# 2024—2025 学年下学期期末考试

# 高二数学参考答案

**命卷意图**

本套试卷主要考查高中数学的基础知识与技能，考查学生的空间想象能力和逻辑推理能力，强调知识的应用与创新，注重考查学生思维过程的表达能力，有利于区分不同层次学生的数学水平。

**一、立足数学核心素养**

本套试卷考查了高中数学的核心内容，对学生的数学能力进行了一次全方面的考查。 例如，第 4 题考查三角函数的定义问题，考查学生逻辑推理和数学运算的核心素养；第 7 题考查抽象函数的性质问题，考查学生直观想象和数学建模的核心素养；第 13 题考查向量的基底问题，考查学生数学建模和数学运算的核心素养；第 17 题考查有关立体几何的综合应用，涉及立体几何中的体积、点到平面的距离、面面夹角问题，考查学生直观想象和数据分析的核心素养。

**二、考查基本方法和基本知识点**

本套试卷考查学生的基本数学能力和基本数学技能的掌握情况。 例如，第 3 题考查统计中的百分位数概念的问题；第 5 题考查双曲线的离心率问题；第 9 题考查线线、线面位置关系的问题；第 12 题考查等比数列的求和问题，其解题方法都是高中阶段的基本方法。

**三、命制试题亮点**

本套试卷中的第 11，19 题是亮点题目，其中，第 11 题让圆与抛物线结合，考查最值问题，很好地考查学生综合应用所学知识解决问题的能力；第 19 题是圆锥曲线与数列的综合问题，考查学生的学习能力和分析能力，此题对学生的要求较高，能够很好地体现选拔作用。

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | A | C | D | C | C | B | A | B | ABD | BCD | ABD |

1. A　**解析：**根据题意，计算可得集合 $A=(-2,2)$，$B=(0,+\infty)$，所以 $A\cup B=(-2,+\infty)$，故选 A.

2. C　**解析：**因为 $zi^3=1+2i$，所以 $z=\frac{1+2i}{i^3}=\frac{i+2i^2}{i^4}=-2+i$，则 $\bar{z}=-2-i$，所以复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于第三象限，故选 C.

3. D　**解析：**根据定义，这些数据由小到大的排序为 6，8，10，11，12，13，14，16，因为 $8\times80\%=6.4$，所以第 80 百分位数为 14，故选 D.

4. C　**解析：**设点 $P$ 是角 $\alpha$ 终边上一点，则 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，线段 $OP$ 绕坐标原点 $O$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 至 $OP'$，则 $|OP'|=\sqrt{5}$，由题意知，点 $P'$ 的纵坐标为 $\sqrt{5}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故选 C.

5. C　**解析**:因为 $b>a>0$,所以$\frac{b}{a}>1$,所以$-\frac{4}{3}=\frac{2\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$,计算可得$\frac{b}{a}=2$ 或$\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}$(舍去),所以 $e=\sqrt{5}$,故选 C.

6. B　**解析**:因为扇形的圆心角为 2,所以弧长 $l=2r$,面积 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times2r^2=r^2$,所以$\sqrt{S}+l+\frac{27}{r+1}=r+2r+\frac{27}{r+1}=3(r+1)+\frac{27}{r+1}-3\geqslant15$,当且仅当 $r=2$ 时取等号,故选 B.

7. A　**解析**:函数 $y=f(x+3)+2$ 的图象向右平移 3 个单位长度,再向下平移 2 个单位长度,可得函数 $y=f(x)$的图象,因为函数 $y=f(x+3)+2$ 是奇函数,即该函数图象关于$(0,0)$中心对称,所以函数 $y=f(x)$的图象关于$(3,-2)$中心对称,所以 $f(x)+f(6-x)=-4$,因此 $f(1)+f(5)=-4$,$f(2)+f(4)=-4$,$f(3)=-2$,所以$\sum\limits_{i=1}^{5}f(i)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=-10$,故选 A.

8. B　**解析**:根据题意,$\sqrt{(a-b)^2+\left(\frac{a^2}{2}-b+2\right)^2}$的几何意义为点$\left(a,\frac{a^2}{2}\right)$与点$(b,b-2)$之间的距离,分析可得点$\left(a,\frac{a^2}{2}\right)$在抛物线 $x^2=2y$ 上,点$(b,b-2)$在直线 $y=x-2$ 上,所以$\sqrt{(a-b)^2+\left(\frac{a^2}{2}-b+2\right)^2}+\frac{a^2}{2}$的几何意义为抛物线 $x^2=2y$ 上的点到直线 $y=x-2$ 的距离与到 $x$ 轴的距离之和,而抛物线 $x^2=2y$ 上的点到 $x$ 轴的距离可转化为抛物线 $x^2=2y$ 上的点到抛物线 $x^2=2y$ 的焦点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$的距离减去$\frac{1}{2}$,所以最小值即焦点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$到直线 $y=x-2$ 的距离减去$\frac{1}{2}$,所以最小值为$\frac{5\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}$,故选 B.

9. ABD　**解析**:对于选项 A,若 $m\perp\alpha$,$n\perp\alpha$,则 $m/\!/n$,故选项 A 正确;对于选项 B,由 $n/\!/\alpha$,不妨设 $n\subset\gamma$,且 $\alpha\cap\gamma=l$,则 $l/\!/n$,又 $l\subset\alpha$,且 $m\perp\alpha$,所以 $m\perp l$,所以 $m\perp n$,故选项 B 正确;对于选项 C,$\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=n$,$m\perp n$,因为直线 $m$ 不一定在平面 $\alpha$ 上,故选项 C 错误;对于选项 D,由线面平行的性质定理得 $m/\!/n$,故选项 D 正确,故选 ABD.

10. BCD　**解析**:对于选项 A,当 $a=-1$ 时,$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$,$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$,令 $f'(x)=0$,得 $x=-3$ 或 $x=1$,当 $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(-\infty,-3)$,$(1,+\infty)$上单调递增;当 $x\in(-3,1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,故函数 $f(x)$的极大值点为$-3$,极小值点为 1,故选项 A 错误;对于选项 B,由 $f(x)+f(-2-x)=-4a+\frac{10}{3}$得函数 $f(x)$的图象关于点$\left(-1,-2a+\frac{5}{3}\right)$中心对称,故选项 B 正确;对于选项 C,设切点为$\left(m,\frac{1}{3}m^3+m^2+(2a-1)m\right)$,此切线的斜率为 $f'(m)=m^2+2m+2a-1$,所以切线方程为 $y-\left[\frac{1}{3}m^3+m^2+(2a-1)m\right]=(m^2+2m+2a-1)(x-m)$,化简可得 $y=(m^2+2m+2a-1)x-\frac{2}{3}m^3-m^2$,将$(1,0)$代入得$\frac{2}{3}m^3-2m=2a-1$,由题知方程有三个解,令 $h(m)=\frac{2}{3}m^3-2m$,则由 $h'(m)=2m^2-2=0$ 得 $m=\pm1$,所以当 $m\in(-\infty,-1)$及 $m\in(1,+\infty)$时,$h'(m)>0$,函数 $h(m)$单调递增,当

$m\in(-1,1)$时,$h'(m)<0$,函数$h(m)$单调递减,所以$h(m)$有极大值$h(-1)=\frac{4}{3}$,极小值$h(1)=-\frac{4}{3}$,分析函数$h(m)$的图象可得$-\frac{4}{3}<2a-1<\frac{4}{3}$,解得$-\frac{1}{6}<a<\frac{7}{6}$,故选项C正确;对于选项D,$f'(x)=x^2+2x+2a-1$,若函数$f(x)$在$(1,3)$上存在唯一的极值点,则$f'(x)$在$(1,3)$内只有一个零点,因为$f'(x)$图象的对称轴为直线$x=-1<1$,所以$\begin{cases}f'(1)<0,\\f'(3)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}2a+2<0,\\14+2a>0,\end{cases}$解得$-7<a<-1$,故选项D正确,故选BCD.

11. ABD **解析**:根据题意,因为半圆$O_1:(x-2)^2+(y-4)^2=4(y\geqslant4)$表示以$O_1(2,4)$为圆心,2为半径的圆的上半部分,又因为半圆$O_2$与半圆$O_1$关于$y$轴对称,可得半圆$O_2:(x+2)^2+(y-4)^2=4(y\geqslant4)$,表示以$O_2(-2,4)$为圆心,2为半径的圆的上半部分.对于选项A,直线$O_2F$的方程为$3x+2y-2=0$,$O_1$到直线$O_2F$的距离为$\frac{12\sqrt{13}}{13}$,所以$P$到直线$O_2F$的距离最大值为$\frac{12\sqrt{13}}{13}+2$,故选项A正确;对于选项B,抛物线$C:x^2=4y$的准线为$l:y=-1$,过点$N$作$NN_1\perp l$,垂足为$N_1$,则$|NF|=|NN_1|$,则$|PN|+|NF|=|PN|+|NN_1|\geqslant4+1=5$,故选项B正确;对于选项C,不妨设直线$MN:y=kx+1(k\geqslant0)$,显然离$MN$距离最远的点在$O_2$上,设$P$到直线$MN$的距离为$d$,则$d\leqslant\frac{|-2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}+2$,联立$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$消去$y$,整理得$x^2-4kx-4=0$,$0\leqslant k\leqslant\frac{4-1}{4-0}=\frac{3}{4}$,则$x_M+x_N=4k$,$x_Mx_N=-4$,所以$|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_M+x_N)^2-4x_Mx_N}=4(k^2+1)$,所以$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|MN|d\leqslant\frac{1}{2}\times4(k^2+1)\left(\frac{|-2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}+2\right)=2\sqrt{k^2+1}(2k+3)+4(k^2+1)$,设$h(k)=2\sqrt{k^2+1}(2k+3)+4(k^2+1)$,易得$h(k)$在$\left[0,\frac{3}{4}\right]$上单调递增,所以$S_{\triangle PMN}$的最大值为$h\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{35}{2}$,故选项C错误;对于选项D,因为$x_M^2=4y_M$,$x_N^2=4y_N$,所以$(x_M-x_N)(x_M+x_N)=4(y_M-y_N)$,所以$k_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{x_M+x_N}{4}=\frac{1}{2}$,所以直线$MN$的方程为$x-2y+1=0$,联立$\begin{cases}x-2y+1=0,\\x^2=4y,\end{cases}$消去$y$,整理得$x^2-2x-2=0$,则$x_M+x_N=2$,$x_Mx_N=-2$,所以$|MN|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{(x_M+x_N)^2-4x_Mx_N}=\sqrt{15}$,$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN})=|\overrightarrow{PQ}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{MN}|^2=|\overrightarrow{PQ}|^2-\frac{15}{4}\leqslant(|\overrightarrow{O_1Q}|+2)^2-\frac{15}{4}=4\sqrt{10}+\frac{41}{4}$,故选项D正确,故选ABD.

12. 21 **解析**:因为数列$\{a_n\}$是等比数列,所以$S_2,S_4-S_2,S_6-S_4$成等比数列,因为$S_2=12,S_4=18$,所以$S_4-S_2=6$,所以$S_6-S_4=3$,所以$S_6=21$.

13. $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ **解析**:因为点$P$在$BC$上,所以$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$,因为$P$是$MN$的中点,所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$,又因为$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AC}(m,n>0)$,所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}m\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}n\overrightarrow{AC}$,所以$\frac{1}{2}m=\lambda$,

$\frac{1}{2}n=1-\lambda$，计算可得 $m+n=2$，所以$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)(m+n)=\frac{1}{2}\times\left(3+\frac{2m}{n}+\frac{n}{m}\right)\geqslant\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，当且仅当$\frac{2m}{n}=\frac{n}{m}$，即 $n=\sqrt{2}m=4-2\sqrt{2}$时等号成立，所以$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$的最小值为$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

14. $\frac{11}{13}$　**解析**：根据题意，小张去丁单位实习的情况共有三种：一人去丁单位实习有$\left(\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}+C_5^3\right)A_3^3$ 种，两人去丁单位实习有 $C_5^1C_4^2A_3^3$ 种，三人去丁单位实习有 $C_5^2A_3^3$ 种，所以小张去丁单位实习的情况共 390 种，在上述小张去丁单位实习的前提下，小王不去丁单位实习的情况共有三种：一人去丁单位实习有$\left(\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}+C_5^3\right)A_3^3$ 种，两人去丁单位实习有 $C_4^1C_4^2A_3^3$ 种，三人去丁单位实习有 $C_4^2A_3^3$ 种，共计 330 种，所以在小张去丁单位实习的前提下，小王不去丁单位实习的概率为$\frac{330}{390}=\frac{11}{13}$.

15. **解**：(1)由 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，…………（3 分）

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$. …………（5 分）

(2)$\cos A+\sqrt{2}\cos B=-\cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin B+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos B=\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)$，…………（10 分）

因为 $0<B<\frac{3\pi}{4}$，所以$\frac{\pi}{4}<B+\frac{\pi}{4}<\pi$，

所以当 $B+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{4}$时，$\cos A+\sqrt{2}\cos B$ 取得最大值 1. …………（13 分）

16. **解**：(1)将 $x=0$ 代入切线方程可得 $y=2$，即 $f(0)=2$，所以 $1+b=2$，解得 $b=1$，…………（2 分）
由题意得，$f'(0)=-1$，
因为 $f'(x)=e^x-2a$，所以 $f'(0)=1-2a=-1$，解得 $a=1$. …………（4 分）
(2)$f'(x)=e^x-2a$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；…………（5 分）
当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=\ln(2a)$，
当 $x\in(-\infty,\ln(2a))$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln(2a))$上单调递减；
当 $x\in(\ln(2a),+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(\ln(2a),+\infty)$上单调递增.
综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$在$(-\infty,\ln(2a))$上单调递减，在$(\ln(2a),+\infty)$上单调递增. …………（9 分）

(3)设切点为$(x_0,0)$，则$\begin{cases}f(x_0)=0,\\f'(x_0)=0,\end{cases}$即$\begin{cases}e^{x_0}-2ax_0+b=0,\\e^{x_0}-2a=0,\end{cases}$所以 $x_0=\ln(2a)$，$a>0$，…………（11 分）
则 $b=2a\ln(2a)-2a$，…………（12 分）
设 $g(x)=x\ln x-x$，则 $g'(x)=\ln x$，
当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减，
当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，
所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-1$，所以 $g(x)$的值域为$[-1,+\infty)$，
故 $b$ 的取值范围为$[-1,+\infty)$. …………（15 分）

17. **解**：(1)证明：因为底面 $ABCD$ 为直角梯形，且 $CD\perp BC$，所以 $AD/\!/BC$，所以 $CD\perp AD$，
又平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，所以 $CD\perp$平面 $PAD$，
又因为 $PA\subset$平面 $PAD$，所以 $CD\perp PA$，…………（2 分）
过点 $D$ 可以作 $DH\perp AB$ 于点 $H$，

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，所以 $DH\perp$ 平面 $PAB$，

又因为 $PA\subset$ 平面 $PAB$，所以 $DH\perp PA$，…………（4 分）

又 $DH\cap CD=D$，$DH$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$. …………（5 分）

(2)因为 $\triangle BNC\backsim\triangle DNA$，所以 $AN:NC=AD:BC=2:1=PM:MC$，

所以 $MN/\!/PA$，由(1)可知 $MN\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $MN\perp AC$，…………（7 分）

又因为 $BM\perp AC$，$MN\cap BM=M$，所以 $AC\perp$ 平面 $MBN$，

又 $BD\subset$ 平面 $MBN$，所以 $AC\perp BD$，所以 $\triangle ADC\backsim\triangle DCB$，…………（8 分）

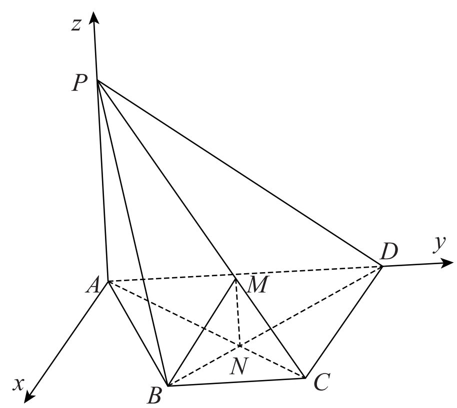
分析可得 $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{DC}{BC}$，

又因为 $AD=2BC=2$，所以 $CD=\sqrt{2}$. …………（10 分）

(3)以 $A$ 为坐标原点，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 方向分别为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$，

则 $B(\sqrt{2},1,0)$，$C(\sqrt{2},2,0)$，$D(0,2,0)$，设 $P(0,0,h)$，

$\overrightarrow{DC}=(\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-h)$，$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2},-1,h)$，$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2},1,0)$，……（11 分）




设平面 $PCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1=0,\\ 2y_1-hz_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=2$，则 $\boldsymbol{m}=(0,h,2)$，…………（12 分）

点 $B$ 到平面 $PCD$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\left|\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}\right|=\dfrac{h}{\sqrt{h^2+4}}$，

解得 $h=2$，…………（13 分）

设平面 $PBC$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y_2=0,\\ -\sqrt{2}x_2-y_2+2z_2=0,\end{cases}$

令 $z_2=1$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,1)$，…………（14 分）

设 $BD$ 与平面 $PBC$ 所成角为 $\theta$，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BD}\rangle|=\left|\dfrac{-2}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\right|=\dfrac{2}{3}$，

即 $BD$ 与平面 $PBC$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$. …………（15 分）

18. **解：**(1)设甲同学做对试题 A 为事件 $M$，甲同学做对试题 B 为事件 $N$，

由题设可知 $P(M)=P(MN)+P(M\overline{N})=0.6$，所以 $P(M\overline{N})=0.4$. …………（4 分）

(2)由题设可知，$P(M)=0.6$，$P(N)=0.4$，$P(MN)=0.2$，$P(\overline{M})=1-P(M)=0.4$，

又 $P(N)=P(MN)+P(\overline{M}N)=0.4$，所以 $P(\overline{M}N)=0.2$，…………（7 分）

故 $P(N|\overline{M})=\dfrac{P(\overline{M}N)}{P(\overline{M})}=\dfrac{1}{2}$. …………（9 分）

(3)根据题意，$P(\overline{M}\overline{N})=1-P(M\overline{N})-P(\overline{M}N)-P(MN)=0.2$，…………（11 分）

分析可得 $X=0,1,2,3$，

$P(X=0)=0.2\times0.4=0.08$，$P(X=1)=0.6\times0.4+0.2\times0.6=0.36$，

$P(X=2)=0.6\times0.6+0.2\times0.4=0.44$，$P(X=3)=0.2\times0.6=0.12$，…………（15 分）

可得 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.08 | 0.36 | 0.44 | 0.12 |

……………………………………………………………………………………（16 分）

数学期望 $E(X)=0\times0.08+1\times0.36+2\times0.44+3\times0.12=1.6$. ……………………（17 分）

19. **解**：(1) $e=\sqrt{\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $a_{n+1}=2a_n$， ……………………（2 分）

因为 $C_2$ 的一个焦点为(2,0)，所以 $4=a_3-a_2=2a_2-a_2$，所以 $a_2=4$，

所以 $a_n=4\times2^{n-2}=2^n$. ……………………（4 分）

(2) 由(1)知 $C_n$：$x^2+2y^2=2^{n+1}$.

因为 $\angle A_nP_nB_n$ 的平分线垂直于 $x$ 轴，所以 $k_{P_nA_n}+k_{P_nB_n}=0$，……………………（5 分）

设 $A_n(x_1,y_1)$，$B_n(x_2,y_2)$，由题知，直线 $A_nB_n$ 的斜率存在，可设方程为 $y=kx+b$，

代入 $C_n$ 中整理得 $(1+2k^2)x^2+4bkx+2(b^2-2^n)=0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{4bk}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2(b^2-2^n)}{1+2k^2}$，……………………（6 分）

由 $P_n(\sqrt{2^n},\sqrt{2^{n-1}})$ 及 $k_{P_nA_n}+k_{P_nB_n}=0$，

得 $\dfrac{y_1-\sqrt{2^{n-1}}}{x_1-\sqrt{2^n}}+\dfrac{y_2-\sqrt{2^{n-1}}}{x_2-\sqrt{2^n}}=0$，

即 $(kx_1+b-\sqrt{2^{n-1}})(x_2-\sqrt{2^n})+(kx_2+b-\sqrt{2^{n-1}})(x_1-\sqrt{2^n})=0$，……………………（8 分）

即 $2kx_1x_2+(b-\sqrt{2^{n-1}}-k\sqrt{2^n})(x_1+x_2)-2(b-\sqrt{2^{n-1}})\cdot\sqrt{2^n}=0$，

代入 $x_1+x_2=-\dfrac{4bk}{1+2k^2}$ 与 $x_1x_2=\dfrac{2(b^2-2^n)}{1+2k^2}$，整理得 $(\sqrt{2^n}k+b-\sqrt{2^{n-1}})(\sqrt{2}k-1)=0$，

当 $\sqrt{2^n}k+b-\sqrt{2^{n-1}}=0$ 时，$A_nB_n$ 过点 $P_n$，舍去.

所以 $\sqrt{2}k-1=0$，解得 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………（10 分）

(3) 证明：由(2)知直线 $A_nB_n$ 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+b$，$x_1+x_2=-\sqrt{2}b$，$x_1x_2=b^2-2^n$，

$|A_nB_n|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{2^{n+2}-2b^2}$， ……………………（12 分）

点 $O$ 到直线 $A_nB_n$ 的距离 $d=\dfrac{\sqrt{6}}{3}|b|$，……………………（13 分）

所以 $\triangle OA_nB_n$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|A_nB_n|\cdot d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{(2^{n+1}-b^2)b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_n$，解得 $b^2=2^n$，……………（14 分）

因为 $y_n>0$，所以 $b=-\sqrt{2^n}$，$c_n=\sqrt{2^{n+1}}$.

所以 $\dfrac{1}{c_n^2-1}-\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n+1}-1}-\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1-2^n}{2^n(2^{n+1}-1)}<0$，所以 $\dfrac{1}{c_n^2-1}<\dfrac{1}{2^n}$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{c_i^2-1}\leqslant\dfrac{1}{c_1^2-1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{5}{6}$. ……………………（17 分）

# 编写细目表

| 题号 | 题型 | 分值 | 知识点 | 难度 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 单选题 | 5 分 | 集合的运算 | 易 |
| 2 | 单选题 | 5 分 | 复数的运算 | 易 |
| 3 | 单选题 | 5 分 | 百分位数的计算 | 易 |
| 4 | 单选题 | 5 分 | 三角函数的定义 | 易 |
| 5 | 单选题 | 5 分 | 双曲线的离心率 | 易 |
| 6 | 单选题 | 5 分 | 扇形的应用、基本不等式 | 中 |
| 7 | 单选题 | 5 分 | 抽象函数的性质 | 中 |
| 8 | 单选题 | 5 分 | 距离公式、抛物线的综合应用 | 难 |
| 9 | 多选题 | 6 分 | 线线、线面的位置关系 | 易 |
| 10 | 多选题 | 6 分 | 导数在研究函数中的应用 | 中 |
| 11 | 多选题 | 6 分 | 圆与抛物线的综合应用 | 难 |
| 12 | 填空题 | 5 分 | 等比数列的求和 | 易 |
| 13 | 填空题 | 5 分 | 向量的运算 | 中 |
| 14 | 填空题 | 5 分 | 有关概率的实际应用 | 难 |
| 15 | 解答题 | 13 分 | 解三角形 | 易 |
| 16 | 解答题 | 15 分 | 函数与导数的综合应用 | 易 |
| 17 | 解答题 | 15 分 | 立体几何中的线面垂直、距离和线面角 | 中 |
| 18 | 解答题 | 17 分 | 概率、条件概率和分布列 | 中 |
| 19 | 解答题 | 17 分 | 椭圆与数列的综合应用 | 难 |