Минимальные и максимальные элементы

Элемент $a \in M$ называется ***максимальным элементом*** упорядоченного множества (M, R)**,** если не существует такого элемента $y \in M$ $(a \neq y)$, что aRy.

Другими словами, a есть *максимальный элемент*, если не существует отличного от a элемента, ***с которым*** элемент a находится в отношении R.

Элемент $a \in M$ называется ***минимальным*** элементом множества (M, R)**,** если не существует такого элемента $y \in M$ $(a \neq y)$, что yRa.

То есть, a есть *минимальный элемент*, если не существует элемента, ***который*** находится в отношении R с элементом a.

Пример 1: M={2,3,4,6,7,9,12}, $xRy \Leftrightarrow y/x$ – целое число

- ***Максимальные элементы*** **-** $\{\mathbf{7}, \mathbf{12}, \mathbf{9}\}$

Каждый из этих элементов не находится в отношении R ни с каким другим элементом множества M.

- ***Максимальные элементы*** **-** $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{7}\}$

Каждый из этих элементов не находится в отношении R ни с каким другим элементом множества M.

В любом конечном упорядоченном множестве есть и максимальные и минимальные элементы.

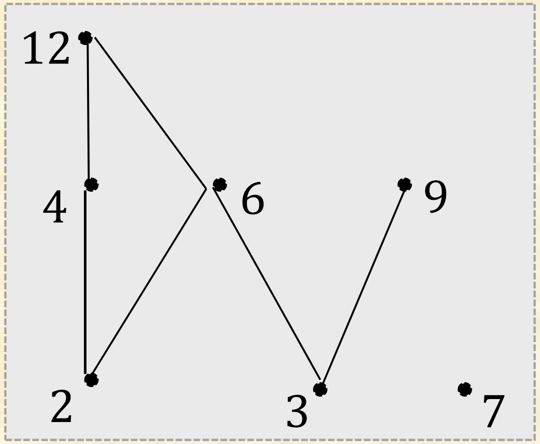


Диаграмма Хассэ
примера 1

Пример 2: В множестве $(\mathbb{Z}, \leq)$ нет ни максимальных, ни минимальных элементов

Наибольшие и наименьшие элементы

Элемент $a \in M$ называется ***наибольшим элементом*** упорядоченного множества (M, R)**,** если для каждого элемента $y \in M$ выполняется yRa, и наименьшим элементом, если для каждого $y \in M$ выполняется aRy.

Другими словами, ***наибольший элемент*** это такой элемент, ***с которым*** все элементы множества находятся в отношении R. ***Наименьший элемент*** – тот ***который*** находится в отношении R со всеми элементами множества.

Пример 1: M={1,2,3,4,6,7}, $xRy \Leftrightarrow y/x$ – целое (рис.1)

- ***Наибольшего элемента – нет*** (т.к. нет элемента, с которым все элементы множества M находятся в отношении R
- ***Наименьший элемент – единица*** (т.к. этот элемент находится в отношении R со всеми остальными элементами множества M.

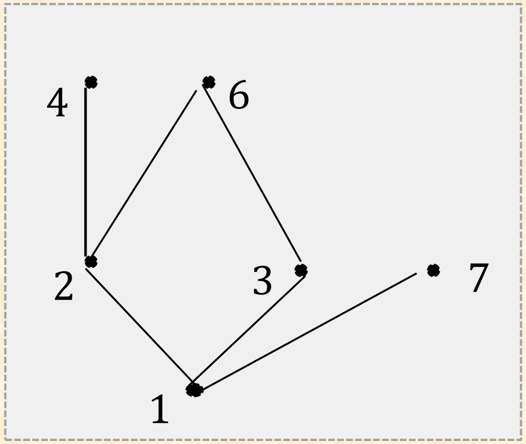


рис. 1

рис. 2

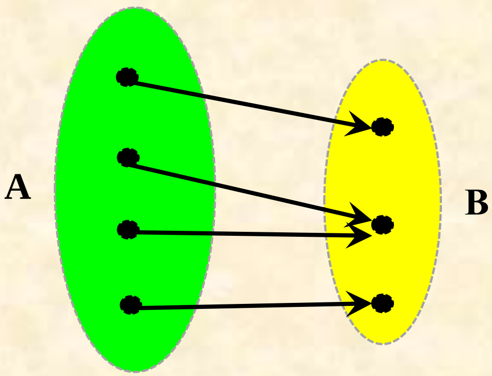
Пример 2: M={1,2,3,4,6,7}, $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ (рис.2)

Пример 3: В множестве $(\mathbb{N}, \leq)$ есть наименьший элемент, наибольшего элемента нет.

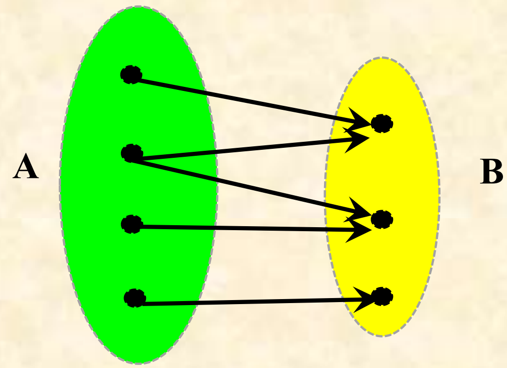
Функциональные отношения

Пусть A и B – множества, $f \subseteq A \times B$.

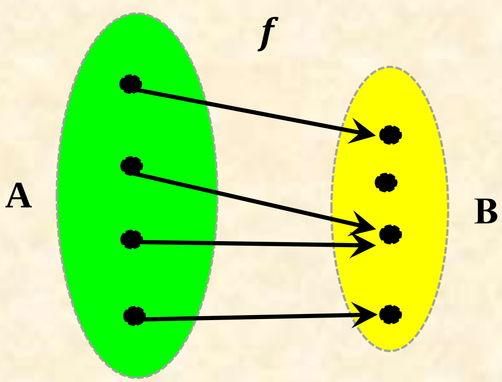
Отношение $\boldsymbol{f}$ между множествами A и B называется ***функциональным отношением*** (или ***функцией***), если ***для каждого элемента*** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ существует ***единственный элемент*** $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$, такой что $x\boldsymbol{f}y$. Функция f из A в B обозначается как $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$.



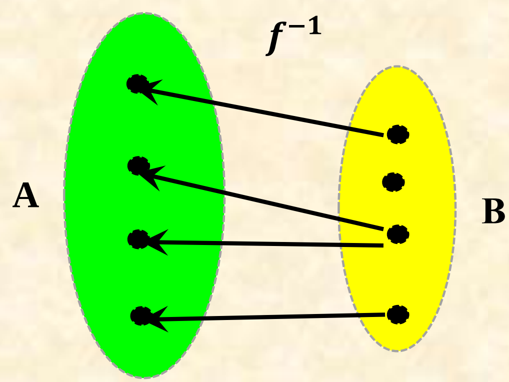
функциональное отношение



не функциональное отношение



функциональное отношение



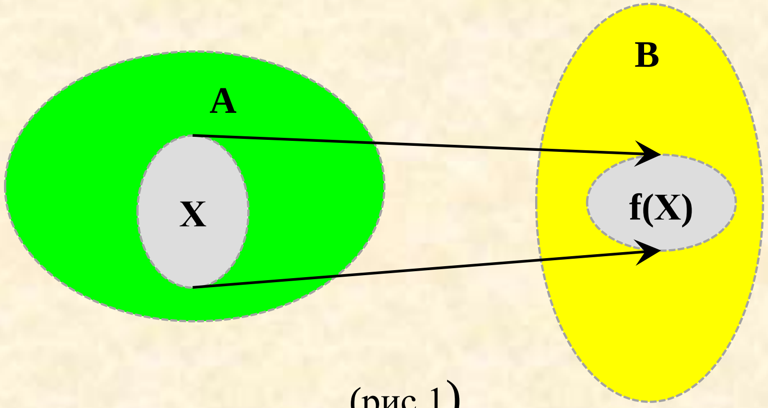
Не функциональное отношение

Функциональные отношения

Если $f: A \to B$ – функция и xfy, то пишут $\boldsymbol{y = f(x)}$.

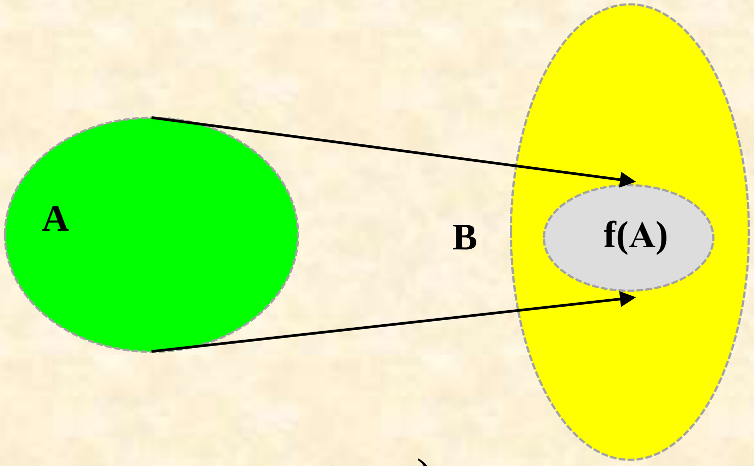
Множество А называют ***областью определения*** функции f.

Если $X \subseteq A$, то множество $f(X) = \{y \in B | f(x) = y$ для некоторого $x \in X\}$ называется ***образом множества*** X (рис.1)



(рис.1)

Образ всего множества А называется ***областью значений*** функции f (рис.2)



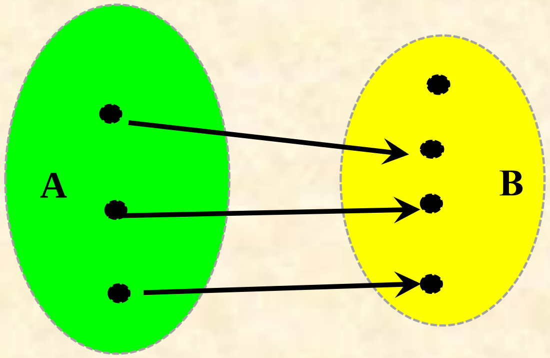
(рис.2)

Функция $f: A \to B$ называется также **отображением**, при этом говорят, что функция f **отображает** A в B.

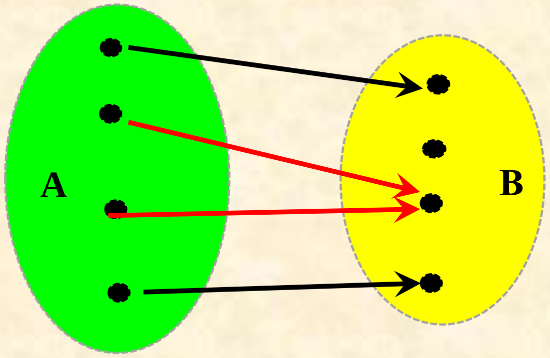
Функциональные отношения

1) Функция $f: A \to B$ – называется ***инъективной*** (или ***инъекцией***), если

$$\boldsymbol{f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2} \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)}]$$



инъекция

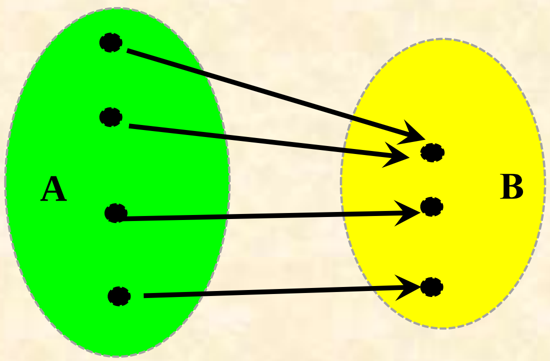


не инъекция

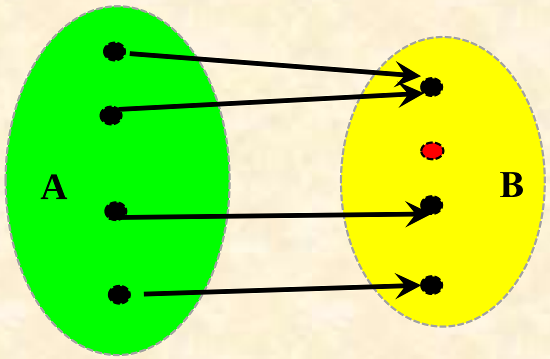
Если A и B – конечные множества и функция $f: A \to B$ есть инъекция, то $|A| \leq |B|$

Функциональные отношения

2) Функция $f: A \to B$ – называется ***сюръективной*** (или ***сюръекцией***), если для каждого $y \in B$ найдется некоторый $x \in A$, такой что $f(x) = y$.



сюръекция



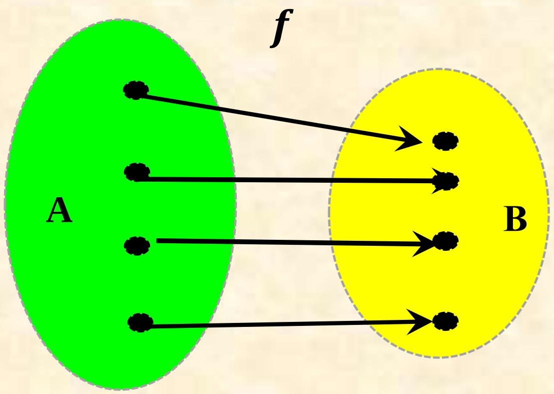
не сюръекция

Если A и B – конечные множества и функция $f: A \to B$ есть сюръекция, то $|A| \geq |B|$

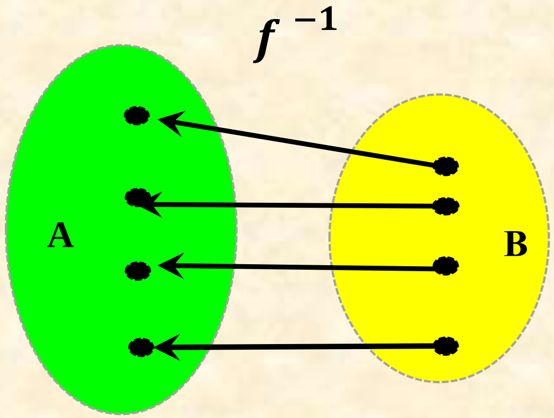
Функциональные отношения

3) Функция, которая является одновременно и ***инъективной*** и ***сюръективной*** называется ***взаимно однозначным соответствием*** или ***биекцией.***

Биекцию называют также 1-1 функцией.



биекция



биекция

Если функция $f: A \to B$ есть биекция, то обратное отношение f^{-1} есть функция из B в A, причем биекция.

Если A и B – конечные множества и функция $f: A \to B$ есть биекция, то $|A| = |B|$

Сравнение бесконечных множеств

Множества A и B называют ***равномощными***, если существует биекция $f: A \to B$. В этом случае пишут $|A| = |B|$.

Равномощность есть отношение между множествам. Каковы свойства этого отношения?

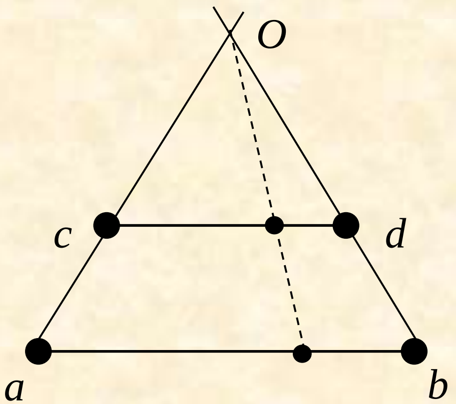
- Отношение равномощности ***рефлексивно:*** каждое множество равномощно самому себе.
- Отношение ***симметрично***: если множество A равномощно множеству B, то и множество B равномощно A.
- Отношение ***транзитивно***:. если $|A| = |B|$ и $|\mathrm{B}| = |\mathrm{C}|,$ то $|\mathrm{A}| = |\mathrm{C}|$

Следовательно отношение равномощности есть эквивалентность на множестве 2^U любого универса U.

- Если существует биекция $f: A \to B$, то $|A| = |B|$.
- Если существует инъекция $f: A \to B,$ то говорят, что мощность множества A не больше мощности множества B: $|A| \leq |B|$.

Сравнение бесконечных множеств

Пример: Множество точек любых двух отрезков равномощны т.е. $|[a,b]|=|[c,d]|$



Пример: Покажем, что $|\boldsymbol{N}|=|\boldsymbol{Z}|$.

Z	**0**	**-1**	**1**	**-2**	**2**	**…**	**-z**	**z**	**…**
↕	↕	↕	↕	↕	↕		↕	↕	
N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	**2|z|**	**2n+1**	**…**

$$f(z)=\begin{cases}2z+1, z\geq 0)\\ 2|z|, z<0\end{cases}$$

$f: Z \to$ N – есть биекция

Счетные множества

Каждое **множество А, равномощное множеству ℕ натуральных чисел называется *счетным*.**

Если множество А счетно, то существует биекция $f\colon \mathbb{N} \to$ A ,и элементы множества A можно расположить в последовательность $A = \{f(1), f(2), f(3), \dots\}$

И наоборот, если элементы множества A образуют бесконечную последовательность $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, то отображение $f(a_i) = i$ есть биекция множества A в ℕ.

Другими словами множество счетно, если его элементы можно расположить в бесконечную последовательность

Примеры счетных множеств:

- Множество $\mathbb{Z}$ счетно, то есть $|\mathbb{N}| = |\boldsymbol{Z}|$.
- Множество $\mathbb{N}^2$ счетно.
- Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

Счетные множества

Покажем, что множество $\mathbb{N}^2$ **счетно.**

Множество $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ - есть множество пар вида (n, m), где n$, m \in \mathbb{N}$.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	…
(2,1)	(2,2)	(2,3)	…
(3,1)	(3,2)	(3,3)	…
………	……..	……	……….

Рассмотрим сумму $(m + n) = k$. При каждом k число таких пар будет равно $(k - 1)$.

Расположим все пары по возрастанию суммы $(m + n)$. Если суммы одинаковы, то по возрастанию первых элементов пар.

В результате получим *бесконечную последовательность*:

$(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), \dots .$

Очевидно, что каждая пара встретится в этой последовательности, причем один раз.

Счетные множества

Докажем, что ***множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.***

Пусть $\mathbb{Q}^+$ - множество, состоящее из всех ***положительных рациональных чисел***.

Каждое такое число можно однозначно представить *несократимой дробью* $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ **,** каждой такой дроби можно поставить в соответствие пару $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{N}^2$.

Существует ***инъекция*** из $\mathbb{Q}^+$ в $\mathbb{N}^{\mathbf{2}} \Longrightarrow |\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N}^{\mathbf{2}}| = |\mathbb{N}|$

С другой стороны $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}^+ \Longrightarrow |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}^+|$

$|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N}|$ и $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}^+|$

$|\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{N}|$

Множество $\mathbb{Q}^+$ - счетно, и его элементы можно расположить в последовательность:

$\mathbb{Q}^+ = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

Вставим в эту последовательность после каждого числа a_i тоже число со знаком минус, добавив 0 в качестве первого элемента:

$\mathbb{Q} = \{0, a_1, -a_1, a_2, -a_2, a_3, -a_3 \dots\}$

$\mathbb{Q}$ ***счетно***

СВОЙСТВА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ

Свойство 1. ***Любое подмножество счетного множества конечно или счетно***.

Доказательство: Пусть А – счетное множество, В – некоторое подмножество А.

Множество А – счетно

$B \subseteq A$

Элементы А можно занумеровать:
$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

$B = \{a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \ldots\}$

Если среди чисел k_1, k_2, k_3 - есть наибольшее, то множество **В конечно**.

Если нет – **В счетно**, так как его элементы образуют бесконечную последовательность и каждый элемент имеет свой уникальный номер. .

Свойство 2. ***Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.***

Иногда говорят, что счетное множество является «самым маленьким» из бесконечных множеств, т.е. обладает наименьшей мощностью.

Доказательство: Пусть М – бесконечное множество. Выберем в нем элемент a_1, затем $a_2 \neq a_1$, затем $a_3 \neq a_2 \neq a_1$ и т.д. Продолжая этот процесс, который не может оборваться из-за нехватки элементов в силу бесконечности множества М, мы получаем подмножество А = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Это подмножество счетно, так как его элементы занумерованы.

СВОЙСТВА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ

Свойство 3. ***Объединение любого конечного либо счетного числа счетных множеств есть счетное множество.***

Доказательство: 1) Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ – попарно не пересекающиеся счетные множества. Запишем элементы этих множеств в виде таблицы

A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	…
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	…
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	…
A_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	…
…	…	…	…	…	…

2) Если эти множества пересекаются, то в этом случае следует рассматривать множества $A_1, A_2 - A_1, A_3 - (A_1 \cup A_2)$ и т.д. Эти множества не пересекаются , каждое из них не более чем счетно и их объединение равно объединению множеств $A_1, A_2, A_3, \ldots$