

# Inferentiell statistik

## Z-värden, p-värden och felmarginaler

Mathias Johansson

Kristofer Söderström

2025-12-15

## Innehållsförteckning

<b>1</b>	<b>Introduktion</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Z-värden (Z-scores)</b>	<b>2</b>
2.1	Vad är ett Z-värde? . . . . .	2
2.2	Tolkning . . . . .	2
2.3	Z-värden och normalfördelningen . . . . .	2
2.4	Kritiska Z-värden för konfidensnivåer . . . . .	2
2.5	Exempel: IQ-test . . . . .	3
<b>3</b>	<b>P-värden (P-values)</b>	<b>3</b>
3.1	Vad är ett p-värde? . . . . .	3
3.2	Tolkning . . . . .	3
3.3	Vanliga missförstånd . . . . .	3
3.4	Signifikansnivå ( ) . . . . .	3
3.5	Exempel: Myntkast . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Felmarginaler (Margin of Error)</b>	<b>4</b>
4.1	Vad är en felmarginal? . . . . .	4
4.2	Konfidensintervall . . . . .	4
4.3	Faktorer som påverkar felmarginalen . . . . .	4
4.4	Exempel: Opinionsundersökning . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Samband mellan begreppen</b>	<b>5</b>
5.1	Z-värden och p-värden . . . . .	5
5.2	Z-värden och felmarginaler . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Praktisk tillämpning</b>	<b>5</b>
6.1	Hypotestest i 5 steg . . . . .	5
6.2	Exempel: Är studenter längre än genomsnittet? . . . . .	6
<b>7</b>	<b>Vanliga misstag att undvika</b>	<b>6</b>
7.1	1. P-hacking . . . . .	6
7.2	2. Förväxla statistisk och praktisk signifikans . . . . .	6
7.3	3. Ignorera urvalsstorlek . . . . .	6
7.4	4. Feltolkning av konfidensintervall . . . . .	6
<b>8</b>	<b>Viktiga begrepp</b>	<b>6</b>

<b>9 Interaktiva verktyg</b>	<b>7</b>
<b>10 Vidare läsning</b>	<b>7</b>
<b>11 Referenser</b>	<b>7</b>

## 1 Introduktion

Inferentiell statistik handlar om att dra slutsatser om en population baserat på ett urval. Tre centrala begrepp är Z-värden, p-värden och felmarginaler.

## 2 Z-värden (Z-scores)

### 2.1 Vad är ett Z-värde?

Ett Z-värde anger hur många standardavvikelse ett värde ligger från medelvärdet i en normalfördelning.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- $z$  = Z-värde
- $x$  = Observerat värde
- $\mu$  = Medelvärde
- $\sigma$  = Standardavvikelse

### 2.2 Tolkning

- **Z = 0:** Värdet är exakt på medelvärdet
- **Z = 1:** Värdet ligger 1 standardavvikelse över medelvärdet
- **Z = -1:** Värdet ligger 1 standardavvikelse under medelvärdet
- **Z = 2:** Värdet ligger 2 standardavvikelse över medelvärdet

### 2.3 Z-värden och normalfördelningen

I en normalfördelning: - **68%** av värdena ligger inom  $\pm 1$  standardavvikelse (Z mellan -1 och +1) - **95%** av värdena ligger inom  $\pm 1.96$  standardavvikelse (Z mellan -1.96 och +1.96) - **99%** av värdena ligger inom  $\pm 2.58$  standardavvikelse (Z mellan -2.58 och +2.58)

### 2.4 Kritiska Z-värden för konfidensnivåer

Konfidensnivå	Z-värde	Användning
90%	1.645	Explorativa studier
<b>95%</b>	<b>1.96</b>	<b>Standard i forskning</b>
99%	2.576	Hög säkerhet
99.9%	3.291	Mycket hög säkerhet

## 2.5 Exempel: IQ-test

IQ har medelvärde 100 och standardavvikelse 15.

Om en person har IQ 130:

$$z = \frac{130 - 100}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

Detta betyder att personen ligger 2 standardavvikelse över medelvärdet, vilket är högre än ca 97.5% av populationen.

## 3 P-värden (P-values)

### 3.1 Vad är ett p-värde?

P-värdet är sannolikheten att få ett resultat som är lika extremt eller mer extremt än det observerade resultatet, *givet att nollhypotesen är sann*.

### 3.2 Tolkning

- $p < 0.001$ : Mycket starkt bevis mot nollhypotesen (\*\*\*)
- $p < 0.01$ : Starkt bevis mot nollhypotesen (\*\*)
- $p < 0.05$ : Måttligt bevis mot nollhypotesen (\*)
- $p \geq 0.05$ : Otillräckligt bevis för att förkasta nollhypotesen

### 3.3 Vanliga missförstånd

**FELAKTIGT:** “ $p = 0.05$  betyder att det är 5% chans att nollhypotesen är sann”

**KORREKT:** “ $p = 0.05$  betyder att om nollhypotesen vore sann, skulle vi se dessa data (eller mer extrema) i 5% av fallen”

### 3.4 Signifikansnivå ( $\alpha$ )

Signifikansnivån (ofta  $\alpha = 0.05$ ) är tröskeln vi sätter *innan* studien för att bestämma om ett resultat ska betraktas som statistiskt signifikant.

- Om  $p < \alpha$ : Förfasta nollhypotesen (signifikant resultat)
- Om  $p \geq \alpha$ : Behåll nollhypotesen (icke-signifikant resultat)

### 3.5 Exempel: Myntkast

Nollhypotes: Myntet är rättvist ( $p = 0.5$  för krona)

Du kastar 100 gånger och får 65 kronor.

Fråga: Hur troligt är det att få 65 eller fler kronor med ett rättvist mynt?

Om p-värdet = 0.003, betyder det att denna extrema utfall skulle inträffa i endast 0.3% av fallen med ett rättvist mynt. Vi förkastar därför nollhypotesen och drar slutsatsen att myntet troligen inte är rättvist.

## 4 Felmarginaler (Margin of Error)

### 4.1 Vad är en felmarginal?

Felmarginalen anger det intervall inom vilket det sanna populationsvärdet troligen ligger, baserat på ditt urval.

$$\text{Felmarginal} = Z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $Z$  = Z-värde för önskad konfidensnivå
- $\sigma$  = Standardavvikelse
- $n$  = Urvalsstorlek

### 4.2 Konfidensintervall

Ett konfidensintervall konstrueras som:

$$\text{Estimat} \pm \text{Felmarginal}$$

Exempel: Om 52% av urvalet säger "ja" med felmarginal  $\pm 3\%$ , är konfidensintervallet 49% till 55%.

### 4.3 Faktorer som påverkar felmarginalen

#### 1. Konfidensnivå ( $Z$ )

- Högre konfidensnivå → Större felmarginal
- 90% konfidensintervall är smalare än 95%

#### 2. Urvalsstorlek ( $n$ )

- Större urval → Mindre felmarginal
- Kvadratroten betyder att du behöver 4 gånger så stort urval för att halvera felmarginalen

#### 3. Variation i populationen ( $\sigma$ )

- Mer variation → Större felmarginal
- Mer homogen population → Mindre felmarginal

### 4.4 Exempel: Opinionsundersökning

En undersökning av 1000 väljare visar att 48% tänker rösta på parti A.

Med 95% konfidensnivå: -  $Z = 1.96$  - Standardfel  $0.016$  (beräknas från  $p(1-p)/n$ ) - Felmarginal  $= 1.96 \times 0.016 = 0.031 = \pm 3.1\%$

**Tolkning:** Med 95% säkerhet ligger det sanna stödet för parti A mellan 44.9% och 51.1%.

## 5 Samband mellan begreppen

### 5.1 Z-värden och p-värden

Z-värden används för att beräkna p-värden:

Z-värde	p-värde (tvåsidigt)	Tolkning
1.96	0.05	Gränsen för signifikans vid $\alpha = 0.05$
2.58	0.01	Starkt signifikant
3.29	0.001	Mycket starkt signifikant

### 5.2 Z-värden och felmarginaler

Högre Z-värde (högre konfidensnivå) ger större felmarginal:

Konfidensnivå	Z	Effekt på felmarginal
90%	1.645	Smalare intervall
95%	1.96	Standard
99%	2.576	Bredare intervall

## 6 Praktisk tillämpning

### 6.1 Hypotestest i 5 steg

#### 1. Formulera hypoteser

- $H_0$  : Nollhypotes (ingen effekt/skillnad)
- $H_1$  : Alternativhypotes (det finns en effekt/skillnad)

#### 2. Välj signifikansnivå

- Vanligen  $\alpha = 0.05$

#### 3. Samla data och beräkna teststatistika

- T.ex. Z-värde

#### 4. Beräkna p-värde

- Sannolikheten för observerade data under  $H_0$

#### 5. Dra slutsats

- Om  $p < \alpha$  : Förfasta  $H_0$
- Om  $p \geq \alpha$  : Behåll  $H_0$

## 6.2 Exempel: Är studenter längre än genomsnittet?

### 1. Hypoteser:

- $H_0$ :  $\mu = 170$  cm (studenter är lika långa som genomsnittet)
- $H_1$ :  $\mu > 170$  cm (studenter är längre)

### 2. Signifikansnivå: $\alpha = 0.05$

### 3. Data:

- Urval:  $n = 50$  studenter
- Medellängd:  $\bar{x} = 173$  cm
- Standardavvikelse:  $s = 8$  cm

### 4. Beräkning:

$$z = \frac{173 - 170}{8/\sqrt{50}} = \frac{3}{1.13} = 2.65$$

p-värde 0.004

5. Slutsats:  $p < 0.05$ , så vi förkastar  $H_0$ . Det finns statistiskt signifikant bevis för att studenter i genomsnitt är längre än 170 cm.

## 7 Vanliga misstag att undvika

### 7.1 1. P-hacking

Att testa många olika hypoteser tills man hittar en signifikant ( $p < 0.05$ ) leder till falska positiva resultat.

### 7.2 2. Förväxla statistisk och praktisk signifikans

Ett resultat kan vara statistiskt signifikant ( $p < 0.05$ ) men praktiskt oviktigt (mycket liten effekt).

### 7.3 3. Ignorera urvalsstorlek

Stora urval kan ge signifikanta resultat även för små, praktiskt ointressanta effekter.

### 7.4 4. Feltolkning av konfidensintervall

“95% konfidensintervall” betyder INTE att det är 95% chans att det sanna värdet ligger i intervallet. Det betyder att om vi upprepar studien många gånger, kommer 95% av intervallen att innehålla det sanna värdet.

## 8 Viktiga begrepp

Svenska	Engelska	Symbol
Z-värde	Z-score	$z$
P-värde	P-value	$p$
Felmarginal	Margin of error	$E$ eller $ME$
Konfidensnivå	Confidence level	-
Konfidensintervall	Confidence interval	$CI$
Signifikansnivå	Significance level	$\alpha$
Nollhypotes	Null hypothesis	$H_0$
Alternativhypotes	Alternative hypothesis	$H_1$
Standardfel	Standard error	$SE$

## 9 Interaktiva verktyg

- [Sannolikhet](#) - Utforska normalfördelning och konfidensintervall
- [Urvalsstorlekskalkylator](#) - Se hur Z-värden påverkar nödvändig urvalsstorlek
- [Regression](#) - Inferens för korrelation och regression

## 10 Vidare läsning

För djupare förståelse, se: - [Korrelation och regression](#) - Hypotestest för samband - Presentationer om [Slump och sannolikhet](#)

## 11 Referenser

- Wikipedia: [Standard score \(Z-score\)](#)
- Wikipedia: [P-value](#)
- Wikipedia: [Margin of error](#)
- Wikipedia: [Confidence interval](#)
- Wikipedia: [Statistical hypothesis testing](#)
- Wikipedia: [Significance level](#)
- Wikipedia: [Normal distribution](#)
- Wikipedia: [68–95–99.7 rule](#)