Теорема. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (****)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$rank(A) = rank(\tilde{A}) = n$$

$$\begin{matrix} m > n\ ? & & m > n \\ m = n\ ? & \rightarrow & m = n \\ m < n\ ? & & \cancel{m < n} \end{matrix}$$

Тогда существует минор $M_b = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ который является базисным и для A и для $\tilde{A}$

Так как каждая не базисная строка матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией ее базисных строк, то система $(****)$ эквивалентна системе, состоящей только из тех n уравнений, коэффициенты при неизвестных в которых образуют базисный минор M_b.

$$\boxed{m = n}$$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$$

Это невырожденная система n уравнений с n неизвестными. Она имеет единственное решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \quad x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta}$$

Следовательно и исходная система $(*)$ имеет единственное решение.

Теорема. Если совместная система произвольных линейных уравнений имеет единственное решение, то ранг матрицы системы равен числу неизвестных.

Теорема. Если совместная система произвольных линейных уравнений имеет бесконечное множество решений, то ранг матрицы системы меньше числа неизвестных.

Схема решения системы линейных уравнений

1. Находят ранг матрицы A $(rank(A))$ и ранг расширенной матрицы $\tilde{A}$ $\left(rank(\tilde{A})\right)$,
Если $rank(A) \neq rank(\tilde{A})$, то система несовместна.

2. Если $rank(A) = rank\left(\tilde{A}\right) = r$, то выделяют базисный минор и базисные неизвестные.

3. Данную систему заменяют системой, состоящей из тех r уравнений, в которую вошли элементы базисного минора.

4. Если число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение. Решение можно найти по формуле Крамера.

5. Если число базисных неизвестных меньше числа неизвестных системы, то находят выражение базисных неизвестных через свободные неизвестные, например, по формуле Крамера.

Пример.

$$\begin{gathered} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_3 = 9 \end{gathered}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M_б = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \qquad \dim(M_б) = 3$$

$$M'_{ok}(4) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & -2 & -30 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 0 & 14 & -2 & -30 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$M''_{ok}(4) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 12 \\ 0 & 14 & -2 & -30 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 12 \\ 0 & 7 & -1 & -15 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 12 \\ 0 & 7 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times$$

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

$$rank(A) = rank(\tilde{A}) = 3$$

$$\cancel{3x_1 - x_2 + x_3 = 6}$$
$$x_1 - 5x_2 + x_3 = 12$$
$$2x_1 + 4x_2 = -6$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$
$$\cancel{5x_1 + 4x_3 = 9}$$

$$x_1 - 5x_2 + x_3 = 12$$
$$2x_1 + 4x_2 = -6$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 1$$

Система линейных однородных уравнений (СЛОУ)
Фундаментальная система решений

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix} \qquad (2)$$

<u>Определение.</u> Система линейных уравнений называется однородной, если свободный член в каждом уравнении равен нулю

(3) $\quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \quad$ - решение (при любых a_{ij})

Из теоремы о единственности решения совместной системы (*Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.*) следует, что однородная система имеет <u>только</u> тривиальное решение, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных .

$$rank(A) = n \qquad \leftrightarrow \qquad M_{б} \equiv \Delta$$

Т.е. , если определитель системы $\Delta \neq 0$, то существует только тривиальное решение.

Из теоремы о бесчисленном множестве решений совместной системы (*Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.*) следует, что однородная система имеет нетривиальное решение, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных .

$$rank(A) = r < n \qquad \leftrightarrow \qquad M_б \equiv \Delta$$

Т.е. , если определитель системы $\Delta = 0$, то существует нетривиальное решение и даже больше – бесчисленное множество решений.

Пример.

$$\begin{matrix} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{matrix} \qquad (4)$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ - базисный минор $\qquad x_1, x_2$ - базисные переменные

$$\begin{matrix} 2x_1 - x_2 = -x_3 - x_4 \\ 4x_1 + x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{matrix} \qquad x_1 = \frac{-3x_3 + 2x_4}{6} \qquad x_2 = \frac{5}{3}x_4 \qquad \begin{matrix} x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{matrix}$$

- обозначение

$$\left\{ \left(\frac{-3c_1 + 2c_2}{6}, \frac{5}{3}c_2, c_1, c_2 \right) \qquad \forall c_1, c_2 \in R \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall c_1, c_2 \in R$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3c_1 + 2c_2}{6} \\ \dfrac{5}{3}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = D$$

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{-3c_1 + 2c_2}{6} \\ \dfrac{5}{3}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1D_1 + c_2D_2$$

$$D = c_1D_1 + c_2D_2 \qquad (5)$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \equiv x_3 = 1, \quad c_2 \equiv x_4 = 0 \quad \Longrightarrow D_1$$

$$c_1 \equiv x_3 = 0, \quad c_2 \equiv x_4 = 1 \quad \Longrightarrow D_2$$

$$c_1 = x_3 = 1, \qquad c_2 = x_4 = 0$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 &= -2 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-2}{6} = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4+4}{6} = 0$$

Решение

$$x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = 0;\ x_3 = 1;\ x_4 = 0 \sim (-\frac{1}{2}, 0,1.0) \Longrightarrow \quad D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = x_3 = 0, \qquad c_2 = x_4 = 1$$

$$\begin{matrix} 2x_1 - x_2 = -1 \\ 4x_1 + x_2 = 3 \end{matrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6+4}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Решение $$\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 0, 1\right) \Longrightarrow D_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D_1 и D_2 - вектор-решения

Решения D_1 и D_2 это частные решения однородной системы линейных уравнений и они линейно независимы.

A и B линейно зависимы, если $\alpha A + \beta B = 0$ только при $\alpha = \beta = 0$

$r = rank(A) = 2,$ $\quad n = 4 \quad n - r = 2$ Два линейно независимых частных решений

$$\boxed{X = c_1 D_1 + c_2 D_2}$$

$D_1, D_2, \cdots, D_k$ - вектор-решения системы СЛОУ

$$\alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \cdots + \alpha_k D_k$$

если $\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \quad \equiv \quad \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| = 0 \quad \equiv \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = 0,$

то $\quad \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \cdots + \alpha_k D_k \quad$ тривиальная комбинация

Вектор решения $D_1, D_2, \cdots, D_k$ называются линейно зависимыми, если хотя бы одно из них является линейной комбинацией остальных. В противном случае эти вектор решения называются линейно независимыми.

Теорема. Любая линейная комбинация конечного числа вектор-решений системы однородных линейных уравнений является вектор-решением этой системы.

Теорема. Пусть дана система линейных однородных уравнений с рангом матрицы меньше числа неизвестных, $rank(A) = r < n$. Тогда существует $n - r$ линейно независимых вектор-решений $D_1, D_2, \cdots, D_{n-r}$ данной системы и любое вектор-решение системы является линейной комбинацией $D_1, D_2, \cdots, D_{n-r}$.

$$(7) \quad D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots D_{n-r} = \begin{pmatrix} d_{1,n-r} \\ d_{2,n-r} \\ \vdots \\ d_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Число решений $n - r$ – это максимальное число линейно независимых вектор-решений.

Определение. Совокупность максимального числа линейно независимых вектор-решений (7) системы линейных однородных уравнений называется фундаментальной системой решений системы линейных однородных уравнений.

$D_1, D_2, \cdots, D_{n-r}$ фундаментальная система решений лин. однородных уравнений

$$(8) \qquad D = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \cdots + \alpha_{n-r} D_{n-r}$$ общее решение СЛОУ

Связь между общими решениями неоднородной системы линейных уравнений и соответствующей ей системой однородных уравнений

(9) $A * X = B$ $\quad \dim(A) = m \times n$ $\quad rank(A) = r < n$

(10) $A * X = 0$

<u>Теорема.</u> Сумма любого решения неоднородной системы и любого решения соответствующей ей однородной системы является решением неоднородной системы.

Доказательство. C – вектор-решение системы (10), D – вектор-решение системы (9)

$A * C = O,\qquad A * D = B,\qquad A * (C + D) = A * C + A * D = O + B = B$

$$A * (C + D) = B$$

<u>Теорема.</u> Разность двух произвольных решений неоднородной системы (9) является решением соответствующей ей однородной системы.

Доказательство. D_1 и D_2 – вектор-решене системы (9)

$A * D_1 = B,\qquad A * D_2 = B,\qquad A * (D_1 - D_2) = A * D_1 - A * D_2 = B - B = O$

$$A * (D_1 - D_2) = O$$