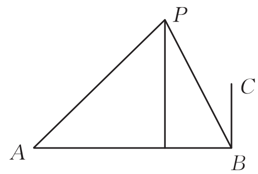
邯郸市2024高二第二学期期末考试
数学试卷参考答案

1. D　因为 $i(3+5i)=-5+3i$,$i(3-5i)=5+3i$,所以这4个复数中只有 $i(3-5i)$ 的实部大于虚部.

2. A　$f(-4)=-f(4)=-(16-7)=-9$.

3. B　由捆绑法可得,甲、乙、丙站在一起的概率为 $\frac{A_3^3A_8^8}{A_{10}^{10}}=\frac{A_3^3}{10\times9}=\frac{1}{15}$.

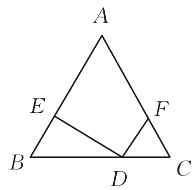
4. B　如图,由题可知 $\angle PAB=45°$,$\angle PBC=15°$,$\angle APB=90°-45°+15°=60°$,在 $\triangle ABP$ 中,由正弦定理可得 $\frac{AB}{\sin\angle APB}=\frac{PB}{\sin\angle PAB}$,则 $PB=\frac{AB\sin\angle PAB}{\sin\angle APB}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm.



5. D　因为正六边形的中心到每个顶点的距离等于该正六边形的边长,且正六棱台 $ABCDEF$-$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的侧棱与底面所成的角为 $\frac{\pi}{4}$,所以该正六棱台的高 $h=(6-2)\tan45°=4$.依题意可得底面 $ABCDEF$ 的面积 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times6=6\sqrt{3}$,底面 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的面积 $S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2\times6=54\sqrt{3}$,所以该正六棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\times4\times(6\sqrt{3}+54\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}\times54\sqrt{3}})=104\sqrt{3}$.

6. C　依题意可得 $|PC|=\sqrt{1^2+(2\sqrt{6})^2}=5$,设 $P(x,y)$,则 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{(x-4)^2+8x}=\sqrt{x^2+16}=5$,解得 $x=\pm3$,因为 $y^2=8x\geqslant0$,所以 $x=3$.因为 M 的准线方程为 $x=-2$,所以点 P 到 M 的准线的距离为 $3-(-2)=5$.

7. A　如图,依题意可得点 E 在线段 AB(不含端点)上,点 F 在线段 AC(不含端点)上,$DE\perp AB$,设 $BD=x(0<x<2)$,则 $BE=BD\cos\angle ABC=\frac{1}{2}x$,$CD=2-x$.因为 $DF\parallel AB$,$\triangle ABC$ 为正三角形,所以 $\triangle CDF$ 为正三角形,所以 $DF=CD=2-x$,所以 $|\overrightarrow{BE}|+|\overrightarrow{DF}|^2=\frac{1}{2}x+(2-x)^2=x^2-\frac{7}{2}x+4=\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$,因为 $0<x<2$,所以当 $x=\frac{7}{4}$ 时,$|\overrightarrow{BE}|+|\overrightarrow{DF}|^2$ 取得最小值,且最小值为 $\frac{15}{16}$.



8. C　由二项式定理,得 $a=C_{16}^0\times5^{16}\times(-1)^0+C_{16}^1\times5^{15}\times(-1)^1+\cdots+C_{16}^{15}\times5\times(-1)^{15}+C_{16}^{16}\times5^0\times(-1)^{16}-3=(5-1)^{16}-3=4^{16}-3=(14+2)^8-3=C_8^0\times14^8\times2^0+C_8^1\times14^7\times2^1+\cdots+C_8^7\times14^1\times2^7+C_8^8\times14^0\times2^8-3$.

因为能够被7整除,$C_8^8\times14^0\times2^8-3=253$ 被7除余1,所以 $a\equiv1(\mathrm{mod}\ 7)$.因为2024除以7余1,2025除以7余2,2026除以7余3,2027除以7余4,所以 $a\equiv2024(\mathrm{mod}\ 7)$.

9. ACD　$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2$,则 $f(x)$ 的最小正周期为 2π,$f(x)$ 的最大值为 $2+\sqrt{2}$,$f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4},2\right)$ 对称,$f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称.

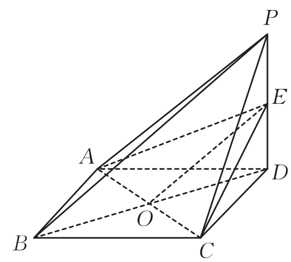
10. BCD　依题意可得$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{1-\frac{m}{8}}$，解得 $m=2$，则 C 的短轴长为 $m=2\sqrt{2}$，A 错误. 若 P 为短轴上的端点，O 为坐标原点，则 $\tan\angle F_1PO=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，$\angle F_1PO=\frac{\pi}{3}$，$\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}>\frac{\pi}{2}$，所以 C 上存在点 P，使得 $PF_1\perp PF_2$，B 正确. 设 $P(x,y)(-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2})$，$F_1(-\sqrt{6},0)$，$F_2(\sqrt{6},0)$，则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{6}-x,-y)\cdot(\sqrt{6}-x,-y)=x^2-6+y^2=x^2-6+2-\frac{x^2}{4}=\frac{3x^2}{4}-4\in[-4,2]$，C 正确. 设 $P(x,y)$ 为椭圆 C 上任意一点，因为 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4\sqrt{2}$，所以$\sqrt{(x+\sqrt{6})^2+y^2}+\sqrt{(x-\sqrt{6})^2+y^2}=4\sqrt{2}$，D 正确.

11. BC　$f'(x)=\frac{1}{(x-1)\ln a}+\frac{1}{(x+1)\ln(a+2)}=\frac{x[\ln a+\ln(a+2)]+\ln(a+2)-\ln a}{(x^2-1)\ln a\cdot\ln(a+2)}$.
当 $0<a<1$，$x>1$ 时，$(x^2-1)\ln a\cdot\ln(a+2)<0$，所以 $x[\ln a+\ln(a+2)]+\ln(a+2)-\ln a\geqslant 0$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，设 $g(x)=x[\ln a+\ln(a+2)]+\ln(a+2)-\ln a$，则 $\ln a+\ln(a+2)=\ln(a^2+2a)\geqslant 0$ 且 $g(1)=2\ln(a+2)\geqslant 0$，则$\begin{cases}a^2+2a\geqslant 1,\\0<a<1,\end{cases}$解得 $a\in[\sqrt{2}-1,1)$.

12. 7　依题意可得 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$B=\{x\mid -2<x<7\}$，则 $A\cap B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，故 $A\cap B$ 中元素的个数为 7.

13. 10.8　$\because 6\times 60\%=3.6$，$\therefore m=5$，$\therefore E(X)=2\times 0.3+5\times 0.6+14\times 0.1=5$，$\therefore D(X)=(2-5)^2\times 0.3+(5-5)^2\times 0.6+(14-5)^2\times 0.1=10.8$.

14. 34π　连接 BD 交 AC 于点 O，连接 OE，因为 PE，OE 共面，且 $PB\parallel$ 平面 EAC，所以 $PB\parallel OE$，易知 O 为 BD 的中点，所以 E 为 PD 的中点. 设四面体 $ABCE$ 外接球的球心为 Q，则 $OQ\perp$ 平面 ABC，设 $OQ=h$，则 $OQ^2+OC^2=QE^2$，所以 $h^2+(2\sqrt{2})^2=(h-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2$，解得 $h=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故四面体 $ABCE$ 外接球的表面积为 $4\pi(h^2+8)=34\pi$.



15. 解：(1) 设 $b_n=\frac{a_n}{n^2}$，则 $b_1=\frac{a_1}{1^2}=\frac{1}{4}$，$b_2=\frac{a_2}{2^2}=\frac{1}{16}$，则$\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{4}$，……………… 2 分

所以$\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$是首项为$\frac{1}{4}$，公比也为$\frac{1}{4}$的等比数列，……………… 3 分

所以$\frac{a_n}{n^2}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$，……………… 5 分

则 $a_n=\frac{n^2}{4^n}$. ……………… 6 分

(2) $\sqrt{a_n}=\frac{n}{2^n}$，……………… 7 分

则 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，……………… 8 分

则$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$，……………… 9 分

所以 $S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$， …… 12 分

故 $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$. …………………………………………………………………… 13 分

16. 解：(1)列联表如下：

	对民航招飞有意向	对民航招飞没有意向	合计
男生	100	500	600
女生	100	300	400
合计	200	800	1000

…………………………………………………………………………………………………… 3 分

零假设为 H_0：该校高三学生是否有民航招飞意向与学生性别无关联. ………………… 4 分

因为 $\chi^2=\frac{1000\times20000\times20000}{200\times800\times600\times400}=\frac{125}{12}\approx10.417>6.635$， ………………………………… 7 分

所以根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为该校高三学生是否有民航招飞意向与学生性别有关. ……………………………………………………………………… 8 分

(2)因为每名报名学生通过前 3 项流程的概率依次为 $\frac{3}{4},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$，

所以每名报名学生通过前 3 项流程的概率为 $P_0=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. ………………… 10 分

依题意得甲地高三男生对招飞有意向的概率为 $P_1=\frac{100}{600}=\frac{1}{6}$， ……………………… 11 分

甲地高三女生对招飞有意向的概率为 $P_2=\frac{100}{400}=\frac{1}{4}$， ………………………………… 12 分

由全概率公式得所求概率为 $P=\frac{1}{2}P_1P_0+\frac{1}{2}P_2P_0=\frac{5}{144}$. ……………………………… 15 分

17. 解：(1)因为 $AB=BC=2\sqrt{2}$，$AC=4$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，则 $AB\perp BC$. …………… 1 分

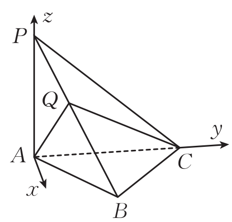
因为 $PA\perp$ 底面 ABC，所以 $PA\perp BC$. ……………………………………………………… 2 分

又 $AB\perp BC$，$AB\cap PA=A$，所以 $BC\perp$ 平面 ABP. ………………………………………… 3 分

因为 $AQ\subset$ 平面 ABP，所以 $AQ\perp BC$. 又 $AQ\perp BP$，$PB\cap BC=B$，所以 $AQ\perp$ 平面 PBC. ……………………………………………………………………………………………… 4 分

由 $CQ\subset$ 平面 PBC，得 $AQ\perp CQ$. ……………………………………………………………… 5 分

又 $PA\perp$ 底面 ABC，所以 $PA\perp AB$，所以 $BP=\sqrt{AB^2+AP^2}=2\sqrt{3}$，由等面积法得 $AQ=\frac{AP\cdot AB}{BP}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，故 $CQ=\sqrt{AC^2-AQ^2}=\frac{2\sqrt{30}}{3}$. ………………………………………… 7 分



(2)以 A 为原点建立空间直角坐标系，如图所示，则 $A(0,0,0)$，$C(0,4,0)$，$Q\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$， …………………………………………………… 9 分

则 $\overrightarrow{AC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$. ………………………………………… 10 分

设平面 ACQ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{AQ}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x+y+2z)=0,\\ 4y=0,\end{cases}$ …… 11 分

令 $x=2$，得 $\boldsymbol{n}_1=(2,0,-1)$. …… 12 分

由 $PA\perp$ 底面 ABC，得 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$ 为平面 ABC 的一个法向量，…… 13 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. …… 14 分

由图可知，二面角 Q-AC-B 为锐角，所以二面角 Q-AC-B 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. …… 15 分

18.(1)解：依题意可得$\begin{cases}64m-7n=1,\\ 16m-n=1,\end{cases}$ …… 1 分

解得$\begin{cases}m=\dfrac{1}{8},\\ n=1,\end{cases}$ …… 3 分

所以 Ω 的方程为$\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$. …… 4 分

(2)证明：由(1)知 Ω 的右焦点为$(3,0)$，…… 5 分

联立$\begin{cases}y=k(x-3),\\ \dfrac{x^2}{8}-y^2=1,\end{cases}$ 得$(1-8k^2)x^2+48k^2x-72k^2-8=0$，…… 6 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{48k^2}{8k^2-1},\\ x_1x_2=\dfrac{72k^2+8}{8k^2-1},\end{cases}$ …… 7 分

$1-8k^2\neq0$，即 $k^2\neq\dfrac{1}{8}$. …… 8 分

因为点 N 关于 x 轴的对称点为 P，所以 $P(x_2,-y_2)$，…… 9 分

则直线 PM 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，…… 10 分

根据对称性可知，直线 PM 经过的定点必在 x 轴上，…… 11 分

令 $y=0$，得 $x=-y_1\dfrac{x_1-x_2}{y_1+y_2}+x_1=\dfrac{y_1x_2+x_1y_2}{y_1+y_2}$ …… 12 分

$=\dfrac{k(x_1-3)x_2+x_1k(x_2-3)}{k(x_1-3)+k(x_2-3)}=\dfrac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)}{k(x_1+x_2)-6k}=\dfrac{2k\dfrac{72k^2+8}{8k^2-1}-3k\dfrac{48k^2}{8k^2-1}}{k\dfrac{48k^2}{8k^2-1}-6k}$. …… 14 分

当 $k\neq0$ 且 $k^2\neq\dfrac{1}{8}$ 时，$x=\dfrac{2\times\dfrac{72k^2+8}{8k^2-1}-3\times\dfrac{48k^2}{8k^2-1}}{\dfrac{48k^2}{8k^2-1}-6}=\dfrac{144k^2+16-144k^2}{48k^2-(48k^2-6)}=\dfrac{8}{3}$，…… 16 分

所以直线 PM 过定点$\left(\dfrac{8}{3},0\right)$. …… 17 分

19.解：(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-4x^3+\dfrac{4}{x}=\dfrac{-4(x^4-1)}{x}$. …… 1 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；…………………………………… 2 分

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………… 3 分

(2) $g(x)=-x^4+8(x>0)$，$g'(x)=-4x^3$.

切线 l 的方程为 $y+t^4-8=-4t^3(x-t)(t>0)$. ………………………………………………… 4 分

令 $x=0$，得 $y=3t^4+8>0$；令 $y=0$，得 $x=\dfrac{3t^4+8}{4t^3}>0$. ……………………………………… 5 分

所以 l 与坐标轴围成的三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}\times(3t^4+8)\times\dfrac{3t^4+8}{4t^3}=\dfrac{(3t^4+8)^2}{8t^3}$，………… 6 分

$S'=\dfrac{3(3t^4+8)(5t^4-8)}{8t^4}$.

当 $t\in\left(0,\sqrt[4]{\dfrac{8}{5}}\right)$ 时，$S'<0$，S 单调递减；当 $t\in\left(\sqrt[4]{\dfrac{8}{5}},+\infty\right)$ 时，$S'>0$，S 单调递增. …… 8 分

故当 $t=\sqrt[4]{\dfrac{8}{5}}$ 时，S 取得最小值，且最小值为 $\dfrac{64\sqrt[4]{1000}}{25}$. ……………………………………… 9 分

(3)不妨设 $x_1<x_2$，由(1)可知 $0<x_1<1<x_2$，则 $2-x_1>1$. ………………………………… 10 分

令 $h(x)=f(2-x)-f(x)$，则 $h'(x)=4(2-x)^3-\dfrac{4}{2-x}+4x^3-\dfrac{4}{x}$

$=4(2-x)^3+4x^3-\left(\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{4}{x}\right)=8[(2-x)^2-x(2-x)+x^2]-\dfrac{8}{(2-x)x}$

$=8(3x^2-6x+4)-\dfrac{8}{x(2-x)}$. ………………………………………………………………… 11 分

当 $x\in(0,1)$ 时，设 $t=x(2-x)\in(0,1)$，则 $h'(t)=-24t-\dfrac{8}{t}+32$.

当 $t\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减；当 $t\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增. 因为 $t=x(2-x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上先减后增. ……………………………… 13 分

因为 $f\left(\dfrac{1}{8}\right)=-\left(\dfrac{1}{8}\right)^4+4\ln\dfrac{1}{8}+8<8-4\ln 8=4(2-\ln 8)<0$，所以 $x_1\in\left(\dfrac{1}{8},1\right)$. ………

……………………………………………………………………………………………… 14 分

而 $h\left(\dfrac{1}{8}\right)=-\left(2-\dfrac{1}{8}\right)^4+4\ln\left(2-\dfrac{1}{8}\right)+\left(\dfrac{1}{8}\right)^4-4\ln\dfrac{1}{8}=\dfrac{(1-15^2)\times(1+15^2)}{8^4}+4\ln 15<-12+4\ln 15=4(\ln 15-3)<0$. ……………………………………………………………… 16 分

又因为 $h(1)=0$，所以 $h(x_1)<0$，即 $f(2-x_1)<f(x_1)=f(x_2)$，所以 $2-x_1>x_2$，即 $x_1+x_2<2$. ………………………………………………………………………………………… 17 分