Система линейных уравнений (СЛУ)

СЛУ общего вида

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array} \qquad (1)
$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ - неизвестные величины

$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$ - коэффициенты системы

$b_1, b_2, \cdots, b_m$ - свободные члены

a_{ij}

i - номер уравнения

j - номер неизвестного, при котором стоит коэффициент a_{ij}

Определение (решение системы). Упорядоченная система чисел $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ называется решением системы линейных уравнений (1), если каждое из уравнений системы (1) обращается в тождество при подстановке $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ в систему уравнений (1).

Определение. Система уравнений (1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение и несовместной, если у нее нет ни одного решения.

Пример системы не имеющей решения (несовместная система)

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

Определение. Совместная система уравнений (1) называется определенной, если она имеет единственное решение.

Определение. Совместная система уравнений (1) называется неопределенной, если она имеет по крайней мере два решения.

Определение. Два решения совместной системы (1) $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \cdots c_n^{(1)}$ и $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \cdots c_n^{(2)}$ называются различными, если нарушается хотя бы одно из равенств $c_1^{(1)} = c_1^{(2)}, c_2^{(1)} = c_2^{(2)}, \cdots c_n^{(1)} = c_n^{(2)}$.

Решение можно записать в виде матрицы-столбца

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Такая запись называется вектор-решение

Определение. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными или равносильными, если всякое решение одной из них является решением другой и наоборот, т.е. если они имеют одно и тоже множество решений.

Элементарные преобразования системы линейных уравнений

1. Умножение некоторого уравнения системы на число, отличное от нуля.
2. Прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженное на произвольное число.
3. Перестановку местами двух уравнений системы.

Элементарные преобразования системы линейных уравнений приводят к системе эквивалентной исходной.

Матричное представление системы линейных уравнений

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A * X = B \qquad (2)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- расширенная матрица системы

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{c}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{c}_n \end{pmatrix}$$

- решение, записанное в виде матрицы-столбца

Решение невырожденных линейных систем. Формула Крамера.

Пусть дана линейная система $\boldsymbol{n}$ уравнений с $\boldsymbol{n}$ неизвестными

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_m \end{matrix} \qquad (1')$$

Матричная форма записи этой системы

$$A * X = B \quad (3)$$

$$(4) \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \dim(A) = n$$

$$(5) \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(6) \qquad A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$$

$$E * X = A^{-1} * B$$

$$X = A^{-1} * B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$(7') \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n} \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

$$(8') \qquad x_1 = \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n)$$

$$= \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1})$$

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1})$$

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}\right)$$

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn})$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1})$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \equiv \Delta_1$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}}$$

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}} \qquad \boxed{\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \qquad \boxed{j = \overline{1,n}}$$

$$A * X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Формула Крамера

$$\Delta \neq 0 \quad \rightarrow \quad A^{-1} \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B \quad \rightarrow \quad x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение.

$$X = A^{-1} * B$$

B – матрица свободных членов. Она единственная.

A^{-1} – обратная матрица матрицы A, составленной из коэффициентов системы. Матрица A единственная. Обратная к ней матрица тоже единственная (доказывали).

Следовательно матрица X тоже единственная.

Пример. $$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & -8 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 14 & -8 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -13 & 6 \\ 0 & 12 & -5 \end{vmatrix} = -7 \qquad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{10} = -0{,}7$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 29 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{29}{10} = 2{,}9$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -5 & -13 & 0 \\ 9 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 57 \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{57}{10} = 5{,}7$$

<u>Теорема Кронекера-Капелли.</u> Для совместимости системы m линейных уравнений с n неизвестными необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

<u>Необходимость.</u>

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered} \qquad (1)$$

Система совместна. $\Longrightarrow$ имеет хотя бы одно решение. Пусть $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ решение

$$\begin{gathered} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{gathered} \qquad (9)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

$$rank(\tilde{A}_1) = rank(\tilde{A}) \qquad rank(\tilde{A}_1) = rank(A) \qquad \Longrightarrow \qquad rank(\tilde{A}) = rank(A)$$

<u>Достаточность.</u> Пусть $rank(A) = rank(\tilde{A}) = r$

Докажем, что система совместна

Так как $rank(A) = rank(\tilde{A})$ $M_{bA} = M_{b\tilde{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$ $\dim(M_{bA}) = r$

По теореме о базисном миноре (*Любой столбец матрицы является линейной комбинацией базисных столбцов*) последний столбец матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией базисных столбцов $\tilde{A}$, следовательно, базисных столбцов матрицы A. По следствию 1 теоремы о базисном миноре (Всякий не базисный столбец матрицы является линейной комбинацией всех столбцов матрицы) последний столбец матрицы $\tilde{A}$, т.е. (b_i) является линейной комбинацией всех столбцов матрицы A.

Таким образом, существуют числа $c_1, c_2, \cdots, c_n$ такие, что

$$\begin{gathered} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{gathered}$$

т.е. выполнены равенства (1). А это означает, что $c_1, c_2, \cdots, c_n$ решение системы (1).

Решение произвольных линейных систем.

Теорема. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество решений система бесконечно.

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \dots + a_{r+1r}x_r + a_{r+1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{r+1n}x_n = b_{r+1} \\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mr}x_r + a_{m,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (***)$$

Пусть система совместна и $rank(A) = rank(\tilde{A}) = r < n$

$$M_б = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$ Базисный минор

Любая строка матрицы *A* является линейной комбинацией базисных строк (теорема о базисном миноре)

Поэтому система уравнений $(***)$ равносильна системе (следующий слайд)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \cdots & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} & \cdots & a_{r+1n} \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{1r+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ Линейными преобразованиями

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r &+ a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r &+ a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \; &\cdots \; \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r &+ a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}\,x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n
\end{aligned}
$$

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \quad x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta} \qquad i = \overline{1,r}
$$

$$
\Delta_{xi} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}\,x_n)\cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots\quad\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\quad\cdots & \cdots \\ a_{r1} & & (b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n)\cdots & a_{rr} \end{vmatrix}
$$

$x_i = f_i(a_{ij}, b_1, \cdots b_r, x_{r+1}, \cdots x_n)$ $\qquad$ $x_{r+1}, \cdots x_n$ принимают любые значения из R

$i = \overline{1,r}$ $\qquad$ $j = \overline{1,r}$ кроме $j = i$

$x_{r+1} = c_1; x_{r+2} = c_2; \ \cdots x_n = c_{n-r};$

$\boxed{x_i = f_i(a_{ij}, b_1, \cdots b_r, c_1, \cdots c_{n-r})}$ $\boxed{i = \overline{1,r}}$ $\boxed{j = \overline{1,r}}$ $\boxed{\text{кроме } j = i}$

Пример.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 &= 2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 11 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{pmatrix} \qquad rank(A) = rank(\tilde{A}) = 2$$

$$M_б = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \qquad \dim(M_б) = 2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_2 - 3x_3 &= 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4x_2 + 5x_3 &= 2 - 2x_1 + -x_4 \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 - x_1 - 4x_4 & -3 \\ 2 - 2x_1 + x_4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{41 - 11x_1 - 17x_4}{22}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4 & 2 - 2x_1 + -x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-24 + 18x_4}{22}$$

$$\left\{ c_1; \quad \frac{41 - 11c_1 - 17c_2}{22}; \quad \frac{-24 + 18c_2}{22}; \quad c_2 \right\} \qquad \forall c_1, c_2 \in R$$