2025～2026 学年第一学期期中考试 · 高三数学试卷

参考答案、提示及评分细则

1. C　$A=\{x|x^3<1\}=\{x|x<1\}$，$B=\{x|\sqrt{x}\leqslant 1\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$，$A\cap B=\{x|0\leqslant x<1\}$，$A\cup B=\{x|x\leqslant 1\}$．故选 C．

2. B　$(1+2\mathrm{i})(a-\mathrm{i})=a-\mathrm{i}+2a\mathrm{i}+2=a+2+(2a-1)\mathrm{i}$，由题意 $a+2\neq 0$，$2a-1=0$，所以 $a=\frac{1}{2}$．故选 B．

3. A　$T_{r+1}=C_6^r(2x^3)^{6-r}\left(-\frac{\sqrt{a}}{x}\right)^r=2^{6-r}(-\sqrt{a})^rC_6^rx^{18-4r}$，由 $18-4r=10$ 得 $r=2$，由 $18-4r=2$ 得 $r=4$，所以 $T_3=240ax^{10}$，$T_5=60a^2x^2$，由条件知 $60a^2=240a+300$，又 $a\geqslant 0$，所以 $a=5$．故选 A．

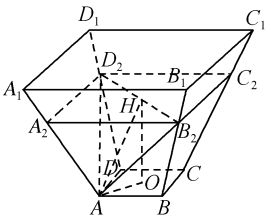
4. D　由 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$ 得 $a=3c$，又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=2\sqrt{2}c$．因为$\triangle ABF$ 的面积为$\frac{(a+c)b}{2}=4\sqrt{2}$，所以 $c=1$，$a=3$，$b=2\sqrt{2}$，$|AB|^2=a^2+b^2=17$，$|AB|=\sqrt{17}$，又 $|BF|=a=3$，$|AF|=a+c=4$，所以$\triangle ABF$ 的周长为 $7+\sqrt{17}$．故选 D．

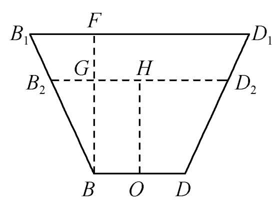
5. B　由 $f(-x)=x^2+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x-3=f(x)$ 知 $f(x)$是偶函数，又 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=2x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减，在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $f(a^2)<f(2a+3)$可化为 $a^2<|2a+3|$，当 $2a+3\geqslant 0$ 时，$a^2-2a-3<0$，$-1<a<3$；当 $2a+3<0$ 时，$a^2+2a+3<0$，此不等式对实数 a 不成立．综上，a 的取值范围是$(-1,3)$．故选 B．

6. C　圆 C 的方程化为$(x-1)^2+(y+1)^2=2$，所以$|AC|=|BC|=\sqrt{2}$，因为$|AB|=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，所以在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\theta$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta)=\frac{\sqrt{2}}{10}$．故选 C．

7. A　X 的取值为 1，2，3，4，$P(X=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$，$P(X=3)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$，$P(X=4)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{1}{20}$，所以 $E(X)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{3}{10}\times 2+\frac{3}{20}\times 3+\frac{1}{20}\times 4=\frac{7}{4}$．故选 A．

8. D　在梯形 BDD_1B_1 中，$BD=\sqrt{2}a$，$B_1D_1=3\sqrt{2}a$，$BB_1=2a$，过 B 作 BF 与 BD 垂直，交 B_1D_1 于点 F，交 B_2D_2 于点 G，所以 $BF=\sqrt{2}a$，且 $BG=B_2G$．令正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的边长为 x，则 $B_2D_2=\sqrt{2}x$，$BG=B_2G=\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{2}a}{2}$，所以水的体积为$\frac{1}{3}(x^2+a^2+ax)\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{2}a}{2}=\frac{9}{16}V=\frac{3}{16}(a^2+9a^2+3a^2)\sqrt{2}a$，所以 $x=\frac{5}{2}a$，$B_2G=\frac{3\sqrt{2}a}{4}$，设 BD 中点为 O，B_2D_2 中点为 H，易知 $OH=B_2G=\frac{3\sqrt{2}a}{4}$，$AO=\frac{\sqrt{2}a}{2}$，$\angle OAH$ 是平面 AB_2D_2 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的平面角，$\tan\angle OAH=\frac{OH}{AO}=\frac{3}{2}$，所以 $\sin\angle OAH=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$．故选 D．





9. BC　当 x_1+x_n 不等于样本平均数的 2 倍时，A 不正确；由奇数个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是从小到大排列的，所以 x_2,x_3,x_4,x_{n-1} 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的中位数，B 正确；新数据的极差为 x_n-x_1，原数据的极差也是 x_n-x_1，所以 C 正确；由数据个数为奇数且数据的平均数与中位数相等知原数据去掉中位数后，样本数据与平均数之差的平方和不变，但样本数变了，所以两方差不等，所以 D 不正确. 故选 BC.

10. ABD　$T=\frac{\pi}{2}$，A 正确；$f(T)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，B 正确；由 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$ 或 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ 或 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$，其中 k 是整数，所以曲线 $y=f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},0\right)$ 与 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},0\right)$，其中 k 是整数，所以 $|a|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{12}$，C 错误；当 $\tan x_0=-\sqrt{3}$ 时，$\tan 2x_0=\frac{2\tan x_0}{1-\tan^2 x_0}=\sqrt{3}$，$f(x_0)=\tan\left(2x_0+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan 2x_0+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan 2x_0}=-\sqrt{3}$，D 正确. 故选 ABD.

11. AC　$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，当 $a=0$ 时，显然 $f(x)=-bx$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有极值，当 $b=0$ 时，显然 $f(x)=a\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有极值，所以 $ab\neq 0$，$f'(x)=\frac{a}{x}-b=0$ 得 $x=\frac{a}{b}$，由 $f(x)$ 有极小值知 $\frac{a}{b}>0$，所以 $ab>0$，A 正确；当 $b>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\frac{a}{b}$，由 $f'(x)<0$ 得 $x>\frac{a}{b}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{b}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{a}{b},+\infty\right)$ 上单调递减，$f(x)$ 有极大值，没有极小值，$b>0$ 不成立，当 $b<0$ 时，$a<0$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>\frac{a}{b}$，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\frac{a}{b}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{b}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a}{b},+\infty\right)$ 上单调递增，$f(x)$ 的极小值为 $f\left(\frac{a}{b}\right)=a\ln\frac{a}{b}-a$，由 $f\left(\frac{a}{b}\right)<0$ 得 $\ln\frac{a}{b}-1>0$，$\frac{a}{b}>\mathrm{e}$，$a<b\mathrm{e}$，$f(\mathrm{e})=a-b\mathrm{e}<0$，B 不正确；$f\left(\frac{1}{2}\right)+b=-a\ln 2-\frac{1}{2}b+b>-b\mathrm{e}\ln 2+\frac{1}{2}b=-\frac{1}{2}b(\mathrm{e}\ln 4-1)>0$，C 正确；当 $a<0$，$a=b\mathrm{e}^2$ 时，$x=\frac{a}{b}=\mathrm{e}^2$ 时，$f(x)$ 有极小值 $2a-b\mathrm{e}^2=a<0$，由 $f(x)=0$ 得 $b\mathrm{e}^2\ln x-bx=0$，$\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ 对 $1<x<2$ 成立，所以 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，$g(1)=0$，$g(2)=\frac{\ln 2}{2}>\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，所以方程 $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ 在 $(1,2)$ 上有一解，$f(x)$ 在 $(1,2)$ 内有一个零点，所以 D 不正确. 故选 AC.

12. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\frac{\alpha}{2}>0$，又 $1-2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{6}\sin\frac{\alpha}{2}$，所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

13. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　设 C 的焦距为 $2c$，则 $\sin\angle MF_1F_2=\frac{|MF_2|}{2c}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$|MF_2|=\frac{\sqrt{10}}{5}c$，$|MF_1|^2=4c^2-|MF_2|^2=\frac{18}{5}c^2$，$|MF_1|=\frac{3\sqrt{10}}{5}c$，$2a=||MF_1|-|MF_2||=\frac{2\sqrt{10}}{5}c$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

14. 2 或 $\frac{2}{5}$　由条件知 $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{EG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EC}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC}=\frac{5}{16}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|$，所以 $\frac{5}{16}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{3}{4}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|$，设 $AB=a$，$BC=AD=b$，则 $\frac{5}{16}a^2+$

$\frac{1}{4}b^2=\frac{3}{4}ab$,所以 $a=2b$ 或 $a=\frac{2}{5}b$,所以$\frac{AB}{BC}=2$ 或$\frac{AB}{BC}=\frac{2}{5}$.

15. 解:(1)由$\frac{a-b}{c}=\frac{c-b}{a+b}$得 $b^2+c^2-a^2=bc$, ………………………………………… 2 分

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$, ………………………………………… 4 分

因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 5 分

(2)由 $A+B+C=\pi$,$A=\frac{\pi}{3}$ 得 $B=\frac{2\pi}{3}-C$, ………………………………………… 6 分

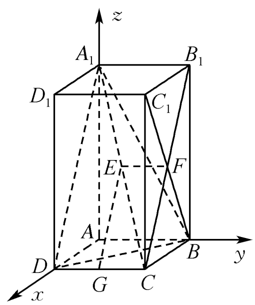
所以 $\sin B-\sin C=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)-\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C-\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{1}{2}\sin C=\cos\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$,

………………………………………… 9 分

因为 $0<C<\frac{2\pi}{3}$,所以$\frac{\pi}{6}<C+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$, ………………………………………… 11 分

所以$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos\left(C+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $\sin B-\sin C$ 的取值范围是$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ………………………………………… 13 分

16. (1)证明:取 CD 中点 G,连接 EG,B_1C.



因为在直棱柱中,四边形 BCC_1B_1 是矩形,对角线 BC_1 与 B_1C 的交点是 BC_1 与 B_1C 的中点,

因为 F 是 BC_1 的中点,所以 F 是 B_1C 的中点, ………………………………………… 2 分

又直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$A_1B_1=AB=CD$,$A_1B_1/\!/AB$,$AB/\!/CD$,

所以 $A_1B_1/\!/CD$,$A_1B_1=CD$,所以四边形 A_1B_1CD 是平行四边形,

所以 $B_1C/\!/A_1D$,$B_1C=A_1D$ 即 $CF/\!/A_1D$,$CF=\frac{1}{2}A_1D$,

因为 E 是 A_1C 的中点,所以 $EG/\!/A_1D$,$EG=\frac{1}{2}A_1D$,所以 $EG/\!/CF$,$EG=CF$,

所以四边形 $EFCG$ 是平行四边形,所以 $EF/\!/CG$. ………………………………………… 5 分

又 $EF\not\subset$平面 $ABCD$,$CG\subset$平面 $ABCD$,

所以 $EF/\!/$平面 $ABCD$. ………………………………………… 7 分

(2)解:以 A 为坐标原点,AD,AB,AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系:

则点 $A(0,0,0)$,$B(0,2,0)$,$C(2,2,0)$,$D(2,0,0)$,$A_1(0,0,4)$,$B_1(0,2,4)$,$C_1(2,2,4)$,$E(1,1,2)$,$F(1,2,2)$.

………………………………………… 9 分

则$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-4)$,$\overrightarrow{BD}=(2,-2,0)$,$\overrightarrow{EF}=(0,1,0)$. ………………………………………… 11 分

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}2y-4z=0,\\ 2x-2y=0,\end{cases}$

令 $z=1$,得平面 A_1BD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(2,2,1)$, ………………………………………… 13 分

设直线 EF 与平面 A_1BD 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{2}{3}$. ………………………………………… 15 分

17. 解：(1) $\frac{S_{n+1}+2}{S_n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，又 $a_1=1$，

所以 $n=1$ 时，$\frac{1+a_2+2}{1+1}=a_2$，所以 $a_2=3$， ………………………………………………………… 1 分

$S_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}(S_n+1)-2$，……………………………………………………………………………………… 2 分

当 $n>1$ 时，$S_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}(S_{n-1}+1)-2$，

所以 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}(S_n+1)-\frac{a_n}{a_{n-1}}(S_{n-1}+1)$

$=\frac{a_{n+1}}{a_n}(a_n+S_{n-1}+1)-\frac{a_n}{a_{n-1}}(S_{n-1}+1)=a_{n+1}+\frac{a_{n+1}}{a_n}(S_{n-1}+1)-\frac{a_n}{a_{n-1}}(S_{n-1}+1)$，

所以 $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)(S_{n-1}+1)=0$， ……………………………………………………………… 4 分

由 $a_1=1$，$n>1$ 时，$a_n>1$ 知 $S_{n-1}+1>0$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}$，

又 $\frac{a_2}{a_1}=3$，所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，……………………………………………… 5 分

所以 $a_n=3^{n-1}$. ……………………………………………………………………………………………………… 6 分

(2) 由 $a_1=1$，$a_4=3^3=27$，$b_1=13$，$b_4=\frac{7}{27}$ 得 $a_1b_1=13$，$a_4b_4=7$， …………………………………… 7 分

设等差数列 $\{a_nb_n\}$ 的公差为 d，则 $13+3d=7$，所以 $d=-2$，………………………………………………… 8 分

所以 $a_nb_n=13-2(n-1)=15-2n$，………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $b_n=\frac{15-2n}{a_n}=\frac{15-2n}{3^{n-1}}$，……………………………………………………………………………… 10 分

$T_n=\frac{15-2\times1}{3^0}+\frac{15-2\times2}{3^1}+\cdots+\frac{15-2n}{3^{n-1}}$，

$\frac{1}{3}T_n=\frac{15-2\times1}{3}+\frac{15-2\times2}{3^2}+\cdots+\frac{15-2n}{3^n}$，

上两式相减，得 $\frac{2}{3}T_n=13+\frac{-2}{3}+\frac{-2}{3^2}+\cdots+\frac{-2}{3^{n-1}}-\frac{15-2n}{3^n}=15-3\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{15-2n}{3^n}=12+\frac{2n-12}{3^n}$，

…… 12 分

所以 $T_n=18+\frac{n-6}{3^{n-1}}$. ………………………………………………………………………………………… 13 分

因为 $T_{n+1}-T_n=18+\frac{n-5}{3^n}-18-\frac{n-6}{3^{n-1}}=\frac{13-2n}{3^n}$，

所以 $n<7$ 时，$T_n<T_{n+1}$，$n>6$ 时，$T_n>T_{n+1}$， ……………………………………………………………… 14 分

所以 T_n 的最大值为 T_7，T_n 取得最大值时 n 的值为 7. ……………………………………………………… 15 分

18. 解：(1) C 的焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，………………………………………………………… 1 分

因为点 $M(2,y_0)$ 在 C 上，$|MF|=3$，所以 $2+\frac{p}{2}=3$，$p=2$， …………………………………………………… 2 分

所以 C 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………………… 3 分

(2)①$F(1,0)$,设 AB 为 $x=ty+1$,代入 $y^2=4x$,消去 x,得 $y^2-4ty-4=0$. …………………… 4 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4t$,$y_1y_2=-4$. ………………………………………… 5 分

所以 $(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=16t^2+16$,$|y_1-y_2|=4\sqrt{t^2+1}$, ……………………… 6 分

又 $|PF|=1$,所以△PAB 的面积为 $\frac{1}{2}\times1\times4\sqrt{t^2+1}=2\sqrt{t^2+1}\geqslant2$,当且仅当 $t=0$ 时,取等号,

所以△PAB 的面积的最小值为 2. ……………………………………………………………… 8 分

②设 $D(x_3,y_3)$,$E(x_4,y_4)$,又 $P(2,0)$,

直线 AP 的方程为 $(x_1-2)y=y_1(x-2)$,与 C 方程联立,消去 x 得 $y_1y^2-4(x_1-2)y-8y_1=0$, …… 10 分

又 D 是直线 AP 与 C 的交点,所以 $y_1y_3=-8$,$y_3=-\frac{8}{y_1}$, ……………………………………… 11 分

同理 $y_4=-\frac{8}{y_2}$,所以 $y_3y_4=-16$, ………………………………………………………… 12 分

当 $|y_3|=4$ 时,$t=0$,直线 DE 与 x 轴垂直,DE 与 x 轴的交点为 $(4,0)$, ……………………… 13 分

当 $|y_3|\neq4$ 时,$t\neq0$,直线 DE 的斜率 $k=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=\frac{4}{y_4+y_3}=\frac{4}{-\frac{8}{y_1}-\frac{8}{y_2}}=-\frac{y_1y_2}{2(y_1+y_2)}=\frac{1}{2t}$. ………… 15 分

此时,可设直线 DE 的方程为 $y=\frac{1}{2t}x+b$,与 C 联立,消去 x 得 $y^2-8ty+8tb=0$,所以 $y_3y_4=8tb$,

又 $y_3y_4=-16$,所以 $8tb=-16$,$b=-\frac{2}{t}$,

所以 DE 的方程化为 $y=\frac{1}{2t}x-\frac{2}{t}=\frac{1}{2t}(x-4)$,直线过 $(4,0)$. …………………………… 16 分

综上,直线 DE 过定点 $(4,0)$. ……………………………………………………………… 17 分

19.(1)解:当 $a=1$ 时,$f(x)=e^x-x^2-x$,$f'(x)=e^x-2x-1$, …………………………………… 1 分

所以 $f(0)=1$,$f'(0)=0$, ………………………………………………………………… 2 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$. …………………………………… 3 分

(2)解:函数 $y=f(x)+x$ 的零点的个数即为方程 $ae^x=x^2$ 根的个数.

由 $ae^x=x^2$ 得 $a=\frac{x^2}{e^x}$, ………………………………………………………………… 4 分

令 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$,则 $g'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$,

$g'(x)=0$ 时,$x=0$ 或 $x=2$;$g'(x)>0$ 时,$0<x<2$;$g'(x)<0$ 时,$x<0$ 或 $x>2$;

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,2)$,单调递减区间为 $(-\infty,0)$,$(2,+\infty)$,

$g(x)$ 的极小值为 $g(0)=0$,极大值为 $g(2)=\frac{4}{e^2}$,

显然 $x\to-\infty$ 时,$g(x)\to+\infty$,$x\to+\infty$ 时,$g(x)\to0$, …………………………………… 5 分

所以函数 $y=f(x)+x$ 的零点的个数,讨论如下:

①当 $a<0$ 时,有 0 个零点;②当 $a=0$ 或 $a>\frac{4}{e^2}$ 时,有 1 个零点;③当 $a=\frac{4}{e^2}$ 时,有 2 个零点;④当 $0<a<\frac{4}{e^2}$ 时,有 3 个零点. ………………………………………………………………………… 9 分

(3)证明:由已知 $f(x)=ae^x-x^2-x$,所以 $f'(x)=ae^x-2x-1$,

因为 $f(x)$有两个极值点,所以 $f'(x)=ae^x-2x-1=0$ 有两个不相等的实数根,……………………… 10 分

由 $ae^x-2x-1=0$ 得 $a=\frac{2x+1}{e^x}$,令 $h(x)=\frac{2x+1}{e^x}$,则直线 $y=a$ 与曲线 $y=h(x)$恰有两个交点,$h'(x)=\frac{2-2x-1}{e^x}=\frac{1-2x}{e^x}$,$h'\left(\frac{1}{2}\right)=0$,由 $h'(x)>0$ 得$x<\frac{1}{2}$,由 $h'(x)<0$ 得 $x>\frac{1}{2}$,

所以 $h(x)$的单调递增区间为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$,单调递减区间为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, ……………………… 11 分

所以 $h(x)$的极大值也是 $h(x)$的最大值为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{e}}$,没有极小值,且 $h\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,$x>-\frac{1}{2}$时,$h(x)>0$,

因为 $f(x)$恰有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,所以 $0<a<\frac{2}{\sqrt{e}}$; ……………………………………… 12 分

因为 x_1,x_2 是函数 $f(x)$的两个极值点(不妨设 $x_1<x_2$),

所以 $f'(x_1)=0$,$f'(x_2)=0$,即 $ae^{x_1}-2x_1-1=0$,$ae^{x_2}-2x_2-1=0$.

两式相减化得$\frac{2}{a}=\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$. ………………………………………………………………… 13 分

于是要证明$\frac{x_1+x_2}{2}<\ln\frac{2}{a}$,即证明 $e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$,两边同除以 e^{x_2},

即证 $e^{\frac{x_1-x_2}{2}}<\frac{e^{x_1-x_2}-1}{x_1-x_2}$,即证$(x_1-x_2)e^{\frac{x_1-x_2}{2}}>e^{x_1-x_2}-1$,

即证$(x_1-x_2)e^{\frac{x_1-x_2}{2}}-e^{x_1-x_2}+1>0$,

令 $x_1-x_2=t$,$t<0$,即证不等式 $te^{\frac{t}{2}}-e^t+1>0$,当 $t<0$ 时恒成立. ……………………… 14 分

设 $\varphi(t)=te^{\frac{t}{2}}-e^t+1$,

则 $\varphi'(t)=e^{\frac{t}{2}}+t\cdot e^{\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}-e^t=\left(\frac{t}{2}+1\right)e^{\frac{t}{2}}-e^t=-e^{\frac{t}{2}}\left[e^{\frac{t}{2}}-\left(\frac{t}{2}+1\right)\right]$. ……………………… 15 分

设 $m(t)=e^{\frac{t}{2}}-\frac{t}{2}-1$,则 $m'(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e^{\frac{t}{2}}-1)$,

当 $t<0$ 时,$m'(t)<0$,

$m(t)$单调递减,所以 $m(t)>m(0)=0$,即 $e^{\frac{t}{2}}-\left(\frac{t}{2}+1\right)>0$,所以 $\varphi'(t)<0$,

所以 $\varphi(t)$在 $t<0$ 时是减函数,故 $\varphi(t)$在 $t=0$ 处取得最小值 $\varphi(0)=0$,所以 $\varphi(t)>0$ 得证. ………… 16 分

所以$\frac{x_1+x_2}{2}<\ln\frac{2}{a}$. ………………………………………………………………………… 17 分