惠州市 2025 届高三模拟考试

高三数学参考答案与评分细则

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题满分 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	A	D	C	B	D

1. 【解析】由题意得$M\cup N=\{x\mid -3<x<4\}$．故选：C.

2. 【解析】$z=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2(1+\mathrm{i})}{2}=1+\mathrm{i}$．故选：B.

3. 【解析】设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\theta, 0\le\theta\le\pi$，因为$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$，

   所以$2=(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=2-2\times1\times1\times\cos\theta$，所以$\cos\theta=0$，所以$\theta=\dfrac{\pi}{2}$．故选：C.

4. 【解析】因为$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{9}$，

   $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{3}$，所以$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{2}{9}$．故选：A.

5. 【解析】方法一：运用分步乘法计数原理，先安排物资分发点，再安排路线指引、医疗协助服务点，则不同的安排方法共有$\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_3^2=18$（种）．

   方法二：运用分类加法计数原理，若甲不入选，有$\mathrm{A}_3^3=6$（种）安排方法；

   若甲入选，则有$\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_3^2=12$（种）安排方法，所以共有$6+12=18$（种）不同的安排方法．故选：D.

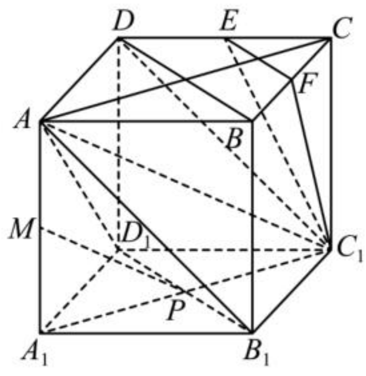
6. 【解析】对于 A 选项，由E,F分别为所在棱的中点得$EF//BD$，由正方体的性质易知$AC\perp BD$，

   $AA_1\perp$平面$ABCD$，$EF\subset$平面$ABCD$，所以$AA_1\perp EF$，$AC\perp EF$，

   $AC\cap AA_1=A$，$AC,AA_1\subset$平面$AA_1C_1\mathrm{C}$，

   所以$EF\perp$平面$AA_1C_1\mathrm{C}$，$EF\subset$平面EFC_1，

   所以平面$EFC_1\perp$平面$AA_1C_1\mathrm{C}$，故 A 选项正确；

   对于 B 选项，P为下底面$A_1B_1C_1D_1$的中心，故P为A_1C_1,B_1D_1的中点，

   因为M为所在棱AA_1的中点，所以$MP//AC_1$，故 B 选项正确；

   对于 C 选项，若$MP\perp C_1D$，由 B 选项知$MP//AC_1$，则有$AC_1\perp C_1D$，

   另一方面，由正方体的性质知$\triangle AC_1D$为直角三角形，$AD\perp DC_1$，

所以，$AC_1 \perp C_1D$ 不满足，故 C 选项错误；

对于 D 选项，由 A 选项知 $EF // BD$，由正方体的性质易知 $B_1D_1 // BD$，

所以 $B_1D_1 // EF$，$B_1D_1 \subset$ 平面 AD_1B_1，$EF \not\subset$ 平面 AD_1B_1，

所以 $EF //$ 平面 AD_1B_1，故 D 选项正确．故选：C

7.【解析】因为 $f(x+1)$ 为奇函数，则 $f(-x+1)=-f(x+1)$，若 $f(1-x)=f(x+1)$，则 $f(x+1)=0$，

与 $f(0)+f(3)=3$ 矛盾，故 A 选项错误；

又 $f(x)$ 为偶函数，$f(-x+1)=f(x-1)$，则 $f(x-1)=-f(x+1)$，

即 $f(x)=-f(x+2)$，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 的周期为 4，即 C 选项错误；

由 $f(0)+f(3)=3, f(0)=3, f(2024)=f(0+506\times 4)=f(0)=3$，所以 B 选项正确；

由 $f(-x+1)=-f(x+1)$，令 $x=0$，

得 $f(1)=0, f(3)=f(-1)=f(1)=0, f(2025)=f(1+506\times 4)=f(1)=0$，即 D 选项错误.

故选：B.

8. 【解析】$\alpha+\beta-\dfrac{\pi}{2}>\sin\beta-\cos\alpha$，$\beta-\sin\beta>\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$，

令 $f(x)=x-\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)=1-\cos x>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数，故 $\beta>\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，

因为 α，β 均为锐角，当 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，选项 A、B 均不成立，

此时 $\cos\beta<\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$，$\sin\beta>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$，则 $\cos\beta<\sin\alpha$，$\sin\beta>\cos\alpha$，故选：D.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题满分 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11
全部正确选项	AD	ABD	ABD

9. 【解析】易知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

因为 $f(-x)=\ln|-x|=\ln|x|=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 A 选项正确；

当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(-4)=f(4)>f(3)$，故 B 选项错误；

令 $f(x)=0$，得 $x=\pm 1$，则 $f(x)$ 有 2 个零点，故 C 选项错误；

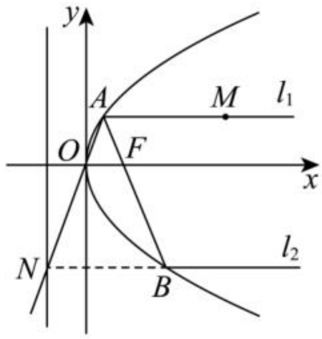
当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，D选项正确；故选：AD.

10. 【解析】由题意，抛物线 $y^2=4x$，可得焦点 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，所以A选项正确；

由抛物线的光学性质可知，直线 AB 经过焦点F，且斜率不为0，

设直线 $AB: x=my+1$，联立方程组 $\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$，整理得 $y^2-4my-4=0$，

可得 $\Delta=(-4m)^2+16>0$，所以 $y_1y_2=-4$，所以B选项正确；



若点 $M(2,1)$，则 $y_1=1$，所以 $y_2=-4$，所以 $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=4$，

所以 $|AB|=x_1+x_2+2=\frac{1}{4}+4+2=\frac{25}{4}$，所以C选项错误；

又由直线 $OA: y=\frac{y_1}{x_1}x$，联立方程组 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1}x\\x=-1\end{cases}$，

解得 $y_N=-\frac{y_1}{x_1}=-\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}}=-\frac{4}{y_1}$，由 $y_1y_2=-4$，得 $y_2=\frac{-4}{y_1}$，所以 $y_N=y_2$，

所以点N在直线 l_2 上，所以D选项正确．故选：ABD.

11. 【解析】对于 A 选项，当 $n=1$，$H(X)=-p_1\log_2 p_1=-1\times 0=0$，所以 A 选项正确；

对于 B 选项，$H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i=-n\times\frac{1}{n}\log_2\left(\frac{1}{n}\right)=\log_2 n$，$H(X)$ 随着 n 的增大而增大，

所以 B 选项正确；

对于 C 选项，当 $n=2$ 时，$H(X)=-p_1\log_2 p_1-(1-p_1)\log_2(1-p_1)$，

构造函数 $f(x)=-x\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x)(0<x<1)$，

$$f'(x)=-\log_2 x-x\frac{1}{x\ln 2}-(-1)\log_2(1-x)-(1-x)\frac{-1}{(1-x)\ln 2}=\log_2\frac{1-x}{x}$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$，易知当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增；

当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减；

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$C$ 选项错误；

对于 D 选项，$H(X)=-\sum_{i=1}^{2m}p_i\log_2 p_i=p_1\log_2\frac{1}{p_1}+p_2\log_2\frac{1}{p_2}+\dots+p_{2m}\log_2\frac{1}{p_{2m}}$，

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{m}(p_j)\log_2 p_j=(p_1+p_{1+m})\log_2\frac{1}{p_1+p_{1+m}}+(p_2+p_{2+m})\log_2\frac{1}{p_2+p_{2+m}}+\ldots+(p_m+p_{2m})\log_2\frac{1}{p_m+p_{2m}}$$

则 $H(Y)=p_1\log_2\frac{1}{p_1+p_{1+m}}+p_2\log_2\frac{1}{p_2+p_{2+m}}+\ldots+p_m\log_2\frac{1}{p_m+p_{2m}}+p_{1+m}\log_2\frac{1}{p_1+p_{1+m}}+$

$p_{2+m}\log_2\frac{1}{p_2+p_{2+m}}+\ldots+p_{2m}\log_2\frac{1}{p_m+p_{2m}}$

由于 $\frac{1}{p_i}>\frac{1}{p_i+p_{i+m}}$，则 $H(X)>H(Y)$，所以 D 选项正确．故选：ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12． 2　　13．2.1　　14． e

12． 【解析】由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin 2A}$，故 $\frac{AC}{2\cos A}=1$，即 $\frac{AC}{\cos A}=2$．

13． 【解析】因为 $X\sim N(90,\sigma^2)$,且 $P(X<70)=0.2$，$\frac{110+70}{2}=90$，

所以 $P(X>110)=0.2$,故 $P(90\le X\le 110)=0.5-0.2=0.3$,

由题意可得 $X\sim B(10,0.3)$,所以 X 的方差为 $10\times0.3\times(1-0.3)=2.1$．

14． 【解析】函数 $f(x)=x^m+\log_n x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $n>1$ 时，可得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(1)=1$，所以不合题意；

当 $0<n<1$ 时，$f'(x)=mx^{m-1}+\frac{1}{x\ln n}=\frac{m}{x}\left(x^m+\frac{1}{m\ln n}\right)$，

易知 $\frac{m}{x}>0$，$h(x)=x^m+\frac{1}{m\ln n}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，令 $f'(x)=0$，解得 $x_0=\left(\frac{1}{-m\ln n}\right)^{\frac{1}{m}}$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，

所以当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 有极小值，也是最小值，

又因为 $f(x)\ge 1$ 恒成立且 $f(1)=1$，所以 $\begin{cases}f(x)_{\min}=f(x_0)=1\\ x_0=1\end{cases}$，

则 $x_0=\left(\frac{1}{-m\ln n}\right)^{\frac{1}{m}}=1$，得 $m\ln n=-1$，所以 $\frac{m}{n}=\frac{-1}{n\ln n}=\frac{\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}$，

设 $g(x)=\frac{x}{\ln x}(x>1)$，$g'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=e$，

当$x\in(1,e)$，$g'(x)<0$，则$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，

当$x\in(e,+\infty)$，$g'(x)>0$，则$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$g(x)$在区间$(1,e)$单调递减，$(e,+\infty)$单调递增，

所以$g(x)_{\min}=g(e)=e$，即$\dfrac{m}{n}$的最小值为e．故答案为：e．

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分13分，其中第一小问6分，第二小问7分.）

【解析】（1）因为$S_n=n^2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，所以$a_1=S_1=1$，……1分

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，……3分

又$a_1=1$满足上式，所以$a_n=2n-1$．……4分

因为$b_1=a_1=1$，所以数列$\{b_n\}$是首项为1，公比为3的等比数列，即$b_n=3^{n-1}$．……6分

【注】没有检验$a_1=1$扣1分

（2）由（1）知，$c_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$，……7分

所以$T_n=1+3\times 3+5\times 3^2+\ldots(2n-1)\cdot 3^{n-1}$，①……8分

$3T_n=3+3\times 3^2+\ldots+(2n-3)\cdot 3^{n-2}+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$，②……9分

①－②得$-2T_n=1+2[3+3^2\ldots+3^{n-1}]-(2n-1)\cdot 3^n$……10分

$=1+2\cdot\dfrac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\cdot 3^n$……11分

$=(2-2n)\cdot 3^n-2$……12分

所以$T_n=(n-1)\cdot 3^n+1$……13分

【注】11分得分点使用求和公式$3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{3-3^n}{1-3}$亦可以得分

16．（本小题满分15分，其中第一小问5分，第二小问10分.）

【解析】（1）记事件A=甲同学通过测试，……1分

则甲同学在3次投篮中，投中2次或3次……2分

则$P(A)=C_3^2(\dfrac{1}{3})^2\cdot(1-\dfrac{1}{3})+C_3^3(\dfrac{1}{3})^3$……4分

$=\dfrac{7}{27}$

故甲同学通过测试的概率为$\frac{7}{27}$ ……………………………………………………………………5 分

（2）记乙同学通过测试为事件B，则乙同学在 3 次投篮中，投中 2 次或 3 次， ……………6 分

则$P(B)=C_3^2(\frac{1}{2})^2\cdot(1-\frac{1}{2})+C_3^3(\frac{1}{2})^3$ ……………………………………………………………7 分

$=\frac{1}{2}$ …………………………………………………………………………………………8 分

由题意可知，随机变量X的可能取值有 0，50，100， ……………………………………………9 分

$P(X=0)=\frac{7}{27}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{54}$ ……………………………………………………………………… 10 分

$P(X=50)=\frac{7}{27}\times(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{7}{27})\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ……………………………………………… 11 分

$P(X=100)=(1-\frac{7}{27})\times(1-\frac{1}{2})=\frac{10}{27}$ …………………………………………………………… 12 分

所以，随机变量X的分布列如下表所示：

X	0	50	100
P	$\frac{7}{54}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{27}$

…………………………………………………………………………………………… 13 分

故$E(X)=0\times\frac{7}{54}+50\times\frac{1}{2}+100\times\frac{10}{27}=\frac{1675}{27}$ …………………………………………… 15 分

17. （本小题满分 15 分，其中第一小问 7 分，第二小问 8 分.）

【解析】（1）由题意得$a\neq 0$，$f'(x)=3ax^2-6x=3ax\left(x-\frac{2}{a}\right)$， ……………………………… 1 分

令$f'(x)=0$，得$x=0$或$x=\frac{2}{a}$， ………………………………………………………………… 2 分

①当$a>0$时，当$x<0$或$x>\frac{2}{a}$时，$f'(x)>0$，当$0<x<\frac{2}{a}$时，$f'(x)<0$， …………………… 3 分

所以$f(x)$在$(-\infty,0)$和$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$上单调递减， ………………………… 4 分

②当$a<0$时，当$x>0$或$x<\frac{2}{a}$时，$f'(x)<0$，当$\frac{2}{a}<x<0$时，$f'(x)>0$， …………………… 5 分

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$和$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{2}{a},0\right)$上单调递增， ………………………… 6 分

综上，当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,0)$和$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$上单调递减；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 和 $\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{2}{a},0\right)$ 上单调递增；······················7 分

（2）由（1）可知曲线 $y=f(x)$ 上的两点 A,B 的纵坐标为函数的极值，

且函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$，$x=\frac{2}{a}$ 处分别取得极值，··8 分

$f(0)=1-\frac{3}{a},f\left(\frac{2}{a}\right)=-\frac{4}{a^2}-\frac{3}{a}+1$，··10 分

因为线段 AB 与 x 轴有公共点，所以 $f(0)f\left(\frac{2}{a}\right)\le 0$，··11 分

所以 $\left(-\frac{4}{a^2}-\frac{3}{a}+1\right)\left(1-\frac{3}{a}\right)\le 0$，$\frac{(a+1)(a-3)(a-4)}{a^3}\le 0$，·······························13 分

所以 $a^3(a+1)(a-3)(a-4)\le 0$，且 $a\ne 0$，解得 $-1\le a<0$ 或 $3\le a\le 4$，·················14 分

所以实数 a 的取值范围为 $[-1,0)\cup[3,4]$．··15 分

解法二：（2）由于 $1-\frac{3}{a}>-\frac{4}{a^2}-\frac{3}{a}+1$，故 $f(0)>f\left(\frac{2}{a}\right)$，

因为线段 AB 与 x 轴有公共点，所以 $\begin{cases} f(0)=1-\frac{3}{a}\ge 0 \\ f(\frac{2}{a})=-\frac{4}{a^2}-\frac{3}{a}+1\le 0 \end{cases}$，且等号不能同时成立，

由 $f(0)=1-\frac{3}{a}\ge 0$ 解得 $a\ge 3$ 或 $a<0$；由 $-\frac{4}{a^2}-\frac{3}{a}+1\le 0$ 解得 $-1\le a\le 4$；

综合可得 $-1\le a<0$ 或 $3\le a\le 4$，所以实数 a 的取值范围为 $[-1,0)\cup[3,4]$．

18. （本小题满分 17 分，其中第一小问 4 分，第二小问 6 分，第三小问 7 分.）

【解析】（1）证明：取 AC 中点为 E，连接 PE,BE，

因为 $PA=PC,AB=BC$，所以 $PE\perp AC,BE\perp AC$，··1 分

又因为 $PE\cap BE=E$，$PE,BE\subset$ 平面 PBE，··2 分

所以 $AC\perp$ 平面 PBE，···3 分

又因为 $PB\subset$ 平面 PBE，所以 $AC\perp PB$．···4 分

【注】不写 $PB\subset$ 平面 PBE 扣 1 分

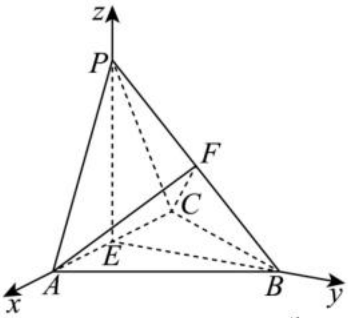
（2）(i) 取 AC 的中点 E，因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，$\triangle DAC$ 为等腰直角三角形，$DA=DC=\sqrt{2}$，

所以，$EP\perp AC,EP\perp EB$，且 $EP=1,EB=\sqrt{3}$

由 $PB=2$，则 $EP^2+EB^2=PB^2$，故 $EP\perp EB$．··5 分

如图建立空间直角坐标系，得 $P(0,0,1),B(0,\sqrt{3},0),A(1,0,0),C(-1,0,0),F(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

则$\overrightarrow{AC}=(-2,0,0),\overrightarrow{AF}=(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}),\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{3},-1)$ ……………………………………6 分



设面 ACF 的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=-x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，

令$z=\sqrt{3}$，则$y=-1,x=0$，故$\vec{n}=(0,-1,\sqrt{3})$． …………7 分

设直线 PB 与平面 ACF 所成角为θ，

$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{PB},\vec{n}>|=\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,……………………………………9 分

故直线PB与平面ACF所成角为$60°$；……………………………………10 分

(ii)设平面PBC的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{3},-1)$, $\overrightarrow{PC}=(-1,0,-1)$

则$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{n_1}=\sqrt{3}y_1-z_1=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{n_1}=-x_1-z_1=0\end{cases}$，取$y_1=1$，则$x_1=-\sqrt{3}$, $z_1=\sqrt{3}$，故$\overrightarrow{n_1}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$……… 11 分

$\overrightarrow{PF}=t\overrightarrow{PB}\left(0<t<1\right)$，则$\overrightarrow{PB}=\left(0,\sqrt{3},-1\right),\overrightarrow{CA}=\left(2,0,0\right),\overrightarrow{CF}=\left(1,\sqrt{3}t,1-t\right)$， ………… 12 分

设平面ACF的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{n_2}=2x_2=0\\ \overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{n_2}=x_2+\sqrt{3}ty_2+(1-t)z_2=0\end{cases}$,

取$y_2=t-1$，得$\overrightarrow{n_2}=(0,t-1,\sqrt{3}t)$, ……………………………………13 分

所以$\cos\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle\right|=\frac{1}{\sqrt{7}}\times\sqrt{\frac{16t^2-8t+1}{4t^2-2t+1}}$ ，……………………………………14 分

令$x=4t^2-2t$ ，则$-\frac{1}{4}\le x<2$ ，所以$\frac{16t^2-8t+1}{4t^2-2t+1}=\frac{4x+1}{x+1}=4-\frac{3}{x+1}$， ……………… 15 分

因为$-\frac{1}{4}\le x<2$时，$0\le 4-\frac{3}{x+1}<3$，

所以$0\le\cos\alpha<\frac{\sqrt{21}}{7}$，故$\cos\alpha$的取值范围是$[0,\frac{\sqrt{21}}{7})$． ………………………………17 分

【注】最后结果写成$[0,\frac{\sqrt{21}}{7}]$扣一分

19．（本小题满分 17 分，其中第一小问 4 分，第二小问 6 分，第三小问 7 分.）

【解析】（1）因为椭圆C的离心率是$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当$0<b<2$时，$\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得$b=1$；……………………………………2 分

当$b>2$时，$\dfrac{\sqrt{b^2-4}}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得$b=4$；…………………………………………………………4 分

所以b的值为1或4；

（2）由题意，直线AM的斜率k_{AM}存在，直线BN的斜率k_{BN}存在，

$k_{AM}=\dfrac{\frac{1}{2}-b}{t}=-\dfrac{1}{2t}$，直线$AM$的方程$y=-\dfrac{1}{2t}x+1$，

设$M(x_M,y_M)$，联立$\begin{cases}\dfrac{x_M^2}{4}+y_M^2=1\\ y=-\dfrac{1}{2t}x_M+1\end{cases}$，得$\dfrac{t^2+1}{4t^2}x_M^2-\dfrac{x_M}{t}=0$，故$x_M=\dfrac{4t}{t^2+1}$ ……………5 分

$k_{BN}=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{t}=\dfrac{3}{2t}$，直线$BN$的方程$y=\dfrac{3}{2t}x-1$，设$N(x_N,y_N)$.

则$\begin{cases}\dfrac{x_N^2}{4}+y_N^2=1\\ y=\dfrac{3}{2t}x_N-1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{t^2+9}{4t^2}x_N^2-\dfrac{3x_N}{t}=0\Rightarrow x_N=\dfrac{12t}{t^2+9}$. ……………………………………………6 分

注意到$\angle BTM=\angle ATN$，则$\sin\angle BTM=\sin\angle ATN$.

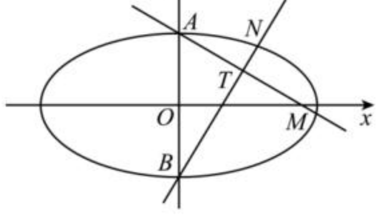
由图，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{1}{2}|TB|\cdot|TM|\cdot\sin\angle BTM}{\frac{1}{2}|TA|\cdot|TN|\cdot\sin\angle ATN}=\dfrac{|TB|\cdot|TM|}{|TA|\cdot|TN|}$，……………………………………………7 分

又$|TB|=\sqrt{(x_T-x_B)^2+(y_T-y_B)^2}=\sqrt{1+k_{BN}^2}\,|x_T-x_B|$，

同理可得$|TA|=\sqrt{1+k_{AM}^2}\,|x_T-x_A|,|TM|=\sqrt{1+k_{AM}^2}\,|x_T-x_M|,|TN|=\sqrt{1+k_{BN}^2}\,|x_T-x_N|$. ….8 分

则$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|TB|\cdot|TM|}{|TA|\cdot|TN|}=\dfrac{|x_T-x_B||x_T-x_M|}{|x_T-x_A||x_T-x_N|}=\dfrac{|t|\left|t-\dfrac{4t}{t^2+1}\right|}{|t|\left|t-\dfrac{12t}{t^2+9}\right|}=\dfrac{\left|\dfrac{t^3-3t}{t^2+1}\right|}{\left|\dfrac{t^3-3t}{t^2+9}\right|}=\left|\dfrac{t^2+9}{t^2+1}\right|=5\Rightarrow t=1$ … 10 分

（3）由题意，直线AM的斜率k_{AM}存在，直线BN的斜率k_{BN}存在，



$k_{AM}=\dfrac{\frac{1}{2}-b}{t}=\dfrac{1-2b}{2t}$，直线$AM$的方程$y=\dfrac{1-2b}{2t}x+b$，

设$M(x_M,y_M)$，联立$\begin{cases} y=\dfrac{1-2b}{2t}x_M+b \\ \dfrac{x_M^2}{4}+\dfrac{y_M^2}{b^2}=1 \end{cases}$得

$\dfrac{(1-2b)^2+b^2t^2}{t^2}x_M^2+\dfrac{4b(1-2b)}{t}x_M=0$，故$x_M=\dfrac{4b(2b-1)t}{(1-2b)^2+b^2t^2}$. ………………………12 分

$k_{BN}=\dfrac{\frac{1}{2}+b}{t}=\dfrac{1+2b}{2t}$，直线 BN 的方程 $y=\dfrac{1+2b}{2t}x-b$，

设$N(x_N,y_N)$，联立$\begin{cases} y=\dfrac{1+2b}{2t}x_N-b \\ \dfrac{x_N^2}{4}+\dfrac{y_N^2}{b^2}=1 \end{cases}$得

则 $\dfrac{(1+2b)^2+b^2t^2}{t^2}x_N^2-\dfrac{4b(1+2b)}{t}x_N=0$，故$x_N=\dfrac{4b(2b+1)t}{(1+2b)^2+b^2t^2}$. ……………………13 分

则$x_M-x_N=4bt\left[\dfrac{(2b-1)}{(1-2b)^2+b^2t^2}-\dfrac{(2b+1)}{(2b+1)^2+b^2t^2}\right]=$

$=4bt\dfrac{(2b-1)\left[(2b+1)^2+b^2t^2\right]-(2b+1)\left[(1-2b)^2+b^2t^2\right]}{\left[(1-2b)^2+b^2t^2\right]\left[(2b+1)^2+b^2t^2\right]}=\dfrac{8bt\left(4b^2-1-b^2t^2\right)}{\left[(1-2b)^2+b^2t^2\right]\left[(2b+1)^2+b^2t^2\right]}$.

………………………………………………………………………………………………………15 分

又$T\left(t,\dfrac{1}{2}\right)$在椭圆内部，则$\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{1}{4b^2}<1\Rightarrow 4b^2-b^2t^2-1>0$，故$x_M>x_N$. ……………16 分

又根据题意知$y_N>\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}>y_M$，所以$y_N>\dfrac{1}{2}>y_M$.

所以当$b>\dfrac{1}{2}$时，点N在点M的左上方. ……………………………………………………17 分