ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Пусть A и B – два произвольных множества. ***Декартовым*** (или *прямым)* ***произведением*** множеств A на B называют множество *упорядоченных пар*, первая компонента которых принадлежит множеству A, вторая множеству B.

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A,\ b \in B\}$$

Пары упорядочены, т.е. $(a, b) \neq (b, a)$ ⇒ $A \times B \neq B \times A$ ⇒ *прямое произведение не коммутативно*

Если $A = B$, то пишут $A \times A = A^2$

Примеры:

1) Пусть $A = \{1,2\}, B = \{a, b, c\}$ ⇒ $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

2) Пусть $A = \{1,2, \dots, 31\}$, $B = \{\text{январь}, \text{февраль}, \dots, \text{декабрь}\}$ ⇒

$A \times B$ – есть множество дат вида «2 марта»

3) Множество [0,1] – есть множество всех действительных чисел между 0 и 1.

⇒ $[0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$ есть множество пар чисел, которым соответствуют точки плоскости, заполняющие квадрат

ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

В общем случае, прямое произведение множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ есть множество упорядоченных последовательностей вида c, где первый элемент принадлежит множеству A_1, второй множеству A_2, и т.д.

$$A_1 \times \ A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)|, x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

Произведение n одинаковых $A_1 = \ A_2 = \dots = A_n = A$ называют n-ой декартовой степенью множества A и обозначают A^n.

Например, множество $[0,1]^3$ - есть множество всех точек куба в трехмерном пространстве.

Бинарные отношения (БО). Основные понятия и определения.

1. ***Бинарным отношением*** R между элементами множеств A и B называют любое подмножество $A \times B$. Т.е. $R \subseteq A \times B$

Если $A = B$, то R есть БО на A.

Запись $(a,b) \in R$ равносильна записи aRb.

Читается как: элемент a находится в отношении R с элементом b

2. Область определения БО:

$\delta=\{a|$ существует b, что $(a,b)\in R\}$

Область значений БО:

$\rho = \{b|$ существует a, *что* $(a,b)\in R\}$.

То есть область определения есть *множество первых компонент* пар (a,b). Область значений – *множество вторых компонент*.

3. ***Пустое БО*** есть пустое подмножество декартового произведения множеств A и B.
Универсальное БО между элементами множеств A и B есть все декартово произведение этих множеств.

Способы задания БО

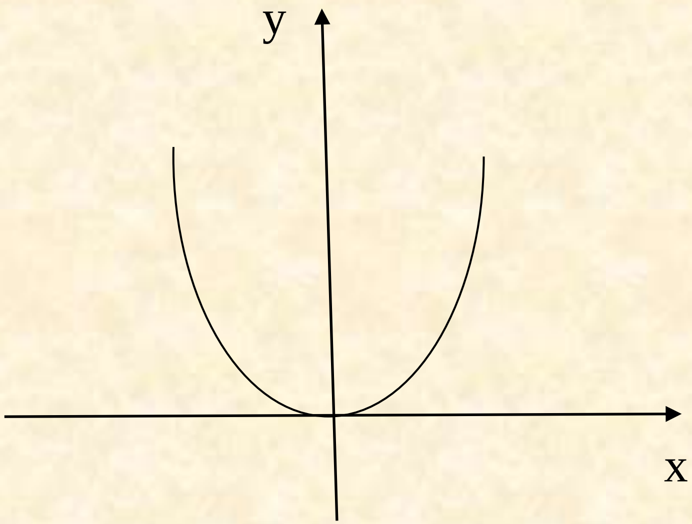
1. С помощью характеристического признака
2. Списком
3. Матрицей
4. Графом

Примеры БО

Пример1 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(a, b) : 0 \le a - b \le 2\}$.

$$R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (4,2), (3,3), (4,3), (5,3)\}$$

Пример 2 $A = B = \mathbf{R}$, $R = \{(x, y): y = x^2\}$.



Матричный способ задания БО

Пусть БО $R \subseteq A \times B$, где A и B – конечные множества, |A| = n, |B| = m.
Тогда матрица БО есть матрица размерности $n \times m$, каждый элемент которой определяется следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } a_i R b_j \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример. Пусть M={1,2,3,4,5,6}, $R \subseteq M^2$, aRb $\Leftrightarrow$ a и b имеют общий делитель, не равный 1. Составить матрицу отношения.

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0
6	0	1	1	1	0	1

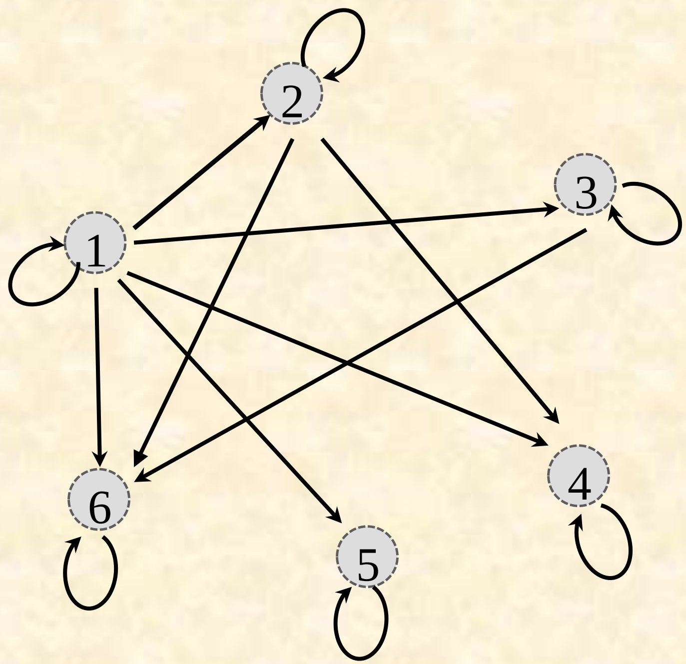
Графическое представление БО

Пусть $R \subseteq A \times B$, где A и B – конечные множества

Каждому элементу из множества $A \cup B$ ставится в соответствие точка (вершина графа). Если xRy – рисуем стрелку от вершины x к вершине y.

Пример: рассмотрим отношение делимости R на множестве $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$xRy \iff {}^{y}/_{x} - \text{целое число}$$



ОПЕРАЦИИ НАД БИНАРНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ

1. Объединение **БО**: $R \cup S = \{(a, b) \mid (a, b) \in R \vee (a, b) \in S\}$.

2. Пересечение **БО**: $R \cap S = \{(a, b) \mid (a, b) \in R \wedge (a, b) \in S\}$.

3. Разность **БО**: $R - S = \{(a, b) \mid (a, b) \in R \wedge (a, b) \notin S\}$.

4. Дополнение **БО**: $\bar{R} = U - R = \{(a, b) \mid (a, b) \in U \wedge (a, b) \notin R\}$,
где $U = A \times B$- универсальное множество.

5. ***Обращение*** бинарного отношения: $R^{-1} = \{(a, b) : (b, a) \in R\}$.

Обращение БО есть множество пар, для которых вторая компонента пары находится в отношении R с первой компонентой пары.

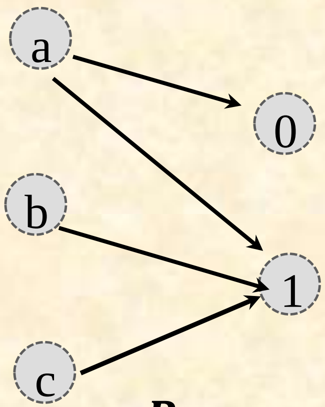
Свойства обращения: 1) $(R^{-1})^{-1} = R$; 2) если $R = S$, то $R^{-1} = S^{-1}$.

ПРИМЕРЫ

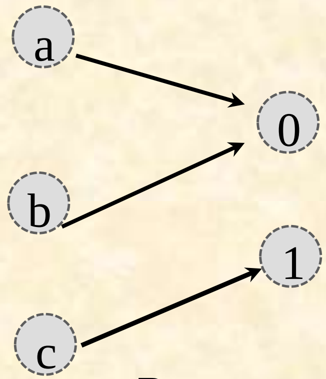
Пусть $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}, \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$ $\quad \boldsymbol{R_1} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{1})\}$

$\boldsymbol{R_2} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{1})\}$

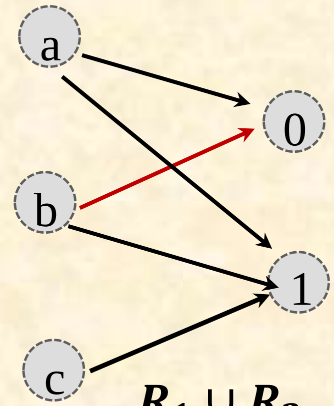
1) $\boldsymbol{R_1} \cup \boldsymbol{R_2} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})\}$



$\boldsymbol{R_1}$

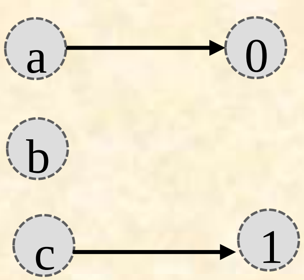


$\boldsymbol{R_2}$

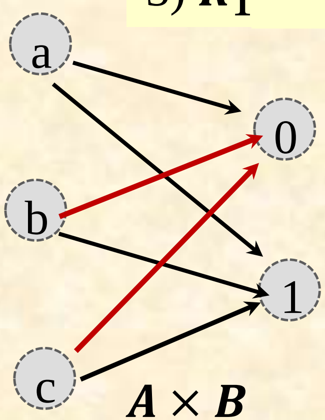


$\boldsymbol{R_1} \cup \boldsymbol{R_2}$

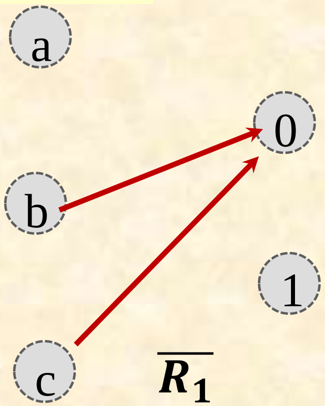
2) $\boldsymbol{R_1} \cap \boldsymbol{R_2} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{1})\}$



3) $\overline{\boldsymbol{R_1}} = \{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{0})\}$



$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$



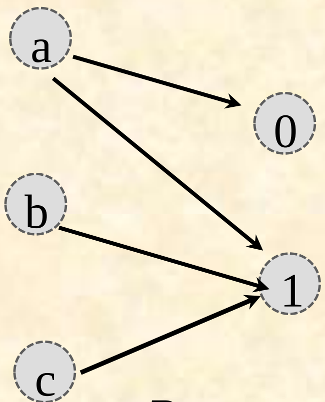
$\overline{\boldsymbol{R_1}}$

ПРИМЕРЫ

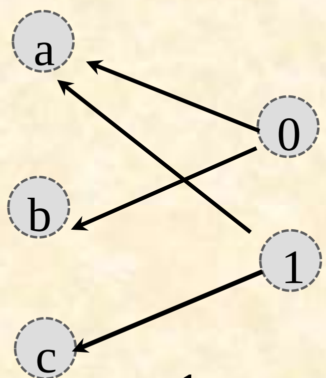
Пусть $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}, \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$ $\quad$ $\boldsymbol{R_1} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{1})\}$

---

4) $\boldsymbol{R_1^{-1}} = \{(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{a}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b})\}$



$\boldsymbol{R_1}$



$\boldsymbol{R_1^{-1}}$

Пусть $\boldsymbol{A = B = \mathbb{R}}$, $R = \{(x, y)\colon y = x^2\}$. Найти R^{-1}

$\boldsymbol{R^{-1} = \{(x, y) \mid x = y^2\}}$

ОПЕРАЦИИ НАД БИНАРНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ

6. ***Произведение*** бинарных отношений.

Пусть $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$. Тогда произведение $R \circ S \subseteq A \times C$ есть новое БО:

$$R \circ S = \{(a,c) | \exists\, b \in B: (a,b) \in R, (b,c) \in S\}$$

Пример 5. $P, Q \subseteq \mathbb{R}^2$, $P = \{(x,y) |\ y = x^2 + 1\}$, $Q = \{(x,y) |\ y = 2x\}$. Найти $P \circ Q$.

Решение: ***по определению***

$P \circ Q = \{(x,y) |\ \exists\, z \in \mathbb{R}: (x,z) \in P, (z,y) \in Q\}$

$\mathbf{(x, z) \in P}$ ⇒ $\mathbf{z = x^2 + 1}$

$\mathbf{(z, y) \in Q}$ ⇒ $\mathbf{y = 2z}$

исключаем z ⇒ $\mathbf{y = 2(x^2 + 1)}$

$\mathbf{P \circ Q = \{(x,y) |\ y = 2(x^2+1)\}}$

Это и есть искомое произведение

СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Бинарное отношение R заданное на некотором непустом множестве A называется:

1. ***Рефлексивным***, если xRx для всех $x \in A$

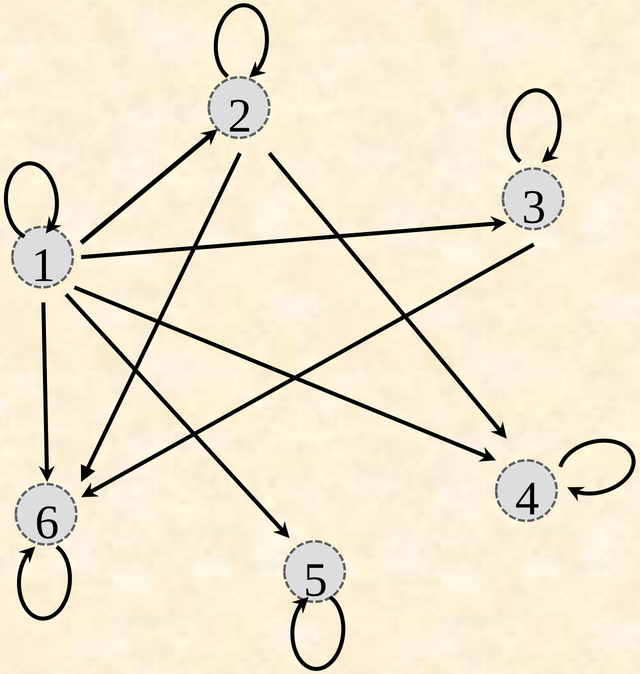
2. ***Иррефлексивным***, если $xRy \longrightarrow x \neq y$ для всех $x, y \in A$

3. ***Симметричным***, если $xRy \rightarrow yRx$

4. ***Антисимметричным,*** если $(xRy$ и $yRx) \rightarrow x = y$

5. ***Транзитивным***, если $(xRy$ и $yRz) \rightarrow xRz$

Пример: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad xRy \Leftrightarrow {}^{y}/_{x}$ – целое число



Отношение R:
рефлексивно, не иррефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно.

ПРИМЕР 6. $R \subset A^2$, A={1,2,3,4}, R={(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (2,4)}

Рефлексивность

- Высказывание $(x,x) \in R$ для всех $x \in A$ ложно. Контрпример: x=3, $3 \in A$, *но* $(3,3) \notin R$. Следовательно, отношение *R не является рефлексивным.*

Иррефлексивность

- Высказывание $(x,x) \notin R$ для всех $x \in A$ ложно. Контрпример: $x=1$, но $(1,1) \in$ R. Следовательно, отношение *R не является иррефлексивным*.

Симметричность

- Высказывание если $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ ложно. Контрпример: $(1,2) \in R$, *но* $(2,1) \notin R$. Следовательно, отношение *R не является симметричным.*

Антисимметричность

- Высказывание если $(x,y) \in R$ *и* $(y,x) \in R \Rightarrow x = y$ истинно. Контрпример подобрать невозможно. Нет подходящих пар. Следовательно отношение *R является антисимметричным.*

Транзитивность

- Высказывание если $(x,y) \in R$ *и* $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ ложно. Контрпример: пары (1,2),(2,3) $\in R$, но пара $(1,3) \notin R$. Следовательно отношение *R не является* транзитивным.