2025届高三高考考前冲刺押题卷(二)·数学参考答案

1. 选D　由 $x^2-2x-3>0$，解得 $x>3$ 或 $x<-1$. 所以 $A=\{x|x>3$ 或 $x<-1\}$，又 $B=\{1,2,3,4\}$，所以 $A\cap B=\{4\}$. 故选D.

2. 选A　$z=\frac{2+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2-2\mathrm{i}+3\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}=\frac{5+\mathrm{i}}{2}$，故虚部为 $\frac{1}{2}$. 故选A.

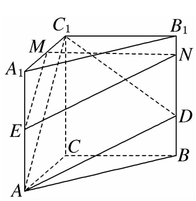
3. 选A　由已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=2\times1\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{-\frac{2}{3}}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{2}=-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}$. 故选A.

4. 选A　设点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PA}=(-2-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(2-x,-y)$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-2-x)(2-x)+y^2=5$，则 $x^2+y^2=9$，所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=9$，圆心为 $(0,0)$，半径为3，由此可知圆 $(x-a-1)^2+(y-3a+2)^2=4$ 与圆 $x^2+y^2=9$ 有公共点，又圆 $(x-a-1)^2+(y-3a+2)^2=4$ 的圆心为 $(a+1,3a-2)$，半径为2，所以 $1\leqslant\sqrt{(a+1)^2+(3a-2)^2}\leqslant5$，解得 $-1\leqslant a\leqslant2$，即 a 的取值范围是 $[-1,2]$. 故选A.

5. 选D　$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)=\frac{1}{2}$，$\cos 2x-\cos 2y=\cos[(x+y)+(x-y)]-\cos[(x+y)-(x-y)]=-2\sin(x+y)\sin(x-y)=-\sin(x-y)=\frac{1}{4}$，所以 $\sin(x-y)=-\frac{1}{4}$. 故选D.

6. 选B　由题意，设直线 AB 的方程为 $y=kx+3$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=kx+3,\\x^2=2py,\end{cases}$ 可得 $x^2-2pkx-6p=0$，所以 $x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-6p$，则 $y_1y_2=\frac{x_1^2x_2^2}{4p^2}=9$. 因为 $|AF|=2$，$|BF|=10$，所以 $y_1=2-\frac{p}{2}$，$y_2=10-\frac{p}{2}$，则 $\left(2-\frac{p}{2}\right)\times\left(10-\frac{p}{2}\right)=9$，解得 $p=2$ 或 $p=22$. 因为 $2-\frac{p}{2}>0$，所以 $p=2$. 故选B

7. 选D　在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{MC_1}$，点 D 在棱 BB_1 上，如图，由 $V_{A\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}$，得 $V_{A\text{-}BCC_1B_1}=\frac{2}{3}V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}$，则 $V_{A\text{-}BCC_1D}=\frac{4}{9}V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}V_{A\text{-}BCC_1B_1}=\frac{2}{3}V_{A\text{-}BCC_1B_1}$，于是 $S_{梯形BCC_1D}=\frac{2}{3}S_{四边形BCC_1B_1}$，则 $S_{\triangle C_1B_1D}=\frac{1}{3}S_{四边形BCC_1B_1}$，即 $\frac{DB_1}{BB_1}=\frac{2}{3}$，设三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱长为6，则 $DB_1=4$，$DB=2$，又 M 为 A_1C_1 的中点，取 A_1A 的中点 E，连接 ME，则 $ME\,/\!/\,C_1A$，$C_1A\subset$ 平面 ADC_1，$ME\not\subset$ 平面 ADC_1，于是 $ME\,/\!/$ 平面 ADC_1，过 E 作 $EN\,/\!/\,AD$，且 $EN\cap BB_1=N$，连接 MN，由 $AD\subset$ 平面 ADC_1，$EN\not\subset$ 平面 ADC_1，于是 $EN\,/\!/$ 平面 ADC_1，又 $ME\cap EN=E$，ME，$EN\subset$ 平面 MNE，因此平面 $MNE\,/\!/$ 平面 ADC_1，又 $MN\subset$ 平面 MNE，则 $MN\,/\!/$ 平面 ADC_1，在▱$ADNE$ 中，$DN=EA=3$，$NB_1=DB_1-DN=4-3=1$，$BN=5$，所以 $\frac{NB}{NB_1}=5$. 故选D.



8. 选D　$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(0)=\sin 1+\cos 0=\sin 1+1\neq0$，故A错误；若 $f(x)_{\max}=2$，由 $|\sin x|\leqslant1$，$|\cos x|\leqslant1$，有 $\sin(\cos x)=\cos(\sin x)=1$，必有 $\begin{cases}\cos x=\frac{\pi}{2}+2k_1\pi,\\\sin x=2k_2\pi,\end{cases}$ $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，这是不可能的，故B错误；$f(x-\pi)=\sin[\cos(x-\pi)]+\cos[\sin(x-\pi)]=-\sin(\cos x)+\cos(\sin x)\neq f(x)$，故C错误；$f(x+\pi)=\sin[\cos(x+\pi)]+\cos[\sin(x+\pi)]=\sin(-\cos x)+\cos(-\sin x)=-\sin(\cos x)+\cos(\sin x)$，$\because\cos x+\sin x\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\cos x<\frac{\pi}{2}-\sin x$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\cos x\in[-1,1]$，$\frac{\pi}{2}-\sin x\in\left[\frac{\pi}{2}-1,\frac{\pi}{2}\right]$，而 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，$\therefore\sin(\cos x)<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)=\cos(\sin x)$，$\therefore$ 当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x+\pi)>0$，故D正确. 故选D.

9. 选ABC　不妨设甲组数据从小到大排列为 $x_1,x_2,\cdots,x_{16}$，则乙组数据从小到大排列为 $3x_1-9,3x_2-9,\cdots,3x_{16}-9$，因为甲组数据的平均数为 m，标准差为 n，极差为 a，第60百分位数为 b，则 $a=x_{16}-x_1$，又 $16\times60\%=9.6$，所以 $b=x_{10}$，所以乙组数据的平均数为 $3m-9$，故A正确；乙组数据的极差为 $3x_{16}-9-(3x_1-9)=3(x_{16}-x_1)=3a$，故B正确；乙组数据的第60百分位数为 $3x_{10}-9=3b-9$，故C正确；乙组数据的标准差为 $3n$，故D错误. 故选ABC.

10. 选BD　因为 $f(1+x)+f(3-x)=2$，所以 $f(1+1)+f(3-1)=2$，所以 $f(2)=1$，取 $x=0$，由 $f(0)-f(2-0)=4-4\times0$，可知 $f(0)=4+f(2)=5$，故A错误；取 $x=0$，由 $f(1+x)+f(3-x)=2$，知 $f(1)+f(3)=2$，所以 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=8$，故B正确；令 $x=1+t$，由 $f(1+x)+f(3-x)=2$，知 $f(2+t)+f(2-t)=2$，即 $f(2+x)+f(2-x)=2$，又因为 $f(x)-f(2-x)=4-4x$，所以 $f(x)+f(x+2)=6-4x$，故C错误；由 $f(x)+f(x+2)=6-4x$，得 $f(x)=-f(x+2)+6-4x$，所以 $f(x+2)=-f(x+4)+6-4(x+2)$，所以 $f(x)=f(x+4)+8$，所以 $f(2\,024)=f(2\,020)-8$，又 $f(2\,020)=f(2\,016)-8$，所以 $f(2\,024)=f(2\,016)-2\times8$，所以 $f(2\,024)=f(0)-8\times506=5-4\,048=-4\,043$，故D正确. 故选BD.

11. 选 BCD　依题意，$f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x+\cos 2\omega x=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$，得 $2\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=3k+\frac{1}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，而 $0<\omega<1$，则 $\omega=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，故 A 错误；$y=f\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin(2x+\pi)=-2\sin 2x$ 是奇函数，故 B 正确；$y=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)\cos x=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\cdot\frac{\cos 2x+1}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $y=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0$ 时，函数 $y=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos x$ 的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故 C 正确；$y=f(tx)=2\sin\left(tx+\frac{\pi}{6}\right)$，$t>0$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$tx+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},t\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，因为函数 $y=f(tx)(t\in\mathbf{R},t>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有三个零点，所以 $3\pi\leqslant t\pi+\frac{\pi}{6}<4\pi$，解得 $\frac{17}{6}\leqslant t<\frac{23}{6}$，故 D 正确. 故选 BCD.

12. **解析**：设直线 $y=kx$ 与曲线 $y=\ln x+\frac{1}{2x}$ 相切于点 $P(x_0,y_0)$，

由 $y=\ln x+\frac{1}{2x}$ 可得 $y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$，因此切线斜率 $k=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{2x_0^2}=\frac{2x_0-1}{2x_0^2}$，

又切线过原点 $O(0,0)$，可得 $k_{PO}=\frac{\ln x_0+\frac{1}{2x_0}-0}{x_0-0}=\frac{2x_0-1}{2x_0^2}$，化简可得 $x_0\ln x_0-x_0+1=0$，

令 $g(x)=x\ln x-x+1$，则 $g'(x)=\ln x+1-1=\ln x$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，也是最小值，$g(1)=0$，即可得 $g(x)=x\ln x-x+1\geqslant 0$，

因此可得 $x_0=1$，即可得 $k=\frac{2x_0-1}{2x_0^2}=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

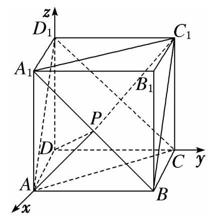
13. **解析**：甲或乙参加 A 活动的情况有 $2\left(C_4^1+\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\right)A_2^2=28$ 种，

甲和乙都不参加 A 活动的情况有 $C_3^1(C_2^1+C_2^1)A_2^2=24$ 种，

则他们参加活动的不同方案有 $28+24=52$ 种.

答案：52

14. **解析**：如图所示，因为 $AB\parallel C_1D_1$ 且 $AB=C_1D_1$，故四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，则 $BC_1\parallel AD_1$，



因为 $BC_1\not\subset$ 平面 ACD_1，$AD_1\subset$ 平面 ACD_1，所以 $BC_1\parallel$ 平面 ACD_1，

同理可证 $A_1B\parallel$ 平面 ACD_1，因为 $A_1B\cap BC_1=B$，A_1B，$BC_1\subset$ 平面 A_1BC_1，

所以平面 $A_1BC_1\parallel$ 平面 ACD_1，因为 $C_1\in$ 平面 A_1BC_1，要使得 $C_1P\parallel$ 平面 ACD_1，

则 $C_1P\subset$ 平面 A_1BC_1，因为 $P\in$ 平面 AA_1B_1B，平面 $AA_1B_1B\cap$ 平面 $A_1BC_1=A_1B$，

故点 P 的轨迹为线段 A_1B，当 C_1P 取最小值时，$C_1P\perp A_1B$，则 P 为 A_1B 的中点，

则 $C_1P=\sqrt{A_1C_1{}^2-\left(\frac{1}{2}A_1B\right)^2}=\sqrt{20-8}=2\sqrt{3}$.

以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

易知 $A_1(2,0,4)$，$C_1(0,4,4)$，$P(2,2,2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,4,0)$，$\overrightarrow{A_1P}=(0,2,-2)$，

取 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{A_1P}=(0,2,-2)$，$\boldsymbol{u}=\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}(-1,2,0)$，

则 $\boldsymbol{a}^2=8$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

所以点 P 到直线 A_1C_1 的距离为 $\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

答案：$2\sqrt{3}$　$\frac{2\sqrt{30}}{5}$

15. **解**：(1) 由 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2$，得 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$，
……………………………………………………2 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，

所以 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，得 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………6 分

(2) 由 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，得 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，

因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，

所以 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}c\times 1\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}b\times 1\times\sin\frac{\pi}{6}$，

即 $\sqrt{3}bc=b+c$　①，……………………………8 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $b^2+c^2-bc=6$　②，……………………………10 分

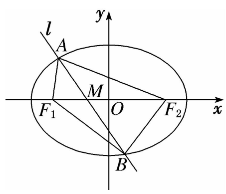
由①②得 $bc=2$，……………………………12 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………13 分

16. **解**：(1)由题意，$\begin{cases}a-c=2\sqrt{3}-\sqrt{6},\\ a+c=2\sqrt{3}+\sqrt{6},\end{cases}$ ……………………2 分

解得 $a=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}$，则 $b^2=a^2-c^2=6$，……………………4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$. ……………………5 分



(2)由(1)知，$F_1(-\sqrt{6},0)$，$F_2(\sqrt{6},0)$，

当直线 l 的斜率不存在时，$S_1=S_2$，则 $|S_1-S_2|=0$. ……………6 分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)(k\neq 0)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-12=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-12}{1+2k^2}$，……………………9 分

所以 $S_1=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times|y_1|=\sqrt{6}|y_1|$，$S_2=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times|y_2|=\sqrt{6}|y_2|$，

由于 y_1，y_2 异号，所以 $|S_1-S_2|=\sqrt{6}|y_1+y_2|=\sqrt{6}|k(x_1+1)+k(x_2+1)|$

$=\sqrt{6}|k(x_1+x_2)+2k|=\sqrt{6}\cdot\left|-\frac{4k^3}{1+2k^2}+2k\right|=\sqrt{6}\cdot\frac{2|k|}{1+2k^2}$ ……………………12 分

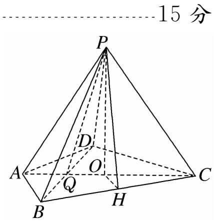
$=2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{|k|}+2|k|}\leqslant 2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{|k|}\cdot 2|k|}}=\sqrt{3}$，

当且仅当 $\frac{1}{|k|}=2|k|$，即 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

所以 $|S_1-S_2|$ 的最大值为 $\sqrt{3}$. ……………………14 分

综上所述，$|S_1-S_2|$ 的最大值为 $\sqrt{3}$. ……………………15 分

17. **解**：(1)证明：设 $AC\cap BD=Q$，连接 PQ，



因为 $BC=CD$，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，$AC=AC$，

所以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle ADC$，

所以 $AB=AD$，$\angle DCQ=\angle BCQ$，

又 $BC=DC$，$CQ=CQ$，

则 $\triangle QBC\cong\triangle QDC$，点 Q 为 BD 的中点，

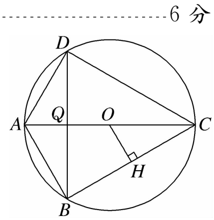
又 $PB=PD$，所以 $PQ\perp BD$，……………………2 分

又 $\angle DQC=\angle BQC$，且 $\angle DQC+\angle BQC=180°$，

所以 $AC\perp BD$，……………………4 分

又 $AC\cap PQ=Q$，$AC\subset$ 平面 PAC，$PQ\subset$ 平面 PAC，

所以 $BD\perp$ 平面 PAC. ……………………6 分



(2)由(1)可知 $BD\perp$ 平面 PAC，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $ABCD\perp$ 平面 PAC，

取 AC 的中点为 O，连接 PO，则 $PO\perp AC$，

平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAC=AC$，$PO\subset$ 平面 PAC，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

过点 O 作 $OH\perp BC$，垂足为 H，连接 PH，

则 $PH\perp BC$，所以 $\angle PHO$ 为二面角 P-BC-A 的平面角，……………………9 分

因为四棱锥 P-$ABCD$ 的体积为 $V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{四边形ABCD}\times PO=\frac{1}{3}\times AB\times BC\times PO$

$=\frac{2}{3}\times AB\times\sqrt{PH^2-OH^2}=\frac{2}{3}\times AB\times\sqrt{3-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}$

$=\frac{4}{3}\times\sqrt{\frac{AB^2}{4}\times\left(3-\frac{AB^2}{4}\right)}\leqslant\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$，

当且仅当 $\frac{AB^2}{4}=3-\frac{AB^2}{4}$，即 $AB=\sqrt{6}$ 时体积最大，

……………………12 分

此时 $OH=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$OP=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle POH$ 中，$\tan\angle PHO=\frac{OP}{OH}=1$，所以 $\angle PHO=45°$，

所以二面角 P-BC-A 的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………15 分

18. **解**：(1)依题意，随机变量 X 的可能取值为 2,3,4，……………………1 分

则 $P(X=2)=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$，$P(X=3)=\mathrm{C}_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$，$P(X=4)=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$，

所以 X 的分布列如表所示：

X	2	3	4
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

……………………4 分

数学期望为 $E(X)=2\times\frac{4}{25}+3\times\frac{12}{25}+4\times\frac{9}{25}=\frac{16}{5}$.

……………………5 分

(2)由这 n 人的合计得分为 $n+1$ 分，得其中只有 1 人既游览栟柳江又游览乌蒙大草原，

于是 $p_n=\mathrm{C}_n^1\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}=\frac{3n\cdot 2^{n-1}}{5^n}=\frac{3}{2}\cdot n\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$，令数列 $\left\{n\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，

则 $S_n=1\times\frac{2}{5}+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2+3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$，……………………7 分

于是 $\frac{2}{5}S_n=1\times\left(\frac{2}{5}\right)^2+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{2}{5}\right)^n+n\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$，

两式相减得 $\frac{3}{5}S_n=\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^n-n\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}=\frac{\frac{2}{5}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{5}}-n\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

$=\frac{2}{3}-\frac{10+6n}{15}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$,

因此 $S_n=\frac{10}{9}-\frac{10+6n}{9}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$,

所以 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=\frac{3}{2}S_n=\frac{5}{3}-\frac{5+3n}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$. ……………………10 分

(3)在随机抽取的若干人的合计得分为 $n-1$ 分的基础上再抽取 1 人,则这些人的合计得分可能为 n 分或 $n+1$ 分,

记"合计得 n 分"为事件 A,"合计得 $n+1$ 分"为事件 B,A 与 B 是对立事件,

则 $P(A)=a_n,p(B)=\frac{3}{5}a_{n-1},a_n+\frac{3}{5}a_{n-1}=1(n\geqslant 2)$,

即 $a_n-\frac{5}{8}=-\frac{3}{5}\left(a_{n-1}-\frac{5}{8}\right)(n\geqslant 2)$, ……………………12 分

由 $a_1=\frac{2}{5}$,得 $a_1-\frac{5}{8}=-\frac{9}{40}$,则数列 $\left\{a_n-\frac{5}{8}\right\}$ 是首项为 $-\frac{9}{40}$,公比为 $-\frac{3}{5}$ 的等比数列,

$a_n-\frac{5}{8}=-\frac{9}{40}\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}(n\geqslant 1)$,因此 $a_n=\frac{5}{8}-\frac{9}{40}\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}(n\geqslant 1)$, ……………………15 分

随着 n 的无限增大,$\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ 无限趋近于 0,a_n 无限趋近于 $\frac{5}{8}$,

所以随着抽取人数的无限增加,a_n 趋近于常数 $\frac{5}{8}$.

……………………17 分

19. **解**:(1)由题意,可设 $R(x)=\frac{a}{1+bx}$,且 $f(0)=R(0)$,则 $a=1$, ……………………1 分

而 $f'(x)=e^x,R'(x)=-\frac{ab}{(1+bx)^2}$,且 $f'(0)=R'(0)$,

则 $-ab=-b=1\Rightarrow b=-1$, ……………………3 分

所以 $R(x)=\frac{1}{1-x}$. ……………………4 分

(2)证明:当 $x<1$ 时,恒有 $R(x)>0,0<f(x)<e$,

令 $h(x)=\frac{f(x)}{R(x)}=(1-x)e^x$,且 $x<1$,则 $h'(x)=-xe^x$,

……………………5 分

当 $x<0$ 时,$h'(x)>0$,即 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增;

当 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$,即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

所以 $h(x)\leqslant h(0)=1$,故 $f(x)\leqslant R(x)$,得证. ……………………9 分

(3)令 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 $[0,2]$ 阶帕德近似为 $R_1(x)=\frac{a_0}{1+b_1x+b_2x^2}$,

由 $f(0)=R_1(0)$,则 $a_0=1$,故 $R_1(x)=\frac{1}{1+b_1x+b_2x^2}$,

由 $R_1'(x)=-\frac{b_1+2b_2x}{(1+b_1x+b_2x^2)^2}$,$f'(x)=e^x$,而 $f'(0)=R_1'(0)$,则 $-b_1=1\Rightarrow b_1=-1$,

所以 $R_1'(x)=\frac{1-2b_2x}{(1-x+b_2x^2)^2}$,

故 $R_1''(x)=\frac{-2b_2(1-x+b_2x^2)+2(1-2b_2x)^2}{(1-x+b_2x^2)^3}$,

由 $f''(x)=e^x$,而 $f''(0)=R_1''(0)$,则 $-2b_2+2=1\Rightarrow b_2=\frac{1}{2}$.

综上,$R_1(x)=\frac{1}{1-x+\frac{x^2}{2}}$,且 $x\in\mathbf{R}$, ……………………11 分

令 $t(x)=\frac{f(x)}{R_1(x)}=\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x=\frac{(x-1)^2+1}{2}\cdot e^x>0$,则 $t'(x)=\frac{x^2e^x}{2}\geqslant 0$ 恒成立,

所以 $t(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,又 $t(0)=1$,

故当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$0<t(x)<1$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$t(x)>1$,

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f(x)<R_1(x)$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)>R_1(x)$,

此时,$k=\frac{1}{2}$ 时 $x=0$ 不是 $g(x)$ 的极值点. ……………………12 分

以 $k=\frac{1}{2}$ 为界,讨论如下:

由连续函数 $m(x)=(1-x+kx^2)e^x\Rightarrow m'(x)=x[kx+(2k-1)]e^x$,

当 $k>\frac{1}{2}$ 时,$m'(x)=kx\left[x+\left(2-\frac{1}{k}\right)\right]e^x$,而 $2-\frac{1}{k}>0$,

在 $\left(\frac{1}{k}-2,0\right)$ 上,$m'(x)<0$,$m(x)$ 单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上,$m'(x)>0$,$m(x)$ 单调递增,则 $m(x)\geqslant m(0)=1$,

所以在 $x=0$ 两侧 $g(x)=e^x-\frac{1}{1-x+kx^2}\geqslant 0=g(0)$ 恒成立,$x=0$ 是极小值点; ……………………13 分

当 $0<k<\frac{1}{2}$ 时,$m'(x)=kx\left[x+\left(2-\frac{1}{k}\right)\right]e^x$,而 $2-\frac{1}{k}<0$,

在 $(-\infty,0)$ 上,$m'(x)>0$,$m(x)$ 单调递增,在 $\left(0,\frac{1}{k}-2\right)$ 上,$m'(x)<0$,$m(x)$ 单调递减,则 $m(x)\leqslant m(0)=1$,

所以在 $x=0$ 两侧 $g(x)=e^x-\frac{1}{1-x+kx^2}\leqslant 0=g(0)$ 恒成立,$x=0$ 为极大值点; ……………………14 分

当 $k=0$ 时,有 $m'(x)=-xe^x$,

在 $(-\infty,0)$ 上 $m'(x)>0$,$m(x)$ 单调递增,在 $(0,1)$ 上 $m'(x)<0$,$m(x)$ 单调递减,则 $m(x)\leqslant m(0)=1$,

所以在 $x=0$ 两侧 $g(x)=e^x-\frac{1}{1-x+kx^2}\leqslant 0=g(0)$ 恒成立,$x=0$ 为极大值点; ……………………15 分

当 $k<0$ 时,$m'(x)=kx\left[x+\left(2-\frac{1}{k}\right)\right]e^x$,而 $2-\frac{1}{k}>0$,

在 $\left(\frac{1}{k}-2,0\right)$ 上 $m'(x)>0$,$m(x)$ 单调递增,在 $(0,+\infty)$ 上 $m'(x)<0$,$m(x)$ 单调递减,则 $m(x)\leqslant m(0)=1$,

所以在 $x=0$ 两侧 $g(x)=e^x-\frac{1}{1-x+kx^2}\leqslant 0=g(0)$ 恒成立,$x=0$ 为极大值点. ……………………16 分

综上,$k<\frac{1}{2}$. ……………………17 分