永年二中 2023-2024 学年第二学期期中考试

高一数学参考答案：

1. 单选题：1—8 DBDCBDAA
2. 多选题：9 . ACD 10. BCD 11. ACD
3. 填空题：12. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 13. $\mathbf{3\sqrt{2}}$ 14. $\mathbf{21\pi}$

大题详解后面

14．21π

【分析】设上、下底面半径分别为r，R，结合图形题意及几何性质可得r，R，后由圆台体积公式可得答案.

【详解】设上、下底面半径，母线长分别为r，R，l.

作$A_1D\perp AB$于点D，则$A_1D=3$，$\angle A_1DA=\angle A_1DB=90°$.

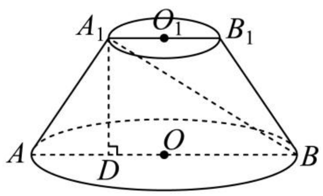
又$\angle A_1AB=60°$，则$AD=\frac{A_1D}{\tan 60°}=AO-DO=R-r=\sqrt{3}$.

又$\angle BA_1A=90°$，则$\angle BA_1D=60°\Rightarrow BD=A_1D\tan 60°=DO+BO=R+r=3\sqrt{3}$.

则$R=2\sqrt{3}$，$r=\sqrt{3}$，又圆台高$h=3$，

则圆台体积$V=\frac{\pi}{3}h(R^2+Rr+r^2)=\frac{\pi}{3}\times 3\times(12+6+3)=21\pi$.

故答案为：21π.



15．(1)$\frac{3\pi}{4}$

(2)$k=1$ 或-1

【分析】（1）计算出向量夹角的坐标表示即可得解；

（2）根据向量平行得到方程，求出答案.

【详解】（1）$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{(1,3)\cdot(1,-2)}{\sqrt{1+9}\times\sqrt{1+4}}=\frac{1-6}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{3\pi}{4}$;

（2）$k\vec{a}+\vec{b}=k(1,3)+(1,-2)=(k+1,3k-2)$，

$\vec{a}+k\vec{b}=(1,3)+k(1,-2)=(1+k,3-2k)$，

由于$k\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}+k\vec{b}$互相平行，故$(k+1)(3-2k)-(3k-2)(1+k)=0$，

解得$k=1$或-1，

经检验，均满足要求.

16．(1)$m=-3$；

(2)$m\neq1$ 且 $m\neq-3$；

(3)$m=0$ 或 $m=-2$.

【详解】

解：（1） 由 $z\in\mathbf{R}$，得$\begin{cases}m^2+2m-3=0,\\ m-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=-3$.

（2） 由 z 是虚数，得 $m^2+2m-3\neq0$，且 $m-1\neq0$，解得 $m\neq1$ 且 $m\neq-3$.

（3） 由 z 是纯虚数，得$\begin{cases}m(m+2)=0,\\ m-1\neq0,\\ m^2+2m-3\neq0,\end{cases}$解得 $m=0$ 或 $m=-2$.

【考查意图】

了解复数的相关概念

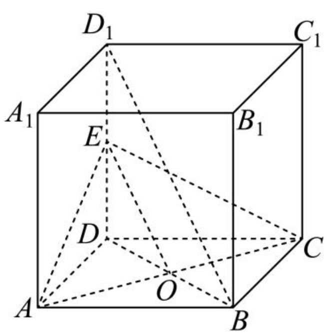
17．(1)证明见解析

(2)存在，理由见解析

【分析】（1）利用三角形中位线证明线线平行，结合线面平行判定定理，从而得线面平行；

（2）结合面面平行判定定理来确定动点位置，并证明面面平行.

【详解】（1）如图，连接BD交AC于O，连接EO.



因为$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，底面$ABCD$为正方形，对角线AC，BD交于O点，

所以O为BD的中点，又因为E为DD_1的中点，

所以在$\triangle DBD_1$中，OE是$\triangle DBD_1$的中位线，

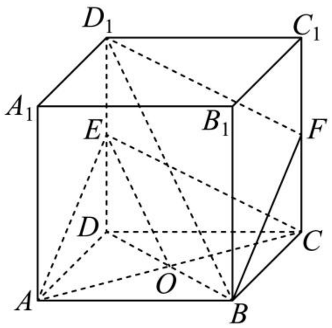
所以$OE//BD_1$，

又因为$OE \subset$平面AEC，$BD_1 \not\subset$平面AEC，

所以$BD_1//$平面AEC.

（2）当CC_1上的点F为中点时，即满足平面$AEC//$平面BFD_1，理由如下：

连接BF，D_1F，



因为F为CC_1的中点，E为DD_1的中点，所以$CF//ED_1, CF = ED_1$，

所以四边形CFD_1E为平行四边形，所以$D_1F//EC$，

又因为$EC \subset$平面AEC，$D_1F \not\subset$平面AEC，

所以$D_1F//$平面AEC.

由（1）知$BD_1//$平面AEC，

又因为$BD_1 \cap D_1F = D_1$，BD_1，$D_1F \subset$平面BFD_1，

所以平面$AEC//$平面BFD_1.

18.(1)$C = \frac{\pi}{3}$

(2)$2\sqrt{3} < a < 4$

(3)$2\sqrt{3}$

【分析】（1）分别选择条件①，②，③，根据边角转化即可求解角C；

（2）根据三角形有两个解，根据边角关系列不等式即可得边a的取值范围；

（3）根据向量之间的运算，结合数量积的运算可得ab的值，即可求$\triangle ABC$的面积.

【详解】（1）解：若选①，$\because \cos^2 A + \sin A \sin B = \sin^2 B + \cos^2 C$，$\therefore 1 - \sin^2 A + \sin A \sin B = \sin^2 B + 1 - \sin^2 C$，

即 $\sin A \sin B - \sin^2 A = \sin^2 B - \sin^2 C$，由正弦定理得$ab - a^2 = b^2 - c^2$，

即 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$，$\because 0 < C < \pi$，$\therefore C = \frac{\pi}{3}$.

若选②，$\because \frac{a}{c+b} + \frac{b}{c+a} = 1$，$\therefore a(c + a) + b(c + b) = (c + b)(c + a)$

即$ac + a^2 + bc + b^2 = c^2 + ac + bc + ab$，整理得$a^2 + b^2 - c^2 = ab$，即 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$,

$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

若选③，$\because c\cos A-a\cos C=b-a$，由正弦定理得 $\sin C\cos A-\sin A\cos C=\sin B-\sin A$，

$\sin B=\sin(A+C)=\sin C\cos A+\cos C\sin A$，故 $\sin C\cos A-\sin A\cos C=\sin C\cos A+\sin A\cos C-\sin A$，

即 $2\sin A\cos C=\sin A$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A\neq 0$

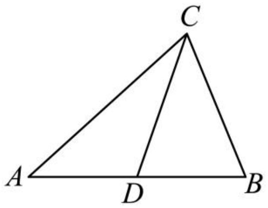
故 $\cos C=\frac{1}{2}$，$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

（2）解：由正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，所以 $\sin A=\frac{a}{4}$，故$\frac{a}{4}<1$ 即$a<4$，

又满足条件的$\triangle ABC$有两个，则角A有两个解，由大边对大角，应有$a>c=2\sqrt{3}$，

故边a的取值范围是 $2\sqrt{3}<a<4$.

（3）解：



由图可得$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{DB}$，而$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}$，

所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cos C=ab\cos C=\frac{1}{2}ab=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})=CD^2-DA^2=7-3=4$，

$\therefore ab=8$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

19．(1)答案见解析

(2)$\frac{9}{2}$

(3)$\frac{7}{17}$

【分析】（1）取AB的中点F，连接EF、A_1B、CF，利用平行线的传递性可证得$EF//D_1C$，可知E、F、C、D_1四点共面，再由于E、C、D_1三点不共线，可得出面$EFCD_1$即为平面α截正方体所得的截面；

（2）分析可知，四边形CD_1EF为等腰梯形，求出该等腰梯形的高，利用梯形的面积公式可求得截面面积；

（3）利用台体的体积公式可求得三棱台$AEF-DD_1C$的体积，并求出剩余部分几何体的体积，由此可得结果.

【详解】（1）如下图，取AB的中点F，连接EF、A_1B、CF.

因为E是AA_1的中点，所以$EF//A_1B$.

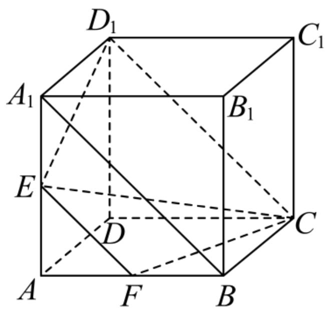
在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$A_1D_1//BC$，$A_1D_1=BC$，

所以四边形A_1BCD_1是平行四边形，所以$A_1B//D_1C$，所以$EF//D_1C$，

所以E、F、C、D_1四点共面.

因为E、C、D_1三点不共线，所以E、F、C、D_1四点共面于平面α，

所以面$EFCD_1$即为平面α截正方体所得的截面.

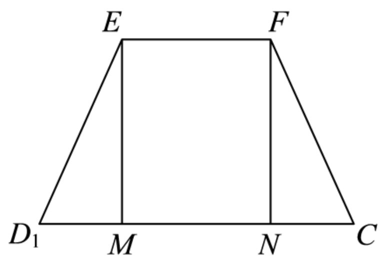


（2）由（1）可知，截面$EFCD_1$为梯形，$EF=\sqrt{AE^2+AF^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，

$CD_1=\sqrt{CD^2+DD_1^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，$D_1E=\sqrt{A_1D_1^2+A_1E^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，

同理可得$CF=\sqrt{5}$，

如下图所示：



分别过点E、F在平面CD_1EF内作$EM\perp CD_1$，$FN\perp CD_1$，垂足分别为点M、N，

则$D_1E=CF$，$\angle ED_1M=\angle FCN$，$\angle EMD_1=\angle FNC=90°$，

所以，$\triangle EMD_1\cong\triangle FNC$，则$D_1M=CN$，

因为$EF//CD_1$，$EM\perp CD_1$，$FN\perp CD_1$，则四边形$EFNM$为矩形，

所以，$MN=EF=\sqrt{2}$，则$D_1M=CN=\frac{CD_1-MN}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以，$EM=\sqrt{ED_1^2-D_1M^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

所以，梯形CD_1EF的面积为$S=\frac{1}{2}(EF+CD_1)\cdot EM=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}$.

（3）多面体$AEF-DD_1C$为三棱台，$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot AF=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$,

$S_{\triangle DD_1C}=\frac{1}{2}DD_1\cdot DC=\frac{1}{2}\times 2^2=2$，该棱台的高为 2，

所以，该棱台的体积为$\frac{1}{3}\left(S_{\triangle AEF}+S_{\triangle DD_1C}+\sqrt{S_{\triangle AEF}\cdot S_{\triangle DD_1C}}\right)\cdot AD$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+2+\sqrt{\frac{1}{2}\times 2}\right)\times 2=\frac{7}{3}$,

故剩余部分的体积为 $8-\frac{7}{3}=\frac{17}{3}$.

故比较小的那部分与比较大的那部分的体积的比值为$\frac{7}{17}$.