1.Матрицы

Детерминанты (определители) матриц

$$\dim A = n \times n \;\; !$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A) = \Delta$$

$$A = (a_{11}) \longrightarrow \det(A) = a_{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & + & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & - & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Минор второго типа

Минор порядка *n-1* матрицы A (минор элемента a_{ij})

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Минором любого элемента a_{ij} матрицы *A* *n*-го порядка называют определитель порядка *n-1,* соответствующей той матрице, которая получается из матрицы *A* в результате вычеркивания *i*-ой строки и *j*-го столбца.

$$\bar{M}_j^i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & n_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\dim\left(\bar{M}_j^i\right) = n - 1$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \longrightarrow \bar{M}_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Определителем порядка n, соответствующего матрицы *A* порядка *n* называется число, равное

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1$$

Теорема 1. Каков бы не был номер строки i $(1, 2,3 \, , \cdots , n)$ для определителя *n*-го справедлива формула

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_j^i$$

Теорема 2. Каков бы не был номер столбца j $(1, 2,3 \, , \cdots , n)$ для определителя *n*-го справедлива формула

$$\Delta = \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_j^i$$

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \bar{M}_1^1 + (-1)^{1+2} a_{12} \bar{M}_2^1 =$$
$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} \bar{M}_2^1 + (-1)^{2+2} a_{22} \bar{M}_2^2 = -a_{12} a_{21} + a_{11} a_{22}$$

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $i = 2;\ \mathrm{j} = 2$ $a_{22} = 6$ $\bar{M}_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

$$\det(A) = (-1)^{2+1} a_{21} \bar{M}_1^2 + (-1)^{2+2} a_{22} \bar{M}_2^2 + (-1)^{2+3} a_{23} \bar{M}_3^2 =$$

$$= -1 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 6(8 - 28) = -120$$

$$\det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} \bar{M}_2^1 + (-1)^{2+2} a_{22} \bar{M}_2^2 + (-1)^{3+2} a_{32} \bar{M}_2^3 =$$

$$= -1 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6(8 - 28) = -120$$

Минор 2-го типа *n*-*k*-го порядка матрицы A

Вычеркиваем k строк и k столбцов $k < n$

$$\bar{M}^{i_1, i_2 \cdots i_k}_{j_1, j_{2,} \cdots j_k} \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k; \qquad j_1 < j_2 < \cdots < j_k$$

$$\dim\left(\bar{M}^{i_1, i_2 \cdots i_k}_{j_1, j_{2,} \cdots j_k}\right) = n - k$$

Минор первого типа

Минор первого типа *1*-го порядка матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_j^i = |a_{ij}| \qquad \dim(M_j^i) = 1$$

$$\bar{M}_j^i \qquad \dim(\bar{M}_j^i) = n - 1$$

Минор первого типа *k*-го порядка матрицы A $\quad k < n$

$$\boxed{M_{j_1, j_{2,} \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}} \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k; \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_k \qquad \boxed{\dim\left(M_{j_1, j_{2,} \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}\right) = k}$$

Минор второго типа *n*-*k*-го порядка матрицы A $\quad k < n$

$$\boxed{\bar{M}_{j_1, j_{2,} \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}} \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k; \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_k \qquad \boxed{\dim\left(\bar{M}_{j_1, j_{2,} \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}\right) = n - k}$$

Теорема 3 (Лапласа) При любом номере k меньшем n $(k < n)$ и при любых фиксированных номерах строк $i_1, i_2, \cdots, i_k$ и номерах столбцов $j_1, j_2, \cdots, j_k$ таких, что

$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ и $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ для определителя n – порядка справедлива формула

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j_1, j_2 \cdots j_k} (-1)^{i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + j_2 + \cdots j_k} M_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k} \overline{M}_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}$$

Пример.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + \quad (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + \quad (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 48$$

Свойства определителя

1. Равноправность строк и столбцов. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

2. Антисимметрия при перестановке двух строк (столбцов). При перестановке местами двух строк (или двух столбцов) определитель сохраняет свое абсолютное значение, но меняет знак на противоположный

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

Линейная комбинация столбцов (строк)

Столбец $(a_1, a_2, \cdots a_j, \cdots a_n)^T$ является линейной комбинацией столбцов

$(b_1, b_2, \cdots b_j, \cdots b_n)^T$, $(c_1, c_2, \cdots c_j, \cdots c_n)^T, \cdots$ $(d_1, d_2, \cdots d_j, \cdots d_n)^T$

с коэффициентами $\alpha, \beta, \cdots \gamma \neq 0$, если каждый элемент a_i столбца $(a_1, a_2, \cdots a_i, \cdots a_n)^T$ можно представить в виде суммы

$$a_i = \alpha \cdot b_i + \beta \cdot c_i + \cdots + \gamma \cdot d_i \qquad \forall i \in \overline{1,n}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_i} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_i} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_i} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{d_i} \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a_i} = \alpha \cdot \boldsymbol{b_i} + \beta \cdot \boldsymbol{c_i} + \cdots + \gamma \cdot \boldsymbol{d_i} \qquad \forall i \in \overline{1,n}$$

Пример 1. Пусть мы имеем **матрицу-столбец** $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, каждый элемент которой

можно представить как сумму двух чисел b_i, c_i $(i = 1,2,3)$, умноженных на некоторые числовые коэффициенты α, β **одинаковые** для каждой суммы

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 = \alpha b_1 + \beta c_1 \\ a_2 = \alpha b_2 + \beta c_2 \\ a_3 = \alpha b_3 + \beta c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 \\ \alpha b_2 + \beta c_2 \\ \alpha b_3 + \beta c_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

При получении последней суммы было использовано правило сложение матриц и умножение матрицы на числовой коэффициент

Таким образом, матрица-столбец (столбец) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ была представлена как

линейная комбинация двух матриц-столбцов (столбцов) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Определение линейной комбинации столбцов (строчек), данное на предыдущем слайде, это обобщение Примера 1 на случай любого числа слагаемых и любого числа элементов в столбце или строке.

Аналогичные действия можно провести и для матрицы-строчки

Пример 2. Пусть мы имеем **матрицу-строчку** $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$, каждый элемент которой

можно представить как сумму двух чисел b_i, c_i $(i = 1,2,3)$, умноженных на некоторые числовые коэффициенты α, β **одинаковые** для каждой суммы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 = \alpha b_1 + \beta c_1 & a_2 = \alpha b_2 + \beta c_2 & a_3 = \alpha b_3 + \beta c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

При получении последней суммы было использовано правило сложение матриц и умножение матрицы на числовой коэффициент

Таким образом, матрица-строчка (строчка)$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ была представлена как линейная комбинация двух матриц-строек (строчек) $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

3. Линейное свойство определителя. Если в определителе n-порядка Δ некоторая i-я строка $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ является линейной комбинацией двух строк $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ и $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ с коэффициентами α и β,

$$(a_{i1} = \alpha b_1 + \beta c_1,\ a_{i2} = \alpha b_2 + \beta c_2, \cdots,\ a_{ij} = \alpha b_j + \beta c_j, \cdots,\ a_{in} = \alpha b_n + \beta c_n)$$

то определитель Δ можно представить в виде линейной комбинации $\Delta = \alpha\Delta_1 + \beta\Delta_2$, где Δ_1- определитель, у которого i-строка равна $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, а все остальные те же, что и у определителя Δ, а Δ_2- у которого i-строка равна $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, а все остальные те же, что и у определителя Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \dim(\Delta) = n$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_j & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. Линейное свойство определителя. Если в определителе n-порядка Δ некоторый j-й столбец $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})$ является линейной комбинацией двух столбцов $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ и $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ с коэффициентами α и β,

$$(a_{1j} = \alpha b_1 + \beta c_1,\ a_{2j} = \alpha b_2 + \beta c_2, \cdots,\ a_{ij} = \alpha b_i + \beta c_i, \cdots,\ a_{nj} = \alpha b_n + \beta c_n)$$

то определитель Δ можно представить в виде линейной комбинации $\Delta = \alpha\Delta_1 + \beta\Delta_2$, где Δ_1- определитель, у которого j-столбец равен $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, а все остальные те же, что и у определителя Δ, а Δ_2- у которого j-столбец равен $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, а все остальные те же, что и у определителя Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \dim(\Delta) = n$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & b_i & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & c_j & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример 1. Пусть мы имеем определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

элементы второго столбца которой $\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix}$

можно представить как сумму двух чисел b_i, c_i $(i = 1,2,3)$, умноженных на некоторые числовые коэффициенты α, β **одинаковые** для всех сумм

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} = \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} = \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} = \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Покажем, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_2 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} = \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} = \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} = \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \widetilde{\Delta}_1 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \beta c_2 & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \widetilde{\Delta}_2$$

Вычислим Δ

$$(*)\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(\alpha b_2 + \beta c_2)a_{33} + (\alpha b_1 + \beta c_1)a_{23}\, a_{31} + a_{21}(\alpha b_3 + \beta c_3)a_{13} - a_{31}(\alpha b_2 + \beta c_2)a_{13} - (\alpha b_3 + \beta c_3)a_{23}\, a_{11} - a_{21}(\alpha b_1 + \beta c_1)a_{33}$$

$$= (a_{11}\alpha b_2 a_{33} + \alpha b_1 a_{23} a_{31} + a_{21}\alpha b_3 a_{13} - a_{31}\alpha b_2 a_{13} - \alpha b_3 a_{23} a_{11} - a_{21}\alpha b_1 a_{33}) + (a_{11}\beta c_2 a_{33} + \beta c_1 a_{23} a_{31} + a_{21}\beta c_3 a_{13} - a_{31}\beta c_2 a_{13} - \beta c_3 a_{23} a_{11} - a_{21}\beta c_1 a_{33})$$

$$= \alpha(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{21}b_3a_{13} - a_{31}b_2a_{13} - b_3a_{23}a_{11} - a_{21}b_1a_{33}) + \beta(a_{11}c_2a_{33} + c_1a_{23}a_{31} + a_{21}c_3a_{13} - a_{31}c_2a_{13} - c_3a_{23}a_{11} - a_{21}c_1a_{33})$$

Вычислим $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$

$$(**)\ \widetilde{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\alpha b_2 a_{33} + \alpha b_1 a_{23} a_{31} + a_{21}\alpha b_3 a_{13} - a_{31}\alpha b_2 a_{13} - \alpha b_3 a_{23} a_{11} - a_{21}\alpha b_1 a_{33}$$

$$= \alpha(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{21}b_3a_{13} - a_{31}b_2a_{13} - b_3a_{23}a_{11} - a_{21}b_1a_{33}) =$$

$$\alpha \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha\Delta_1, \quad \text{где} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(***)\ \widetilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\beta c_2 a_{33} + \beta c_1 a_{23} a_{31} + a_{21}\beta c_3 a_{13} - a_{31}\beta c_2 a_{13} - \beta c_3 a_{23} a_{11} - a_{21}\beta c_1 a_{33}$$

$$= \beta(a_{11}c_2a_{33} + c_1a_{23}a_{31} + a_{21}c_3a_{13} - a_{31}c_2a_{13} - c_3a_{23}a_{11} - a_{21}c_1a_{33}) =$$

$$\beta \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \beta\Delta_2, \quad \text{где} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Сравним соотношения (*), (**) и (***)

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_2 & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\Delta = \alpha \Delta_1 + \beta \Delta_2}$$

Числа $\boldsymbol{b_i}$ и $\boldsymbol{c_i}$ $\boldsymbol{i = 1, 2, 3}$ могут являться элементами какого-либо столбца определителя Δ, а могут быть просто какими то числами.

$$(1\quad 3\quad 4)\qquad\qquad (3\quad 4\quad 2)$$

Пример 1.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 11 & 18 & 14\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2\cdot 1+3\cdot 3 & 2\cdot 3+3\cdot 4 & 2\cdot 4+3\cdot 2\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1\\0\\20\\5\end{pmatrix}$$

Пример 2.

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 99 & 83 & 1\\ 0 & 8 & 16 & 0\\ 60 & 17 & 134 & 20\\ 15 & 43 & 106 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\cdot 1+3\cdot 1 & 99 & 83 & 1\\ 1\cdot 0+3\cdot 0 & 8 & 16 & 0\\ 1\cdot 0+3\cdot 20 & 17 & 134 & 20\\ 1\cdot 0+3\cdot 5 & 43 & 106 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 99 & 83 & 1\\ 0 & 8 & 16 & 0\\ 0 & 17 & 134 & 20\\ 0 & 43 & 106 & 5\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}1 & 99 & 83 & 1\\ 0 & 8 & 16 & 0\\ 20 & 17 & 134 & 20\\ 5 & 43 & 106 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 99 & 83 & 1\\ 0 & 8 & 16 & 0\\ 0 & 17 & 134 & 20\\ 0 & 43 & 106 & 5\end{vmatrix}+3\cdot 0$$

Следствие 1. Определители с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

$$\Delta = -\Delta \;\Longrightarrow\; 2\Delta = 0 \;\Longrightarrow\; \Delta = 0$$

Следствие 2. Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) определителя на число *a* равносильно умножению определителя на это число

Это следствие вытекает из свойства 3, в котором надо положить один из коэффициентов, например, $\beta = 0$.

Следствие 3. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Это следствие вытекает из свойства 3, когда один из коэффициентов, например, $\beta = 0$.

Следствие 4. Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен нулю

Следствие 5. Если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца) умноженные на произвольный множитель *a* , то величина определителя не изменится.

Следует из свойства 3 и следствия 4