武汉市 2025 届高三年级五月模拟训练试题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	D	A	A	B	A	C	B	C	BD	ACD	ACD

12．0　　13．-1　　14．$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

15．解：（1）由 $b\cos\dfrac{A}{2}-a\sin B=0$ 及正弦定理得 $\sin B\cos\dfrac{A}{2}-\sin A\sin B=0$，

又 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos\dfrac{A}{2}-2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}=0$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\dfrac{A}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\dfrac{A}{2}\neq 0$，$\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$ ……………………………………………………………………………………6 分

（2）因为 $AE=2EB$，$S_{\Delta ACE}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{3}{2}S_{\Delta ACE}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，则 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，所以 $bc=9$，

又由余弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$，可得 $b^2+c^2=18$，所以 $b=c=3$，

由角平分线定理得 $\dfrac{CF}{FE}=\dfrac{CA}{AE}=\dfrac{3}{2}$ ……………………………………………………………………13 分

16. （1）证明：记 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\langle\vec{b},\vec{c}\rangle=\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=60^\circ$，

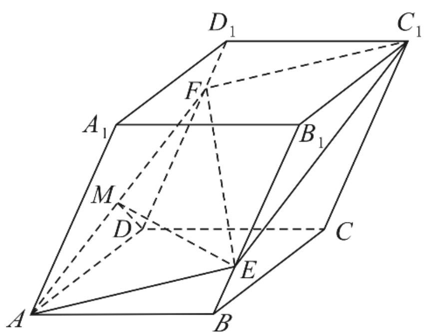
方法一：由题意，$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}$，$\overrightarrow{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，

所以 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$，所以 $\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}$ 共面且 A 为公共点，所以 A,E,C_1,F 四点共面……………………6 分

方法二：由题意，$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$，$\overrightarrow{FC_1}=\overrightarrow{FD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC_1}$，所以四边形 AEC_1F 为平行四边形，A,E,C_1,F 四点共面……………………………………6 分

（2）解：如图，取 AF 中点 M，连 DM,EM,EF，



在 ΔADF 中，$|\overrightarrow{DF}|=3=|\overrightarrow{AD}|$，所以 $DM\perp AF$，

因为 $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$，所以 $|\overrightarrow{AE}|^2=|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{4}|\vec{c}|^2+\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ=13$，

从而 $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{13}$，

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=-\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$，同理 $|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{13}=|\overrightarrow{AE}|$，

因此在等腰 ΔAEF 中，$EM\perp AF$，

所以 $\angle EMD$ 即为平面 AEC_1F 与平面 A_1ADD_1 的夹角或其补角，

由 $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{3}{8}\vec{c}$，$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{8}\vec{c}$，

设平面 AEC_1F 与平面 A_1ADD_1 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{MD},\overrightarrow{ME}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{ME}\right|}{\left|\overrightarrow{MD}\right|\left|\overrightarrow{ME}\right|}=\dfrac{\left|-\dfrac{3}{4}\right|}{\dfrac{3}{2}\times\dfrac{5}{2}}=\dfrac{1}{5}$，

所以平面 AEC_1F 与平面 A_1ADD_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{5}$ ……………………………………15 分（其他方法酌情给分）

17．解：(1)依题意，$E(0,-\sqrt{3})$，$F(2,0)$，由 $\overrightarrow{OR}=\lambda\overrightarrow{OF}$ 得 $R(2\lambda,0)$，

当 $\lambda\neq 0$ 时，直线 ER 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2\lambda}x-\sqrt{3}$　　①

又 $G(0,\sqrt{3})$，$C(2,\sqrt{3})$，由 $\overrightarrow{CS}=\lambda\overrightarrow{CF}$ 得 $S(2,-\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3})$，

所以，直线 GS 的方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2}x+\sqrt{3}$　　②

由①得 $y+\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\lambda}x$，由②得 $y-\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2}x$，

两式相乘得，$(y+\sqrt{3})(y-\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2\lambda}x\cdot(-\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2}x)$，

整理得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……………………………………………………………6 分

(2)当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，点 $R(1,0)$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，设直线 l 的方程为：$x=ty+1$

由 $\begin{cases}x=ty+1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，消去 x 得：$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，

则 $\Delta>0$，$y_1+y_2=\dfrac{-6t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3t^2+4}$，

依题意，$Q(4,y_2)$，直线 MQ 的方程为：$y-y_2=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-4}(x-4)$，

令 $y=0$，得点 K 的横坐标为：$x_K=\dfrac{-y_2(x_1-4)}{y_1-y_2}+4=\dfrac{-y_2(ty_1-3)+4y_1-4y_2}{y_1-y_2}=\dfrac{-ty_1y_2+4y_1-y_2}{y_1-y_2}$，

又 $ty_1y_2=\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$，则 $x_K=\dfrac{-\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)+4y_1-y_2}{y_1-y_2}=\dfrac{\dfrac{5}{2}(y_1-y_2)}{y_1-y_2}=\dfrac{5}{2}$

因此直线 MQ 过定点 $K(\dfrac{5}{2},0)$，

所以 $S_{\Delta KMR}=\dfrac{1}{2}|RK||y_M|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}|y_M|\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，当且仅当 $|y_M|=\sqrt{3}$ 时等号成立，

所以 ΔKMR 的面积最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ……………………………………………………15 分

18．（1）经过 1 次换球后，甲口袋中 2 白 1 黑，乙口袋中 2 黑 1 白，记“2 次换球后，甲口袋中恰有 3 个白球”为事件 A，则

$P(A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$ ………………………………………………………………4 分

（2）**解法一：**n次换球后，记“甲口袋中恰有3个白球”的概率为a_n，“甲口袋中恰有2白1黑”的概率为b_n，“甲口袋中恰有1白2黑”的概率为c_n，“甲口袋中恰有3个黑球”的概率为d_n.

由题意可知，$a_1=0$，$b_1=1$，$c_1=0$，$d_1=0$，

$$\begin{cases} a_n+b_n+c_n+d_n=1 \\ a_n=\frac{1}{9}b_{n-1} \\ b_n=a_{n-1}+\frac{4}{9}b_{n-1}+\frac{4}{9}c_{n-1} \text{，所以} b_n+c_n=a_{n-1}+\frac{8}{9}b_{n-1}+\frac{8}{9}c_{n-1}+d_{n-1}=1-\frac{1}{9}\left(b_{n-1}+c_{n-1}\right) \text{，} \\ c_n=\frac{4}{9}b_{n-1}+\frac{4}{9}c_{n-1}+d_{n-1} \\ d_n=\frac{1}{9}c_{n-1} \end{cases}$$

则$b_n+c_n-\frac{9}{10}=-\frac{1}{9}\left(b_{n-1}+c_{n-1}-\frac{9}{10}\right)$，由$b_1+c_1=1$，得$b_n+c_n=\frac{9}{10}-\frac{9}{10}\left(-\frac{1}{9}\right)^n$

所以n次换球后，甲口袋中3个球颜色仍相同的概率为$a_n+d_n=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^n$……………………………10分

解法二：在解法一的基础上，调整对事件划分的分类，n次换球后，记“甲口袋中3个球颜色相同”的概率为p_n，

则$p_1=0$，$p_n=\frac{1}{9}\left(1-p_{n-1}\right)$，

所以$p_n-\frac{1}{10}=-\frac{1}{9}\left(p_{n-1}-\frac{1}{10}\right)$，得$p_n=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^n$……………………………10分

（3）n次换球后，记“甲口袋中3个球编号分别为1,2,3”的概率为q_n，

则$q_1=\frac{1}{3}$，$q_n=\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{4}{9}\left(1-q_{n-1}\right)$，

所以$q_n-\frac{2}{5}=-\frac{1}{9}\left(q_{n-1}-\frac{2}{5}\right)$，$q_n=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^n$

当n为奇数时，$q_n=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^n=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n<\frac{2}{5}$

当n为偶数时，$q_n=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)^n=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n\le q_2=\frac{11}{27}$

所以当$n=2$时，q_n取得最大值，最大值为$\frac{11}{27}$……………………………17分

19．解：(1)令$f\left(x\right)=xe^{x-1}-a=0$，即$a=xe^{x-1}$，设$g(x)=xe^{x-1}$

因为$g'\left(x\right)=(x+1)e^{x-1}$，所以当$x\in\left(-\infty,-1\right)$时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$单调递减；

当$x\in\left(-1,+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$单调递增，

当$x<0$时，$g(x)<0$，$g\left(x\right)_{\min}=g(-1)=-\frac{1}{e^2}$，$g\left(0\right)=0$

所以当$-\frac{1}{e^2}<a<0$时，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上有两个零点；

当$a=-\frac{1}{e^2}$或$a\ge 0$时，$f\left(x\right)$有唯一零点；

当$a<-\frac{1}{e^2}$时，$f\left(x\right)$无零点.……………………………………………………………………4 分

(2)（i）由（1）知，当$a\ge 0$时，$f\left(x\right)$有唯一零点x_n，则$x_n e^{x_n-1}=n$且$x_n>0$，

两边取自然对数，得$x_n-1+\ln x_n=\ln n$，　　①

所以$x_{n+1}-1+\ln x_{n+1}=\ln\left(n+1\right)$，　　②

①②两式相减，得$x_{n+1}-x_n+\ln x_{n+1}-\ln x_n=\ln\frac{n+1}{n}>0$，

所以$x_{n+1}+\ln x_{n+1}>x_n+\ln x_n$.

因为函数$y=x+\ln x$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

所以$x_{n+1}>x_n$，所以数列$\left\{x_n\right\}$单调递增.……………………………………………………8 分

（ii）先证明：$x>0$时，$x-1\ge\ln x$　　③

设$h\left(x\right)=x-1-\ln x$，则$h'\left(x\right)=\frac{x-1}{x}$，

所以当$x\in\left(0,1\right)$时，$h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$单调递减；

当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$h'\left(x\right)>0$，$h\left(x\right)$单调递增，

所以$h\left(x\right)\ge h\left(1\right)=0$，当且仅当$x=1$时，等号成立.

由③式知，$\ln n=x_n+\ln x_n-1\ge 2\ln x_n$，

所以$0<x_n\le\sqrt{n}<\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2}$，所以$\frac{1}{x_n}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$，

所以$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}>2\left[\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)+\cdots+\left(\sqrt{2}-1\right)\right]=2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$.

③式中，令$x=\frac{x_n}{n}$，得$\frac{x_n}{n}-1\ge\ln\frac{x_n}{n}=\ln x_n-\ln n$，

当且仅当$x_n=n$，即$n=1$时等号成立，

所以$0=x_n+\ln x_n-\ln n-1\le x_n+\frac{x_n}{n}-2$，

所以$x_n\ge\frac{2n}{n+1}$，$\frac{1}{x_n}\le\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$，当且仅当$n=1$时等号成立.

当$n\ge 2$时，在③式中，令$x=\frac{n-1}{n}$，得$\frac{1}{n}<\ln n-\ln\left(n-1\right)$，

所以$n\ge 2$时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_k}=1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_k}<1+\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{k}$

$<\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\left[\left(\ln 2-\ln 1\right)+\cdots+\left(\ln n-\ln\left(n-1\right)\right)\right]=\frac{n+1+\ln n}{2}$.

当$n=1$时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\le\frac{n+1+\ln n}{2}$成立.

所以$2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\le\frac{n+1+\ln n}{2}$，得证……………………………………………………17 分