

Inferentiell statistik

Z-värden, p-värden och felmarginaler

Mathias Johansson

Kristofer Söderström

2025-12-15

Innehållsförteckning

1	Introduktion	2
2	Z-värden (Z-scores)	2
2.1	Vad är ett Z-värde?	2
2.2	Tolkning	2
2.3	Z-värden och normalfördelningen	2
2.4	Kritiska Z-värden för konfidensnivåer	2
2.5	Exempel: IQ-test	3
3	P-värden (P-values)	3
3.1	Vad är ett p-värde?	3
3.2	Tolkning	3
3.3	Vanliga missförstånd	3
3.4	Signifikansnivå ()	3
3.5	Exempel: Myntkast	3
4	Felmarginaler (Margin of Error)	4
4.1	Vad är en felmarginal?	4
4.2	Konfidensintervall	4
4.3	Faktorer som påverkar felmarginalen	4
4.4	Exempel: Opinionsundersökning	4
5	Samband mellan begreppen	5
5.1	Z-värden och p-värden	5
5.2	Z-värden och felmarginaler	5
6	Praktisk tillämpning	5
6.1	Hypotestest i 5 steg	5
6.2	Exempel: Är studenter längre än genomsnittet?	6
7	Vanliga misstag att undvika	6
7.1	1. P-hacking	6
7.2	2. Förväxla statistisk och praktisk signifikans	6
7.3	3. Ignorera urvalsstorlek	6
7.4	4. Feltolkning av konfidensintervall	6
8	Viktiga begrepp	6

9 Interaktiva verktyg	7
10 Vidare läsning	7
11 Referenser	7

1 Introduktion

Inferentiell statistik handlar om att dra slutsatser om en population baserat på ett urval. Tre centrala begrepp är Z-värden, p-värden och felmarginaler.

2 Z-värden (Z-scores)

2.1 Vad är ett Z-värde?

Ett Z-värde anger hur många standardavvikelser ett värde ligger från medelvärdet i en normalfördelning.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- z = Z-värde
- x = Observerat värde
- μ = Medelvärde
- σ = Standardavvikelse

2.2 Tolkning

- **Z = 0:** Värdet är exakt på medelvärdet
- **Z = 1:** Värdet ligger 1 standardavvikelse över medelvärdet
- **Z = -1:** Värdet ligger 1 standardavvikelse under medelvärdet
- **Z = 2:** Värdet ligger 2 standardavvikelser över medelvärdet

2.3 Z-värden och normalfördelningen

I en normalfördelning: - **68%** av värdena ligger inom ± 1 standardavvikelse (Z mellan -1 och +1) - **95%** av värdena ligger inom ± 1.96 standardavvikelser (Z mellan -1.96 och +1.96) - **99%** av värdena ligger inom ± 2.58 standardavvikelser (Z mellan -2.58 och +2.58)

2.4 Kritiska Z-värden för konfidensnivåer

Konfidensnivå	Z-värde	Användning
90%	1.645	Explorativa studier
95%	1.96	Standard i forskning
99%	2.576	Hög säkerhet
99.9%	3.291	Mycket hög säkerhet

2.5 Exempel: IQ-test

IQ har medelvärde 100 och standardavvikelse 15.

Om en person har IQ 130:

$$z = \frac{130 - 100}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

Detta betyder att personen ligger 2 standardavvikelser över medelvärdet, vilket är högre än ca 97.5% av populationen.

3 P-värden (P-values)

3.1 Vad är ett p-värde?

P-värdet är sannolikheten att få ett resultat som är lika extremt eller mer extremt än det observerade resultatet, *givet att nollhypotesen är sann*.

3.2 Tolkning

- $p < 0.001$: Mycket starkt bevis mot nollhypotesen (***)
- $p < 0.01$: Starkt bevis mot nollhypotesen (**)
- $p < 0.05$: Måttligt bevis mot nollhypotesen (*)
- $p = 0.05$: Otillräckligt bevis för att förkasta nollhypotesen

3.3 Vanliga missförstånd

FELAKTIGT: “ $p = 0.05$ betyder att det är 5% chans att nollhypotesen är sann”

KORREKT: “ $p = 0.05$ betyder att om nollhypotesen vore sann, skulle vi se dessa data (eller mer extrema) i 5% av fallen”

3.4 Signifikansnivå ()

Signifikansnivån (ofta $= 0.05$) är tröskeln vi sätter *innan* studien för att bestämma om ett resultat ska betraktas som statistiskt signifikant.

- Om $p < \alpha$: Förkasta nollhypotesen (signifikant resultat)
- Om $p \geq \alpha$: Behåll nollhypotesen (icke-signifikant resultat)

3.5 Exempel: Myntkast

Nollhypotes: Myntet är rättvist ($p = 0.5$ för krona)

Du kastar 100 gånger och får 65 kronor.

Fråga: Hur troligt är det att få 65 eller fler kronor med ett rättvist mynt?

Om p -värdet $= 0.003$, betyder det att denna extrema utfall skulle inträffa i endast 0.3% av fallen med ett rättvist mynt. Vi förkastar därför nollhypotesen och drar slutsatsen att myntet troligen inte är rättvist.

4 Felmarginaler (Margin of Error)

4.1 Vad är en felmarginal?

Felmarginalen anger det intervall inom vilket det sanna populationsvärdet troligen ligger, baserat på ditt urval.

$$\text{Felmarginal} = Z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Z = Z-värde för önskad konfidensnivå
- σ = Standardavvikelse
- n = Urvalsstorlek

4.2 Konfidensintervall

Ett konfidensintervall konstrueras som:

$$\text{Estimat} \pm \text{Felmarginal}$$

Exempel: Om 52% av urvalet säger "ja" med felmarginal $\pm 3\%$, är konfidensintervallet 49% till 55%.

4.3 Faktorer som påverkar felmarginalen

1. Konfidensnivå (Z)

- Högre konfidensnivå \rightarrow Större felmarginal
- 90% konfidensintervall är smalare än 95%

2. Urvalsstorlek (n)

- Större urval \rightarrow Mindre felmarginal
- Kvadratroten betyder att du behöver 4 gånger så stort urval för att halvera felmarginalen

3. Variation i populationen ()

- Mer variation \rightarrow Större felmarginal
- Mer homogen population \rightarrow Mindre felmarginal

4.4 Exempel: Opinionsundersökning

En undersökning av 1000 väljare visar att 48% tänker rösta på parti A.

Med 95% konfidensnivå: - $Z = 1.96$ - Standardfel 0.016 (beräknas från $p(1-p)/n$) - Felmarginal $= 1.96 \times 0.016 = 0.031 = \pm 3.1\%$

Tolkning: Med 95% säkerhet ligger det sanna stödet för parti A mellan 44.9% och 51.1%.

5 Samband mellan begreppen

5.1 Z-värden och p-värden

Z-värden används för att beräkna p-värden:

Z-värde	p-värde (tvåsidigt)	Tolkning
1.96	0.05	Gränsen för signifikans vid $\alpha = 0.05$
2.58	0.01	Starkt signifikant
3.29	0.001	Mycket starkt signifikant

5.2 Z-värden och felmarginaler

Högre Z-värde (högre konfidensnivå) ger större felmarginal:

Konfidensnivå	Z	Effekt på felmarginal
90%	1.645	Smalare intervall
95%	1.96	Standard
99%	2.576	Bredare intervall

6 Praktisk tillämpning

6.1 Hypotestest i 5 steg

1. Formulera hypoteser

- H_0 : Nollhypotes (ingen effekt/skillnad)
- H_1 : Alternativhypotes (det finns en effekt/skillnad)

2. Välj signifikansnivå

- Vanligen $\alpha = 0.05$

3. Samla data och beräkna teststatistika

- T.ex. Z-värde

4. Beräkna p-värde

- Sannolikheten för observerade data under H_0

5. Dra slutsats

- Om $p < \alpha$: Förkasta H_0
- Om $p \geq \alpha$: Behåll H_0

6.2 Exempel: Är studenter längre än genomsnittet?

1. Hypoteser:

- H_0 : $\mu = 170$ cm (studenter är lika långa som genomsnittet)
- H_1 : $\mu > 170$ cm (studenter är längre)

2. Signifikansnivå: $\alpha = 0.05$

3. Data:

- Urval: $n = 50$ studenter
- Medellängd: $\bar{x} = 173$ cm
- Standardavvikelse: $s = 8$ cm

4. Beräkning:

$$z = \frac{173 - 170}{8/\sqrt{50}} = \frac{3}{1.13} = 2.65$$

p-värde ≈ 0.004

5. **Slutsats:** $p < 0.05$, så vi förkastar H_0 . Det finns statistiskt signifikant bevis för att studenter i genomsnitt är längre än 170 cm.

7 Vanliga misstag att undvika

7.1 1. P-hacking

Att testa många olika hypoteser tills man hittar en signifikant ($p < 0.05$) leder till falska positiva resultat.

7.2 2. Förväxla statistisk och praktisk signifikans

Ett resultat kan vara statistiskt signifikant ($p < 0.05$) men praktiskt oviktigt (mycket liten effekt).

7.3 3. Ignorera urvalsstorlek

Stora urval kan ge signifikanta resultat även för små, praktiskt ointressanta effekter.

7.4 4. Feltolkning av konfidensintervall

“95% konfidensintervall” betyder INTE att det är 95% chans att det sanna värdet ligger i intervallet. Det betyder att om vi upprepar studien många gånger, kommer 95% av intervallen att innehålla det sanna värdet.

8 Viktiga begrepp

Svenska	Engelska	Symbol
Z-värde	Z-score	z
P-värde	P-value	p
Felmarginal	Margin of error	E eller ME
Konfidensnivå	Confidence level	-
Konfidensintervall	Confidence interval	CI
Signifikansnivå	Significance level	α
Nollhypotes	Null hypothesis	H_0
Alternativhypotes	Alternative hypothesis	H_1
Standardfel	Standard error	SE

9 Interaktiva verktyg

- [Sannolikhet](#) - Utforska normalfördelning och konfidensintervall
- [Urvalsstorlekskalkylator](#) - Se hur Z-värden påverkar nödvändig urvalsstorlek
- [Regression](#) - Inferens för korrelation och regression

10 Vidare läsning

För djupare förståelse, se: - [Korrelation och regression](#) - Hypotestest för samband - Presentationer om [Slump och sannolikhet](#)

11 Referenser

- Wikipedia: [Standard score \(Z-score\)](#)
- Wikipedia: [P-value](#)
- Wikipedia: [Margin of error](#)
- Wikipedia: [Confidence interval](#)
- Wikipedia: [Statistical hypothesis testing](#)
- Wikipedia: [Significance level](#)
- Wikipedia: [Normal distribution](#)
- Wikipedia: [68–95–99.7 rule](#)