

# Korrelation och regression

Mathias Johansson

Kristofer Söderström

2025-12-15

## Innehållsförteckning

<b>1</b>	<b>Introduktion</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Korrelation</b>	<b>2</b>
2.1	Korrelationskoefficienten (Pearson's $r$ ) . . . . .	2
2.2	Beräkning . . . . .	2
2.3	Tolkning . . . . .	2
2.4	Exempel . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Enkel linjär regression</b>	<b>2</b>
3.1	Regressionsekvationen . . . . .	3
3.2	Beräkna koefficienter . . . . .	3
3.3	Exempel (fortsättning) . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Residualer (fel)</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Determinationskoefficienten <math>R^2</math></b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Inferentiell statistik</b>	<b>4</b>
6.1	Hypotestest för korrelation . . . . .	4
6.2	Konfidensintervall för lutningen . . . . .	4
<b>7</b>	<b>Antaganden</b>	<b>4</b>
<b>8</b>	<b>Korrelation vs kausalitet</b>	<b>4</b>
8.1	Klassiska exempel . . . . .	5
<b>9</b>	<b>Viktiga begrepp</b>	<b>5</b>
<b>10</b>	<b>Interaktivt verktyg</b>	<b>5</b>
<b>11</b>	<b>Referenser</b>	<b>5</b>

## 1 Introduktion

Denna lektion behandlar två centrala statistiska metoder för att analysera samband mellan variabler: korrelation och regression. Vi går igenom beräkningar, tolkning och inferentiell statistik.

## 2 Korrelation

Korrelation mäter styrkan och riktningen på ett linjärt samband mellan två variabler.

### 2.1 Korrelationskoefficienten (Pearson's $r$ )

Korrelationskoefficienten  $r$  varierar mellan -1 och +1:

- $r = +1$ : Perfekt positivt linjärt samband
- $r = 0$ : Inget linjärt samband
- $r = -1$ : Perfekt negativt linjärt samband

### 2.2 Beräkning

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

### 2.3 Tolkning

Värde på $r$	Tolkning
0.7 till 1.0	Stark positiv korrelation
0.3 till 0.7	Måttlig positiv korrelation
-0.3 till 0.3	Svag eller ingen korrelation
-0.7 till -0.3	Måttlig negativ korrelation
-1.0 till -0.7	Stark negativ korrelation

### 2.4 Exempel

Anta att vi har data för studietid (X) och tentamensresultat (Y):

Student	Studietid (h)	Resultat (%)
1	2	55
2	4	65
3	6	75
4	8	85
5	10	90

Med dessa data får vi  $r = 0.98$ , vilket indikerar en stark positiv korrelation.

## 3 Enkel linjär regression

Regression används för att förutsäga värdet på en beroende variabel (Y) baserat på en oberoende variabel (X).

### 3.1 Regressionsekvationen

$$\hat{y} = a + bx$$

- $\hat{y}$  = förutsagt värde
- $a$  = intercept (y-värde när  $x = 0$ )
- $b$  = lutning (förändring i  $y$  per enhet  $x$ )

### 3.2 Beräkna koefficienter

Lutning (b):

$$b = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

Intercept (a):

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

### 3.3 Exempel (fortsättning)

Med data från exemplet ovan:

- Medelvärde X:  $\bar{x} = 6$
- Medelvärde Y:  $\bar{y} = 74$

Beräkningar ger: - b 4.5 - a 47

**Regressionsekvation:**  $\hat{y} = 47 + 4.5x$

Detta betyder att för varje extra timme studietid förväntas resultatet öka med 4.5 procentenheter.

## 4 Residualer (fel)

Residualen är skillnaden mellan det observerade värdet och det värde som regressionen förutsäger:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

- Positiv residual: Observerat värde är högre än förutsagt
- Negativ residual: Observerat värde är lägre än förutsagt

Minsta-kvadratmetoden minimerar summan av de kvadrerade residualerna.

## 5 Determinationskoefficienten $R^2$

$$R^2 = r^2$$

$R^2$  anger andelen av variansen i Y som förklaras av X:

- $R^2 = 0.81$  betyder att 81% av variationen i Y förklaras av X
- Värdet varierar från 0 (ingen förklaring) till 1 (perfekt förklaring)

## 6 Inferentiell statistik

### 6.1 Hypotestest för korrelation

**Nollhypotes:**  $H_0 : \rho = 0$  (ingen korrelation i populationen)

**Teststatistika:**

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

- Frihetsgrader:  $df = n - 2$
- Om  $p < 0.05$  förkastar vi nollhypotesen och säger att korrelationen är statistiskt signifikant

### 6.2 Konfidensintervall för lutningen

$$b \pm t_{\alpha/2} \cdot SE_b$$

Standardfelet för b beräknas som:

$$SE_b = \frac{s_e}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

där  $s_e$  är standardfelet för residualerna.

Ett 95% konfidensintervall som inte innehåller 0 indikerar ett signifikant samband.

## 7 Antaganden

För att regressionsanalysen ska vara giltig bör följande antaganden uppfyllas:

1. **Linjäritet** – Sambandet mellan X och Y är linjärt
2. **Oberoende** – Observationerna är oberoende av varandra
3. **Normalfördelning** – Residualerna är normalfördelade
4. **Homoskedasticitet** – Variansen i residualerna är konstant

## 8 Korrelation vs kausalitet

**Viktigt:** Korrelation innebär inte orsakssamband (kausalitet).

Ett observerat samband kan bero på:

- **Omvänd kausalitet:** Y orsakar X, inte tvärtom
- **Confounding:** En tredje variabel påverkar både X och Y
- **Slump:** Särskilt vid små urval

## 8.1 Klassiska exempel

- Glasskonsumtion korrelerar med drunkningsolyckor
  - Bakomliggande variabel: Sommarväder
- Antalet brandmän korrelerar med brandens storlek
  - Kausaliteten går åt andra hållet

## 9 Viktiga begrepp

Svenska	Engelska
Korrelation	Correlation
Regression	Regression
Lutning	Slope
Intercept	Intercept
Residual	Residual
Determinationskoefficient	Coefficient of determination
Standardfel	Standard error
Konfidensintervall	Confidence interval
Signifikans	Significance

## 10 Interaktivt verktyg

Använd det [interaktiva regressionsverktyget](#) för att:

- Skapa egna datapunkter genom att klicka
- Se regressionslinjen uppdateras i realtid
- Visualisera residualer (fel)
- Utforska hur olika punktmönster påverkar korrelation och  $R^2$

## 11 Referenser

- Wikipedia: [Pearson correlation coefficient](#)
- Wikipedia: [Simple linear regression](#)
- Wikipedia: [Least squares](#)
- Wikipedia: [Coefficient of determination \( \$R^2\$ \)](#)
- Wikipedia: [Errors and residuals](#)
- Wikipedia: [Regression analysis](#)
- Wikipedia: [Correlation does not imply causation](#)
- Wikipedia: [Standard error](#)
- Wikipedia: [Confounding](#)