1.Матрицы

Миноры неквадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad dim(A) = m \times n$$

$$k \le \min(m, n)$$

Минором *к*-порядка матрицы *А* называется определитель **квадратной** матрицы порядка k (т.е. его размер $\dim(M) = k \times k$), составленный из элементов матрицы A, которые находятся на пересечении заранее выбранных k строчек и k столбцов. Причем расположение элементов матрицы сохраняется

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix} \qquad dim(A) = 3 \times 4 \qquad k = 2 < \min(3,4) = 3$$

$$M_{2,3}{}^{2,3} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} \qquad M_{2,3,4}{}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 10 & 9 \end{vmatrix} \qquad \cancel{k > 3}$$

Определение. Рангом матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы отличной от нуля.

Обозначение rank(A) $N_k = C_m{}^k \cdot C_n{}^k$ $k = 1,2,\cdots \min(m,n)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_1{}^1 \equiv M(1) = 1 \neq 0 \qquad M(2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$M(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12 \neq 0$$

$$M(4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -56 \neq 0$$

rank(A)=4

Метод окаймляющих миноров

<u>Определение.</u> Минор $M_{\text{ок}}\,(\,k+1\,)$порядка $k+1$ называется окаймляющим минором минора $M(k)$ порядка k , если матрица соответствующая окаймляющему минору, $M_{\text{ок}}\,(\,k+1\,)$ содержит матрицу соответствующую минору $M(k)$.

$$M_{ok}(4)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}$$

$$M(3)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_1^{\ 1} \equiv M(1) = 1 \qquad M_{\text{ок}}(2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{\text{ок}}(2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad M_{\text{ок}}(2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$ и т.д.

$$M(2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Теорема. Если миноры, окаймляющие минор *k*-ого порядка матрицы *A* размерности $dim(A) = m \times n$ равны нулю, то все миноры (*k+1*) матрицы *A* равны нулю.

Пример. Вычисление ранга матрицы A методом окаймляющих миноров

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow rank(A) \le 3$$

1. $a_{11} = 1 \ne 0 \Longrightarrow rank(A) \ge 1$

2. $M(2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \ne 0 \Longrightarrow rank(A) \ge 2$

3. $M(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8 \ne 0 \Longrightarrow rank(A) = 3$

Теорема. (*об инвариантности ранга матрицы относительно элементарных преобразований*)

Ранг матрицы *B* полученной из матрицы *A* элементарными преобразованиями равен рангу матрицы *A*.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1\text{стр}}{a_{11}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{стр3-5стр1}]{\text{стр2-3стр1}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{стр3-стр2}} \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rank(A) = rank(B) = 2$$

Метод Гаусса (нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований).

Метод Гаусса заключается в приведении матрицы, ранг которой вычисляем к трапециевидной (в случае прямоугольной матрицы) или к треугольной (в случае квадратной матрицы)

$$dim(A) = m \times n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim$$

$$1\text{стр} \times \frac{1}{a_{11}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \cdots \sim$$

$$\sim B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{rank(A) = rank(B) = r}$$

Приведение матрицы к каноническому виду

Матрица, у которой вначале главной диагонали стоят подряд единицы, а остальные элементы нули называется матрица канонического вида.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2\\-1&2&0&1\\5&0&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&5&2&3\\5&0&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&5&2&3\\0&-15&-6&-9\end{pmatrix}\sim$$
$$\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&5&2&3\\0&-5&-2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2&2\\0&5&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&5&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2{,}5&3{,}5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Теорема. Если матрица A невырожденная и определены произведения матриц
$A * B$ и $B * A$, то $rank(A * B) = rank(B)$; $rank(B * A) = rank(B)$

Доказательство базируется на теоремах.

Теорема. Матрица A является невырожденной тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде произведения элементарных матриц.

Теорема. (*об инвариантности ранга матрицы относительно элементарных преобразований*). Ранг матрицы *B* полученной из матрицы *A* элементарными преобразованиями равен рангу матрицы *A*.

Теорема. Ранг произведения двух матриц не превосходит рангов сомножителей

$$rank(A * B) \leq \min(rank(A), rank(B))$$

Линейная зависимость строк (столбцов) матрицы

<u>Определение.</u> Строка $A = (a_1, a_2 \cdots a_n)$ является линейной комбинацией других строк

$B = (b_1, b_2 \cdots b_n), C = (c_1, c_2 \cdots c_n)$, $D = (d_1, d_2 \cdots d_n) \cdots F = (f_1, f_2 \cdots f_n)$, если

найдутся такие числа $\alpha, \beta, \gamma \cdots \delta$ не все равные нулю, т.е. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots + \delta^2 \neq 0$, что справедливы равенства

$$a_j = \alpha b_j + \beta c_j + \delta d_j \cdots \gamma f_j \qquad j = 1,2, \cdots n$$

<u>Определение.</u> Строки $A = (a_1, a_2 \cdots a_n)$, $B = (b_1, b_2 \cdots b_n)$, $C = (c_1, c_2 \cdots c_n)$,

$D = (d_1, d_2 \cdots d_n) \cdots F = (f_1, f_2 \cdots f_n)$ называются линейно зависимыми, если

найдутся такие числа $\mu, \alpha, \beta, \gamma \cdots \delta$ не все равные нулю, что справедливы равенства

$$(*) \qquad \mu a_j + \alpha b_j + \beta c_j + \delta d_j + \cdots + \gamma f_j = 0 \qquad j = 1,2, \cdots n$$

$$(**) \qquad \mu A + \alpha B + \beta C + \delta D + \cdots + \gamma F = 0$$

$$\mu^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + \cdots + \gamma^2 \neq 0$$

Определение. Строки $A, B, C, D, \cdots F$ называются линейно независимыми, если

равенство (**)возможно лишь в случае, когда все числа $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \cdots = \mu = 0$.

$$(**) \qquad \mu A + \alpha B + \beta C + \delta D + \cdots + \gamma F = 0$$

Теорема. Для того, чтобы строки $A, B, C, D, \cdots F$ были линейно зависимыми,

необходимо и достаточно, чтобы одна из этих строк являлась линейной комбинацией

остальных строк

Доказательство. Необходимость.

$$\mu A + \alpha B + \beta C + \delta D + \cdots + \gamma F = 0 \qquad \mu \neq 0$$

$$A = -\frac{\alpha}{\mu}B - \frac{\beta}{\mu}C - \frac{\delta}{\mu}D - \cdots - \frac{\gamma}{\mu}F$$

$$A = \varepsilon B + \theta C + \rho D + \cdots + \sigma F \qquad (***)$$

Достаточность

$$-1A + \varepsilon B + \theta C + \rho D + \cdots + \sigma F = O \qquad (****)$$

$$\mu = -1 \neq 0$$

Пример (линейная комбинация третьей строки).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3 = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2$$

$$8 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3$$

$$-4 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2)$$

Линейная независимость матриц

$A_1, A_2, \cdots A_k$ - матрицы одинакового размера

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ - числа

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$ - линейная комбинация матриц

$B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$ разложение матрицы B по матрицам $A_1, A_2, \cdots, A_k$

<u>Определение</u> (линейной независимости матриц). Система матриц одинакового размера $A_1, A_2, \cdots A_k$ линейно независима, если нулевая матрица раскладывается по ней однозначно, т.е. из равенства

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k = O \qquad (**)$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

В противоположном случае, т.е. если существуют $\boldsymbol{k}$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ одновременно неравные нулю и такие, что выполняется равенство $(**)$, система матриц называется линейно зависимой.

Утверждение. Если матрица B разложена по линейной независимой системе матриц $A_1, A_2, \cdots A_k$ (т. е. $B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$), то коэффициенты разложения определены однозначно.

Доказательство. Пусть коэффициенты разложения определения неоднозначно, т.е. есть два набора коэффициентов разложения матрицы B по матрицам $A_1, A_2, \cdots A_k$ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ и $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_k$

$$- \begin{array}{l} B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k \\ B = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \cdots + \beta_k A_k \end{array}$$

$$O = (\alpha_1 - \beta_1)A_1 + (\alpha_2 - \beta_2)A_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_{k)} A_k$$

$A_1, A_2, \cdots A_k$ - линейно независимая система. Следовательно, согласно определению линейной независимости матриц

$$(\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) = \cdots (\alpha_k - \beta_k) = 0$$

$$\alpha_1 = \beta_1; \quad \alpha_2 = \beta_2; \quad \cdots; \quad \alpha_k = \beta_k$$

Базисный минор

Определение. Базисным минором матрицы A называется ее минор, отличный от нуля, порядок которого равен рангу матрицы A.

Определение. Строки и столбцы матрицы A, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются базисными

Теорема (о базисном миноре)

1. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).
2. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.

1. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad dim(A) = m \times n \qquad rank(A) = r$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$ - базисный минор $\qquad \dim(M) = r$

Возьмем некоторое число $j \quad (1 \leq j \leq n)$ и $i = \overline{1, m}$

Пусть $\boxed{\text{1) } i \text{ или } j \leq r}$

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

т.к. имеем или две одинаковые строчки или два одинаковых столбца

Пусть $\boxed{2)\ i > r \text{ и } j > r}$

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \boxed{a_{ij}} \end{vmatrix} = 0$$

$r+1$

Получили минор $r+1$ порядка $\quad \dim(\Delta_{ij}) = r+1$

Разложим определитель по последней строке

$$\Delta_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{ir}A_{ir} + a_{ij}A_{ij} = 0$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M(r) \neq 0$$

т.к. $M(r)$ это базисный минор

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{ir}\alpha_r + a_{ij}\alpha_{r+1} = 0 \qquad \forall\, i = \overline{1,m}$$

$$\alpha_{r+1} = A_{ij} \neq 0$$

$$a_{ij} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{r+1}} a_{i1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_{r+1}} a_{i2} - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_{r+1}} a_{ir} \qquad \beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_{r+1}} \qquad \forall\, i = \overline{1,m}$$

$$(*) \qquad a_{ij} = \beta_1 a_{i1} + \beta_2 a_{i2} + \cdots + \beta_r a_{ir}$$

2. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.

Предположим, что базисные строки (столбцы) линейно зависимы. Тогда одна из базисных строк (столбцов) является линейной комбинацией остальных базисных строк (столбцов). Отсюда, из свойств определителя следует, что определитель (базисный минор) равен нулю, что противоречит определению базисного минора

Следствие 1. Всякая не базисная строка (столбец) является линейно комбинацией всех строк (столбцов) этой матрицы.

Следствие 2. Максимальное число линейно независимых строк (столбцов) равно рангу матрицы.

Следствие 3. (критерий равенства нулю определителя) Для того, чтобы определитель квадратной матрицы был равен нулю необходимо и достаточно, чтобы некоторая его строка (столбец) была линейной комбинацией других его строк (столбцов)