2024-2025 学年第二学期期中考试

高二数学参考答案及评分标准

内容与范围：选必二 第五章、选必三 第六章至第七章第四节

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．解：函数 $f(x)=2^x$，则 $f'(x)=2^x ln2$，故 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(2+\triangle x)-f(2)}{\triangle x}=f'$（2）$=4ln2$．故选：$A$．

2．解：$(x+y)^5$ 的通项公式为：$T_{r+1}=C_5^r \bullet x^{5-r} \bullet y^r$，

令 $5-r=1$，得 $r=4$；令 $5-r=2$，得 $r=3$；

$\therefore (x-y)(x+y)^5$ 的展开式中 x^2y^4 的系数为：$C_5^4\times 1+(-1)\times C_5^3=-5$．故选：$B$．

3．解：记事件 D：选取的这个人患了流感，记事件 E：此人来自 A 地区，

记事件 F：此人来自 B 地区，记事件 G：此人来自 C 地区，

则 $D=E\bigcup F\bigcup G$，且 E，F，G 彼此互斥，

由题意可得 $P(E)=\dfrac{9}{22}$，$P(F)=\dfrac{6}{22}=\dfrac{3}{11}$，$P(G)=\dfrac{7}{22}$，

$P(D|E)=\dfrac{1}{10}$，$P(D|F)=\dfrac{9}{100}$，$P(D|G)=\dfrac{8}{100}=\dfrac{2}{25}$，

由全概率公式可得 P（D）$=P$（E）$\cdot P(D|E)+P(F)\cdot P(D|F)+P(G)\cdot P(D|G)$

$=\dfrac{9}{22}\times\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{11}\times\dfrac{9}{100}+\dfrac{7}{22}\times\dfrac{2}{25}=\dfrac{9}{220}+\dfrac{27}{1100}+\dfrac{7}{275}=\dfrac{100}{1100}=\dfrac{1}{11}$．故选：$A$．

4．解：男、女各 3 名同学排成前后两排合影留念，每排 3 人，若每排同一性别的两名同学不相邻，

若第一排有 2 名男生，1 名女生，则第一排女生只能站中间，第二排男生只能站中间，

不同的排法种数为 $C_3^2A_2^2C_3^1A_2^2=36$；

同理可得：若第一排有 1 名男生，2 名女生，不同的排法种数为 36.

根据分类加法计数原理可知，不同的排法种数为 $36+36=72$．故选：B．

5．解：P（B）$=P(AB+\overline{A}B)=P$（A）$P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})$，

$\therefore 0.4=0.8P$（A）$+0.3[1-P$（A）$]$，解得 P（A）$=\dfrac{1}{5}$．故选：D．

6．解：根据题意可得$\begin{cases}p_1+p_2=0.8,\\0\times 0.2+1\times p_1+2\times p_2=\dfrac{7}{5},\end{cases}$解得$\begin{cases}p_1=0.2,\\p_2=0.6,\end{cases}$

所以 $D(\dfrac{1}{2}X)=\dfrac{1}{4}D(X)=\dfrac{1}{4}\times[0.2\times(1.4-0)^2+0.2\times(1-1.4)^2+0.6\times(2-1.4)^2]=0.16$．故选：$C$．

7．解：由题意可得 $\dfrac{2\times 2}{m+n+2}=\dfrac{1}{3}$，故 $m+n=10$，

故 $\dfrac{C_2^1C_m^1}{C_{12}^2}=\dfrac{1}{11}$，即 $\dfrac{m}{33}=\dfrac{1}{11}$，解得 $m=3$，所以 $n=7$．

故若有放回地任取 2 个球，则取出一蓝一绿的概率为 $\dfrac{3}{12}\times\dfrac{7}{12}+\dfrac{7}{12}\times\dfrac{3}{12}=\dfrac{7}{24}$．故选：$B$．

8．解：令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$，

当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，由 f（3）$=9$，则 $g(3)=\dfrac{f(3)}{3^2}=1$，

又 $f(3^x)=9^xg(3^x)$，所以 $f(3^x)-9^x<0\Leftrightarrow 9^xg(3^x)-9^x<0$，

即 $g(3^x)<1=g$（3），即有$\begin{cases}3^x>3\\3^x>0\end{cases}$，解得 $x\in(1,+\infty)$．故选：D．

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．解：由 $f(x)=x^3+\sin x$ 得 $f(-x)=(-x)^3+\sin(-x)=-x^3-\sin x=-f(x)$，

即 $f(x)$ 为奇函数，A 正确，B 错误；

$f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi^3}{8}+1>f(0)$，故 $f(x)=x^3+\sin x$ 不是减函数，故 C 错误；

又 $f'(x)=3x^2+\cos x$，所以 $f'(\pi)=3\pi^2+\cos\pi=3\pi^2-1$，

即 $y=f(x)$ 在点 $(\pi$，$f(\pi))$ 处的切线斜率为 $3\pi^2$，故 D 正确．故选：AD．

10．解：对于 A ，$C_9^0 2^9 + C_9^1 2^8 + ... + C_9^9 = (2+1)^9 = 3^9$ ，故 A 正确；

对于 B ，令 $x=1$ 得 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ ①，令 $x=0$ 得 $a_0 = 1$ ②，

所以①②可得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 0$ ，故 B 正确；

对于 C ，$55^{55} = (56-1)^{55} = C_{55}^0 56^{55} - C_{55}^1 56^{54} + C_{55}^2 56^{53} - \cdots + C_{55}^{54} 56^1 - C_{55}^{55} 56^0$ ，

由此可得 55^{55} 被 8 整除的余数为 $8-1=7$ ，故 C 错误；

对于 D ，$1.05^{10} = (1+0.05)^{10} = C_{10}^0 0.05^{\ 0} + C_{10}^1 0.05^{\ 1} + ... + C_{10}^{10} 0.05^{\ 10}$ ，

$= 1 + 0.5 + 0.1125 + \cdots = 1.5 + 0.1125 + \cdots$ ，

所以 1.05^{10} 精确到 0.1 的近似数为 1.6，故 D 正确．故选：ABD .

11．解：显然事件 A_1 和事件 A_2 可能同时发生，故 A 错误；

由题意知 $P(A_2) = \dfrac{C_2^1 A_7^7}{A_8^8} = \dfrac{1}{4}$ ，故 B 正确；$P(A_5) = \dfrac{C_2^1 A_7^7}{A_8^8} = \dfrac{1}{4}$ ，$P(A_2 A_5) = \dfrac{A_2^2 A_6^6}{A_8^8} = \dfrac{1}{28}$ ，

显然 $P(A_2 A_5) \neq P(A_2)P(A_5)$ ，A_2 与 A_5 不相互独立，故 C 正确；

又 $P(A_5 | A_2) = \dfrac{P(A_2 A_5)}{P(A_2)} = \dfrac{1}{7}$ ，故 D 正确．故选：BCD .

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．解：$(2+x^{\frac{1}{3}})^6$ 的展开式通项为 $T_{k+1} = C_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot (x^{\frac{1}{3}})^k = C_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot x^{\frac{k}{3}} (0 \le k \le 6, k \in N)$ ，

由 $\dfrac{k}{3} \in Z$ 可得 $k \in \{0，3，6\}$.

即 $(2+x^{\frac{1}{3}})^6$ 的展开式中的有理项个数为 3．故答案为：3．

13．解：根据题意，6 个人站成一排，若甲站排头或排尾，排法有 $A_5^5 + A_5^5 = 240$ 种，

甲站排头或排尾且乙、丙不相邻的方法有 $2A_3^3 A_4^2 = 144$ 种，

故要求概率 $P = \dfrac{144}{240} = \dfrac{3}{5}$ ．故答案为：$\dfrac{3}{5}$

14．解：由题设 $xe^{ax}+lnx+lne^{ax}<1$，即 $xe^{ax}+lnxe^{ax}<1$，

令 $f(x)=x+lnx$ 且 $x\in(0,+\infty)$，上述不等式等价于 $f(xe^{ax})<f$ （1） $=1$，

而 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，则有 $xe^{ax}<1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $a<\dfrac{1}{x}ln\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，记 $t=\dfrac{1}{x}\in(0,+\infty)$，令 $g(t)=tlnt$，则 $g'(t)=1+lnt$，

当 $0<t<\dfrac{1}{e}$ 时，$g'(t)<0$，则 $g(t)$ 单调递减，当 $t>\dfrac{1}{e}$ 时，$g'(t)>0$，则 $g(t)$ 单调递增，

所以 $y=\dfrac{1}{x}ln\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,e)$ 上递减，在 $(e,+\infty)$ 上递增，则 $y_{min}=y|_{x=e}=-\dfrac{1}{e}$，故 $a<-\dfrac{1}{e}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.【详解】(1) 对于不等式 $\mathrm{A}_8^x<6\mathrm{A}_8^{x-2}$，有 $\begin{cases}0\le x\le 8\\ 0\le x-2\le 8\\ x\in\mathbf{N}^*\end{cases}$，可得 $x\in\{2,3,4,5,6,7,8\}$，

因为 $\mathrm{A}_8^x<6\mathrm{A}_8^{x-2}$，所以 $\dfrac{8!}{(8-x)!}<6\times\dfrac{8!}{(10-x)!}$，

即 $6\times\dfrac{1}{(10-x)(9-x)}>1$，可得 $x^2-19x+84<0$，解得 $7<x<12$.

又因为 $x\in\{2,3,4,5,6,7,8\}$，解得 $x=8$；……………………………………7 分

(2) 由题意可知：$\mathrm{C}_3^3+\mathrm{C}_4^3+\mathrm{C}_5^3+\cdots+\mathrm{C}_{11}^3=\mathrm{C}_4^4+\mathrm{C}_4^3+\mathrm{C}_5^3+\cdots+\mathrm{C}_{11}^3$

$=\mathrm{C}_5^4+\mathrm{C}_5^3+\cdots+\mathrm{C}_{11}^3=\mathrm{C}_6^4+\mathrm{C}_6^3+\cdots+\mathrm{C}_{11}^3=\cdots=\mathrm{C}_{11}^4+\mathrm{C}_{11}^3=\mathrm{C}_{12}^4=495$.…………………………13 分

16.【详解】(1) 依题意，第 3 项的二项式系数是第 2 项的二项式系数的 4 倍，

即 $\mathrm{C}_n^2=4\mathrm{C}_n^1$，即 $\dfrac{n(n-1)}{2}=4n$，解得 $\boldsymbol{n=9}$.……………………………………4 分

(2) 二项式 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^9$ 展开式的通项公式为 $\mathrm{C}_9^r\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{9-r}\cdot(-2x)^r=(-2)^r\cdot\mathrm{C}_9^r\cdot x^{\frac{3r-9}{2}}$，

令 $\dfrac{3r-9}{2}=0$，解得 $r=3$，故常数项为 $(-2)^3\cdot\mathrm{C}_9^3=-672$.……………………………………9 分

(3) 设第 $k+1$ 项的系数的绝对值最大，

则$\begin{cases}2^k\cdot C_9^k\ge 2^{k-1}\cdot C_9^{k-1}\\2^k\cdot C_9^k\ge 2^{k+1}\cdot C_9^{k+1}\end{cases}$，即$\begin{cases}\dfrac{2}{k}\ge\dfrac{1}{10-k}\\\dfrac{1}{9-k}\ge\dfrac{2}{k+1}\end{cases}$，解得$\dfrac{17}{3}\le k\le\dfrac{20}{3}$且$k\in Z$，则$k=6$，

所以系数的绝对值最大值的项为$T_7=5376x^{\frac{9}{2}}$.……………………………15 分

17.(1)$\dfrac{7}{30}$(2)分布列见解析，$\dfrac{118}{3}$(3)甲获胜概率更大

【详解】（1）设三个项目乙获胜的事件分别为A_1,A_2,A_3，乙同学总得分 40 分记为事件A，

则$P(A_1)=\dfrac{1}{5},P(A_2)=\dfrac{1}{2},P(A_3)=\dfrac{1}{3}$，且$A=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$

$\therefore P(A)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{30}$.……………………………5 分

（2）由题可知$X=0,20,40,60$ ……………………………6 分

$P(X=0)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{30}$

$P(X=20)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{30}$

$P(X=40)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{15}$

$P(X=60)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{15}$ ……………………………10 分

甲总得分的分布列：

X	0	20	40	60
P	$\dfrac{1}{30}$	$\dfrac{7}{30}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{4}{15}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{30}+20\times\dfrac{7}{30}+40\times\dfrac{7}{15}+60\times\dfrac{4}{15}=\dfrac{118}{3}$.……………………………12 分

（3）甲获胜的概率为$P(X=40)+P(X=60)=\dfrac{7}{15}+\dfrac{4}{15}=\dfrac{11}{15}$，

乙获胜的概率为$1-\dfrac{11}{15}=\dfrac{4}{15}$，

因为$\dfrac{11}{15}>\dfrac{4}{15}$，所以甲获胜概率更大.……………………………15 分

18.【详解】（1）由题意得，$f'(x)=a+e^x,x\in R$，……………………………1 分

当 $a\ge 0$ 时，$f'(x)=a+\mathrm{e}^x>0$，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增；··································3 分

②当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=a+\mathrm{e}^x>0$，解得 $x>\ln(-a)$，

$f'(x)=a+\mathrm{e}^x<0$，解得 $x<\ln(-a)$，·····································5 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln(-a),+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ln(-a))$ 上单调递减；····················6 分

综上，当 $a\ge 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-a))$ 上单调递减，在 $(\ln(-a),+\infty)$ 上单调递增.···········8 分

（2）因为函数 $y=g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

所以，$g'(x)=a+\mathrm{e}^x-\cos x\ge 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立. ····························10 分

即 $-a\le \mathrm{e}^x-\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立. ····························11 分

令 $h(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$，

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$h'(x)=\mathrm{e}^x+\sin x>0$，····························13 分

所以，$h(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)_{\min}=h(0)=0$. ··························15 分

所以，$-a\le 0$，解得 $a\ge 0$，

所以，实数 a 的取值范围为 $[0,+\infty)$. ·····································17 分

19．(1)方案一(2)$\dfrac{3}{8}$

【详解】（1）若选择方案一，设该同学获得学习用品的价值为 X 元，则 $X=50,30,0$；.......1 分

则 $P(X=50)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$，.......2 分

$P(X=30)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$，.......3 分

$P(X=0)=1-\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{12}$，.......4 分

所以$E\left(X\right)=50\times\frac{1}{12}+30\times\frac{1}{3}+0\times\frac{7}{12}=\frac{85}{6}$，.......5 分

若选择方案二，设该同学获得学习用品的价值为Y元，则$y=70,40,0$；.......6 分

则$P\left(Y=70\right)=\mathrm{C}_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，.......7 分

$P\left(Y=40\right)=\mathrm{C}_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$，.......8 分

$P\left(Y=0\right)=1-\frac{1}{27}-\frac{2}{9}=\frac{20}{27}$，.......9 分

所以$E\left(Y\right)=70\times\frac{1}{27}+40\times\frac{2}{9}+0\times\frac{20}{27}=\frac{310}{27}$.......10 分

因为$E\left(X\right)>E\left(Y\right)$，故选择方案一比较合适.......11 分

（2）设"该同学抽取中奖"为事件A，"选择甲、乙、丙抽奖箱"的事件分别记为B_1，B_2，B_3，

则$P\left(B_1\right)=P\left(B_2\right)=P\left(B_3\right)=\frac{1}{3}$，.......12 分

$P\left(A\,|\,B_1\right)=\frac{1}{3}$，.......13 分

$P\left(A\,|\,B_2\right)=P\left(A\,|\,B_3\right)=\frac{1}{2}$，.......14 分

所以$P\left(A\right)=P\left(B_1\right)P\left(A\,|\,B_1\right)+P\left(B_2\right)P\left(A\,|\,B_2\right)+P\left(B_3\right)P\left(A\,|\,B_3\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$, ...16 分

故$P\left(B_2\,|\,A\right)=\frac{P\left(B_2A\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(B_2\right)P\left(A\,|B_2\right)}{P\left(A\right)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}}=\frac{3}{8}$，所以所求概率为$\frac{3}{8}$........17 分