не все β_k равны 0

Теорема. 1. Система из одного вектора линейно-зависима тогда и только тогда, когда этот вектор - нулевой.

2. Система из двух векторов линейно-зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарные.

3. Система из трех векторов линейно-зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарные.