永年二中 2022-2023学年第一学期高二期末考试

数学试题答案

一、单项选择题：本题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a+6}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a>3$　　　　B. $a<-2$

C. $a>3$或$a<-2$　　　　D. $-2<a<0$或$0<a<3$

【答案】D

【详解】解:由题知 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a+6}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,

则有: $\begin{cases} a^2<a+6 \\ a^2\neq 0 \end{cases}$,

解得:$-2<a<0$或$0<a<3$.

故选:D

2. 设 x、$y\in\mathbf{R}$，向量 $\vec{a}=(x,1,1)$，$\vec{b}=(1,y,1)$，$\vec{c}=(3,-6,3)$且$\vec{a}\perp\vec{c}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. 3

【答案】D

【详解】因为$\vec{a}\perp\vec{c}$，则$\vec{a}\cdot\vec{c}=3x-6+3=0$，解得 $x=1$，则 $\vec{a}=(1,1,1)$，

因为$\vec{b}//\vec{c}$，则 $\frac{1}{3}=\frac{y}{-6}$，解得 $y=-2$，即 $\vec{b}=(1,-2,1)$，

所以，$\vec{a}+\vec{b}=(2,-1,2)$，因此，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4+1+4}=3$.

故选：D.

3. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，以 D 为原点，$\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}\}$ 为单位正交基底，建立空间直角坐标系，则平面 AB_1C 的一个法向量是（　　）.

A. $(1,1,1)$　　B. $(-1,1,1)$　　C. $(1,-1,1)$　　D. $(1,1,-1)$

【答案】D

4. 方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\left(D^2+E^2-4F>0\right)$ 表示的曲线关于直线 $x+y=0$ 成轴对称图形，则（　）

A．$D+E=0$　　B．$D+F=0$　　C．$E+F=0$

D．$D+E+F=0$

【答案】A

5. 已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_{13}<0,S_{14}>0$，则S_n的最小值为（　）

A. S_6　　B. S_7　　C. S_8　　D. S_{13}

【答案】B

【详解】因为S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，

由$S_{13}<0$可得：$S_{13}=\dfrac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7<0$，所以$a_7<0$，

由$S_{14}>0$可得：$S_{14}=\dfrac{14(a_1+a_{14})}{2}=7(a_7+a_8)>0$，所以$a_7+a_8>0$，

则有$|a_8|>|a_7|$，所以等差数列$\{a_n\}$的前7项为负值，从第8项开始为正值，

所以S_n的最小值为S_7，

故选：B.

6. 直线$x+y-2=0$分别与x轴，y轴交于A,B两点，点P在圆$x^2+y^2+4x+2=0$，则$\triangle PAB$面积的取值范围是（　）

A. $[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　　B. $[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

C. $[2,6]$　　D. $[4,12]$

【答案】C

【详解】解：因为$A(2,0),B(0,2)$，所以$|AB|=2\sqrt{2}$.

圆的标准方程$(x+2)^2+y^2=2$，圆心$C(-2,0)$，

圆心C到直线AB的距离为$d=2\sqrt{2}$，

所以，点P到直线AB的距离d'的取值范围为：$[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$，

所以$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|d'\in[2,6]$.

故选:C.

7. 等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_2=7$，$S_6=91$，则S_4为（　）

A. 28　　B. 32

C. 21　　D. 28或-21

【答案】A

【详解】设$\{a_n\}$公比为q $(q\neq 0)$.

当$q=1$时，$a_n=a_1$，$S_n=na_1$，则应有$\begin{cases}S_2=2a_1=7\\S_6=6a_1=91\end{cases}$，该方程组无解，所以$q\neq 1$.

由已知可得$S_2=\dfrac{a_1\left(1-q^2\right)}{1-q}=7$，$S_6=\dfrac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q}=91$，

两式相除可得，$1+q^2+q^4=13$，整理可得$q^4+q^2-12=0$，

解得$q^2=3$或$q^2=-4$（舍去），所以$q^2=3$.

所以$S_4=\dfrac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=\dfrac{a_1\left(1-q^2\right)\left(1+q^2\right)}{1-q}=S_2\left(1+q^2\right)=7\times 4=28$

故选：A.

8. 已知F_1，F_2是椭圆与双曲线的公共焦点，P是它们的一个公共点，且$\left|PF_1\right|>\left|PF_2\right|$，线段$PF_1$的垂直平分线过$F_2$，若椭圆的离心率为$e_1$，双曲线的离心率为$e_2$，则$\dfrac{2}{e_1}+\dfrac{e_2}{2}$的最小值为（　　）

A. 8　　　　B. 6　　　　C. 4　　　　D. 2

【答案】B

【详解】设椭圆对应的参数为a_1,b_1,c，双曲线对应的参数为a_2,b_2,c，

由于线段PF_1的垂直平分线过F_2，所以有$\left|F_1F_2\right|=\left|PF_2\right|=2c$.

根据双曲线和椭圆的定义有$\begin{cases}\left|PF_1\right|+2c=2a_1\\\left|PF_1\right|-2c=2a_2\end{cases}$，

两式相减得到$4c=2\left(a_1-a_2\right)$，即$a_1-a_2=2c$，

$a_2>0,c>0$，

所以$\dfrac{2}{e_1}+\dfrac{e_2}{2}=\dfrac{2a_1}{c}+\dfrac{c}{2a_2}=4+\dfrac{2a_2}{c}+\dfrac{c}{2a_2}\geq 4+2\sqrt{\dfrac{2a_2}{c}\cdot\dfrac{c}{2a_2}}=6$，

当且仅当$\dfrac{2a_2}{c}=\dfrac{c}{2a_2}$即$c=2a_2$等号成立，即最小值为$6$.

故选：B.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对得 2 分．

9. 数列 2，0，2，0，…的通项公式可以是（　　）

A. $a_n=1-(-1)^n$，$n\in N^*$

B. $a_n=\sqrt{2[1+(-1)^n]}$，$n\in N^*$

C. $a_n=\begin{cases}2, n为奇数\\0. n为偶数\end{cases}$，$n\in N^*$

D. $a_n=\frac{1}{2}(1-\cos n\pi)$，$n\in N^*$

【答案】AC

【详解】A 选项，$a_1=2, a_2=0, a_3=2, a_4=0, \cdots$，符合题意.

B 选项，$a_1=0$，不合题意.

C 选项，a_n 符合题意.

D 选项，$a_1=1$，不合题意.

故选：AC

10. （多选）朱世杰是元代著名数学家，他所著的《算学启蒙》是一部在中国乃至世界最早的科学普及著作，《算学启蒙》中涉及一些“堆垛”问题，主要利用“堆垛”研究数列以及数列的求和问题．现有 100 根相同的圆形铅笔，小明模仿“堆垛”问题，将它们全部堆放成纵断面为等腰梯形的“垛”，要求层数不小于 2，且从最下面一层开始 5 每一层比上一层多 1 根，则该“等腰梯形垛”堆放的层数可以是（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 8

【答案】BD

【分析】设最上面一层放 a_1 根，一共放 $n(n\geqslant 2)$ 层，则最下面一层放 (a_1+n-1) 根，利用等差数列的前 n 项和公式可得 $2a_1=\frac{200}{n}+1-n$，结合 $a_1\in N^*$，可得 n 为 200 的因数，$\frac{200}{n}+(1-n)\geqslant 2$ 且为偶数，逐一验证各个选项即可得解.

【详解】解：设最上面一层放 a_1 根，一共放 $n(n\geqslant 2)$ 层，

则最下面一层放 (a_1+n-1) 根，

于是 $\frac{n(2a_1+n-1)}{2}=100$，

整理得 $2a_1=\frac{200}{n}+1-n$，

因为 $a_1\in N^*$，

所以 n 为 200 的因数，$\frac{200}{n}+(1-n)\geqslant 2$ 且为偶数，

当 $n=4$ 时，$\frac{200}{4}+(1-4)=47$，为奇数，不符合题意，

当 $n=5$ 时，$\frac{200}{5}+(1-5)=36$，符合题意，

当 $n=7$ 时，$\frac{200}{7}+(1-7)=\frac{158}{7}$，不符合题意，

当 $n=8$ 时，$\frac{200}{8}+(1-8)=18$，符合题意，

所以 $n=5$，8 满足题意.

故选：BD.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $F\left(1,0\right)$，动点 M 到点 F 的距离与到直线 $x=-1$ 的距离相等，记 M 的轨迹为曲线 C．若过点 F 的直线与曲线 C 交于 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$ 两点，则（　　）

A. $y_1y_2=-1$

B. $\triangle OAB$ 的面积的最小值是 2

C. 当 $|AF|=2|BF|$ 时，$|AB|=\frac{9}{2}$

D. 以线段 OF 为直径的圆与圆 $N:\left(x-3\right)^2+y^2=1$ 相离

【答案】BCD

【详解】依据题意动点 M 到点 $F(1,0)$ 的距离与它到直线 $x=-1$ 的距离相等，

由抛物线定义知点 M 的轨迹是以 F 为焦点，直线 $x=-1$ 为准线的抛物线，

所以点 P 的轨迹 C 的方程为 $y^2=4x,$

对于 A，取 $AB\perp x$ 轴，则 $y_1y_2=-4,$ 故 A 错误；

对于 B，显然直线 AB 的斜率不为 0，设直线 AB 的方程为 $x=my+1,$

联立 $\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$ 整理可得 $y^2-4my-4=0,$

所以 $y_1+y_2=4m,\ y_1y_2=-4,$

所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\sqrt{16m^2+16}\geqslant 2$，

当 $m=0$ 时取等号，所以 $\triangle OAB$ 的面积的最小值是 2，所以 B 正确；

C 中，$|AF|=2|BF|$ 时，则 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB},$

所以 $(1-x_1,-y_1)=2\left(x_2-1,y_2\right),$

$y_1=-2y_2$ ③，

而 $y_1+y_2=4m$, ①， $y_1y_2=-4$, ②，

①②③联立可得 $m^2=\frac{1}{8}x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2=\frac{5}{2}$

由抛物线的性质可得

$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$, 所以 C 正确；

D 中，以 OF 为直径的圆的方程为 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$, 圆心 $C(\frac{1}{2},0)$, 半径 $r_1=\frac{1}{2}$

圆 $N:(x-3)^2+y^2=1$ 的圆心 $N(3,0)$, 半径 $r_2=1$,

所以圆心距 $|CN|=\left|3-\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}>r_1+r_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

可得两个圆相离，所以 D 正确；

故选： BCD .

12. 矩形 $ABCD$ 中， $AB=2$， $AD=2\sqrt{3}$，沿对角线 AC 将矩形折成一个大小为 θ 的二面角 $B-AC-D$，若 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，则下列结论正确的有（　　）

A. 四面体 $ABCD$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

B. 点 B 与 D 之间的距离为 $2\sqrt{3}$

C. 异面直线 AC 与 BD 所成角为 45°

D. 直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【答案】ACD

【详解】分别作 $BE\perp AC, DF\perp AC$，垂足为 E，F，则 $\theta=\left\langle \overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}\right\rangle$，

由已知可得， $EB=FD=\sqrt{3}, AE=CF=1, EF=2$，

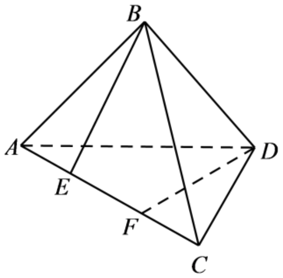
因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}$，

所以 $|\overrightarrow{BD}|^2=\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD})^2$

$=\overrightarrow{BE}^2+\overrightarrow{EF}^2+\overrightarrow{FD}^2+2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FD}$

$=3+4+3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cos(\pi-\theta)=8$，

所以 $\left|\overrightarrow{BD}\right|=2\sqrt{2}$， 故 B 错误；



因为 $AB=CD=2$， $AD=BC=2\sqrt{3}$，

所以 $CD^2+BD^2=12=BC^2$，即 $CD\perp BD$，

同理 $AB\perp BD$，

又 $CD\perp AD$， $AD\cap BD=D, AD, BD\subset$ 平面 ABD，

则 $CD\perp$ 平面 ABD，

所以四面体 $ABCD$ 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABD}\times CD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times 2=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，故 A 正确；

由题可得， $\angle CAD=30°$， $\angle CAB=60°$，

则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=4\times 2\sqrt{3}\cos 30°-4\times 2\cos 60°=8$，

则 $\cos\left\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\dfrac{8}{4\times 2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\left\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right\rangle=45°$，

所以异面直线 AC 与 BD 所成的角为 $45°$，故 C 正确；

设点 D 到平面 ABC 为 d，则 $V_{D-ABC}=V_{C-ABD}$，

所以 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}\times d=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，

所以 $d=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

设直线 AD 与平面 ABC 所成角为 α，则 $\sin\alpha=\dfrac{d}{AD}=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，故 D 正确.

故选：ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=3$， $a_6=11$，则 $S_7=$________.

【答案】49

【详解】$S_7=\dfrac{7\left(a_2+a_6\right)}{2}=\dfrac{7\times 14}{2}=49$.

14. 设双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，过$F$且斜率为$\sqrt{3}$的直线交$C$于A、$B$两点，若$\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{FB}$，则$C$的离心率为__________.

【答案】$\dfrac{6}{5}$

【详解】$\because$直线AB过点$F(\mathrm{c},0)$，且斜率为$\sqrt{3}$，$\therefore$直线AB的方程为$y=\sqrt{3}(x-c)$

与双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$联立，

消去x，得（$\dfrac{1}{3}b^2-a^2)y^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}b^2cy+b^4=0$，

设$A(x_1$，$y_1)$，$B(x_2$，$y_2)$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{3a^2-b^2}$，$y_1y_2=\dfrac{-3b^4}{3a^2-b^2}$

$\because\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{FB}$，可得$y_1=-4y_2$

$\therefore$代入上式得$-3y_2=\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{3a^2-b^2}$，$-4y_2^2=\dfrac{-3b^4}{3a^2-b^2}$，

消去y_2并化简整理，得$\dfrac{4}{3}c^2=\dfrac{3}{4}(3a^2-b^2)$，

将$b^2=c^2-a^2$代入化简，得$c^2=\dfrac{36}{25}a^2$，解之得$c=\dfrac{6}{5}a$，

因此，该双曲线的离心率$e=\dfrac{6}{5}$.

故答案为：$\dfrac{6}{5}$.

15. 已知数列$\{c_n\}$的通项公式为$c_n=(2n-1)\cdot 3^n$，则数列$\{c_n\}$的前n项和$S_n=$________.

【答案】$3+(n-1)\cdot 3^{n+1}$

【详解】由数列$\{c_n\}$的通项公式为$c_n=(2n-1)\cdot 3^n$，

所以数列$\{c_n\}$的前n项和为：

$S_n=1\times 3^1+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$，①

则：$3S_n=1\times 3^2+3\times 3^3+5\times 3^4+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，②

①−②：$-2S_n=1\times 3^1+2\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+2\times 3^n-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

即$-2S_n=2\times 3^1+2\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+2\times 3^n-3-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

即$-2S_n=2\cdot\left(3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n\right)-3-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

即 $-2S_n=2\times\frac{3\times\left(1-3^n\right)}{1-3}-3-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

即 $-2S_n=3\times\left(3^n-1\right)-3-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

即 $-2S_n=3^{n+1}-3-3-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

即 $-2S_n=-6-2\left(n-1\right)\cdot 3^{n+1}$，

所以 $S_n=3+\left(n-1\right)\cdot 3^{n+1}$，

故答案为：$3+\left(n-1\right)\cdot 3^{n+1}$.

16. 阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、阿基米德被称为亚历山大时期数学三巨匠，他对圆锥曲线有深刻而系统的研究，主要研究成果集中在他的代表作《圆锥曲线》一书，阿波罗尼斯圆是他的研究成果之一，指的是：已知动点 M 与两定点 A、B 的距离之比为 λ（λ＞0，λ≠1），那么点 M 的轨迹就是阿波罗尼斯圆．下面，我们来研究与此相关的一个问题．已知圆：$x^2+y^2=1$ 和点 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$，点 B（1，1），M 为圆 O 上动点，则 $2|MA|+|MB|$ 的最小值为_____.

【答案】$\sqrt{10}$

【详解】如图所示，取点 K（－2，0），连接 OM、MK.

∵OM＝1，OA＝$\frac{1}{2}$，OK＝2，∴ $\frac{MK}{MA}=\frac{OM}{OA}=2$，

∵∠MOK＝∠AOM，∴△MOK∽△AOM，∴ $\frac{MK}{MA}=\frac{OM}{OA}=2$，∴MK＝2MA，

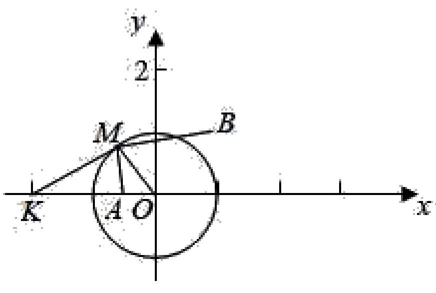
∴|MB|+2|MA|＝|MB|+|MK|，

在△MBK 中，|MB|+|MK|≥|BK|，

∴|MB|+2|MA|＝|MB|+|MK|的最小值为|BK|的长，

∵B（1，1），K（－2，0），∴|BK|＝$\sqrt{(-2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$.

故答案为 $\sqrt{10}$.



四、解答题:本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17．已知直线$l_1: mx+\left(1-2m\right)y+2-m=0$，$l_2: x+3my-3m^2=0$．

(1)当直线l_1在x轴上的截距是它在y上的截距2倍时，求实数m的值；

(2)若$l_1//l_2$，实数m的值．

【详解】

（1）∵l在两坐标轴都有截距，∴$m\neq 0$且$m\neq \frac{1}{2}$　　令$y=0$可得$x=\frac{m-2}{m}$，令$x=0$可得

$y=\frac{m-2}{1-2m}$

∴$\frac{m-2}{m}=2\times\frac{m-2}{1-2m}$，解得$m=2$或$m=\frac{1}{4}$

（2）∵$l_1//l_2$，∴$m\times 3m=1-2m$，解得$m=-1$或$\frac{1}{3}$　　当$m=-1$时，$\begin{cases} l_1: -x+3y+3=0 \\ l_2: x-3y-3=0 \end{cases}$，两直线重合

当$m=\frac{1}{3}$时，$\begin{cases} l_1: \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}=0 \\ l_2: x+y-\frac{1}{3}=0 \end{cases}$，两直线平行　　综上，$m$的值为$\frac{1}{3}$

18．已知圆$C: x^2+y^2-2x-4y+2=0$和直线$l: ax+y-1-a=0$．

（1）判断直线l与圆C的位置关系；

（2）求直线l被圆C截得的最短弦长及此时直线l的方程.

【详解】

（1）因为直线$l: ax+y-1-a=0$，即$a\left(x-1\right)+y-1=0$恒过定点$M\left(1,1\right)$

又因为圆$C: x^2+y^2-2x-4y+2=0$，即$\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2=3$

即圆心$C\left(1,2\right)$，半径为$r=\sqrt{3}$

因为$\left|CM\right|=\sqrt{\left(1-1\right)^2+\left(2-1\right)^2}=1<\sqrt{3}$

所以点M在圆内，即直线l与圆C相交.

（2）当直线$l\perp CM$时，直线l被圆C截得的弦长最短，

此时可得弦长的一半为$\sqrt{r^2-\left|CM\right|^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$

即最短弦长为$2\sqrt{2}$

又因为点M,C横坐标相同，故直线$MC\perp x$轴，

则直线l的斜率为0

所以直线l的方程为$y=1$

19.　数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=2, a_{n+1}=4a_n-3n+1, n\in \mathrm{N}^*$.

（1）设$b_n=a_n-n$，求证：数列$\left\{b_n\right\}$　等比数列；

（2）求数列$\left\{a_n\right\}$的前项和.

【详解】

（1）由已知又$b_1=a_1-1$，$a_1=2$，所以$b_1=1$，

因为$a_{n+1}=4a_n-3n+1, n\in \mathrm{N}^*$，

所以$a_{n+1}-\left(n+1\right)=4\left(a_n-n\right)$，又$b_n=a_n-n$

所以$b_{n+1}=4b_n$，$n\in \mathrm{N}^*$，因为$b_1=1$，所以$b_n\neq 0$，$n\in \mathrm{N}^*$

所以$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=4$，$n\in \mathrm{N}^*$

所以数列$\left\{b_n\right\}$是首项为 1，公比为 4 的等比数列.

（2）由（1），可知$a_n-n=4^{n-1}$，

所以数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=4^{n-1}+n$.

设数列$\left\{a_n\right\}$的前项和为S_n，则

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，

所以$S_n=\left(4^0+1\right)+\left(4^1+2\right)+\left(4^2+3\right)+\cdots+\left(4^{n-1}+n\right)$，

$S_n=4^0+1+4^1+2+4^2+3+\cdots+4^{n-1}+n$，

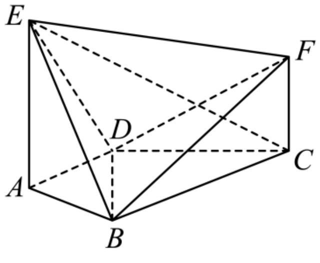
$S_n=\left(4^0+4^1+4^2+\cdots+4^{n-1}\right)+\left(1+2+3+\cdots+n\right)$，

$S_n=\dfrac{1-4^n}{1-4}+\dfrac{\left(1+n\right)n}{2}$，

所以$S_n=\dfrac{4^n-1}{3}+\dfrac{n^2+n}{2}$，

所以数列$\left\{a_n\right\}$的前项和为$\dfrac{4^n-1}{3}+\dfrac{n^2+n}{2}$.

20. 如图，$AE\perp$平面$ABCD$，$BF//$平面ADE，$CF//AE$，$AD\perp AB$，$AB=AD=1$，$AE=BC=2$.



（1）求证：$AD//BC$；

（2）求直线CE与平面BDE所成角的余弦值.

【详解】

（1）证明：由题知，$CF//AE$，$CF\not\subset$平面ADE，$AE\subset$平面ADE

所以$CF//$平面ADE，

因为$BF//$平面ADE，$BF\cap CF=F,BF,CF\subset$平面BCF，

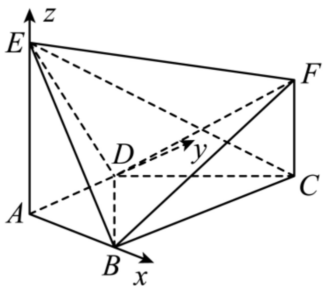
所以平面$BCF//$平面ADE，

因为平面$BCF\cap$平面$ABCD=AD$,平面$ADE\cap$平面$ABCD=BC$

所以$AD//BC$.

（2）根据题意，建立以A为原点，

分别以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$得方向为$x$轴，$y$轴，$z$轴正方向得空间直角坐标系，



因为$AE\perp$平面$ABCD$，$BF//$平面ADE，$CF//AE$，$AD\perp AB$，$AB=AD=1$，$AE=BC=2$，

所以$A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,2,0),D(0,1,0),E(0,0,2)$，

所以$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0),\overrightarrow{BE}=(-1,0,2),\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$，

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面BDE的法向量，

所以$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x+y=0\\-x+2z=0\end{cases}$，令$z=0$，可得$\vec{n}=(2,2,1)$，

设直线CE与平面BDE所成角为θ

所以$\sin\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CE}||\vec{n}|}\right|=\left|\dfrac{-2-4+2}{3\cdot3}\right|=\dfrac{4}{9}$，

所以$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{65}}{9}$

所以直线CE与平面BDE所成角　余弦值为$\dfrac{\sqrt{65}}{9}$.

21. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_{n+1}=2S_n+9\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$b_n=\log_3 a_n$，证明：$\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}<\frac{1}{2}$.

【详解】

（1）因为$a_{n+1}=2S_n+9$，则当$n=1$时，$a_2=2S_1+9=2a_1+9$，

当$n\geq 2$时，由$a_{n+1}=2S_n+9$可得$a_n=2S_{n-1}+9$，

所以$a_{n+1}-a_n=2(S_n-S_{n-1})=2a_n$，即$a_{n+1}=3a_n$，

因为$\{a_n\}$是等比数列，则该数列的公比为3，则$a_2=3a_1$，

所以$2a_1+9=3a_1$，即$a_1=9$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=9\times 3^{n-1}=3^{n+1}$.

（2）由（1）得$b_n=\log_3 a_n=n+1$，

所以$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，

故 $\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2}$.

22. 已知抛物线 C：$x^2=2py\left(p>0\right)$，F 为抛物线 C 的焦点，$M\left(x_0,1\right)$是抛物线 C 上点，且$|MF|=2$；

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）过平面上一动点$P\left(m,m-2\right)$作抛物线 C 的两条切线 PA，PB（其中 A，B 为切点），求$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$的最大值.

【详解】

（1）依题意得：$|MF|=1+\frac{p}{2}=2$

$\therefore p=2$，$\therefore 2p=4$，

所求抛物线C_2的方程为$x^2=4y$；

（2）抛物线C_2的方程为$x^2=4y$，即 $y=\frac{x^2}{4}\therefore y'=\frac{x}{2}$，

设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$P\left(m,m-2\right)$则切线 PA，PB 的斜率分别为$\frac{x_1}{2}$，$\frac{x_2}{2}$.

所以切线 PA：$y-y_1=\frac{x_1}{2}\left(x-x_1\right)$，

$\therefore y=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{x_1^{\ 2}}{2}+y_1$，又$\because x_1^{\ 2}=4y_1$，$\therefore 2y-x_1x+2y_1=0$，

同理可得切线 PB 的方程为 $2y-x_2x+2y_2=0$，

因为切线 PA，PB 均过点 $P\left(m,m-2\right)$，所以 $2y_1-mx_1+2m-4=0$，

$2y_2-mx_2+2m-4=0$，

所以$\left(x_1,\ y_1\right)$，$\left(x_2,\ y_2\right)$为方程 $2y-mx+2m-4=0$ 的两组解.

所以直线 AB 的方程为 $2y-mx+2m-4=0$.

联立方程$\begin{cases}2y-mx+2m-4=0\\ x^2=4y\end{cases}$，消去 x 整理得 $y^2-\left(m^2-2m+4\right)y+\left(m-2\right)^2=0$，

$\therefore \Delta=\left(m^2-2m+4\right)^2-4\left(m-2\right)^2=\left(m^2-4m+8\right)m^2\geqslant 0$，$\therefore m\in R$.

$\therefore y_1+y_2=m^2-2m+4$，$y_1y_2=\left(m-2\right)^2$

由抛物线定义可知 $\left|AF\right|=y_1+1$，$\left|BF\right|=y_2+1$，

所以 $\dfrac{1}{\left|AF\right|}+\dfrac{1}{\left|BF\right|}=\dfrac{\left|AF\right|+\left|BF\right|}{\left|AF\right|\left|BF\right|}$

$\because \left|AF\right|\left|BF\right|=\left(y_1+1\right)\left(y_2+1\right)=y_1y_2+\left(y_1+y_2\right)+1$

$=2m^2-6m+9$，

$\therefore \dfrac{1}{\left|AF\right|}+\dfrac{1}{\left|BF\right|}=\dfrac{\left|AF\right|+\left|BF\right|}{\left|AF\right|\left|BF\right|}=\dfrac{m^2-2m+6}{2m^2-6m+9}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{m+\frac{3}{2}}{2m^2-6m+9}$

令 $m+\dfrac{3}{2}=t\in R$

$\therefore$原式$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{t}{2t^2-12t+\frac{45}{2}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2t+\frac{45}{2t}-12}\leqslant\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6\sqrt{5}-12}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{6}$，

即原式的最大值 $\dfrac{5+\sqrt{5}}{6}$.