2025—2026 学年第一学期高三年级数学检测题

参考答案及评分意见

1.A 【解析】因为集合 $A=\{x\mid x^2>1\}=\{x\mid x<-1 \text{ 或 } x>1\}$，集合 $B=\left\{x\,\middle|\,2^x<\frac{1}{2}\right\}=\{x\mid x<-1\}$，

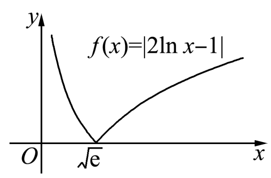
所以 $A\cap B=\{x\mid x<-1\}$，$A\cup B=\{x\mid x<-1 \text{ 或 } x>1\}$.故选 A.

2.D 【解析】因为 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=1+\mathrm{i}$，所以 $z\cdot\bar{z}=(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=2$.故选 D.

3.D 【解析】$\boldsymbol{a}=(x+1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x,2)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x(x+1)+2x=0$，解得 $x=0$ 或 -3，故 A，C 错误；

若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $2(x+1)=x^2$，解得 $x=1\pm\sqrt{3}$，故 B 错误，D 正确.故选 D.

4.B 【解析】由 $f(x)=|2\ln x-1|$ 得 $x>0$，作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如图.



由 $f(a)=f(b)$，得 $a>0$，$b>0$，$2\ln a-1=-(2\ln b-1)$，即 $\ln a+\ln b=1$，则 $ab=\mathrm{e}$.

所以 $16^a\cdot 8^b=2^{4a}\cdot 2^{3b}=2^{4a+3b}\geqslant 2^{2\sqrt{4a\cdot 3b}}=2^{4\sqrt{3ab}}=2^{4\sqrt{3\mathrm{e}}}=16^{\sqrt{3\mathrm{e}}}$，

当且仅当 $4a=3b$，即 $a=\frac{\sqrt{3\mathrm{e}}}{2}$，$b=\frac{2\sqrt{3\mathrm{e}}}{3}$ 时等号成立.所以 $16^a\cdot 8^b$ 的最小值为 $16^{\sqrt{3\mathrm{e}}}$.故选 B.

5.C 【解析】由题意，圆心为 $(0,1)$，则圆心 $(0,1)$ 到直线 $y=\frac{1}{2}x+2$ 的距离 $d=\frac{|0-1+2|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

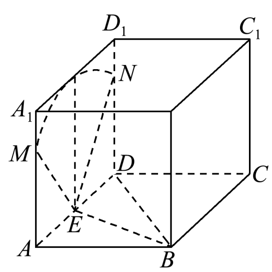
要使圆 $x^2+(y-1)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\frac{1}{2}x+2$ 的距离为 $\sqrt{5}$ 的点有且仅有 2 个，

则 $|r-d|<\sqrt{5}<r+d$，则半径 r 的取值范围是 $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{7\sqrt{5}}{5}\right)$.故选 C.

6.D 【解析】依题意，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，设 $AA_1=AB=BD=a(a>0)$，

则 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=a^2\sin\angle BAD\cdot a=a^3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^3=32\sqrt{3}$，解得 $a=4$.

如图，取 AD 的中点 E，连接 BE.



因为 $\triangle ABD$ 是边长为 4 的正三角形，所以 $BE\perp AD$，且 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

设以 B 为球心的球的半径为 R，则该球的表面积为 $4\pi R^2=112\pi$，解得 $R=2\sqrt{7}$.

因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，$BE\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BE\perp AA_1$.

又因为 $BE\perp AD$，$AD\cap AA_1=A$，$AD,AA_1\subset$ 平面 AA_1D_1D，所以 $BE\perp$ 平面 AA_1D_1D.

所以球面被平面 AA_1D_1D 截得的圆的半径为$\sqrt{(2\sqrt{7})^2-(2\sqrt{3})^2}=4$.

设在侧面 AA_1D_1D 中,以 E 为圆心,4 为半径的圆弧与棱 AA_1,DD_1 的交点分别为 M,N,$\overset{\frown}{MN}$ 即为所求的交线.因为 $AA_1\perp AD$,$AE=2=\frac{1}{2}EM$,所以$\angle AME=\frac{\pi}{6}$,则$\angle AEM=\frac{\pi}{3}$,同理得$\angle DEN=\frac{\pi}{3}$,所以$\angle MEN=\frac{\pi}{3}$.

又因为 $EM=EN=4$,所以 $\overset{\frown}{MN}$ 的长度为$\frac{\pi}{3}\times 4=\frac{4\pi}{3}$,故选 D.

7.B 【解析】由题意,先将 $f(x)$图象上点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得 $y=\sin 2x$ 的图象,

再将所得图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得 $g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

因为 $\alpha\in\left[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{4}\right]$,所以 $2\alpha\in\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}\right]$,$2\alpha-\frac{\pi}{6}\in\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]$,

所以 $g(\alpha)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right]$,则$-g(\alpha)\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

$\forall\alpha\in\left[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{4}\right]$,总存在唯一实数 $\beta\in[0,m]$,使得 $g(\alpha)+g(\beta)=0$,

即$\forall\alpha\in\left[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{4}\right]$,总存在唯一实数 $\beta\in[0,m]$,使得 $g(\beta)=-g(\alpha)$,

即$\forall g(\alpha)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right]$,总存在唯一实数 $\beta\in[0,m]$,使得 $g(\beta)\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

因为 $\beta\in[0,m]$,所以 $2\beta\in[0,2m]$,$2\beta-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},2m-\frac{\pi}{6}\right]$,

因为总存在唯一实数 β,使得 $g(\beta)\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,则$\frac{\pi}{3}\leqslant 2m-\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$,解得$\frac{\pi}{4}\leqslant m<\frac{5\pi}{12}$.

所以实数 m 的取值范围为$\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right)$.故选 B.

8.D 【解析】设 $f(x)=e^x-3x$,则 $f'(x)=e^x-3$,

当 $x<\ln 3$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当 $x>\ln 3$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

所以 $f(x)$在 $x=\ln 3$ 处有最小值,$f(\ln 3)=3-3\ln 3<0$.

又因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}>0$,$f(2)=e^2-6>0$,所以 $f(x)$有两个零点,设 x_1,$x_2(x_1<x_2)$.

当 $x<x_1$,$x>x_2$ 时,$f(x)>0$,当 $x_1<x<x_2$ 时,$f(x)<0$.

由 $e^x=3x$,两边取自然对数得 $x=\ln x+\ln 3$,即 $\ln x-x+\ln 3=0$ 的两根也是 x_1,x_2.

$g(x)=\ln x-x+a$,要使得任意的 $x>0$,不等式$(e^x-3x)(\ln x-x+a)\leqslant 0$ 恒成立,

必需 $f(x)$,$g(x)$有相同的零点 x_1,x_2,并且在零点分段对应的区间内,函数值异号.

当 $a=\ln 3$ 时,$g(x)$有两个零点 x_1,x_2,当 $x<x_1$,$x>x_2$ 时,$g(x)<0$,

当 $x_1<x<x_2$ 时,$g(x)>0$,满足条件,所以满足条件的 $a=\ln 3$.故选 D.

9.ABD 【解析】对于 A,设样本数据 x_1,x_2,$\cdots$,x_n 的平均数为 $\overline{x}$,

则 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]=0$,所以 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\overline{x}$,故 A 正确;

对于 B,在做回归分析时,残差图中残差点分布的带状区域的宽度越窄表示回归效果越好,故 B 正确;

对于 C,由题意得 $\ln y=kx+\ln c=0.3x+4$,所以 $k=0.3$,$\ln c=4$,$c=e^4$,故 C 错误;

对于 D,样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数 $\bar{x}=4$,

则样本数据 $2-3x_1,2-3x_2,\cdots,2-3x_n$ 的平均数为 $2-3\bar{x}=2-3\times4=-10$,故 D 正确.故选 ABD.

10.CD 【解析】对于 A,抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为 $y=-1$,焦点为 $F(0,1)$,故 A 错误.

对于 B,设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由抛物线的定义得 $|AF|+|BF|=y_1+y_2+2=8$,即 $y_1+y_2=6$.

所以线段 AB 的中点到 x 轴的距离为 $\frac{y_1+y_2}{2}=3$,故 B 错误.

对于 C,因为 $|AF|=y_1+1$,线段 AF 的中点为 $\left(\frac{x_1}{2},\frac{y_1+1}{2}\right)$,该点到 x 轴的距离为 $\frac{y_1+1}{2}=\frac{1}{2}|AF|$,

故以线段 AF 为直径的圆与 x 轴相切,故 C 正确.

对于 D,因为 $|AF|=y_1+1$,故以 A 为圆心,线段 AF 的长为半径的圆与准线相切,故 D 正确.故选 CD.

11.ACD 【解析】由正方体的性质可知,$B_1C\perp$平面 ABC_1D_1,平面 $ABC_1D_1\cap$平面 $BB_1C_1C=BC_1$,

所以点 E 的轨迹为线段 BC_1,其长度大小为 $\sqrt{2}$,故 A 正确.

由正方体的性质可知,$BC_1\,/\!/$平面 ACD_1,$\triangle ACD_1$ 的面积不变,所以 $V_{A-CD_1E}=V_{E-ACD_1}$,

即三棱锥 $A-CD_1E$ 的体积始终不变,故 B 错误.

设异面直线 AE 与 B_1D_1 所成角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{B_1D_1}\rangle|$.

设 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC_1}$,则 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AA_1}$.

又 $\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AA_1})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$.

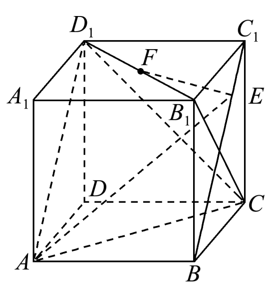
因为 AB,AD,AA_1 两两垂直,所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=\lambda-1$,$|\overrightarrow{B_1D_1}|=\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{1+2\lambda^2}$.

因为 $0\leqslant\lambda\leqslant1$,所以 $\cos\theta=\frac{1-\lambda}{\sqrt{1+2\lambda^2}\times\sqrt{2}}=\frac{1-\lambda}{\sqrt{2+4\lambda^2}}$,所以当 $\lambda=0$ 时,$\cos\theta$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以当点 E 位于点 B 时,异面直线 AE 与 B_1D_1 所成角最小,最小值为 $\frac{\pi}{4}$,故 C 正确.

设 $EB=x(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$,$B_1F=y$,$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1F}$,又因为 $\langle\overrightarrow{EB},\overrightarrow{BB_1}\rangle=\frac{3\pi}{4}$,$\langle\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{B_1F}\rangle=\frac{\pi}{2}$,$\langle\overrightarrow{EB},\overrightarrow{B_1F}\rangle=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\overrightarrow{EF}^2=\overrightarrow{EB}^2+\overrightarrow{BB_1}^2+\overrightarrow{B_1F}^2+2\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BB_1}^2+2\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{B_1F}+2\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{B_1F}^2$

$=x^2+1+y^2-\sqrt{2}x-xy=\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}\left(x-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{3}$,

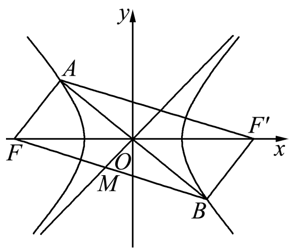
当且仅当 $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$y=\frac{\sqrt{2}}{3}$ 时,取到最小值,即 $EF\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 EF 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 D 正确.故选 ACD.



12.33 【解析】令 $x=0$,则 $a_0=(3\times0-1)^5=-1$,令 $x=1$,则 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=(3\times1-1)^5=2^5$,

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2^5-(-1)=33$.

13.$\frac{\sqrt{21}}{3}$ 【解析】设双曲线 C 的右焦点为 $F'(c,0)$,连接 AF',BF',如图.



因为 O,M 分别是 AB,BF 的中点,所以 $OM\parallel AF$.

又因为直线 OM 是双曲线 C 的一条渐近线,所以 $\tan\angle AFO=\frac{b}{a}$,$\cos\angle AFO=\frac{a}{c}$.

由双曲线的对称性,得 $|BF|=|AF'|$.由 $|BF|=4|AF|$,得 $|AF'|=4|AF|$.

又因为 $|AF'|-|AF|=2a$,所以 $|AF'|=\frac{8}{3}a$,$|AF|=\frac{2}{3}a$.

在 $\triangle FAF'$ 中,由余弦定理得 $\frac{64}{9}a^2=\frac{4}{9}a^2+4c^2-2\times\frac{2}{3}a\times 2c\times\frac{a}{c}$,化简 $\frac{21}{9}a^2=c^2$.

所以双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

14.$\frac{8}{25}$　**【解析】**因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $2^{n+1}-2$,所以当 $n=1$ 时,$a_1=2^2-2=2$;

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)=2^n$,又因为 $a_1=2$ 满足上式,所以 $a_n=2^n$.

因为 $b_1+\frac{b_2}{3}+\cdots+\frac{b_n}{2n-1}=n^2$,所以当 $n=1$ 时,又 $b_1=1^2=1$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$b_1+\frac{b_2}{3}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{2n-3}=(n-1)^2$,

两式相减得,$b_n=(2n-1)[n^2-(n-1)^2]=(2n-1)^2$,又因为 $b_1=1$ 满足上式,所以 $b_n=(2n-1)^2$.

所以 $c_n=\frac{2^n}{(2n-1)^2}$,由 $\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{2(2n-3)^2}{(2n-1)^2}<1$,得 $4n^2-20n+17<0$,

解得 $\frac{5}{2}-\sqrt{2}<n<\frac{5}{2}+\sqrt{2}$,即当 $2\leqslant n\leqslant 3$ 时,$c_1>c_2>c_3<c_4<c_5<\cdots<c_n$,

所以数列 $\{c_n\}$ 的最小项为 $c_3=\frac{8}{25}$.

15.(1)**解:**数列 $\{a_n\}$ 单调递增, ………………………………………………………………………… 1 分

理由如下:由题意,$g(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2$,则 $g'(x)=x^2+2ax$,所以 $g'(1)=1+2a$.

因为函数 $g(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2$ 的图象在 $x=1$ 处的切线平行于直线 $2x-y=0$,直线 $2x-y=0$ 的斜率为 2,

所以 $g'(1)=1+2a=2$,解得 $a=\frac{1}{2}$,所以 $f(x)=g'(x)=x^2+x$.……………………………………… 3 分

则 $a_{n+1}=f(a_n)=a_n^2+a_n$.又 $a_1=\frac{1}{2}$,所以 $a_{n+1}>0$,所以 $a_n>0$,

所以 $a_{n+1}-a_n=a_n^2>0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 单调递增. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)**证明:**因为 $a_{n+1}=a_n(a_n+1)$,$a_n>0$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$,则 $\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$. …… 8 分

$T_n=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=2-\frac{1}{a_{n+1}}<2$. ………………… 10 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\geqslant\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}=\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{26}{21}>1$. ………………………… 12 分

所以 $1<\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}<2$. ………………………………………… 13 分

16.**解**：(1)设 A,B,C 三款模型通过算法设计评审分别为事件 M,N,T，

A,B,C 三款中恰有两款通过算法设计评审为事件 D. ………………………………………… 2 分

则 $P(D)=P(MN\overline{T})+P(\overline{M}NT)+P(M\overline{N}T)$

$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{13}{30}$. ………………………… 4 分

所以 A,B,C 三款中恰有两款通过算法设计评审的概率为$\frac{13}{30}$. ………………………… 5 分

(2)设 A,B,C 三款中恰有一款通过算法设计评审为事件 E，则 $P(E)=P(M\overline{N}\ \overline{T})+P(\overline{M}N\overline{T})+P(\overline{M}\ \overline{N}T)=$

$\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{4}{5}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{3}{20}$. ………………………… 7 分

由条件概率公式得 $P(M|E)=\frac{P(ME)}{P(E)}=\frac{\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{20}}=\frac{1}{3}$. ………………………… 8 分

(3)设 A,B,C 三款模型能成功上线分别为事件 Q,W,R，

则 $P(Q)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$，$P(W)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$，$P(R)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$. ………………………… 10 分

X 的可能取值为 0，1，2，3，

则 $P(X=0)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{12}{25}\right)=\frac{13}{100}$，

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{12}{25}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{12}{25}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{12}{25}=\frac{19}{50}$，

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{12}{25}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{12}{25}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{12}{25}=\frac{37}{100}$，

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{12}{25}=\frac{3}{25}$.

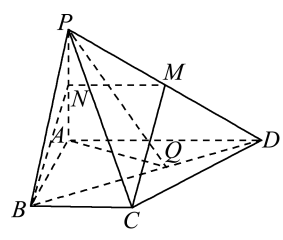
所以 X 的分布列如下，

X	0	1	2	3
P	$\frac{13}{100}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{3}{25}$

………………………………………… 14 分

所以数学期望 $E(X)=0\times\frac{13}{100}+1\times\frac{19}{50}+2\times\frac{37}{100}+3\times\frac{3}{25}=\frac{37}{25}$. ………………………… 15 分

17.(1)**证明**：如图，取 PA 的中点 N，连接 MN，BN.



$\because M$ 为 PD 的中点，$\therefore MN\parallel AD$，且 $MN=\frac{1}{2}AD=1$.

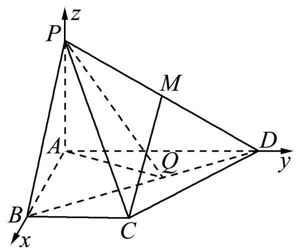
又$\because BC=1, BC // AD, \therefore BC // MN$，且$BC=MN$.

$\therefore$四边形$BCMN$为平行四边形，$\therefore CM // BN$. ………………………………………… 2分

$\because BN \subset$平面PAB，$CM \not\subset$平面PAB，$\therefore CM //$平面PAB. ………………………………… 3分

(2)**解**：①$\because PA \perp$平面$ABCD$，且$AB \perp AD$，$\therefore AB, AD, AP$两两垂直.

以点A为坐标原点，AB, AD, AP所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立如图所示的空间直角坐标系.



则$A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,2,0), P(0,0,2)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(1,0,0), \overrightarrow{AP}=(0,0,2), \overrightarrow{PD}=(0,2,-2), \overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$. ……………………… 5分

平面PAB的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(0,1,0)$. ……………………………………………………… 6分

设平面PCD的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}_2=2y-2z=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}_2=-x+y=0,\end{cases}$令$x=1$，则$\boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$. ……………………………………… 7分

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$平面PAB与平面PCD夹角的正弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………………… 9分

②存在点Q满足题意.

$\overrightarrow{BD}=(-1,2,0), \overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，

假设存在点Q满足题意，设$\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BD}=(-\lambda,2\lambda,0), 0\leqslant\lambda<1$，

$\therefore Q(1-\lambda,2\lambda,0), \overrightarrow{AQ}=(1-\lambda,2\lambda,0)$. ………………………………………………… 11分

设平面PAQ的法向量为$\boldsymbol{n}_3=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}_3=2c=0,\\ \overrightarrow{AQ}\cdot\boldsymbol{n}_3=(1-\lambda)a+2\lambda b=0,\end{cases}$令$a=2\lambda$，则$\boldsymbol{n}_3=(2\lambda,\lambda-1,0)$. ………………………… 13分

$\therefore$点D到平面PAQ的距离$d=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}_3|}{|\boldsymbol{n}_3|}=\dfrac{|2(\lambda-1)|}{\sqrt{(2\lambda)^2+(\lambda-1)^2}}=1$，

化简得$\lambda^2+6\lambda-3=0$，解得$\lambda=2\sqrt{3}-3$或$\lambda=-2\sqrt{3}-3$(舍去)，即$\dfrac{BQ}{BD}=2\sqrt{3}-3$. ……………… 15分

18.(1)**解**：双曲线$4x^2-\dfrac{4}{3}y^2=1$的标准方程为$\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$.

因为$\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$，所以双曲线的焦点为$(\pm1,0)$. ………………………………………………… 2分

因为椭圆C与双曲线的焦点相同，设椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且$a^2-b^2=1$，

因为椭圆C的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$c=1$，则$a=\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………………………………………… 5 分

(2)**证明**:设直线 AM,AN 的倾斜角分别为α 和β,则直线 AN' 的倾斜角为 $180°-\beta$.

由题意,设 α 和β 均不等于 $90°$,又因为直线 AF_1 的斜率为$\frac{1-0}{0-(-1)}=1$,所以其倾斜角为 $45°$,

所以 $\alpha+\beta=90°$,即 $\alpha=90°-\beta$, ………………………………………………………………………… 7 分

则 $\tan\alpha=\tan(90°-\beta)=\frac{\sin(90°-\beta)}{\cos(90°-\beta)}=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{1}{\tan\beta}$,即 $\tan\alpha\tan\beta=1$,

又因为 $\tan\beta=-\tan(180°-\beta)$,所以 $\tan(180°-\beta)\tan\alpha=-1$. ………………………………………… 9 分

设直线 AM,AN' 的斜率分别为 k_1,k_2,则 $k_1k_2=-1$,

所以直线 AM,AN' 的方程分别为 $y=k_1x+1$,$y=k_2x+1$,设 $M(x_1,y_1)$,

由$\begin{cases}y=k_1x+1,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$消去 y,整理得$(2k_1^2+1)x^2+4k_1x=0$,解得 $x_1=\frac{-4k_1}{2k_1^2+1}$,

则 $y_1=k_1\cdot\frac{-4k_1}{2k_1^2+1}+1=\frac{1-2k_1^2}{2k_1^2+1}$. ……………………………………………………………… 12 分

点 $M\left(\frac{-4k_1}{2k_1^2+1},\frac{1-2k_1^2}{2k_1^2+1}\right)$,同理得 $N'\left(\frac{-4k_2}{2k_2^2+1},\frac{1-2k_2^2}{2k_2^2+1}\right)$. …………………………………… 13 分

由题意,直线 MN' 的斜率存在,故设直线 MN'的方程为 $y=mx+n$,

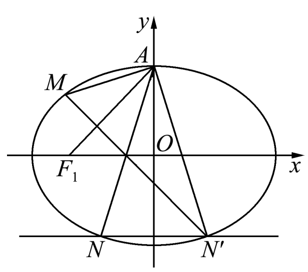
代入点 M 的坐标得$\frac{1-2k_1^2}{2k_1^2+1}=m\cdot\frac{-4k_1}{2k_1^2+1}+n$,化简得 $k_1^2(2n+2)-4mk_1+n-1=0$,

同理有 $k_2^2(2n+2)-4mk_2+n-1=0$,

故 k_1,k_2 是方程$(2n+2)x^2-4mx+n-1=0$ 的两个根,

故 $k_1k_2=\frac{n-1}{2n+2}=-1$,解得 $n=-\frac{1}{3}$, ……………………………………………………………… 16 分

故直线 MN'的方程为 $y=mx-\frac{1}{3}$,直线 MN'过定点 $Q\left(0,-\frac{1}{3}\right)$. ……………………………… 17 分



19.**解**:(1)因为 $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$,$x\in\mathbf{R}$,所以 $f'(x)=x-\sin x$. …………………………………… 2 分

设 $\varphi(x)=x-\sin x$,则 $\varphi'(x)=1-\cos x$,

因为 $\varphi'(x)=1-\cos x\geqslant0$,所以 $f'(x)=x-\sin x$ 为增函数. ……………………………………… 4 分

又因为 $f'(0)=0$,所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增. ………………………… 5 分

所以 $f(x)\geqslant f(0)=1$.

所以 $f(x)$有最小值 1,没有最大值. …………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知当 $x\geqslant0$ 时,$\sin x\leqslant x$,$\cos x\geqslant-\frac{x^2}{2}+1$,

所以$\frac{x^2}{2}+x+1\geqslant\sin x-\cos x+2$. …………………………………………………………………… 8 分

设 $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1$，则 $g'(x)=e^x-x-1$，$g''(x)=e^x-1$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$g''(x)=e^x-1\geqslant 0$，所以 $g'(x)=e^x-x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(x)\geqslant g'(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $e^x\geqslant\frac{x^2}{2}+x+1$，所以 $e^x\geqslant\sin x-\cos x+2$ 对任意的 $x\geqslant 0$ 恒成立.

…… 10 分

又当 $x\geqslant 0$，$a\geqslant 1$ 时，$e^{ax}\geqslant e^x$，所以当 $a\geqslant 1$ 时，$e^{ax}\geqslant\sin x-\cos x+2$ 对任意的 $x\geqslant 0$ 恒成立.

当 $a<1$ 时，设 $h(x)=e^{ax}-\sin x+\cos x-2$，则 $h'(x)=ae^{ax}-\cos x-\sin x$，$h'(0)=a-1<0$，

所以存在实数 $x_0>0$，使得任意 $x\in(0,x_0)$，均有 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<h(0)=0$，所以 $a<1$ 不符合题意. ……………………………………… 12 分

设 $t(x)=\sin x-\cos x-ax+x^2+1$，则 $t'(x)=\cos x+\sin x-a+2x$，

$t''(x)=-\sin x+\cos x+2>0$，所以 $t'(x)$ 单调递增，$t'(0)=1-a$. ……………………………… 14 分

当 $a\leqslant 1$ 时，在 $x\geqslant 0$ 时，$t'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $t(0)=0$，所以 $t(x)\geqslant 0$ 恒成立. ……………………………………………………………… 15 分

当 $a>1$ 时，$t'(0)<0$，存在 $x_1>0$，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，

$t(x)<t(0)=0$，不满足条件，

所以当 $a\leqslant 1$ 时，$\sin x-\cos x+2\geqslant -x^2+ax+1$ 对任意的 $x\geqslant 0$ 恒成立. ………………… 16 分

综上，$a=1$. ……………………………………………………………………………………………… 17 分