Упорядоченные разбиения

Вычислим последнее выражение:

$$\frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!\,\underbrace{(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)}_{}!}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

$0! = 1$

Теорема: число упорядоченных разбиений множества мощности n на k частей мощностей $n_1, n_2, \ldots, n_k$ равно

$$\boldsymbol{C_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}}$$

Числа $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$ называют ***полиномиальными коэффициентами***

Упорядоченные разбиения

Задача: Сколько существует слов длины n в алфавите $A = \{a_1, a_2, \dots, a_\text{к}\}$ в которых буква a_1 встречается n_1 раз, буква a_2 встречается n_2 раз, …. , буква a_k встречается n_k раз.
$(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$

Решение: занумеруем позиции букв в слове числами $1,2, \dots, n$

Нам нужно выбрать: n_1 позиций для буквы a_1

n_2 позиций для буквы a_2

… … … … … … … … … … … .

n_k позиций для буквы a_k

Пусть $\boldsymbol{S_i}$ *множество позиций для буквы* $\boldsymbol{a_i}$ $(i = 1,2, \dots, k)$. Тогда *семейство множеств* $\{\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}, \dots, \boldsymbol{S_n}\}$ есть *разбиение множества* $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$ на части с мощностями $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}, \dots, \boldsymbol{n_k}$.

$$\textbf{Искомое число слов} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}! \cdot \boldsymbol{n_2}! \cdot \dots \cdot \boldsymbol{n_k}!}$$

Упорядоченные разбиения

Задача: Сколько существует различных перестановок из букв слова Уссури?

Решение: Эта задача эквивалентна задаче о том, сколько различных слов длины 6 можно образовать из букв алфавита $\{у, р, с, и\}$, при условии, что буква «у» встречается в слове 2 раза, буква «с» – 2 раза, буква «р» и буква «и» – по одному разу.

занумеруем позиции букв в слове числами 1,2,3,4,5,6

нужно выбрать:

2 позиции для буквы «у»	S_1
2 позиции для буквы «с»	S_2
1 позицию для буквы «р»	S_3
1 позицию для буквы «и»	S_4

$\mathrm{S_i}$ множество позиций для буквы a_{i}

Например: $S_1 = \{1,3\}$ $S_2 = \{2,5\}$ $S_3 = \{6\}$ $S_4 = \{4\}$

это действительно разбиение множества 1,2,3,4,5,6

Этому разбиению соответствует слово «усуиср»

Всего таких разбиений (слов) будет $\dfrac{\mathbf{6}!}{\mathbf{2}! \cdot \mathbf{2}! \cdot \mathbf{1}! \cdot \mathbf{1}!}$

Полиномиальная теорема

Полиномиальная теорема является обобщением бинома Ньютона.

Теорема:

$$(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \cdots \boldsymbol{x_k})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\substack{\boldsymbol{n_1, n_2, \dots, n_k} \\ \boldsymbol{n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n}}} \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}!\, \boldsymbol{n_2}! \dots \boldsymbol{n_k}!} \cdot \boldsymbol{x_1^{n_1}} \cdot \boldsymbol{x_2^{n_2}} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{x_k^{n_k}}$$

Пример: найти коэффициент при $a^3b^2c^3$ в разложении $(2a + 3b + \text{c})^8$.

Решение: найдем соответствующее слагаемое в сумме:

$$C_8(3,2,3) \cdot (2a)^3 \cdot (3b)^2 \cdot c^3 = \underbrace{\frac{8!}{3!\,2!\,3!} \cdot 2^3 \cdot 3^2}_{\text{искомый коэффициент}} \cdot a^3b^2c^3$$

Сочетания с повторениями

Введем в рассмотрение понятие ***мультимножества***.

Мультимножество – это совокупность элементов, в которую каждый элемент может входить более одного раза. Общее число вхождений элементов в мультимножество будем называть размером мультимножества.

Пример: $\{a, a, b, b, b, c\}$ – это мультимножество размера 6, составленное из элементов множества $\{a, b, c\}$.

Сочетания с повторениями из n по k – это мультимножества размера k, составленные из элементов множества мощности n.

Пример: Из элементов множества $\{a, b, c\}$ можно составить 10 мультимножеств размера 3

$\{a, a, a\}$ $\{a, a, b\}$ $\{a, a, c\}$ $\{c, c, c\}$ $\{c, c, b\}$ $\{c, c, a\}$

$\{b, b, b\}$ $\{b, b, a\}$ $\{b, b, c\}$ $\{a, b, c\}$

Сочетания с повторениями

Сосчитаем число сочетаний с повторениями из n по k в общем случае.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Мультимножеству размера k поставим в соответствие слово в алфавите $\{0,1\}$, состоящее из n групп единиц, разделенных нулями.

$$\underbrace{1\ \dots\ 1}_{\text{1-ая группа}}\ \mathbf{0}\ \underbrace{1\ \dots\ 1}_{\text{2-ая группа}}\ \mathbf{0}\ \dots\ \mathbf{0}\ \underbrace{1\ \dots\ 1}_{n\text{-ая группа}}$$

число единиц в каждой группе = числу вхождений элемента a_i в мультимножество

Каждому мультимножеству однозначно соответствует некоторое слово и наоборот.

Например: $k = 9, n = 5$

мультимножество

$\{a_1, a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_4, a_4, a_4, a_4\}$

соответствующая строка

1111 0 11 0 0 1111 0

и наоборот

строка

0 1111 0 0 1111 0

соответствующее мультимножество

$\{a_2, a_2, a_2, a_2, a_4, a_4, a_4, a_4\}$

Сочетания с повторениями

В общем случае:

число нулей в слове = $(n-1)$

число единиц в слове = k

длина слова = $k+n-1$

всего таких слов

$$C_{k+n-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$

Так как существует биекция между множеством всех сочетаний с повторениями из n по k и множеством всех слов длины $k+n-1$, содержащих k единиц и $(n-1)$ нулей, то число сочетаний с повторениями равно числу таких слов.

Теорема: число сочетаний с повторениями из n по k равно

$$\boxed{\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}}$$

Сочетания с повторениями

Пример. Комиссия состоит из восьми человек. При принятии решения члены комиссии голосуют «за», «против» или «воздержался». Сколько существует возможных исходов голосования по данному решению, при условии, что нас интересует только общий результат голосования?

Решение:

число групп = 3

число нулей в строке = 2

число единиц в строке = 8

длина строки = 10

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = 45$$

Задача о сочетаниях с повторениями равнозначна следующей:

Сколькими способами можно разложить k неразличимых шаров в n различных ящиков, при условии, что ящики могут быть пустыми.

Сочетания с повторениями

Пример. Сколько положительных целочисленных решений имеет уравнение

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 25$$

Решение: есть 5 групп единиц и 4 разделителя (нуля), причем в каждой группе должна быть хотя бы одна единица. Всего единиц в строке – 25.

группа n_1		группа n_2		группа n_3		группа n_4		группа n_5
1……	0	1……	0	1…….	0	1……	0	1……

Число единиц для размещения = 25 – 5 = 20
Число нулей = 4

$$C_{24}^{4} = \frac{24!}{4!\,(24-4)!} = \frac{24!}{4!\,20!}$$

искомое число решений

Формула включений и исключений

В соответствии с правилом суммы, для двух непересекающихся множеств S_1 и S_2 справедливо

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$$

Если множества пересекаются, то это равенство не верно, т.к. общие элементы будут дважды учитываться в правой части равенства. Поэтому верным будет равенство

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$$

Аналогичное равенство справедливо и для случая трех взаимно пересекающихся множеств:

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$$

Чтобы убедиться в справедливости данного выражения, достаточно проверить, что каждый элемент множества из левой части равенства учитывается в правой части ровно один раз. При этом следует помнить, что этот элемент может принадлежать одному, двум или трем множествам.

Формула включений и исключений

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|$$

Если элемент входит только в одно из множеств, например в S_1, то он учтен только в слагаемом $|S_1|$ и сосчитан ровно 1 раз.

Если элемент входит только в два множества, например в S_1 и S_2, то он дважды учтен в слагаемых $|S_1|$ и $|S_2|$ со знаком «+» и один раз в $|S_1 \cap S_2|$ со знаком «-».
Тогда общий вклад этого элемента: 1 + 1 – 1 = 1.

Если элемент входит в 3 множества, то он трижды учтен в каждом из слагаемых в правой части.
Тогда общий вклад этого элемента: 1 + 1 + 1 - 1 - 1 – 1 +1 = 1.

Таким образом вклад каждого элемента из множества $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ равен единице, следовательно, вся сумма равна числу элементов этого множества.

Формула включений и исключений

Для любых конечных множеств $S_1, S_2, \ldots, S_n$ справедливо равенство:

$$|S_1 \cup \cdots \cup S_n| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |S_i \cap S_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |S_i \cap S_j \cap S_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| \quad (*)$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} |S_i| = |S_1| + \cdots + |S_n|$$

сумма элементов, входящих в каждое из множеств $S_1, S_2, \ldots, S_n$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |S_i \cap S_j| = |S_1 \cap S_2| + \cdots + |S_{n-1} \cap S_n|$$

сумма элементов, входящих в попарные пересечения этих множеств

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |S_i \cap S_j \cap S_k| = |S_1 \cap S_2 \cap S_3| + \cdots + |S_{n-2} \cap S_{n-1} \cap S_n|$$

сумма элементов, входящих в пересечения трех множеств

и так далее

$$|S_1 \cup \dots \cup S_n| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |S_i \cap S_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |S_i \cap S_j \cap S_k| + \dots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n| \quad (*)$$

Пусть произвольный элемент $x \in S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$. Покажем, что x входит в правую часть (*) ровно один раз. Будем считать, что $x \in S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_m}$ и $x \notin S_{i_{m+1}} \cap S_{i_{m+2}} \cap \dots \cap S_{i_n}$. Сосчитаем сколько раз элемент x войдет в каждую из сумм, стоящих в правой части (*).

слагаемое из (*)	число вхождений элемента x в сумму	
$\sum_{i} \vert S_i \vert \ (1 \le i \le m)$	$m = C_m^1$ раз	C_m^1 – число способов выбрать 1 множества из m возможных
$\sum_{i<j} \vert S_i \cap S_j \vert \ \ (1 \le i,j \le m)$	C_m^2 раз	$x \in S_i \cap S_j$, C_m^2 - число способов выбрать 2 множества из m возможных
$\sum_{i<j<k} \vert S_i \cap S_j \cap S_k \vert \ 1 \le i,j,k \le m$	C_m^3 раз	$x \in S_i \cap S_j \cap S_k$, C_m^3- число способов выбрать 3 множества из m возможных
....	… … … … … …	....
$\vert S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_m} \vert$	$1 = C_m^m$	$x \in S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_m}$

Суммы, содержащие более $m+1$ не учитываем, т.к. x не входит в пересечение более чем m множеств

Формула включений и исключений

Сосчитаем, сколько раз элемент x входит в правую часть формулы (*)

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 + \cdots + (-1)^{m-1} C_m^m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} C_m^k = 1 \quad \Rightarrow$$

элемент x входит в правую часть (*) ровно один раз, ч.т.д

В предыдущей лекции доказано, что $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0}$ преобразуем последнее выражение

$$\boxed{1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k = 1}$$

Задача о беспорядках

Задача (Леонард Эйлер). Войдя в ресторан, *n* гостей оставили свои шляпы швейцару, а на выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов в которых каждый из гостей получил обратно не свою шляпу?

Решение:

Занумеруем гостей	1	2	…	i	…	n
Занумеруем шляпы	a_1	a_2	…	a_i	…	a_n

Любая перестановка $\boldsymbol{a_1\ a_2\ \ldots .\ a_n}$ чисел 1, 2, …., n соответствует некоторому варианту разбора шляп.

1	2	3	4	5
5	2	4	1	3

Например, для пяти человек перестановка 52413 означает, что первый гость получил 5-ую шляпу ($a_1 = 5$), второй гость получил свою шляпу ($a_2 = 2$) и т.д. **Всего таких перестановок $\boldsymbol{n}$!.**

Будем говорить, что **элемент $\boldsymbol{a_i}$ стоит на своем месте**, если $\boldsymbol{a_i = i}$, $(i = 1,2, \ldots, n)$.
Нас интересует ситуация, когда **ни один из элементов не стоит на своем месте**, т. е. $\boldsymbol{a_i \neq i}$ $(\forall \boldsymbol{i})$.
Такая ситуация и называется **беспорядком или разупорядочением**.

Задача о беспорядках

Пусть

$N_n(0)$ – число перестановок, когда ни один из n элементов не стоит на своем месте

$n!$ – Число всех возможных перестановок

$\boldsymbol{S_i}$ - Множество перестановок, в которых ***i* – ый элемент стоит на своем месте**

$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n|$ - число перестановок, когда хотя бы один элемент остается на месте

$$\boxed{N_n(0) = n! - \underbrace{|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n|}_{\text{находим по формуле включений и исключений}}}$$

искомое число перестановок

Задача о беспорядках

$$N_n(0) = n! - \left\{ \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |S_i \cap S_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| \right\}$$

Вычислим каждую из сумм

число способов выбрать
1 элемент из n элементов

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} |S_i|} = C_n^1 \cdot (\mathrm{n}-1)! \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} |S_i| = n!}$$

число способов переставить оставшиеся
$(n-1)$элементов

число перестановок в которых
один элемент стоит на своем месте

$$\boxed{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |S_i \cap S_j|} = C_n^2 \cdot (\mathrm{n}-2)! \Rightarrow \boxed{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |S_i \cap S_j| = \frac{n!}{2!}}$$

число перестановок в ***которых два элемента стоят на своем месте***

Остальные суммы вычисляются аналогично

Последнее слагаемое в формуле есть число перестановок
в которых ***все элементы остаются на месте***

$$\Rightarrow \boxed{|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| = C_n^n = 1}$$

Задача о беспорядках

Подставим полученные результаты в формулу для нахождения числа беспорядков:

$$N_n(0) = n! - \left\{ \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |S_i \cap S_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| \right\}$$

$$N_n(0) = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)(-1)^{n-1} = n! \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

$$\boxed{N_n(0) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}}$$

- **искомое число беспорядков**

Задача о беспорядках

Задача 1. Семеро мужчин отправляются в ресторан и сдают свои шляпы в гардероб. Сколькими способами они смогут вернуть свои шляпы так, чтобы

а) Ни один из гостей не получил назад свою шляпу

Искомое число способов $N_7(0)$	=	Число всех способов раздать шляпы	−	Число таких раздач, что хотя бы один из гостей получил назад свою шляпу
		7!		?

Один гость получил свою шляпу $C_7^1 \cdot (7-1)!$

Двое гостей получили свои шляпы $C_7^2 \cdot (7-2)!$

………………………………

Все гости получили свои шляпы $C_7^7 \cdot (7-7)!$

$$N_7(0) = 7! - \{C_7^1 \cdot 6! - C_7^2 \cdot 5! + C_7^3 \cdot 4! - C_7^4 \cdot 3! + C_7^5 \cdot 2! - C_7^6 \cdot 1! + C_7^7 \cdot 0!\} = 1854$$

Задача о беспорядках

Задача 1. Семеро мужчин отправляются в ресторан и сдают свои шляпы в гардероб. Сколькими способами они смогут вернуть свои шляпы так, чтобы

б) Ровно один гость получил назад свою шляпу

$N_7(1) = C_7^1 \cdot N_6(0)$

C_7^1 — Число способов выбрать гостя

$N_6(0)$ — Число способов раздать шляпы так, чтобы никто из 6 гостей не получил свою шляпу

$$N_7(1) = C_7^1 \cdot 6! \cdot \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

в) Хотя бы один гость получил назад свою шляпу

Искомое число способов $= 7! - N_7(0)$