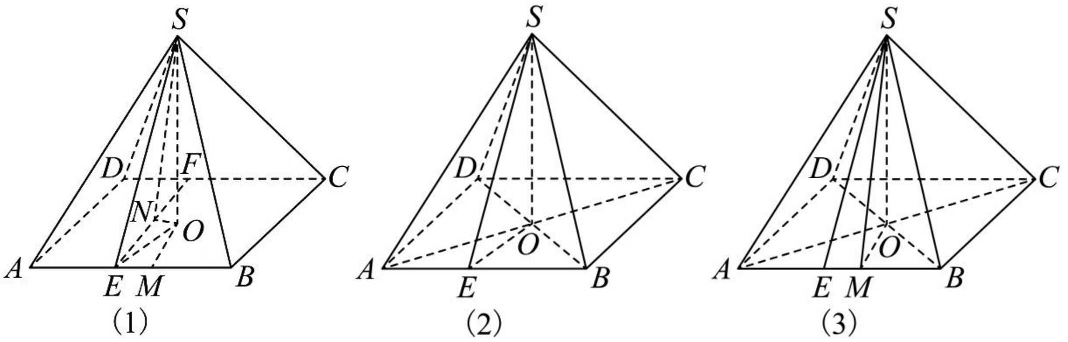
永年二中 2023-2024 学年第二学期 5 月月考

高一数学参考答案及评分标准

一、单项选择题:本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1．D　　2．B　3．B　　4．D

5．C【解析】四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形，侧棱长均相等，所以四棱锥为正四棱锥，



（1）过 E 作 $EF//BC$，交 CD 于 F，过底面中心 O 作 $ON\perp EF$ 交 EF 于 N，连接 SN，取 AB 中点 M，连接 OM，如图（1）所示：则 $\tan\alpha=\dfrac{SN}{NE}=\dfrac{SN}{OM}$；

（2）连接 OE，如图（2）所示，则 $\tan\beta=\dfrac{SO}{OE}$；

（3）连接 OM，则 $\tan\gamma=\dfrac{SO}{OM}$，如图（3）所示：因为 $SN\geq SO, OE\geq OM$，所以 $\tan\alpha\geq\tan\gamma\geq\tan\beta$，

而 α,β,γ 均为锐角，所以 $\alpha\geq\gamma\geq\beta$，故选：C.

6．D【解析】解：在 $\triangle ABC$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=60°,\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos60°=5$，

所以 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b},\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$，$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\dfrac{\sqrt{39}}{2}$，

$|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}\vec{b}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)=3$，

所以 $\cos\angle APB=\cos\angle MPN=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|}=\dfrac{3}{\dfrac{\sqrt{39}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{91}}{91}$，故选：D

7．A【解析】$\triangle ABC$ 中，$B=60^\circ$，$\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}\Rightarrow ac=4$

又 $B=60^\circ$，$\therefore A+C=120^\circ\because\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore 30^\circ<A<90^\circ$

由正弦定理可得：

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\therefore b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{c\sin B}{\sin C}\therefore b^2=\frac{ac\sin^2 B}{\sin A\sin C}=\frac{3}{\sin A\sin(120^\circ-A)}$

$\because \sin A\sin(120^\circ-A)=\sin A(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos A+\frac{1}{2}\sin^2 A$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\frac{1-\cos 2A}{4}=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A-\frac{1}{2}\cos 2A)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin(2A-30^\circ)+\frac{1}{4}$

$\because 30^\circ<A<90^\circ\therefore 30^\circ<2A-30^\circ<150^\circ\therefore\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\sin(2A-30^\circ)\le 1\therefore\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\sin(2A-30^\circ)+\frac{1}{4}\le\frac{3}{4}$

$\therefore 4\le\frac{3}{\sin A\sin(120^\circ-A)}<6\therefore 4\le b^2<6\therefore 2\le b<\sqrt{6}$ 故选：A

8．A【解析】$\because \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AP}+(2m-3)\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})+(2m-3)\overrightarrow{OB}$，

整理得，$(m-1)\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+(3-2m)\overrightarrow{OB}$，当$m=1$时，$\vec{0}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$显然不成立，故$m\neq 1$，

所以$\overrightarrow{OP}=\frac{m}{m-1}\overrightarrow{OA}+\frac{3-2m}{m-1}\overrightarrow{OB}$，

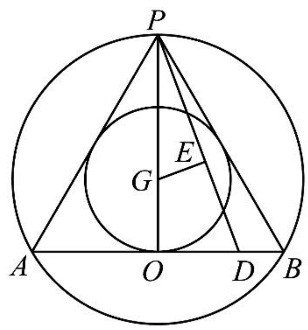
$\because A$，B，P是直线l上不同的三点，$\therefore\frac{m}{m-1}+\frac{3-2m}{m-1}=1$，解得$m=2$，$\therefore\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，

设$\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$\therefore\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})$，$\therefore\overrightarrow{OP}=\frac{\lambda}{\lambda-1}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{\lambda-1}\overrightarrow{OB}$，$\therefore\frac{\lambda}{\lambda-1}=2$，解得$\lambda=2$，即$\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}=2$．

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分．

9．BCD　　　10．ABC

11．ACD【解析】作出圆锥的轴截面如下：



因为圆锥PO的内切球和外接球的球心重合，所以$\triangle PAB$为等边三角形，

又$PB=2a$，所以$OP=\sqrt{PB^2-OB^2}=\sqrt{3}a$，

设球心为G（即为$\triangle PAB$的重心），所以$PG=\frac{2}{3}PO=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$，$OG=\frac{1}{3}PO=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

即内切球的半径为$r_1=OG=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，外接球的半径为$r_2=PG=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$，所以$r_2=2r_1$，

故 A 正确；

设内切球的表面积S_1，外接球的表面积为S_2，则$S_2=4S_1$，故 B 错误；

设圆锥的体积为V_1，则$V_1=\frac{1}{3}\pi a^2\times\sqrt{3}a=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$，

内切球的体积为V_2，则$V_2=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^3=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$，所以$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3}{\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3}=\frac{9}{4}$，故 C 正确；

设S、T是圆锥底面圆上的两点，且$ST=a$，则$\overset{\frown}{ST}$所对的圆心角为$\frac{\pi}{3}$（在圆O上），

设 ST 的中点为 D，则 $OD=a\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，不妨设 D 为 OB 上的点，连接 PD，则 $PD=\sqrt{PO^2+OD^2}=\dfrac{\sqrt{15}a}{2}$，

过点 G 作 $GE\perp PD$ 交 PD 于点 E，则 $\triangle PEG\backsim\triangle POD$，所以 $\dfrac{GE}{OD}=\dfrac{PG}{PD}$，

即 $\dfrac{GE}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a}{\dfrac{\sqrt{15}a}{2}}$，解得 $GE=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}a$，

所以平面 PST 截内切球截面圆的半径 $r=\sqrt{r_1^2-GE^2}=\sqrt{\dfrac{1}{15}a^2}$，

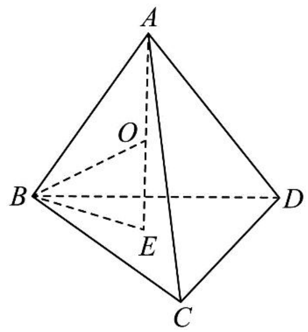
所以截面圆的面积为 $\pi r^2=\dfrac{\pi a^2}{15}$，故 D 正确；

三、填空题:本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．89.5

13．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$【解析】根据题意可得 OA，OB，OC，OD 相等且两两所成的角相等，

两两连接 A,B,C,D 后所得到的四面体为正四面体，且 O 是其外接球的球心，延长 AO 交面 BCD 于 E，连接 BE，则 E 为 $\triangle BCD$ 的外心，



设 $BC=a$，则 $BE=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{a^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，

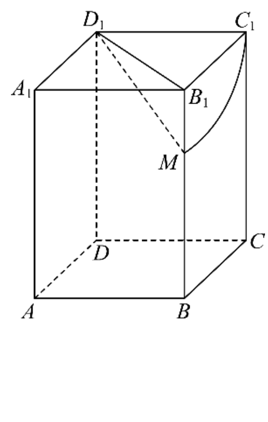
$OE^2=OB^2-BE^2,(AE-OA)^2=OB^2-BE^2,(\dfrac{\sqrt{6}}{3}a-OA)^2=OB^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)^2$，

因为 $OA=OB$，所以解得 $OB=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$，$\therefore\sin\angle AOB=\sin\angle BOE=\dfrac{BE}{OB}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

14．$\dfrac{\pi}{2}$【解析】如图，连接 D_1B_1，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=2,AD=1,\angle BAD=60^\circ$，

所以 $C_1D_1=2,B_1C_1=1,\angle B_1C_1D_1=60^\circ$，在 $\triangle B_1C_1D_1$ 中，由余弦定理有：

$D_1B_1{}^2=C_1D_1{}^2+C_1B_1{}^2-2C_1D_1\cdot C_1B_1\cos60^\circ$，代入数据，解得 $D_1B_1=\sqrt{3}$，



所以 $D_1B_1{}^2+C_1B_1{}^2=C_1D_1{}^2$，即 $D_1B_1\perp C_1B_1$，又 $BB_1\perp D_1B_1$，$BB_1\cap C_1B_1=B_1$，

所以 $D_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，

在平面 BCC_1B_1 上，以点 B_1 为圆心，作半径为 1 的圆，交棱 BB_1,CC_1 于点 M,C_1，

得到弧 $\overset{\frown}{MC_1}$，在 $\overset{\frown}{MC_1}$ 上任取一点与 B_1,D_1 都构成直角三角形，

根据勾股定理可知弧 $\overset{\frown}{MC_1}$ 上任取一点到点 D_1 的长度为 2，

所以以 D_1 为球心，半径为 2 的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线的长度为弧 $\overset{\frown}{MC_1}$ 的长，

因为$\angle BB_1C_1=\dfrac{\pi}{2}$，所以根据弧长公式有：弧$\widehat{MC_1}$的长度为$\dfrac{\pi}{2}\times 1=\dfrac{\pi}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{2}$.

四、解答题：本题共5小题，第15题13分，第16、17题每题15分，第18、19题每题17分，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.【解析】（1）因为每组小矩形的面积之和为1，

所以$(0.005+0.010+0.020+a+0.025+0.010)´\ 10=1$，则$a=0.030$.…………3分

（2）成绩落在$[40,80)$内的频率为$(0.005+0.010+0.020+0.030)\times 10=0.65$，

落在$[40,90)$内的频率为$(0.005+0.010+0.020+0.030+0.025)\times 10=0.9$，

设第75百分位数为m，

由$0.65+(m-80)\times 0.025=0.75$，得$m=84$，故第75百分位数为84.…………8分

（3）由图可知，成绩在$[50,60)$的市民人数为$100\times 0.1=10$，

成绩在$[60,70)$的市民人数为$100\times 0.2=20$，

故这两组成绩的总平均数为$\dfrac{10\times 54+66\times 20}{10+20}=62$，

由样本方差计算总体方差公式可得总方差为：

$s^2=\dfrac{10}{30}\times\left[7+(54-62)^2\right]+\dfrac{20}{30}\times\left[4+(66-62)^2\right]=37$.…………13分

16.【解析】（1）由已知得，$b\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)=a\sin B$，

则根据正弦定理得$\sin B\cos\dfrac{A}{2}=\sin A\sin B(\sin B>0)$，$\cos\dfrac{A}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}\Rightarrow\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{A}{2}\neq 0\right)$，

$\because\triangle ABC$为锐角三角形，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$. …………6分

（2）由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=4$，即$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin\left[\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+B\right)\right]}=4$，

则$b=4\sin B,c=4\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$，…………8分

故$a+b+c=2\sqrt{3}+4\sin B+4\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}+4\sin B+4\left(\sin B\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos B\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$，…………11分

因为$\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，得$B+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，…………13分

所以$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，得$a+b+c\in\left(2\sqrt{3}+6,6\sqrt{3}\right]$. …………15 分

17.【解析】（1）解：$\because PA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp CD$，

又四边形$ABCD$是矩形，$\therefore CD\perp DA$，

$\because DA\cap PA=A$，$\therefore CD\perp$平面PAD，

$\because AM\subset$平面PAD，$\therefore CD\perp AM$，

又M是PD的中点，$PA=AD=4$，$\therefore AM\perp PD$，

$\because CD\cap PD=D$，所以$AM\perp$平面PCD.…………5 分

（2）解：$\because$底面$ABCD$是矩形，$\therefore CD//BA$，

$\therefore$异面直线CD与BM所成角即为直线BA与直线BM所成的角，

由（1）得$CD\perp$平面PAD，$\therefore BA$平面PAD，

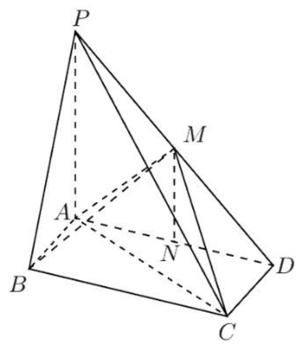
$\because AM\subset$平面PAD，$\therefore BA\perp AM$，$\therefore\triangle BAM$为直角三角形，

又M是PD的中点，$PA=AD=4$，$\therefore AM=2\sqrt{2}$，

$\therefore$在$Rt\triangle BAM$中，$\angle ABM$即为异面直线CD与BM所成角，…………9 分

故$\tan\angle ABM=\frac{AM}{AB}=\sqrt{2}$，$\therefore$异面直线$CD$与$BM$所成角的正切值为$\sqrt{2}$.…………10 分

（3）解：取AD中点为N，连接MN，AC，



在$\triangle PAD$中，M,N分别为线段PD,AD的中点，故$MN//PA,MN=\frac{1}{2}PA=2$，

$\because PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore MN\perp$平面$ABCD$，

$\therefore V_{M-ACD}=\frac{1}{3}\times MN\times\frac{1}{2}\times AD\times CD=\frac{8}{3}$，…………12 分

由（1）得$AM\perp$平面PCD，$\because MC\subset$平面PCD，$\therefore AM\perp MC$，

$\because PA=AD=4$，$\therefore PD=4\sqrt{2},MD=2\sqrt{2}$，又$AB=CD=2$，$\therefore MC=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}\times AM\times MC=2\sqrt{6}$，…………13 分

设点D到平面AMC的距离为h，直线CD与平面ACM所成角为θ，

则$V_{D-AMC}=\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle AMC}=V_{M-ACD}=\frac{8}{3}$，解得：$h=\frac{4}{\sqrt{6}}$，…………14 分

故$\sin\theta=\frac{h}{CD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以直线CD与平面ACM所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.…………15 分

18.【解析】（1）$\triangle ABD$中，由余弦定理得$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=25$，

得$AB=5$，所以$AC=\sqrt{2}AB=5\sqrt{2}$；…………6 分

（2）在$\triangle ABD$中，由正弦定理：$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}$，

则$AB\cdot\sin\angle BAD=2\sqrt{6}\sin\angle ADB$，…………9 分

又$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB=33-12\sqrt{6}\cos\angle ADB$ ，且$\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}+\angle DAC$，

在$\triangle DAC$中，由余弦定理：$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos\angle DAC=9+2AB^2-6\sqrt{2}AB\cdot\sin\angle BAD$

$=75-24\sqrt{3}\left(\sqrt{2}\cos\angle ADB+\sin\angle ADB\right)=75-72\sin\left(\angle ADB+\varphi\right)$，且$\tan\varphi=\sqrt{2}$，…………14 分

所以当$\sin\left(\angle ADB+\varphi\right)=1$时，即$\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$最小值$CD=\sqrt{3}$.…………17 分

19.【解析】（1）设AC中点为D，因为A_1在底面ABC上的投影恰为AC的中点.所以$A_1D\perp$平面ABC，

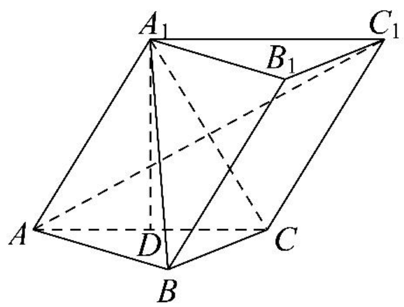
因为$A_1D\subset$平面ACC_1A_1，所以平面$ABC\perp$平面ACC_1A_1，

所以二面角$B-AC-C_1$的正弦值为 1.…………5 分

（2）因为平面$ABC\perp$平面ACC_1A_1，且平面$ABC\cap$平面$ACC_1A_1=AC$

又因为$BC\perp AC$，所以$BC\perp$平面ACC_1A_1，

因为$AC_1\subset$平面ACC_1A_1，所以$BC\perp AC_1$.



因为$AC_1\perp A_1B$，$A_1B\cap BC=B$，$A_1B,BC\subset$平面A_1BC，

所以$AC_1\perp$平面A_1BC，

因为$A_1C\subset$平面A_1BC，所以$AC_1\perp A_1C$，

所以ACC_1A_1为菱形，所以$AA_1=AC$，

因为等腰$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的斜边$AB=2\sqrt{2}$，所以$AC=BC=2$，所以$AA_1=2$，

所以$AD=\dfrac{1}{2}AC=1$，所以在直角$\triangle A_1AD$中，$\cos\angle A_1AD=\dfrac{AD}{AA_1}=\dfrac{1}{2}$，

所以$\angle A_1AC=60^\circ$，所以$\triangle A_1AC$为等边三角形，

所以$AC_1=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2=2\sqrt{3}$.…………11 分

（3）$V_{C-A_1BA}=V_{A_1-ABC}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times A_1D=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

设CC_1到平面ABB_1A_1的距离为h，连接BD，

因为$A_1D\perp$平面ABC，$BD\subset$平面ABC，所以$A_1D\perp BD$，

所以 $A_1B=\sqrt{A_1D^2+BD^2}=\sqrt{3+5}=2\sqrt{2}$，

因为 $AB=2\sqrt{2},AA_1=2$，所以 $S_{\triangle A_1AB}=\frac{1}{2}AA_1\cdot\sqrt{AB^2-\left(\frac{1}{2}AA1\right)^2}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{8-1}=\sqrt{7}$，

所以 $V_{C-A_1AB}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1AB}\times h=\frac{1}{3}\times\sqrt{7}\times h=\frac{\sqrt{7}h}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 $h=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. …………17 分