Universidade de São Paulo
Departamento de Ciência da Computação
MAC0210 - Laboratório de Métodos Numéricos

Relatório EP1

Andre Nogueira Ribeiro nUSP: 12542230
Matheus Sanches Jurgensen nUSP: 12542199

19 de abril
2022

Conteúdo

1 Parte 1

1.1 Funções de ponto fixo

1.1.1 Geração das funções

As funções escolhidas para aplicar o Método do Ponto Fixo foram duas:

- $g_1(x) = x + x^2/2 - e^x/4$
- $g_2(x) = e^x/2x$

Com relação às maneiras como elas foram geradas, a primeira delas surgiu seguindo as etapas a seguir.

$$g_1(x) = x - f(x)/4 \tag{1}$$
$$g_1(x) = x + x^2/2 - e^x/4 \tag{2}$$

Por sua vez, a função $g_2(x) = e^x/2x$ foi gerada a partir do seguinte processo:

$$f(x) = 0 \tag{3}$$
$$0 = e^x - 2x^2 \tag{4}$$
$$2x^2 = e^x \tag{5}$$
$$(2x)x = e^x \tag{6}$$
$$x = e^x/2x \tag{7}$$
$$g_2(x) = e^x/2x \tag{8}$$

Assim, temos duas funções tais que, quando $g(x) = x$, $f(x) = 0$.

1.1.2 Convergência das funções

Mais importante do que explicitar a forma como as funções do ponto fixo foram geradas é analisar a forma como elas convergem para as raízes de f. A função g_1 funciona para encontrar as raízes $x_1 = -0.539836$ e $x_3 = 2.617866$, enquanto a função g_2 funciona para encontrar a raiz $x_2 = 1.487962$. No caso da primeira função, a convergência pode ser explicada pela análise do gráfico da derivada de g_1, apresentado abaixo.

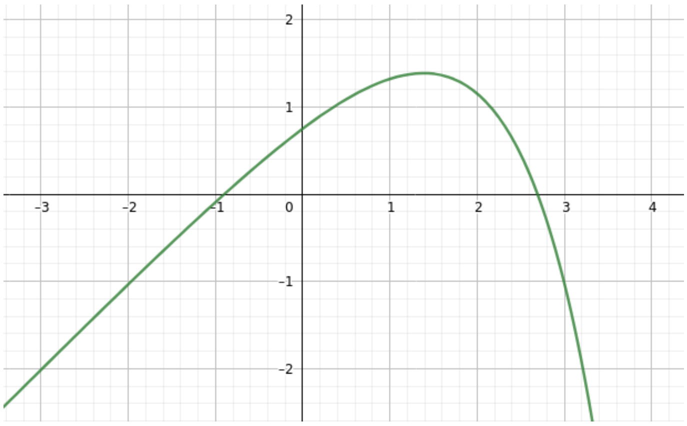

Figura 1: Derivada da função $g_1(x) = x + x^2/2 - e^x/4$

Como se percebe, para valores próximos à primeira e à terceira raiz, a derivada de g_1 mantém-se, em módulo, menor do que 1. Portanto, está respeitada a condição de convergência do Método do Ponto Fixo, e é por isso que g_1 converge para essas raízes. Por outro lado, para valores próximos à segunda raiz, a derivada de g_1 é maior do que 1. Portanto, não está respeitada a condição de convergência, e a função não converge para a segunda raiz.

Agora, para a função $g_2(x) = e^x/2x$, pode-se, mais uma vez, explicar a convergência única para a segunda raiz a partir do gráfico da derivada de g_2, apresentado na próxima página.

Por ele, percebe-se que, para valores próximos à raiz $x_2 = 1.487962$, a derivada de g_2 mantém-se entre 0 e 1. Mais uma vez, está respeitada a condição de convergência, e, portanto, g_2 converge para x_2. Não obstante, para valores próximos a x_1 e x_3, o gráfico abaixo mostra que g_2' atinge, em módulo, valores maiores que 1. Assim, não ocorre convergência para ambas as raízes.

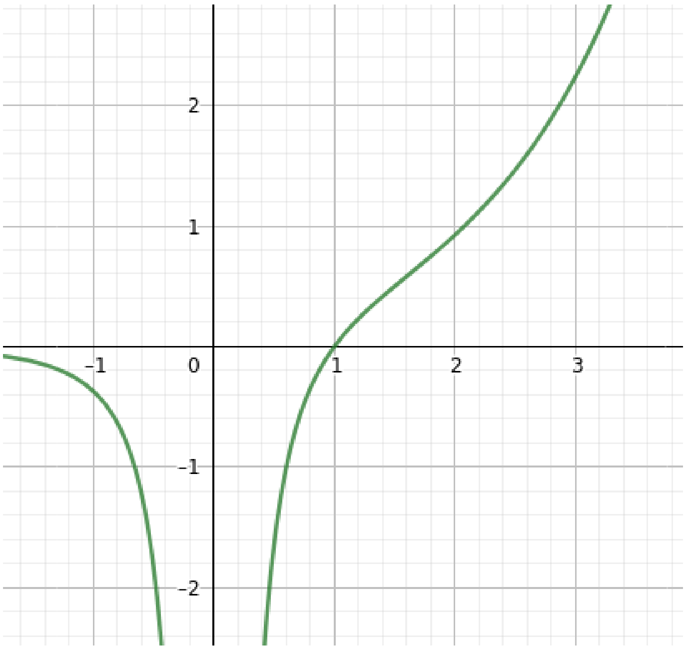

Figura 2: Derivada da função $g_2(x) = e^x/2x$

Uma observação importante e que será melhor evidenciada pelos experimentos apresentados em sequência é que, observando-se os dois gráficos acima, ambas as funções convergem para as raízes apenas a partir de pontos próximos a ela. No entanto, isso é aceitável, visto que o Método do Ponto Fixo já tem como premissa a utilização de um ponto inicial próximo à raiz à qual se pretende convergir.

1.2 Resultado e análise

1.2.1 Resultados para g_1

```
A partir de qual ponto você quer executar o método do ponto fixo? -5

Escolha uma das seguintes funções para executar o método:
1. g1(x) = x + x²/2 - e^x/4
2. g2(x) = (e^x)/(2x)

Sua escolha: 1

Durante as iterações, valores tenderam ao infinito.
Número de iterações: 5
A partir da função e do ponto dados, o método do ponto fixo não convergiu para uma
raiz.
```

Figura 3: Teste da g_1 para $x_0 = -5$

```
A partir de qual ponto você quer executar o método do ponto fixo? -1

Escolha uma das seguintes funções para executar o método:
1. g1(x) = x + x²/2 - e^x/4
2. g2(x) = (e^x)/(2x)

Sua escolha: 1

Número de iterações: 13
A partir da função e do ponto dados, o método do ponto fixo convergiu para a raiz
x = -0.539835.
```

Figura 4: Teste da g_1 para $x_0 = -1$

```
A partir de qual ponto você quer executar o método do ponto fixo? 1

Escolha uma das seguintes funções para executar o método:
1. g1(x) = x + x²/2 - e^x/4
2. g2(x) = (e^x)/(2x)

Sua escolha: 1

Número de iterações: 20
A partir da função e do ponto dados, o método do ponto fixo convergiu para a raiz
x = -0.539835.
```

Figura 5: Teste da g_1 para $x_0 = 1$

```
A partir de qual ponto você quer executar o método do ponto fixo? 3

Escolha uma das seguintes funções para executar o método:
1. g1(x) = x + x²/2 - e^x/4
2. g2(x) = (e^x)/(2x)

Sua escolha: 1

Número de iterações: 12
A partir da função e do ponto dados, o método do ponto fixo convergiu para a raiz
x = 2.617867.
```

Figura 6: Teste da g_1 para $x_0 = 3$

```
A partir de qual ponto você quer executar o método do ponto fixo? 5

Escolha uma das seguintes funções para executar o método:
1. g1(x) = x + x²/2 - e^x/4
2. g2(x) = (e^x)/(2x)

Sua escolha: 1

Durante as iterações, valores tenderam ao infinito.
Número de iterações: 6
A partir da função e do ponto dados, o método do ponto fixo não convergiu para uma
raiz.
```

Figura 7: Teste da g_1 para $x_0 = 5$

É evidente que, para pontos próximos a $x_1 = -0.539836$ (como o -1 e o 1), a função g_1 converge para x_1. De mesma forma, para pontos próximos a $x_3 = 2.617866$ (como o 3), a função converge para x_3. No entanto, quando os pontos distanciam-se das raízes, como é o caso de -5, 5 e quaisquer outros números de maior módulo, a função não converge. Isso ocorre porque, como já visto, a derivada de g_1, para pontos menores que x_1 e maiores que x_3, cresce, em módulo, continuamente, tomando valores cada vez mais distantes de 1. Isso faz com que, em algum momento, o algoritmo tente executar a função para valores que tendem a $+\infty$ ou -∞. Dessarte, como g_1 contém uma subtração que, nesse caso, ocorreria entre infinitos, a função retorna NaN, fazendo com que o loop do método seja interrompido.

1.2.2 Resultados para g_2

```
A partir de qual ponto você quer executar o método do ponto fixo? -5

Escolha uma das seguintes funções para executar o método:
1. g1(x) = x + x²/2 - e^x/4
2. g2(x) = (e^x)/(2x)

Sua escolha: 2

Número de iterações: 500
A partir da função e do ponto dados, o método do ponto fixo não convergiu para uma
raiz.
```

Figura 8: Teste da g_2 para $x_0 = -5$

```
A partir de qual ponto você quer executar o método do ponto fixo? -1

Escolha uma das seguintes funções para executar o método:
1. g1(x) = x + x²/2 - e^x/4
2. g2(x) = (e^x)/(2x)

Sua escolha: 2

Número de iterações: 500
A partir da função e do ponto dados, o método do ponto fixo não convergiu para uma
raiz.
```

Figura 9: Teste da g_2 para $x_0 = -1$

```
A partir de qual ponto você quer executar o método do ponto fixo? 1

Escolha uma das seguintes funções para executar o método:
1. g1(x) = x + x²/2 - e^x/4
2. g2(x) = (e^x)/(2x)

Sua escolha: 2

Número de iterações: 21
A partir da função e do ponto dados, o método do ponto fixo convergiu para a raiz x
 = 1.487962.
```

Figura 10: Teste da g_2 para $x_0 = 1$

```
A partir de qual ponto você quer executar o método do ponto fixo? 3

Escolha uma das seguintes funções para executar o método:
1. g1(x) = x + x²/2 - e^x/4
2. g2(x) = (e^x)/(2x)

Sua escolha: 2

Durante as iterações, valores tenderam ao infinito.
Número de iterações: 7
A partir da função e do ponto dados, o método do ponto fixo não convergiu para uma
raiz.
```

Figura 11: Teste da g_2 para $x_0 = 3$

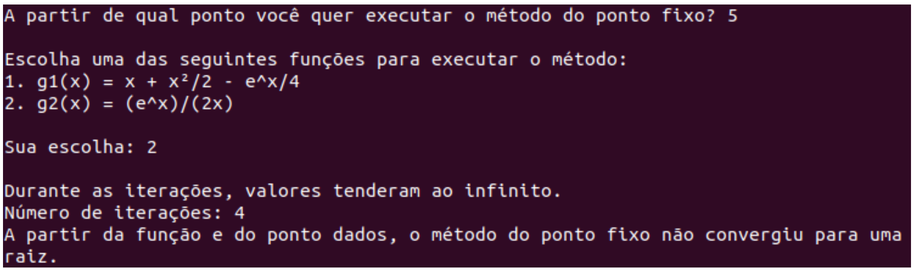

Figura 12: Teste da g_2 para $x_0 = 5$

Mais uma vez, é evidente que, para pontos próximos a $x_2 = 1.487962$ (como o 1), a função g_2 converge para x_2. Entretanto, quando os pontos distanciam-se das raízes, a convergência deixa de ocorrer. Por mais que, quanto mais à esquerda no eixo x, a função g_2 tenha módulo menor que 1, entre eles e x_2 a derivada tende a -∞, o que impossibilita que o x_k vá se aproximando de x_2 (e, portanto, convergindo). Portanto, o algoritmo atinge o limite de iterações (definido em 500) e não encontra a raiz. Agora, para pontos iniciais que se distanciam de x_2 pela direita, a derivada tende a $+\infty$. Isso, por si só, já indica não convergência. Ademais, como a derivada aumenta quanto maior o valor de x, a cada iteração o x_k também aumenta. Isso leva, em algum momento, o valor de x_k tender a $+\infty$. Isso, na função g_2, ocasiona uma divisão entre infinitos, retornando NaN e interrompendo o loop do método.

1.2.3 Análise de convergência

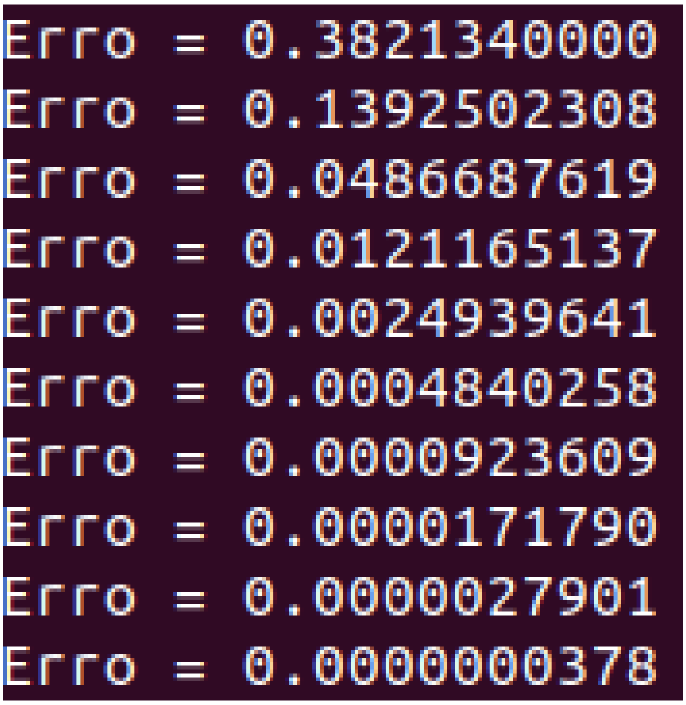

Figura 13: Exibição do erro para $x_0 = 3$ usando g_1

Visualizando-se a evolução do erro conforme as iterações para o caso acima, em que se executa o método do ponto fixo para g_1 a partir de $x_0 = 3$, identifica-se que o erro diminui de forma linear, sofrendo divisão, a cada iteração, por valores que não passam de 8. Portanto, o comportamento esperado para o Método do Ponto Fixo é respeitado.

2 Parte 2

2.1 Escolha das funções

As funções escolhidas para aplicar o método de Newton foram as seguintes:

- $f_1(x) = x^4 - 1$
- $f_2(x) = x^3 - 1$
- $f_3(x) = x^3 - 2x^2 + 25x - 50$
- $f_4(x) = x^5 - 4x^4 + 10x^3 + x^2 - 10$
- $f_5(x) = x^6 - 1$

Em primeiro lugar, as funções f_1 e f_2 foram escolhidas porque são as funções presentes no enunciado do EP. Dessa forma, foi possível comparar os nossos resultados com os do professor e verificar, pelo menos nesses casos, a corretude da saída do nosso programa. No entanto, nós incluímos, neste relatório, imagens das bacias de convergência de Newton dessas duas funções em intervalos diferentes do que do enunciado, para que se possa fazer uma visualização diferente.

A função f_3 foi escolhida por, diferentemente das duas primeiras, apresentar coeficientes diferentes de zero nos termos de menor grau. Além disso, as raízes dessa função distanciam-se por intervalos maiores do que as raízes das outras duas.

Ademais, quanto à função f_4, um dos motivos da sua escolha foi o mesmo da função anterior: ela apresenta coeficientes diferentes de zero em termos de menor grau. Além disso, ela possui um grau maior do que as funções anteriores.

Por fim, a função f_5 foi escolhida pois assemelha-se com as funções utilizadas no enunciado, já que possui coeficiente diferente de zero apenas nos termos de maior e de menor grau, mas é uma função de grau 6, o que colabora para que o algoritmo seja testado, também, com operações envolvendo números de maior magnitude.

2.2 Resultado dos experimentos

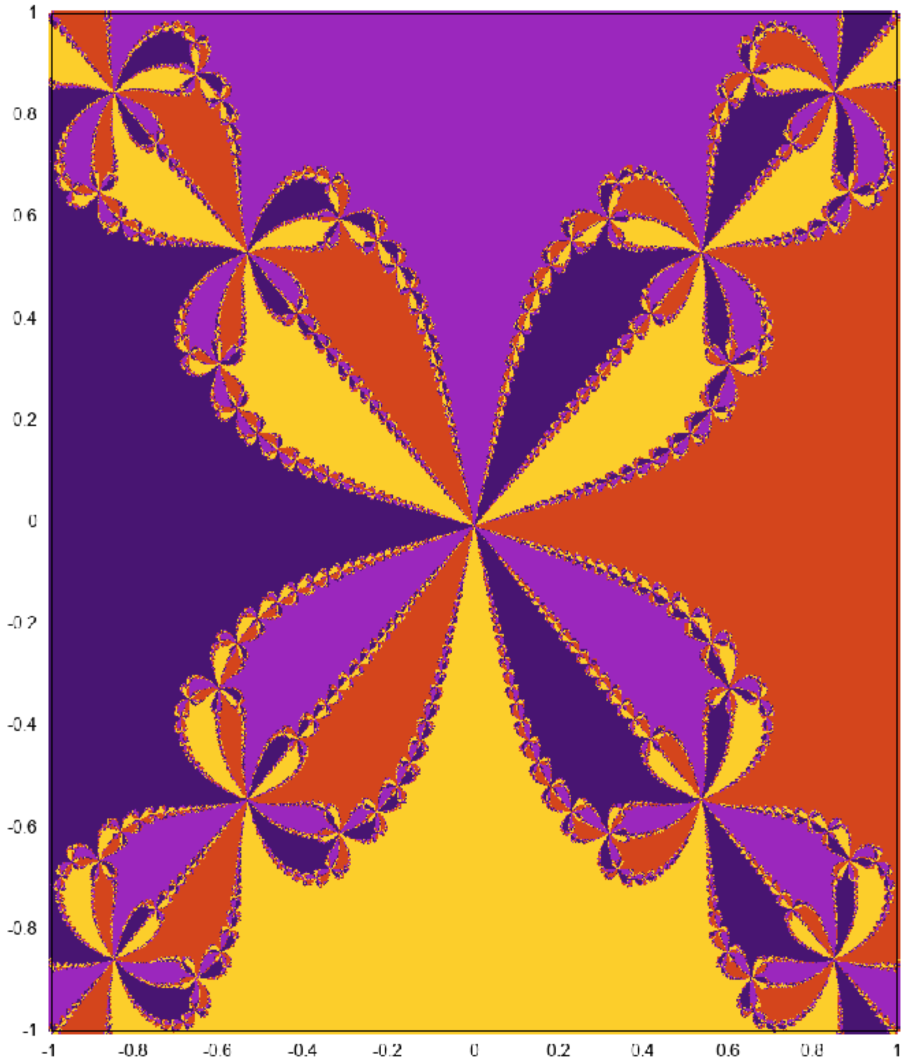

Figura 14: $f_1(x) = x^4 - 1$

A figura 14 exibe o resultado do programa para f_1 em um intervalo de -1 até 1 no eixo real e de -1 até 1 no eixo imaginário, utilizando 3000x3000 pixels para formar a imagem.

Um exemplo, tomando $x0 = -1 + 0.5i$, dos passos do método de Newton para essa função é:
x0 = -1.000000 + 0.500000i
x1 = -0.782000 + 0.199000i
x2 = -0.935443 - 0.174237i

x3 = -0.948596 + 0.021603i
x4 = -1.003421 - 0.003773i
x5 = -0.999996 - 0.000038i
x6 = -1.000000 + 0.000000i

Nesse caso, o ponto x0 converge para raiz -1 + 0i (cor azul escuro no gráfico).

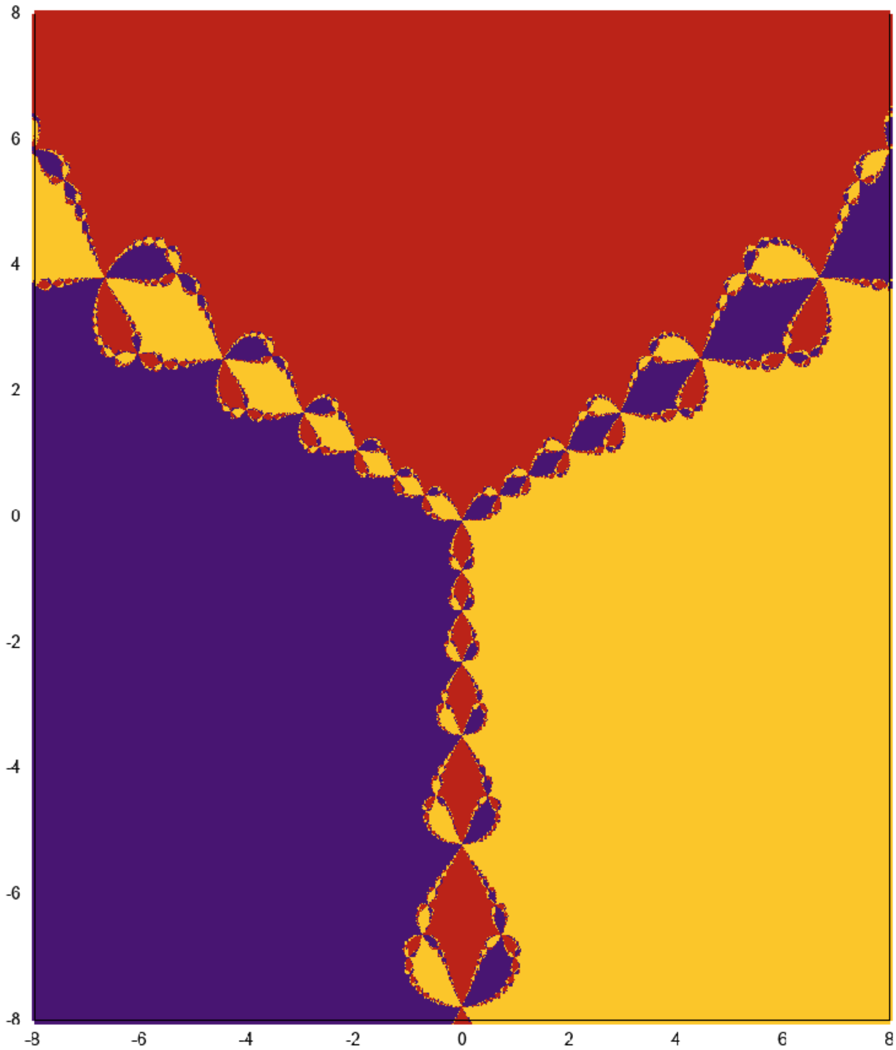

Figura 15: $f_2(x) = x^3 - 1$

A figura 15 exibe o resultado do programa para f_2 em um intervalo de -8 até 8 no eixo real e de -8 até 8 no eixo imaginário, utilizando 3000x3000 pixels para formar a imagem.
Um exemplo, tomando $x0 = 4 + 0i$, dos passos do método de Newton para

essa função é:
x0 = 4.000000 + 0.000000i
x1 = 2.687500 + 0.000000i
x2 = 1.837818 + 0.000000i
x3 = 1.323902 + 0.000000i
x4 = 1.072782 + 0.000000i
x5 = 1.004826 + 0.000000i
x6 = 1.000023 + 0.000000i
x7 = 1.000000 + 0.000000i

Nesse caso, o ponto x0 converge para raiz 1 + 0i (cor amarela no gráfico).

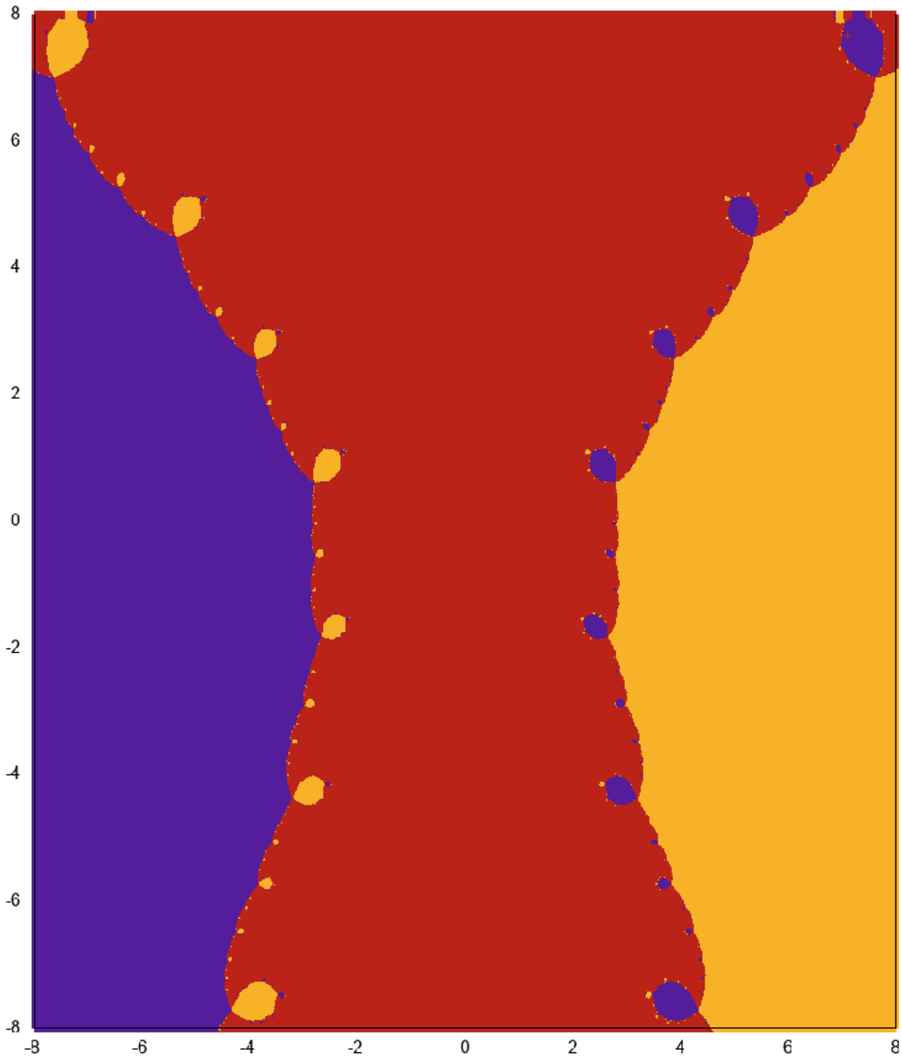

Figura 16: $f_3(x) = x^3 - 2x^2 + 25x - 50$

A figura 16 exibe o resultado do programa para f_3 em um intervalo de -8 até 8 no eixo real e de -8 até 8 no eixo imaginário, utilizando 2500x2500 pixels para formar a imagem.

Um exemplo, tomando $x0 = -1 + 2i$, dos passos do método de Newton para essa função é:
x0 = -1.000000 + 2.000000i
x1 = 1.850000 + 2.050000i
x2 = 0.920441 - 0.242498i
x3 = 2.096435 + 0.019539i
x4 = 2.001253 + 0.000535i

x5 = 2.000000 + 0.000000i
x6 = 2.000000 + 0.000000i
x7 = 2.000000 - 0.000000i
x8 = 2.000000 - 0.000000i
x9 = 2.000000 - 0.000000i

Nesse caso, o ponto x0 converge para raiz 2 + 0i (cor vermelha no gráfico).

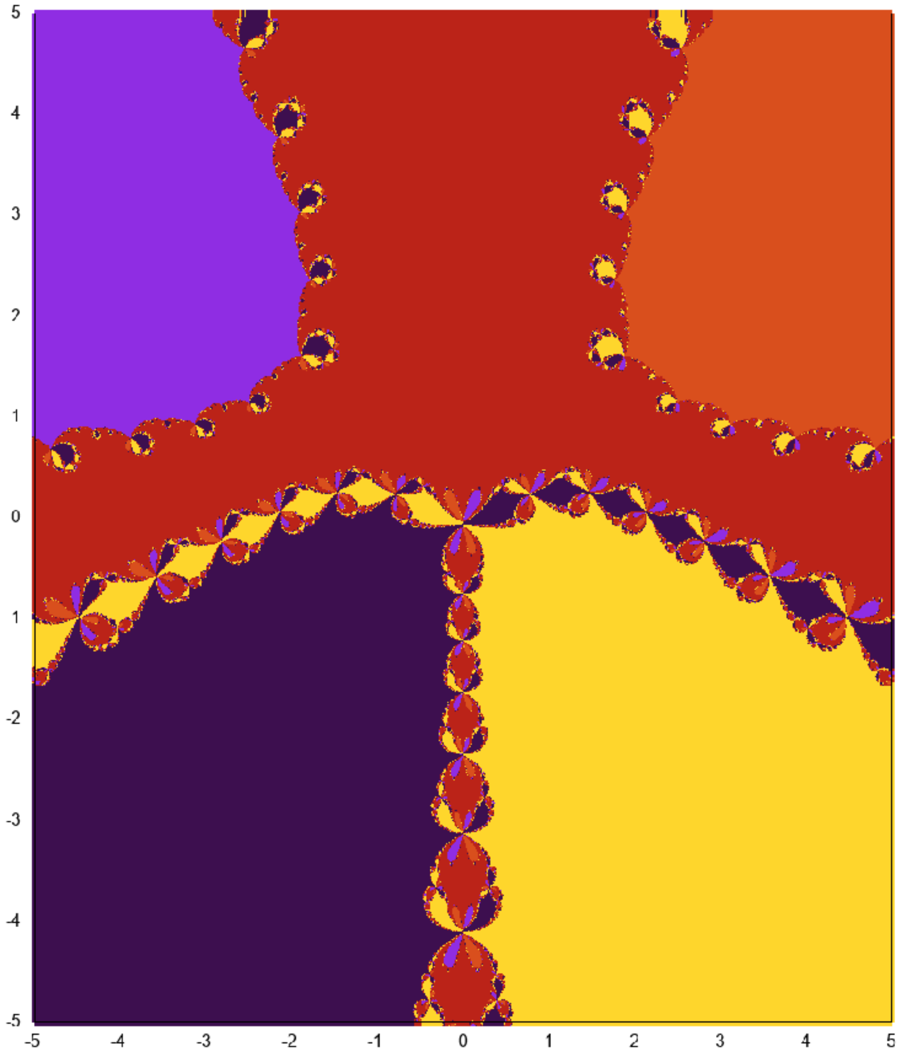

Figura 17: $f_4(x) = x^5 - 4x^4 + 10x^3 + x^2 - 10$

A figura 17 exibe o resultado do programa para f_4 em um intervalo de -5 até 5 no eixo real e de -5 até 5 no eixo imaginário, utilizando 2500x2500 pixels para formar a imagem.

Um exemplo, tomando $x0 = 0 + 1i$, dos passos do método de Newton para essa função é:
x0 = 0.000000 + 1.000000i
x1 = -0.224447 + 0.478398i
x2 = -1.091501 + 0.844939i
x3 = -0.784222 + 0.723752i
x5 = -0.605121 + 0.707815i
x6 = -0.565170 + 0.738461i
x7 = -0.566984 + 0.741249i
x8 = -0.566979 + 0.741236i

Nesse caso, o ponto x0 converge para raiz -0.56698 + 0.74124 (cor vermelha no gráfico).

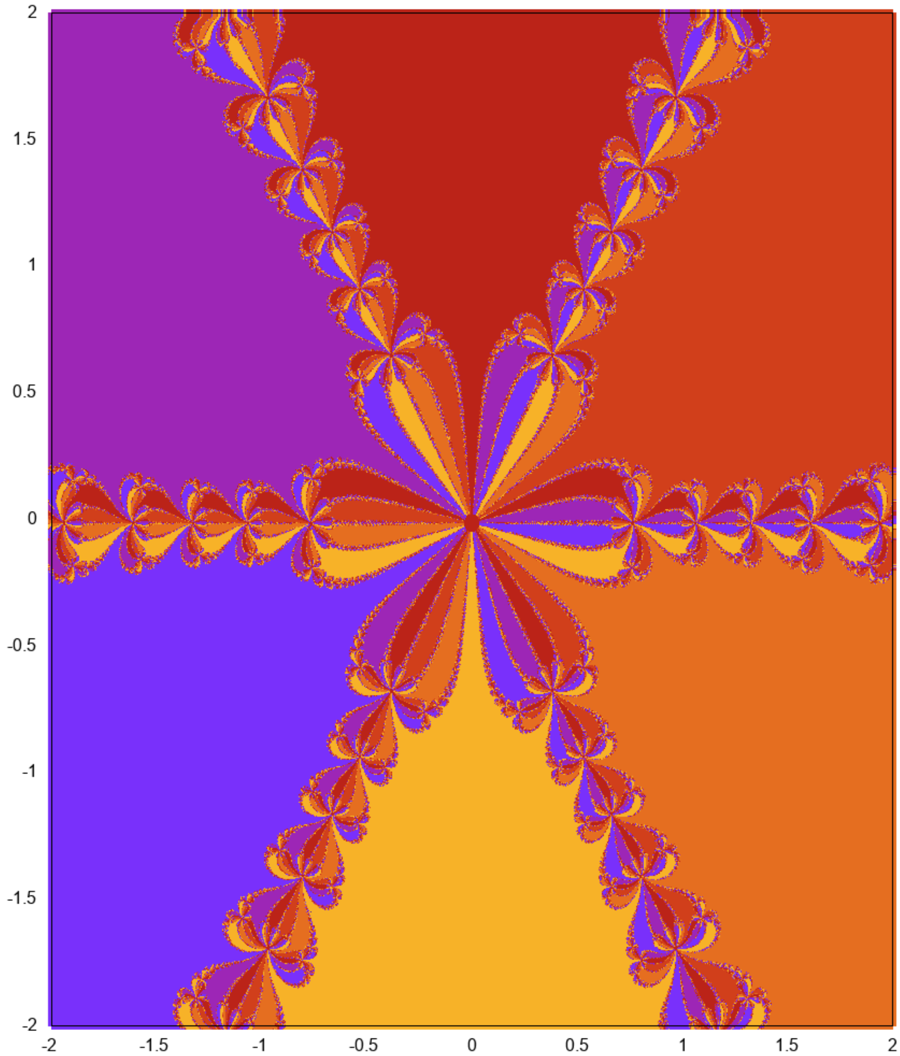

Figura 18: $f_5(x) = x^6 - 1$

A figura 18 exibe o resultado do programa para f_5 em um intervalo de -2 até 2 no eixo real e de -2 até 2 no eixo imaginário, utilizando 2500x2500 pixels para formar a imagem.

Um exemplo, tomando $x0 = -1 - 1i$, dos passos do método de Newton para essa função é:
x0 = -1.000000 - 1.000000i
x1 = -0.812500 - 0.854167i
x2 = -0.632180 - 0.769613i
x3 = -0.477086 - 0.803977i
x4 = -0.501979 - 0.878715i

x5 = -0.499919 - 0.866418i
x6 = -0.500000 - 0.866026i

Nesse caso, o ponto x0 converge para raiz -0.500000 - sqrt(3)/2i (cor azul clara no gráfico).

2.2.1 Análise de convergência

A partir da execução do algoritmo para a função $f_1(x) = x^4 - 1$, a partir do ponto $x_0 = -1 - i$, obteve-se a seguinte evolução do erro para as iterações finais.

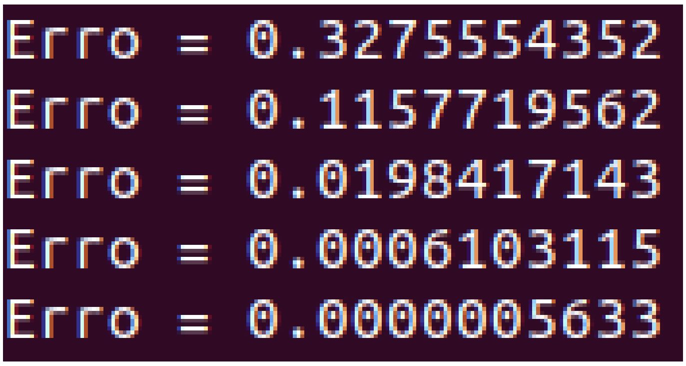

Figura 19: Exibição do erro para $x_0 = (-1, -1)$ em f_1

A evolução do erro acima indica claramente uma tendência de convergência quadrática, visto que a razão de um erro pelo seu subsequente, a cada iteração, cresce quadraticamente. Esse é um comportamento geral do algoritmo, exemplificado por esse caso singular. Portanto, também para o Método de Newton, o padrão de convergência do algoritmo segue o esperado.

3 Detalhes da implementação

Vale ressaltar alguns detalhes sobre o código. Em relação aos critérios de parada, utilizamos na parte 1 que o loop deveria ser encerrado quando o módulo da diferença entre x_k e $x_k + 1$ fosse menor do que 10^-7. Já na parte 2, onde trabalhamos com números complexos, paramos o loop quando o módulo da diferença entre as normas de x_k e $x_k + 1$ era menor do que 10^-8. Em ambos os casos também utilizamos um limite de iterações igual a 500.

Outro ponto a se destacar é o formato do arquivo txt que geramos e utilizamos para construir as imagens das bacias de convergência. Cada linha do arquivo é igual a "(re(x_0),im(x_0)) (re(p),im(p))", sendo re(x_0) e im(x_0) as coordenadas no plano complexo do ponto que foi avaliado, e re(p) e im(p) as coordenadas da raiz para a qual o ponto avaliado convergiu.

Por fim, destaca-se que, para pontos que não convergiram para nenhuma raiz, colocou-se que eles convergiram para x = 800, apenas como uma forma de padronizar a cor com que são representados os pontos do plano complexo que não chegaram a uma raiz, sabendo que 800 não é raiz de nenhuma das funções implementadas.

Vale apontar também que as imagens presentes no relatório foram geradas com muitos pixels e por isso o programa demora mais para essas quantidades.