Понятие множества

Строгого определения множества не существует, так как понятие множества относится к числу первичных понятий в математике. Создатель теории множеств немецкий математик Георг Кант (1845-1918) определял множество так: «множество это многое, мыслимое нами как единое».

Под множеством мы будем понимать соединение каких-либо объектов в одно целое.

Объекты, из которых состоит множество, называют *элементами множества*. Все элементы множества отличны друг от друга, порядок следования элементов в множестве не важен.

Факт того, что элемент x содержится в некотором множестве A обозначается как $x \in A$ (читается как «элемент x принадлежит множеству А»). Если элемент x не содержится в множестве А, то пишут $x \notin A$ (читается «x не принадлежит А»).

Множества могут быть *конечными* и *бесконечными*. Конечные множества могут быть заданы списком (перечислением всех элементов множества). Например: $M = \{1, 2, 3, 9\}$. *Число элементов конечного множества* А называют *мощность множества* А и обозначают как $|A|$.

Примеры бесконечных множеств:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел.

$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots$ - множество всех целых чисел

$\mathbb{Q}$ - множество всех рациональных чисел

$\mathbb{R}$ - множество всех действительных чисел.

Бесконечные множества, очевидно, не могут быть заданы списком. Они могут быть заданы с помощью *характеристического признака* (свойства). Тот факт, что элемент x множества обладает некоторым свойством P обозначается как $P(x)$. Тогда множество А можно записать как

$$A = \{x | P(x)\}$$

Пример: 1) $M = \{x \in \mathbb{N} | x - \text{четное}\} -$ множество всех четных натуральных чисел

2) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 1\}$ – множество точек окружности единичного радиуса.

Конечные множества также могут быть заданы с помощью характеристического свойства.

Пример: $M = \{-1,1\} = \{x | x^2 = 1\}$

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается как $\emptyset$.

Множество, содержащее все элементы, интересующие нас в данных обстоятельствах, называется *универсальным множеством* (универсумом) и обозначается как $\mathbb{U}$.

Подмножества

Множество А называется *подмножеством* (или частью) множества В, если каждый элемент из множества А принадлежит множеству В.

Обозначение: $A \subseteq B$ (читается как «А включено в В», «А содержится в В»), здесь $\subseteq$ - отношение включения.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то пишут $A \subset B$ ($\subset$ - отношение строго включения).

В этом случае говорят, что А есть собственное подмножество В.

Некоторые свойства отношения включения:

1) $\emptyset \subseteq A$ 2) $A \subseteq A$ 3) $(A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$ 4) $(A \subseteq B \text{ и } B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$

Элементы множества сами могут быть множествами. Например: $X = \{\{a, b\}, \{c\}, \emptyset\}$.

Если элементами множества Х являются подмножества некоторого множества А, то множество Х называют *семейством подмножеств множества* А.

Семейство *всех подмножеств множества* А обозначают как 2^A.

Пример: пусть $A = \{a, b\}$, тогда $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Теорема (*о числе подмножеств конечного множества*).
Пусть А – произвольное конечное множество. Тогда $|2^A| = 2^{|A|}$.
Доказательство (методом математической индукции по числу элементов множества А):
Пусть $|A| = n$.

1) при $n = 0$ утверждение теоремы верно, так как $|2^A| = 2^0 = 1$, а единственным подмножеством пустого множества является оно само.
2) считаем, что утверждение теоремы верно при некотором $n = k > 0$, т.е. $|2^A| = 2^k$ – верно.
3) положим $n = k + 1$. Если мы сумеем доказать, что $|2^A| = 2^{k+1}$ – верно, то теорема доказана.

Выберем из множества А элемент $x \in A$ и обозначим через В множество всех элементов множества А, отличных от элемента x. Тогда $|B| = n - 1 = k$ и по предположению индукции $|2^B| = 2^k$ – есть число всех подмножеств множества В.
Каждое подмножество $X \subseteq A$ либо содержит, либо не содержит элемент x.
Если $x \notin X \Rightarrow X \subseteq B$ $\Rightarrow$ число таких подмножеств $X \subseteq A$ равно числу подмножеств множества В и равно 2^k.
Если $x \in X \Rightarrow X \nsubseteq B \Rightarrow$ число таких подмножеств тоже равно 2^k(это все подмножества множества В, к каждому из которых добавлен элемент $\{x\}$.
Таким образом число всех подмножеств множества А равно: $|2^A| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$
Теорема доказана.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Любому подмножество $X \subseteq A$ можно поставить в соответствие последовательность $h(X)$ нулей и единиц (т.е. бинарную строку) следующим образом:

$$h(X) = (h_1, h_2, \dots, h_n), \text{ где } h_i = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \in X \\ 0, & \text{если } a_i \notin X \end{cases}.$$

Последовательность $h(X)$ называется характеристическим вектором множества Х.
Пусть, например, $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ и элементы множества А нумеруются в алфавитном порядке.
Тогда $h(\{a, c, d\}) = (1,0,1,1,0,0)$; $h(\{a, e\}) = (1,0,0,0,1,0)$; $h(\emptyset) = (0,0,0,0,0,0)$.

Алгебра множеств

Рассмотрим некоторые операции над множествами.

1. Объединение множеств А и В есть множество
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$$
пример: $A = \{1,3,4\}, B = \{0,3,4,5\}$ $A \cup B = \{0,1,3,4,5\}$
2. Пересечение множеств А и В есть множество
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$$
пример: $A = \{1,3,4\}, B = \{0,3,4,5\}$ $A \cap B = \{3,4\}$
Если $A \cap B = \emptyset$, то говорят, что множества А и В не пересекаются.
3. Разность множеств А и В есть множество
$$A - B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$$
пример: $A = \{1,3,4\}, B = \{0,3,4,5\}$, $A - B = \{1\}$, $B - A = \{0,5\}$
4. Дополнение множества А есть множество
$$\bar{A} = \mathbb{U} - A = \{x | x \in \mathbb{U} \text{ и } x \notin A\}$$
5. Симметрическая разность множеств А и В есть множество
$$A \otimes B = (A - B) \cup (B - A)$$

Некоторые свойства операций над множествами

Свойства объединения и пересечения множеств:

1. Для любого множества A справедливо:
   $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
   $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
   $A \cup \mathbb{U} = \mathrm{U}, \quad A \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}$, $\mathbb{U}$ – универсальное множество.
2. **Коммутативность** объединения и пересечения множеств
   Для любых множеств A и B справедливо:
   $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
3. **Ассоциативность** объединения и пересечения множеств
   Для любых множеств A, B, и C справедливо:
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C,$
   $A \cap (B \cap C)) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
4. **Дистрибутивность**
   Для любых множеств A, B, и C справедливо:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

В силу ***свойства ассоциативности*** можно записывать объединение и пересечение любого числа множеств, не пользуясь скобками для определения порядка выполнения операций. В этих случаях применяется сокращенная запись:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Рассмотрим некоторые другие тождества, справедливые для операций над множествами:

5. $A - B = A \cap \bar{B}$
6. $A \cup \bar{A} = \mathbb{U}, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$
7. $\bar{\bar{A}} = A$
8. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ – законы де Моргана.

Законы де Моргана можно применять для любого числа множеств:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n$$
$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n$$

Каждое из приведенных выше тождеств доказываются непосредственно по определениям операций над множествами. Идея доказательства заключается в следующем:
каждое из тождеств имеет вид $P = Q$, где P и Q – некоторые множества. Чтобы доказать равенство двух множеств необходимо доказать, что $P \subseteq Q$ и $Q \subseteq P$.

С помощью операций над множествами можно выразить отношения между множествами:

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{matrix} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{matrix}$ 2. $A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{matrix} A - B = \emptyset \\ A \otimes B = \emptyset \end{matrix}$ 3. $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$ 4. $A = B \Leftrightarrow A \otimes B = \emptyset$