编号：5　永年二中高三上学期数学试题答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|\ x^2-4\le 0\}, B=\{x|\ x+a\le 0\}$.若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $(-\infty,-2)$　　D. $(-\infty,-2]$

【答案】D

【解析】由 $x^2-4\le 0$ 可得 $A=[-2,2]$，由 $x+a\le 0$ 可得 $B=(-\infty,-a]$，

又 $A\subseteq B$，所以 $2\le -a$，即 $a\le -2$，故 D 正确.

故选：D

2. 已知复数 z 满足 $\frac{1}{z+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则 $|z|=$（　　）

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】因为 $\frac{1}{z+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，所以 $z+\mathrm{i}=\frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}$，所以 $z=-2\mathrm{i}$，

所以 $|z|=2$.

故选：B

3. 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为单位向量.若 $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$，则 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 夹角的大小是（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】C

【解析】已知 $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$，两边平方可得 $\vec{a}^2=(\vec{b}+\vec{c})^2$.

则 $(\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{b}^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}^2$，所以 $\vec{a}^2=\vec{b}^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}^2$.

因为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为单位向量，所以 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

根据 $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=1$，$\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=1$，$\vec{c}^2=|\vec{c}|^2=1$.

将其代入 $\vec{a}^2=\vec{b}^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}^2$ 可得：$1=1+2\vec{b}\cdot\vec{c}+1$.则 $\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}$.

设$\vec{b}$与$\vec{c}$的夹角为θ，$0\le\theta\le\pi$，且$|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}$，可得$-\frac{1}{2}=1\times1\times\cos\theta$，

即$\cos\theta=-\frac{1}{2}$.

因为$0\le\theta\le\pi$，所以$\theta=\frac{2\pi}{3}$.

则$\vec{b}$与$\vec{c}$夹角的大小是$\frac{2\pi}{3}$.

故选：C.

4. 某项比赛共有 10 个评委评分，若去掉一个最高分与一个最低分，则与原始数据相比，一定不变的是（　　）

A. 极差　　B. 45 百分位数　　C. 平均数　　D. 众数

【答案】B

【解析】对 A，若每个数据都不相同，则极差一定变化，故 A 错误；

对 B，由$10\times0.45=4.5<5$，所以将 10 个数据从小到大排列，45 百分位数为第 5 个数据，

从 10 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分，得到 8 个有效评分，

$8\times0.45=3.6<4$，

所以 45 百分位数为 8 个数据从小到大排列后第 4 个数据，即为原来的第 5 个数据.

对 C，去掉一个最高分一个最低分，平均数可能变化，故 C 错误；

对 D，去掉一个最高分一个最低分，众数可能变化，故 D 错误.

故选：B

5. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为 2，且$a_1+a_2=3$.若$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+9}=2^{14}-2^4$，则正整数$k$的值是（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【答案】B

【解析】因为数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为 2，且$a_1+a_2=3$，所以$a_1+2a_1=3$，解得$a_1=1$，

故$a_n=2^{n-1}$，因为$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+9}=a_k(1+2+2^2+\ldots+2^9)$

$=2^{k-1}\cdot\frac{1-2^{10}}{1-2}=2^{k+9}-2^{k-1}=2^{14}-2^4$，解得$k=5$，

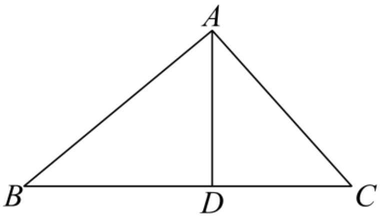
故选：B.

6. 在锐角$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若$b-2c=a\cos C-2a\cos B$，则$\frac{c}{b}=$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】D

【解析】如图所示，过点A作$AD\perp BC$于点D，



则$BD=c\cos B,CD=b\cos C,\therefore a=BD+CD=c\cos B+b\cos C$，

同理可证$b=a\cos C+c\cos A,c=a\cos B+b\cos A$，

因为$b-2c=a\cos C-2a\cos B$，所以

$a\cos C+c\cos A-2(a\cos B+b\cos A)=a\cos C-2a\cos B$，

整理得$c\cos A=2b\cos A$，因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$\cos A\neq 0$，

所以$c=2b$，即$\frac{c}{b}=2$，

故选：D

7. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左焦点、右顶点分别为$F,A$，过点$F$倾斜角为$\frac{\pi}{6}$的直线交$C$的两条渐近线分别于点$M,N$.若$\triangle AMN$为等边三角形，则双曲线$C$的渐近线方程是（　　）

A. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　B. $y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}x$

【答案】C

【解析】由题意可得$A(a,0),F(-c,0)$，所以直线MN的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$，

由$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+c) \\ y=\dfrac{b}{a}x \end{cases}$可得$M\left(\dfrac{ac}{\sqrt{3}b-a},\dfrac{bc}{\sqrt{3}b-a}\right)$,

由$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+c) \\ y=-\dfrac{b}{a}x \end{cases}$可得$N\left(\dfrac{-ac}{\sqrt{3}b+a},\dfrac{bc}{\sqrt{3}b+a}\right)$,

因为$\triangle AMN$为等边三角形，所以$|AM|=|AN|$,

即$\left(\dfrac{ac}{\sqrt{3}b-a}-a\right)^2+\left(\dfrac{bc}{\sqrt{3}b-a}\right)^2=\left(\dfrac{-ac}{\sqrt{3}b+a}-a\right)^2+\left(\dfrac{bc}{\sqrt{3}b+a}\right)^2$,

整理可得$b^2=3a^2$，所以$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$,

所以双曲线C的渐近线方程是$y=\pm\sqrt{3}x$,

故选：C.

8. 已知函数$f(x)=\dfrac{1}{a^{2x}+1}-ax^3,a>1$，则关于$x$的不等式$f(x^2)+f(5x-6)>1$的解集是（　　）

A. $(-6,1)$　　B. $(2,3)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(2,+\infty)$

【答案】A

【解析】由$1-f(-x)=1-\dfrac{1}{a^{-2x}+1}+a(-x)^3=1-\dfrac{a^{2x}}{1+a^{2x}}-ax^3=\dfrac{1}{a^{2x}+1}-ax^3=f(x)$,

则$1-f(5x-6)=f(6-5x)$,

由$a>1$，则函数$y=a^{2x}$在$\mathbf{R}$上单调递增，易知函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减，

由$f(x^2)+f(5x-6)>1$，则$f(x^2)>1-f(5x-6)$，即$f(x^2)>f(6-5x)$,

可得$x^2<6-5x$，分解因式可得$(x+6)(x-1)<0$，解得$-6<x<1$.

故选：A.

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，不选或有选错的

得 0 分.

9. 已知 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{4},\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，则（　　）

A. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$　　B. $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{6}$

C. $\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{3}$　　D. $\sin2\alpha\sin2\beta=\frac{1}{12}$

【答案】BC

【解析】由 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，且 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$，则 $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{12}$，故 A 错误；

由 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$，故 B 正确；

由 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{-\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{3}$，故 C 正确；

由 $\sin2\alpha\sin2\beta=2\sin acos\alpha\cdot2\sin\beta\cos\beta=4\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=4\times\left(-\frac{1}{12}\right)\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$，故 D 错误.

故选：BC.

10. 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，将菱形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成四面体 $A'BCD$，使得 $\angle A'BC=\frac{\pi}{2}$，则（　　）

A. 直线 $A'C$ 与直线 BD 所成角为 $\frac{\pi}{2}$

B. 直线 $A'C$ 与平面 BCD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. 四面体 $A'BCD$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D. 四面体 $A'BCD$ 外接球的表面积为 8π

【答案】ABD

【解析】如图所示，取 BD 的中点，连接 AE、CE，

因 $\triangle A'BD$ 和 $\triangle BDC$ 为等边三角形，则 $AE\perp BD$、$CE\perp BD$，

因 $AE\cap CE=E$，$AE\subset$ 平面 AEC，$CE\subset$ 平面 AEC，则 $BD\perp$ 平面 AEC，

因 $A^{'}C\subset$ 平面 AEC，则 $BD\perp A^{'}C$，故 A 正确；

因 $BD\perp$ 平面 AEC，则 $A^{'}$ 在平面 BCD 内的投影落在直线 EC 上，

故 $\angle A^{'}CE$ 为直线 $A'C$ 与平面 BCD 所成角，

因 $\angle A'BC=\dfrac{\pi}{2}$，$|A'B|=|BC|=2$，则 $|A'C|=2\sqrt{2}$，

因 $|A'E|=|EC|=\sqrt{3}$，则在 $\triangle A^{'}EC$ 中边 $A^{'}C$ 上的高为1，则 $\cos\angle A^{'}CE=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

故 B 正确；

因 $S_{\triangle A^{'}EC}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$，$BD\perp$ 平面 AEC，则

$V_{三棱锥A'-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle A'EC}\cdot|BD|=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times 2=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，故 C 错误；

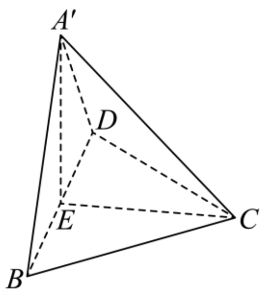
点 O_1、O_2 分别为 $\triangle A^{'}BD$ 和 $\triangle BDC$ 的外心，过 O_1、O_2 分别作 $O_1O\perp$ 平面 $A^{'}BD$，$O_2O\perp$ 平面 BDC，$O_1O\cap O_2O=O$，则点 O 为球心，

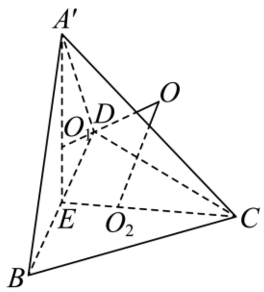
则 $|CO_2|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},|EO_2|=|EO_1|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

在 $\triangle A^{'}EC$ 中，$\tan\dfrac{\angle A^{'}EC}{2}=\sqrt{2}$，故 $|OO_2|=|EO_2|\tan\dfrac{\angle A'EC}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

则 $|OC|^2=|OO_2|^2+|CO_2|^2=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=2$，

则四面体 $A'BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi\times 2=8\pi$，故 D 正确.





故选：ABD

11. 已知函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x,y\in\mathbf{R},xf(y)+yf(x)=f(xy)$，且当 $0<x<1$ 时，$f(x)>0$.下列说法正确的是（　　）

A. $f(0)+f(1)=0$

B. $f(x)$为偶函数

C. 当$|x|>1$时，$xf(x)<0$

D. $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减

【答案】ACD

【解析】因为$x,y\in\mathbf{R},xf(y)+yf(x)=f(xy)$,

令$x=0$，$y=0$，可得$0f(0)+0f(0)=f(0\times 0)$,

所以$f(0)=0$,

令$x=1$，$y=1$，可得$1f(1)+1f(1)=f(1\times 1)$,

所以$f(1)=0$,

所以$f(0)+f(1)=0$，A 正确；

由$xf(y)+yf(x)=f(xy)$,

令$y=-1$可得，$xf(-1)-f(x)=f(-x)$,

再将$xf(-1)-f(x)=f(-x)$中的x替换为-1，可得$-f(-1)-f(-1)=f(1)$,

所以$f(-1)=0$,

所以$-f(x)=f(-x)$，所以函数$f(x)$为奇函数，B 错误；

当$x\neq 0$时，将$xf(y)+yf(x)=f(xy)$中的y用$\frac{1}{x}$替换，

可得$xf\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(x)=f(1)=0$，即$xf(x)=-x^3f\left(\frac{1}{x}\right)$,

当$x>1$时，$0<\frac{1}{x}<1$，由已知可得$f\left(\frac{1}{x}\right)>0$,

所以$xf(x)<0$，$f(x)<0$,

又函数$f(x)$为奇函数，所以当$x<-1$时，$f(x)>0$，$xf(x)<0$,

所以当$|x|>1$时，$xf(x)<0$，C 正确；

因为$xf(y)+yf(x)=f(xy)$，

所以若$xy\neq 0$，则$\frac{f(y)}{y}+\frac{f(x)}{x}=\frac{f(xy)}{xy}$，

任取$x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

则$\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f\left(\frac{x_2}{x_1}\times x_1\right)}{\frac{x_2}{x_1}\times x_1}-f(x_1)=\frac{f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}}+\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{x_1}{x_2}f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$，

因为$x_2>x_1>0$，所以$\frac{x_2}{x_1}>1$，$0<\frac{x_1}{x_2}<1$，

所以$\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}<0$，所以$\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1)}{x_1}$，

所以函数$\frac{f(x)}{x}$在$(1,+\infty)$上单调递减，

设$y=x\cdot\frac{f(x)}{x}$，

当$x>1$时，$y'=\frac{f(x)}{x}+x\left[\frac{f(x)}{x}\right]'$，

因为$f(x)<0$，所以$\frac{f(x)}{x}<0$，

因为函数$\frac{f(x)}{x}$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'\leq 0$，

所以$y'<0$，

所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减.

故选：ACD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若函数$f(x)=\sin x+a\cos x$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，则实数a的值是__________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】因为函数 $f\left(x\right)=\sin x+a\cos x$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称，

所以 $f\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$，

所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)+a\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)+a\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$，

所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=a\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)\right]$，

所以 $2\cos\dfrac{\pi}{6}\sin x=2a\sin\dfrac{\pi}{6}\sin x$，因为 $\sin x$ 不恒为 0，

所以 $\cos\dfrac{\pi}{6}=a\sin\dfrac{\pi}{6}$，所以 $a=\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

13. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的上顶点为 A，直线 $l:y=kx+m$ 交 C 于 M,N 两点.若 $\triangle AMN$ 的重心为 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，则实数 k 的值是__________.

【答案】$\dfrac{3}{4}$

【解析】已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，上顶点坐标为 $A(0,1)$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，因为 $\triangle AMN$ 的重心为 $(\dfrac{1}{2},0)$，所以 $\dfrac{0+x_1+x_2}{3}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1+y_1+y_2}{3}=0$.

由 $\dfrac{0+x_1+x_2}{3}=\dfrac{1}{2}$ 可得 $x_1+x_2=\dfrac{3}{2}$；由 $\dfrac{1+y_1+y_2}{3}=0$ 可得 $y_1+y_2=-1$.

直曲联立，将直线 $l:y=kx+m$ 代入椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，可得 $\dfrac{x^2}{2}+(kx+m)^2=1$.

展开并整理得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$.

根据韦达定理可知 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$.

又因为 $y_1=kx_1+m$，$y_2=kx_2+m$，所以

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=k\times(-\frac{4km}{1+2k^2})+2m=\frac{2m}{1+2k^2}$.

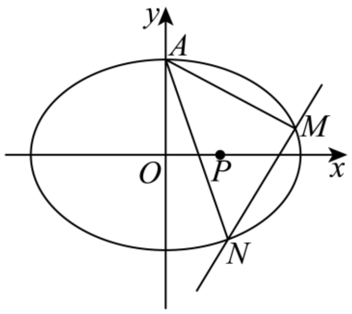
由 $x_1+x_2=\frac{3}{2}$ 可得 $-\frac{4km}{1+2k^2}=\frac{3}{2}$ ①；由 $y_1+y_2=-1$ 可得 $\frac{2m}{1+2k^2}=-1$ ②.

由②可得 $m=-\frac{1+2k^2}{2}$，将其代入①可得：

$-\frac{4k\times(-\frac{1+2k^2}{2})}{1+2k^2}=\frac{3}{2}$，则 $2k=\frac{3}{2}$，解得 $k=\frac{3}{4}$.

当 $k=\frac{3}{4}$ 时，代入②可得，$m=-\frac{17}{16}$，此时直线 $l:y=\frac{3}{4}x-\frac{17}{16}$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 有两个交点，符合题意.

故答案为：$\frac{3}{4}$.



14. 将 9 个互不相同的向量 $\vec{a}_i=\left(x_i,y_i\right),x_i,y_i\in\left\{-1,0,1\right\},i=1,2,\cdots,9$，填入 3×3 的方格中，使得每行、每列的三个向量的和都相等，则不同的填法种数是__________.

【答案】72

【解析】已知 $\vec{a}_i=\left(x_i,y_i\right),x_i,y_i\in\left\{-1,0,1\right\},i=1,2,\cdots,9$，

那么向量 $\vec{a}_i$ 的所有可能情况有

$(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)$ 共 9 种.

设每行、每列的三个向量的和为 $\vec{s}=(m,n)$，因为 $x_i,y_i\in\{-1,0,1\}$，所以

$m,n\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

又因为三行向量和等于三列向量和，且所有向量和为 $\sum_{i=1}^{9}\vec{a}_i$，所以 $3\vec{s}=\sum_{i=1}^{9}\vec{a}_i$，

而$\sum\limits_{i=1}^{9}\vec{a}_i$的$x$分量和$y$分量都为$0$（$x_i, y_i$取值$-1,0,1$且各有$3$个），所以$\vec{s}=(0,0)$.

要使每行、每列的三个向量和为$(0,0)$，则每行、每列的三个向量的x分量和y分量都分别为0.

对于x分量，3个数的和为0，有$(-1,0,1)$这一种组合情况；

对于y分量，3个数的和为0，也有$(-1,0,1)$这一种组合情况.

先确定第一行的填法，第一行的3个向量的x分量和y分量都要满足$(-1,0,1)$的组合，x分量的排列有$\mathrm{A}_3^3=3!=6$种，y分量的排列也有$\mathrm{A}_3^3=3!=6$种，所以第一行的填法有$6\times6=36$种.

当第一行确定后，第二行第一列的向量x分量要与第一行第一列和第三行第一列的x分量和为0，y分量同理，所以第二行第一列的向量是唯一确定的，同理第二行第二列、第二行第三列的向量也唯一确定，第三行的向量也就随之确定.

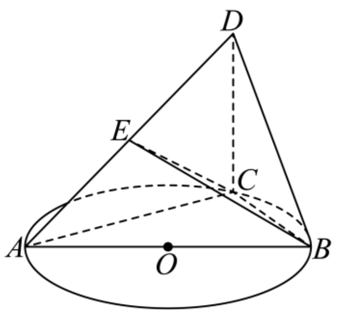
因为第一行确定后，第二行和第三行可以交换位置.

所以不同的填法种数是$36\times2=72$种.

故答案为：72.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 如图，$\triangle ABC$内接于圆O, AB为圆O的直径，$CD\perp$平面ABC, E为线段AD中点.



（1）求证：平面$BCE\perp$平面ACD；

（2）若$AB=\sqrt{5}, BC=1, CD=2\sqrt{3}$，求平面$BCE$与平面$BDE$所成锐二面角的余弦值.

（1）证明：因为$\triangle ABC$内接于圆O, AB为圆O的直径，所以$AC\perp BC$.

因为 $CD\perp$ 平面 $ABC, BC\subset$ 平面 ABC，所以 $CD\perp BC$.

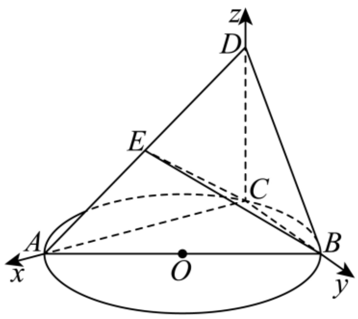
又 $AC, CD\subset$ 平面 $ACD, AC\cap CD=C$，所以 $BC\perp$ 平面 ACD.

因为 $BC\subset$ 平面 BCE，所以平面 $BCE\perp$ 平面 ACD.

（2）因为 $CD\perp$ 平面 $ABC, AC, BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $CD\perp AC, CD\perp BC$.

以 C 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，



因为 $AB=\sqrt{5}, BC=1$，所以 $AC=2$，

则 $A\left(2,0,0\right), B\left(0,1,0\right), D\left(0,0,2\sqrt{3}\right), E\left(1,0,\sqrt{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{CE}=\left(1,0,\sqrt{3}\right), \overrightarrow{CB}=\left(0,1,0\right)$.

设平面 BCE 的法向量 $\vec{m}=\left(x_1, y_1, z_1\right)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ y_1=0,\end{cases}$

不妨设 $z_1=1$，则 $x_1=-\sqrt{3}$，

所以平面 BCE 的一个法向量 $\vec{m}=\left(-\sqrt{3},0,1\right)$.

又 $\overrightarrow{BD}=\left(0,-1,2\sqrt{3}\right), \overrightarrow{DE}=\left(1,0,-\sqrt{3}\right)$，

设平面 BDE 的法向量 $\vec{n}=\left(x_2, y_2, z_2\right)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-y_2+2\sqrt{3}z_2=0,\\ x_2-\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$

不妨设 $z_2=1$，则 $x_2=\sqrt{3}, y_2=2\sqrt{3}$，

所以平面 BDE 的一个法向量 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},2\sqrt{3},1\right)$.

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{2}{2\times4}=-\dfrac{1}{4}$,

即平面 BCE 与平面 BDE 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $\dfrac{S_n}{n}=a_n+(1-n)t,n\in\mathbf{N}^*,t$ 为常数，且 $a_2=a_1+2$.

（1）求 t 的值；

（2）证明：$\{a_n\}$ 为等差数列；

（3）若 $n^2<S_n<(n+1)^2,n\in\mathbf{N}^*$，求 a_1 的取值范围.

（1）解：因为 $\dfrac{S_n}{n}=a_n+(1-n)t,n\in\mathbf{N}^*$,

所以 $\dfrac{S_2}{2}=a_2-t$，又 $S_2=a_1+a_2$,

所以 $a_2-a_1=2t$.

又 $a_2=a_1+2$，所以 $t=1$.

（2）证明：由（1）可得 $\dfrac{S_n}{n}=a_n+1-n,n\in\mathbf{N}^*$，所以 $S_n=na_n+n-n^2$,

因此 $S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}+n+1-(n+1)^2$,

相减得 $a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n-2n$,

得 $a_{n+1}-a_n=2,n\in\mathbf{N}^*$,

所以 $\{a_n\}$ 为等差数列.

（3）解：由（2）得 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times2=n^2+(a_1-1)n$,

由 $n^2<S_n<(n+1)^2,n\in\mathbf{N}^*$，得 $1<a_1<3+\dfrac{1}{n}$.

因为 $1<a_1<3+\dfrac{1}{n}$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,

所以 $1<a_1\le3$.

17. 甲、乙两人组队准备参加一项挑战比赛，该挑战比赛共分 $n\left(n\in\mathbf{N}^*,n\ge2\right)$ 关，规则如下：首先某队员先上场从第一关开始挑战，若挑战成功，则该队员继续挑战下一关，否则

该队员被淘汰，并由第二名队员接力，从上一名队员失败的关卡开始继续挑战，当两名队员均被淘汰或者n关都挑战成功，挑战比赛结束.若甲每一关挑战成功的概率均为$p(0<p<1)$，乙每一关挑战成功的概率均为$q(0<q<1)$，且甲、乙两人每关挑战成功与否互不影响，每关成功与否也互不影响.

（1）已知甲先上场，$p=\frac{1}{2},q=\frac{1}{3},n=2$，

①求挑战没有一关成功的概率；

②设X为挑战比赛结束时挑战成功的关卡数，求$E(X)$；

（2）如果n关都挑战成功，那么比赛挑战成功.试判断甲先出场与乙先出场比赛挑战成功的概率是否相同，并说明理由.

解：（1）①记甲先上场且挑战没有一关成功的概率为P，则$P=(1-p)(1-q)=\frac{1}{3}$.

②依题可知，X的可能取值为$0,1,2$，则

$P(X=0)=\frac{1}{3}$;

$P(X=1)=p(1-p)(1-q)+(1-p)q(1-q)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{18}$;

$P(X=2)=1-\frac{1}{3}-\frac{5}{18}=\frac{7}{18}$，

所以$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{7}{18}=\frac{19}{18}$.

（2）设甲先出场比赛挑战成功的概率为P_1，乙先出场比赛挑战成功的概率为P_2，

则$P_1=p^n+p^{n-1}(1-p)q+p^{n-2}(1-p)q^2+\cdots+(1-p)q^n$

$=\left(p^n+p^{n-1}q+p^{n-2}q^2+\cdots+q^n\right)-\left(p^nq+p^{n-1}q^2+p^{n-2}q^3+\cdots+pq^n\right)$;

$P_2=q^n+q^{n-1}(1-q)p+q^{n-2}(1-q)p^2+\cdots+(1-q)p^n$

$=\left(q^n+q^{n-1}p+q^{n-2}p^2+\cdots+p^n\right)-\left(q^np+q^{n-1}p^2+q^{n-2}p^3+\cdots+qp^n\right)$

由$p^n+p^{n-1}q+p^{n-2}q^2+\cdots+q^n=q^n+q^{n-1}p+q^{n-2}p^2+\cdots+p^n$，

$p^nq+p^{n-1}q^2+p^{n-2}q^3+\cdots+pq^n=q^np+q^{n-1}p^2+q^{n-2}p^3+\cdots+qp^n$,

得$P_1=P_2$

因此，甲先出场与乙先出场比赛挑战成功的概率相同.

18. 已知函数 $f(x)=xe^{x}+a\sin x$.

（1）当 $a=0$ 时，求证：$\dfrac{f(x)}{x}>x+1$；

（2）若 $f(x)>0$ 对于 $x\in(0,\pi)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）若存在 $x_1,x_2\in(0,\pi)$，使得 $f(x_1)=f'(x_2)=0$，求证：$x_1<2x_2$.

（1）证明：由 $a=0$，得 $f(x)=xe^{x}$.

要证 $\dfrac{f(x)}{x}>x+1$，只需证 $e^{x}-x-1>0$.

令 $g(x)=e^{x}-x-1$，则 $g'(x)=e^{x}-1$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)>g(0)=0$，故 $e^{x}>x+1$，

因此 $\dfrac{f(x)}{x}>x+1$.

（2）解：$f'(x)=(x+1)e^{x}+a\cos x$,

令 $m(x)=f'(x)$，则 $m'(x)=(x+2)e^{x}-a\sin x$

①当 $a\ge 0$ 时，由 $x\in(0,\pi)$，得 $xe^{x}>0, a\sin x\ge 0$，

因此 $f(x)>0$，满足题意.

②当 $a<0$ 时，由 $x\in(0,\pi)$，得 $(x+2)e^{x}>0,-a\sin x>0$，

因此 $m'(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增.

1° 若 $-1\le a<0$，则 $f'(x)>f'(0)=1+a\ge 0$，

则 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，

所以 $f(x)>f(0)=0$，满足题意；

2° 若 $a<-1$，则 $f'(0)\left\langle 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle 0$，

因此 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，

当 $x_0<x<\pi$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x_0)<f(0)=0$，不合题意.

综上，a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

（3）解：由（2）知 $a<-1$，设 $x_0=x_2$，

则 $f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减，在 (x_2,π) 上单调递增，

注意到 $f(0)=0, f(x_2)\langle f(0)=0, f(\pi)=\pi e^{\pi}\rangle 0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一的零点 $x_1, x_1\in(x_2,\pi)$.

注意到 $x_1, 2x_2\in(x_2,\pi)$，且 $f(x)$ 在 (x_2,π) 上单调递增.

要证明 $x_1<2x_2$，只需证 $f(x_1)<f(2x_2)$，

因为 $f(x_1)=0$，所以只需证 $f(2x_2)>0$，

即证 $2x_2e^{2x_2}+a\sin 2x_2>0$.

因为 $(x_2+1)e^{x_2}+a\cos x_2=0$，即 $a=-\frac{(x_2+1)e^{x_2}}{\cos x_2}$，

所以，只需证 $2x_2e^{2x_2}-\frac{(x_2+1)e^{x_2}}{\cos x_2}\sin 2x_2>0$，

只需证 $x_2e^{x_2}-(x_2+1)\sin x_2>0, x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ （*）

由（1）得 $e^{x_2}>x_2+1$，

因此 $x_2e^{x_2}-(x_2+1)\sin x_2>x_2{}^2+x_2-(x_2+1)\sin x_2=(x_2+1)(x_2-\sin x_2)$，

设 $h(x)=x-\sin x,0<x<\frac{\pi}{2}$，

则 $h'(x)=1-\cos x>0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $h(x)>h(0)=0$，

从而 $h(x_2)>0$，即 $x_2-\sin x_2>0$，因此（*）得证，

从而 $x_1<2x_2$.

19. 设 M 是由直线构成的集合，对于曲线 C，若 C 上任意一点处的切线均在 M 中，且 M 中的任意一条直线都是 C 上某点处的切线，则称 C 为 M 的包络曲线.

（1）已知圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 为 M_1 的包络曲线，判断直线 $l:x\sin\theta-y\cos\theta=1$（$\theta$ 为常数，$\theta\in\mathbf{R}$）与集合 M_1 的关系；

（2）已知 M_2 的包络曲线为 $C_2:x^2=4y$，直线 $l_1,l_2\in M_2$.设 l_1,l_2 与 C_2 的公共点分别为 P,Q，记 $l_1\cap l_2=A,C_2$ 的焦点为 F.

①证明：$|FA|$ 是 $|FP|$、$|FQ|$ 的等比中项；

②若点 A 在圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 上，求 $\frac{|FA|}{|FP|}$ 的最大值.

解：（1）圆心 $C_1(0,0)$ 到 l 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta+(-\cos\theta)^2}}=1$，

即直线 l 与圆 C_1 相切，所以 $l\in M_1$.

（2）解法一：①证明：由 $y=\frac{1}{4}x^2$，知 $F(0,1),C_2$ 的准线方程为 $y=-1$，$y'=\frac{1}{2}x$.

设 $A(s,t),P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$.

因为 $l_1\in M_2$，且 l_1 与 C_2 的公共点为 P，

所以 l_1 是曲线 C_2 在点 P 处的切线，

其方程为 $PA:y=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)+y_1$，即 $y=\frac{1}{2}x_1x-y_1$，

则$t=\frac{1}{2}x_1s-y_1$（*），

同理，$QA:y=\frac{1}{2}x_2x-y_2$，则$t=\frac{1}{2}x_2s-y_2$（**），

由（*）（**）得直线PQ 方程为$t=\frac{1}{2}xs-y$，即$y=\frac{1}{2}sx-t$.

由$\begin{cases}x^2=4y\\ y=\frac{1}{2}sx-t\end{cases}$，消去$x$整理得$y^2+\left(2t-s^2\right)y+t^2=0$，则$y_1+y_2=s^2-2t,y_1y_2=t^2$.

又因为$|FP|=y_1+1,|FQ|=y_2+1$，

则$|FP|\cdot|FQ|=\left(y_1+1\right)\left(y_2+1\right)=y_1+y_2+y_1y_2+1=s^2-2t+t^2+1=s^2+(t-1)^2$.

又因为$|FA|^2=s^2+(t-1)^2$，所以$|FA|^2=|FP|\cdot|FQ|$，

故$|FA|$是$|FP|$、$|FQ|$的等比中项.

②解：由①知，$\frac{|FA|^2}{|FP|^2}=\frac{|FP|\cdot|FQ|}{|FP|^2}=\frac{|FQ|}{|FP|}$，

则$\frac{|FQ|}{|FP|}+\frac{|FP|}{|FQ|}=\frac{y_2+1}{y_1+1}+\frac{y_1+1}{y_2+1}$

$=2+\frac{\left(y_1-y_2\right)^2}{\left(y_1+1\right)\left(y_2+1\right)}=2+\frac{s^2\left(s^2-4t\right)}{s^2+(t-1)^2}$.

因为$s^2+(t+1)^2=1$，所以$s^2+(t-1)^2=1-4t$，

则$\frac{|FQ|}{|FP|}+\frac{|FP|}{|FQ|}=2+\frac{s^2\left(s^2-4t\right)}{1-4t}$，

又因为$-2\le t<0,s^2\le 1$，则$\frac{s^2\left(s^2-4t\right)}{1-4t}\le\frac{s^2\left(1-4t\right)}{1-4t}=s^2\le 1$，

从而可得$\frac{|FA|^2}{|FP|^2}+\frac{|FP|^2}{|FA|^2}\le 3$，解得$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le\frac{|FA|}{|FP|}\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，

当$A(1,-1),P\left(1-\sqrt{5},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$时等号成立，

故$\frac{|FA|}{|FP|}$的最大值为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

解法 2：①证明：由题意知 $F(0,1), y=\dfrac{x^2}{4}$，则 $y'=\dfrac{x}{2}$.

设 $P(2m,m^2),Q(2n,n^2),m\neq n$.

因为 $l_1\in M_2$，且 l_1 与 C_2 的公共点为 P，所以 l_1 是曲线 C_2 在点 P 处的切线，

所以 $PA: y-m^2=m(x-2m)$，即 $y=mx-m^2$，（*）

同理 $QA: y=nx-n^2$，（**）

联立（*）（**）得 $x=m+n, y=mn$，即 $A(m+n,mn)$，

所以 $|FA|^2=(m+n)^2+(mn-1)^2=m^2+n^2+m^2n^2+1=(m^2+1)(n^2+1)$，

注意到 $|FP|=m^2+1,|FQ|=n^2+1$，因此 $|FA|^2=|FP|\cdot|FQ|$，

所以 $|FA|$ 是 $|FP|,|FQ|$ 的等比中项.

②解：由①知，$\dfrac{|FA|^2}{|FP|^2}=\dfrac{n^2+1}{m^2+1}$，设 $t=\dfrac{n^2+1}{m^2+1}$，

则 $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{n^2+1}{m^2+1}+\dfrac{m^2+1}{n^2+1}=\dfrac{m^4+n^4+2(m^2+n^2)+2}{m^2n^2+m^2+n^2+1}=2+\dfrac{m^4+n^4-2m^2n^2}{m^2n^2+m^2+n^2+1}$

$=2+\dfrac{(m-n)^2(m+n)^2}{(mn+1)^2+(m-n)^2}\leq 2+(m+n)^2$.

因　点 $A(m+n,mn)$ 在圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 上，

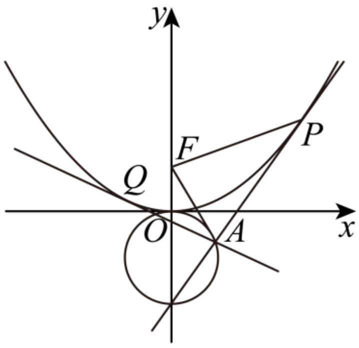
所以 $(m+n)^2+(mn+1)^2=1$，于是 $(m+n)^2\leq 1$，

从而 $t+\dfrac{1}{t}\leq 3$，

解得 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leq t\leq\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，即 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\leq\dfrac{|FA|}{|FP|}\leq\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

又当 $A(1,-1),P\left(1-\sqrt{5},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ 时，$\dfrac{|FA|}{|FP|}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，

故 $\dfrac{|FA|}{|FP|}$ 的最大值为 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.


y
F
P
Q
O
A
x