2024～2025 学年第二学期一调考试·高二数学
参考答案、提示及评分细则

1. A　听讲座的种数为 $3^3=27$ 种. 故选 A.

2. B　因为 $f(x)=e^x+\sin x$，所以 $f'(x)=e^x+\cos x$，故 $f'(0)=e^0+\cos 0=2$. 故选 B.

3. A　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-2\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{-2\Delta x}=-2f'(1)$，

由 $f'(x)=4x^3-3$，可得 $f'(1)=1$，$\therefore\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{-2\Delta x}=-2f'(1)=-2$. 故选 A.

4. C　令 $u=x^2+x$，则 $f'(x)=(e^u)'-u'=(2x+1)e^{x^2+x}$，故选 C.

5. A　由 $f(x)=2f'(1)\ln x+\dfrac{1}{x}$ 可得 $f'(x)=2f'(1)\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$，故 $f'(1)=2f'(1)-1$，解得 $f'(1)=1$，故选 A.

6. A　由题意知 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，所以当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减，又 $f(0)=1$，$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\dfrac{3\pi}{2}$，所以 $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\dfrac{3\pi}{2}$. 故选 A.

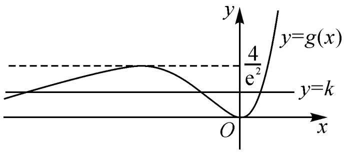
7. B　根据题意，分三步进行；
第一步，要求"只有中间一列两个数字之和为 5"，则中间的数字为三组数 0，5 或 1，4 或 2，3 中的一组，共有 $3A_2^2=6$ 种排法；
第二步，排第一步中剩余的两组数，且这两数字之和不为 5，共有 $A_4^1A_2^1=8$ 种排法；
第三步，排剩下的两个数字，共有 $A_2^2=2$ 种排法.
由分步计数原理知，共有不同的排法种数为 $6\times 8\times 2=96$. 故选 B.

8. B　由题意，不妨设 $x_1>x_2>0$，因为对任意两个不等的正实数 x_1,x_2，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>a$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>ax_1-ax_2$，即 $f(x_1)-ax_1>f(x_2)-ax_2$，令 $g(x)=f(x)-ax=x^3+x^2+8\ln x-ax$，则 $g(x_1)>g(x_2)$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)=3x^2+2x+\dfrac{8}{x}-a\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$a\leqslant 3x^2+2x+\dfrac{8}{x}$. 令 $h(x)=3x^2+2x+\dfrac{8}{x}$，$x>0$，所以 $h'(x)=6x+2-\dfrac{8}{x^2}=\dfrac{6x^3+2x^2-8}{x^2}=\dfrac{2(x-1)(3x^2+4x+4)}{x}$，令 $h'(x)<0$，解得 $0<x<1$，令 $h'(x)>0$，解得 $x>1$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(1)=13$，所以 $a\leqslant 13$，即 a 的取值范围是 $(-\infty,13]$. 故选 B.

9. AD　$(3^x)'=3^x\ln 3$，故 A 正确；
$(\ln 5)'=0$，故 B 错误；
$(\sqrt{3x-1})'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$，故 C 错误；
$(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$，故 D 正确. 故选 AD.

10. BCD　由题意，$f'(x)=e^xx^3+e^x\times 3x^2=x^2e^x(x+3)$，当 $x<-3$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>-3$ 时，$f'(x)>0$，故函数在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，在 $(-3,+\infty)$ 上单调递增，A 错误；
因为 $\ln\pi>1>e^{-\frac{1}{2}}$，根据单调性知 $f(e^{-\frac{1}{2}})<f(1)<f(\ln\pi)$，B 正确；
$f(0)=0$，$f(-3)=-\dfrac{27}{e^3}<-1$，且函数在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，故方程 $f(x)=-1$ 有实数解，C 正确；
方程 $f(x)=kx$，易知当 $x=0$ 时成立，当 $x\neq 0$ 时，$k=\dfrac{f(x)}{x}=e^xx^2$，设 $g(x)=e^xx^2$，则 $g'(x)=e^x\cdot$

$x(x+2)$，当 $x<-2$ 或 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)<0$，故函数在 $(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,0)$ 上单调递减，且 $g(-2)=\frac{4}{e^2}$. 画出函数图象，如图所示，当 $0<k<\frac{4}{e^2}$ 时有 3 个交点.



综上所述，存在实数 k，使得方程 $f(x)=kx$ 有 4 个实数解，D 正确，故选 BCD.

11. BCD　由题意知 $f'(x)=ax-a+\frac{1}{x}=\frac{ax^2-ax+1}{x}$，若 $a\leqslant 0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=0$ 至多一个零点，不符合题意；若 $a>0$，则 $a^2-4a>0$，解得 $a>4$，即 a 的取值范围是为 $(4,+\infty)$，故 A 错误；

因为 x_1,x_2 是 $ax^2-ax+1=0$ 的两个不同的根，所以 $x_1+x_2=1$，$x_1x_2=\frac{1}{a}\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，故 B，C 正确；

$f(x_1)+f(x_2)=\frac{a}{2}x_1^2-ax_1+\ln x_1+\frac{a}{2}x_2^2-ax_2+\ln x_2=\frac{a}{2}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-a(x_1+x_2)+\ln x_1x_2=-\ln a-\frac{a}{2}-1\in(-\infty,-3-2\ln 2)$，故 D 正确. 故选 BCD.

12. $-\frac{1}{2}$　因为 $y=\ln(ax+1)$，所以 $y'=\frac{a}{ax+1}$，所以 $y'|_{x=0}=a$，所以 $k=a$，直线 $2x-y+1=0$ 的斜率为 $k_1=2$，因为 $k\cdot k_1=-1$，所以 $k=-\frac{1}{2}$.

13. 50　分两类，第一类：3 个红球"捆绑"在一起，另外 2 个红球也"捆绑"在一起，然后让 4 个白球排列后形成 5 个空位，选出 2 个空位让这两个"捆绑"的红球排列即可，此时有 $A_5^2=20$ 种；
第二类：3 个红球"捆绑"在一起，另外 2 个红球不相邻，此时让 4 个白球排列后形成 5 个空位，从中选出 1 个空位放"捆绑"的红球，再从剩下的 4 个空位选出 2 个空位放不相邻的红球即可，此时有 $C_5^1C_4^2=30$，所以共有 $20+30=50$ 种.

14. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　令 $g(x)=e^xf(x)$，所以 $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. 又 $f(2)=\frac{1}{e}$，所以 $g(2)=e^2f(2)=e$，由 $f(2x+1)<e^{-2x}$，得 $e^{2x+1}\cdot f(2x+1)<e$，即 $g(2x+1)<g(2)$，所以 $2x+1<2$，解得 $x<\frac{1}{2}$，即不等式 $f(2x+1)<e^{-2x}$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

15. 解：(1) $y'=(x^5e^x)'=(x^5)'e^x+x^5(e^x)'=5x^4e^x+x^5e^x$；…………………… 4 分

(2) $y'=\left(\frac{x^3-1}{\sin x}\right)'=\frac{(x^3-1)'\sin x-(x^3-1)(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{3x^2\sin x-(x^3-1)\cos x}{\sin^2 x}$；…………………… 8 分

(3) $y'=(2^x+\ln(3x))'=(2^x)'+[\ln(3x)]'=2^x\cdot\ln 2+\frac{3}{3x}=2^x\ln 2+\frac{1}{x}$. …………………… 13 分

16. 解：(1) $f'(x)=3x^2+2ax-2$，

由题意得 $f'(1)=0$，即 $3+2a-2=0$，解得 $a=-\frac{1}{2}$，…………………… 2 分

故解析式为 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$，定义域为 $\mathbf{R}$，…………………… 3 分

所以 $f'(x)=3x^2-x-2$，令 $f'(x)>0$ 得 $x>1$ 或 $x<-\frac{2}{3}$，

令 $f'(x)<0$ 得 $-\frac{2}{3}<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{2}{3},1\right)$ 上单调递减，

即 $f(x)$ 单调递增区间为 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(-\frac{2}{3},1\right)$；…………………… 7 分

(2)由(1)知，$f(x)$ 在 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$，$(1,2)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{2}{3},1\right)$ 上单调递减，

表格如下：

x	$\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},1\right)$	1	$(1,2)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值 $\frac{22}{27}$	单调递减	极小值 $-\frac{3}{2}$	单调递增

………………………………………………………………………………………… 10 分

又 $f(-1)=\frac{1}{2}$，$f(2)=2$，…………………………………………………………………… 12 分

故 $f(x)$ 的最大值为 2，最小值为 $-\frac{3}{2}$．………………………………………………………… 15 分

17．解：(1)由题意可得共 $2\times4A_4^4=96\times2=192$ 种不同的站法；………………………………………… 5 分

(2)先排老师和女学生共有 A_3^3 种站法，再排男学生甲有 C_2^1 种站法，

最后排剩余的 3 名男学生有 A_3^3 种站法，

所以共有 $A_3^3C_2^1A_3^3=72$ 种不同的站法；…………………………………………………………… 10 分

(3)先任选 2 名男学生站两名女生中间，有 $2A_4^2$ 种站法，

再将两名男学生和两名女学生进行捆绑与剩余的 3 个人进行全排列有 A_4^4 种，

所以共有 $2A_4^2A_4^4=576$ 种不同的站法．…………………………………………………………… 15 分

18．解：(1)函数 $f(x)=\ln x+x^2-ax$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，导函数 $f'(x)=\frac{2x^2-ax+1}{x}$，…………… 1 分

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，……………………………………… 3 分

当 $a>0$ 且 $a^2-8<0$ 时，即 $0<a<2\sqrt{2}$ 时，

$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，………………………………………………… 5 分

当 $a=2\sqrt{2}$ 时，$f'(x)\geqslant0$，当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $f'(x)=0$，

函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $a>2\sqrt{2}$ 时，方程 $2x^2-ax+1=0$ 有两个不等实数根，设其根为 x_1，x_2，$x_1<x_2$，

则 $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$，

由 $x_1+x_2=\frac{a}{2}>0$，$x_1x_2=\frac{1}{2}>0$ 知，$x_1>0$，$x_2>0$，

所以当 $0<x<x_1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递增，

当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递减，

当 $x>x_2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，…………………………………… 7 分

所以当 $a\leqslant2\sqrt{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $a>2\sqrt{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}\right)$ 上单调递增，

函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}\right)$ 上单调递减，

函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增，…………………………………………………… 9 分

(2)因为 $g(x)=f(x)+e^x-2\ln x$，$f(x)=\ln x+x^2-ax$，

所以 $g(x)=e^x-\ln x+x^2-ax$，……………………………………………………………………… 10 分

不等式 $g(x)\geqslant 0$ 可化为 $\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}+x\geqslant a$,

因为 $g(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立,

所以 $\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}+x\right)_{\min}\geqslant a$, …………………………………………………………………… 12 分

设 $h(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}+x$,

则 $h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-\frac{1-\ln x}{x^2}+1=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}+\frac{x^2-1}{x^2}$, ………………………………………… 14 分

当 $x>1$ 时, $h'(x)>0$, 函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

当 $0<x<1$ 时, $h'(x)<0$, 函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, ………………………………………………… 16 分

所以当 $x=1$ 时, 函数 $h(x)$ 取最小值, 最小值为 $e+1$,

故 $a\leqslant e+1$,

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,e+1]$. ………………………………………………………………………………… 17 分

19. (1)解: 因为 $f(x)=e^x+ax-1$,

所以 $f'(x)=e^x+a$, 所以 $f'(1)=e+a$, ……………………………………………………………………………… 2 分

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率是 $e-1$,

所以 $e+a=e-1$,

解得 $a=-1$; …… 4 分

(2)证明: 由(1)知, $f(x)=e^x-x-1$,

则 $f'(x)=e^x-1$,

由 $f'(0)>0$, 得 $x>0$,

由 $f'(0)<0$, 得 $x<0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, ……………………………………… 6 分

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$,

所以 $f(x)\geqslant 0$; ………………………………………………………………………………………………… 8 分

(3)证明: 令 $g(x)=e^{x-3}-\ln x+1\ (x>0)$,

则 $g'(x)=e^{x-3}-\frac{1}{x}=\frac{xe^{x-3}-1}{x}$, ……………………………………………………………………… 9 分

令 $m(x)=xe^{x-3}-1$, 则 $m'(x)=e^{x-3}+xe^{x-3}>0$,

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

又 $m(2)=\frac{2}{e}-1<0$, $m(3)=3-1=2>0$,

所以存在 $x_0\in(2,3)$, 使得 $m(x_0)=0$,

即 $x_0e^{x_0-3}-1=0$, 即 $x_0=\frac{1}{e^{x_0-3}}=e^{3-x_0}$, ………………………………………………………… 11 分

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时, $m(x)<0$, 则 $g'(x)<0$,

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $m(x)>0$, 则 $g'(x)>0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增, ………………………………………… 12 分

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0-3}-\ln x_0+1=e^{x_0-3}-\ln e^{3-x_0}+1=e^{x_0-3}+x_0-2$, ………………… 15 分

因为 $x_0\in(2,3)$, 所以 $x_0-2>0$,

所以 $g(x)_{\min}>0$,

所以 $g(x)\geqslant g(x)_{\min}>0$,

即 $e^{x-3}>\ln x-1$. ……………………………………………………………………………………………… 17 分