2024年12月12日高中数学作业考试化（一、二部）

姓名：__________ 班级：__________ 考号：__________

一、单选题（共6小题）

1. (5分)直线 l 过点 $(-3,0)$，且与直线 $y=2x-3$ 垂直，则直线 l 的方程为(　　)

A. $y=-\frac{1}{2}(x-3)$ B. $y=-\frac{1}{2}(x+3)$ C. $y=\frac{1}{2}(x-3)$ D. $y=\frac{1}{2}(x+3)$

【答案】B

【解析】因为直线 $y=2x-3$ 的斜率为2，

所以直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

又直线 l 过点 $(-3,0)$，

故所求直线的方程为 $y=-\frac{1}{2}(x+3)$.

2. (5分)已知圆 C 与直线 $y=-x$ 及 $x+y-4=0$ 相切，圆心在直线 $y=x$ 上，则圆 C 的方程为(　　)

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ B. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

C. $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ D. $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

【答案】A

【解析】圆心在 $y=x$ 上，设圆心坐标为 $(a，a)$，

∵圆 C 与直线 $y=-x$ 及 $x+y-4=0$ 都相切，

∴圆心到两直线 $y=-x$ 及 $x+y-4=0$ 的距离相等，

即 $\frac{|2a|}{\sqrt{2}}=\frac{|2a-4|}{\sqrt{2}}\Rightarrow a=1$，

∴圆心坐标为 $(1,1)$，$R=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

∴圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

3. (5分)已知椭圆的中心在原点，离心率 $e=\frac{1}{2}$，且它的一个焦点与抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点重合，则此椭圆方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ B. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$ C. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ D. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

【答案】A

【解析】抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点坐标为 $(-1,0)$，

∴椭圆的一个焦点坐标为 $(-1,0)$，∴$c=1$，

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，∴$a=2$，$b^2=a^2-c^2=3$，

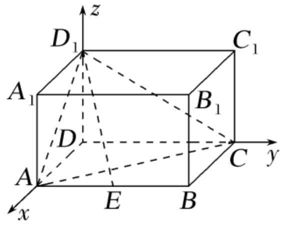
∴椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

4. (5分)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$，点 E 是棱 AB 的中点，则点 E 到平面 ACD_1 的距离为(　　)

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

【答案】C

【解析】如图，以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示空间直角坐标系，



则 $D_1(0，0，1)$，$E(1，1，0)$，$A(1，0，0)$，$C(0，2，0)$.

连接 D_1E，所以$\overrightarrow{D_1E}=(1，1，-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1，2，0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1，0，1)$.

设平面 ACD_1 的一个法向量为 $n=(a，b，c)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-a+2b=0,\\ -a+c=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}a=2b,\\ a=c.\end{cases}$

令 $a=2$，则 $n=(2，1，2)$.

所以点 E 到平面 ACD_1 的距离为 $h=\frac{|\overrightarrow{D_1E}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2+1-2}{3}=\frac{1}{3}$.

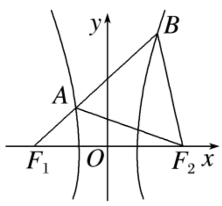
5. (5 分) 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右焦点到它的一条渐近线的距离为 4，且焦距为 10，则双曲线 C 的离心率为(　　)

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{4}$

【答案】C

【解析】因为焦距 $2c=10$，解得 $c=5$，所以右焦点为$(5, 0)$，则 $a^2+b^2=25$，又双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $bx\pm ay=0$，所以右焦点到它的一条渐近线的距离 $d=\frac{|5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|5b|}{5}=b$，所以 $b=4$，$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

6. (5 分) 如图，F_1，F_2 分别是双曲线 C 的左、右焦点，过 F_1 的直线与双曲线 C 的左、右两支分别交于 A，B 两点，若△ABF_2 为等边三角形，则该双曲线的离心率为(　　)



A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{7}$ D. 3

【答案】C

【解析】根据双曲线的定义，

可得$|BF_1|-|BF_2|=2a$，

∵△ABF_2 是等边三角形，即$|BF_2|=|AB|$，

∴$|BF_1|-|AB|=|AF_1|=2a$，

又$|AF_2|-|AF_1|=2a$，

∴$|AF_2|=|AF_1|+2a=4a$.

∵在△AF_1F_2中，$|AF_1|=2a$，$|AF_2|=4a$，$\angle F_1AF_2=120°$，

∴由余弦定理得$|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1|\cdot|AF_2|\cdot\cos 120°$，

即 $4c^2=4a^2+16a^2-2\times 2a\times 4a\times\left(-\frac{1}{2}\right)=28a^2$，得 $c=\sqrt{7}a$，

由此可得双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{7}$.

二、多选题（共 2 小题）

7.（6 分）(多选)若圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-20=0$ 上有四个不同的点到直线 l：$4x+3y+c=0$ 的距离为 2，则 c 的取值可能是(　　)

A. -13 B. 13 C. 15 D. 18

【答案】BC

【解析】圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-20=0$ 化为$(x-1)^2+(y+2)^2=25$，

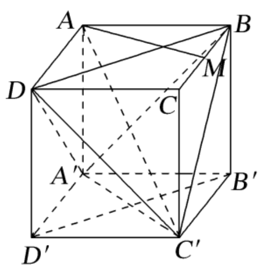
则圆心 $C(1，-2)$，半径 $r=5$，

若圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-20=0$ 上有四个不同的点到直线 l：$4x+3y+c=0$ 的距离为 2，则圆心 $C(1，-2)$到直线 l 的距离 $d<3$，

即$\frac{|4\times 1+3\times(-2)+c|}{5}=\frac{|c-2|}{5}<3$，

∴$-13<c<17$.

8.（6 分）(多选)如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，M 为 BC 的中点，下列结论正确的有(　　)



A. AM 与 $D'B'$ 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$

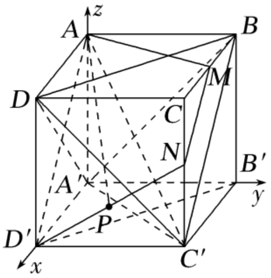
B. AM 与平面 $AB'C'$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. 过点 A，M，D' 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的截面面积为$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

D. 四面体 $A'C'BD$ 的内切球的表面积为$\frac{\pi}{3}$

【答案】AD

【解析】以 A' 为坐标原点，$A'D'$，$A'B'$，$A'A$ 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,1)$，$M\left(\frac{1}{2},1,1\right)$，$D'(1,0,0)$，$B'(0,1,0)$，$C'(1,1,0)$，

∴$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，$\overrightarrow{D'B'}=(-1,1,0)$，

∴$\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{D'B'}\rangle=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{D'B'}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{D'B'}|}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

∴AM 与 $D'B'$ 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$，故 A 正确；∵$\overrightarrow{AB'}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{AC'}=(1,1,-1)$，设平面 $AB'C'$ 的法向量 $n=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB'}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AC'}=0,\end{cases}$∴$\begin{cases}y-z=0,\\ x+y-z=0,\end{cases}$令 $y=1$，得 $n=(0,1,1)$．

设 AM 与平面 $AB'C'$ 所成角为 α，

则 $\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AM},n\rangle|=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，故 B 错误；

取 CC' 的中点 N，连接 MN，$D'N$，AD'，则 $MN\parallel BC'\parallel AD'$，
故梯形 $MND'A$ 为过点 A，M，D' 的该正方体的截面，

∵$MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AD'=\sqrt{2}$，$AM=D'N=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

∴梯形 $MND'A$ 的高为$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

∴梯形 $MND'A$ 的面积为$\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{9}{8}$，故 C 错误；

四面体$A'C'BD$的体积为 $V_{ABCD-A'B'C'D'}-4V_{D-A'C'D'}=1-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{3}$，

又四面体 $A'C'BD$ 的所有棱长均为$\sqrt{2}$，

∴四面体 $A'C'BD$ 的表面积为 $4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$，

设四面体 $A'C'BD$ 的内切球半径为 r，

则$\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times r=\frac{1}{3}$，解得 $r=\frac{1}{2\sqrt{3}}$，

∴四面体 $A'C'BD$ 的内切球的表面积为 $4\pi r^2=\frac{\pi}{3}$，故 D 正确．

三、填空题（共 2 小题）

9.（5 分）直线 l 到其平行直线 $x-2y+4=0$ 的距离和原点到直线 l 的距离相等，则直线 l 的方程是________．

【答案】$x-2y+2=0$
【解析】根据题意，设所求直线 l 的方程为 $x-2y+C=0(C\neq 4)$，
则$\frac{|C-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|C|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$，
解得 $C=2$，故直线 l 的方程为 $x-2y+2=0$.
10. (5 分) 直线 $mx+y-2=0(m\in\mathbf{R})$ 与圆 C: $x^2+y^2-2y-1=0$ 相交于 A，B 两点，弦长 $|AB|$ 的最小值为__________，若△ABC 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 m 的值为______.

【答案】2　±1
【解析】直线 $mx+y-2=0(m\in\mathbf{R})$ 恒过圆 C：$x^2+(y-1)^2=2$ 内的定点 $M(0,2)$，$r=\sqrt{2}$，圆心 C 到直线的距离 $d\leqslant|CM|=1$，
∴$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}\geqslant 2$，
即弦长 $|AB|$ 的最小值为 2.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r^2\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

若$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，则圆心到弦 AB 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{2}>1=|CM|$，故不符合题意；

若$\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$，则圆心到直线的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}<1=|CM|$，

设弦 AB 的中点为 N，

又 $|CM|=1$，故$\angle NCM=\frac{\pi}{4}$，

即直线的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$，则 m 的值为±1.

四、解答题（共 2 小题）

11. (12 分) 已知双曲线 C：$x^2-y^2=a^2(a>0)$ 与椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点.

(1) 求双曲线 C 的方程；
(2) 以 $P(1，2)$ 为中点作双曲线 C 的一条弦 AB，求弦 AB 所在直线的方程.

【答案】解　(1) 由椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，得双曲线 C 的焦点为 $F_1(-2，0)$，$F_2(2，0)$，即 $c=2$，
由等轴双曲线的性质 $a=b$ 及 $c^2=a^2+b^2$，$c=2$，得 $a=\sqrt{2}$，
所以所求双曲线 C 的方程为 $x^2-y^2=2$.
(2) 法一　当 AB 所在直线的斜率不存在时，由对称性可知，中点不可能为 $P(1，2)$，故此时不满足题意；
当 AB 所在直线的斜率存在时，设 AB 所在直线的方程为 $y=kx+m$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，
联立$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2-y^2=2,\end{cases}$
得 $(1-k^2)x^2-2kmx-(m^2+2)=0$，

$x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2}=2.$ ①

点 $P(1,2)$ 在 AB 所在的直线 $y=kx+m$ 上，

即 $2=k+m.$ ②

联立①②两式，解得 $k=\frac{1}{2}$，$m=\frac{3}{2}$，

经检验，直线方程 $x-2y+3=0$ 即为所求.

法二　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases}x_1^2-y_1^2=2,\\x_2^2-y_2^2=2,\end{cases}$ 两式作差，

得 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

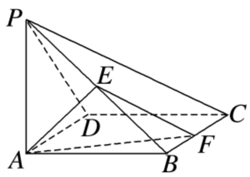
所以 $k_{AB}=\frac{1}{2}$，

所以直线 AB 的方程为 $y-2=\frac{1}{2}(x-1)$，

即 $x-2y+3=0$，

经检验，$x-2y+3=0$ 为所求直线方程.

12.（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AB$，E 为线段 PB 的中点.



(1) 求证：当点 F 在线段 BC 上移动时，$\triangle AEF$ 为直角三角形；

(2) 若 F 为线段 BC 的中点，求平面 AEF 与平面 EFD 夹角的余弦值.

【答案】(1) 证明　∵$PA=AB$，E 为线段 PB 的中点，

∴$AE\perp PB$.

∵$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，

∴$PA\perp BC$.

∵底面 $ABCD$ 为正方形，

∴$BC\perp AB$.

又 $PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$ 平面 PAB，

∴$BC\perp$ 平面 PAB.

∵$AE\subset$ 平面 PAB，

∴$BC\perp AE$.

∵$PB\cap BC=B$，PB，$BC\subset$ 平面 PBC，

∴$AE\perp$ 平面 PBC.

∵$EF\subset$ 平面 PBC，

∴$AE\perp EF$，

∴当点 F 在线段 BC 上移动时，

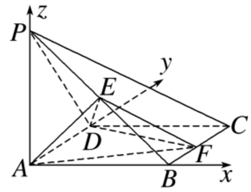
$\triangle AEF$ 为直角三角形.

(2) 解　如图，以 AB，AD，AP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，连接

DF，DE，

令 $PA=2$，则 $A(0, 0, 0)$，$B(2, 0, 0)$，$E(1, 0, 1)$，$F(2, 1, 0)$，$D(0, 2, 0)$，

$\overrightarrow{AF}=(2, 1, 0)$，$\overrightarrow{AE}=(1, 0, 1)$，



设平面 AEF 的法向量为 $m=(x，y，z)$，

则$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0, \end{cases}$

可得$\begin{cases} 2x+y=0, \\ x+z=0, \end{cases}$取 $x=1$，则 $m=(1，-2，-1)$，

$\overrightarrow{DE}=(1，-2, 1)$，$\overrightarrow{EF}=(1, 1，-1)$，

设平面 DEF 的法向量为 $n=(a，b，c)$，

则$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0, \end{cases}$

可得$\begin{cases} a-2b+c=0, \\ a+b-c=0, \end{cases}$取 $a=1$，则 $n=(1, 2, 3)$，

∴$|\cos\langle m，n\rangle|=\frac{|-6|}{\sqrt{6}\times\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

∴平面 AEF 与平面 EFD 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$.