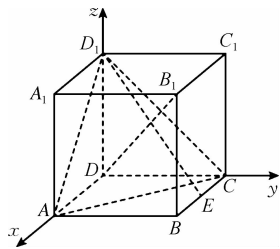


# 2024~2025 学年第一学期二调考试 · 高二数学

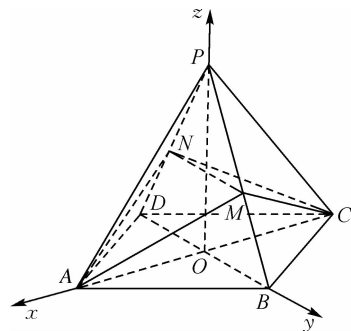
## 参考答案、提示及评分细则

1. C 由题意可知,  $\frac{2}{3} = -\frac{a}{b}$ , 所以  $\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$ . 故选 C.
2. B 由题意得  $a_2 = -2a_1, a_3 = 4a_1$ , 由  $a_2 - a_3 = 6$ , 得  $-6a_1 = 6, a_1 = -1$ . 故选 B.
3. A 因为  $a \parallel b, b \perp c$ , 所以  $\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} \\ 3+y-2z=0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x=-1, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$  所以  $x+y+z=-1$ . 故选 A.
4. B 设  $P$  点坐标为  $(x_0, y_0)$ , 则有  $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1, M(x, y)$ , 根据  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$ , 可得  $x_0 = 2x, y_0 = 2y$ , 代入椭圆方程可得:  $\frac{4x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ . 故选 B.
5. D 由题意, 得  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ . 故选 D.
6. C 因为  $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , 所以  $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ , 所以  $a_{2024} = \frac{2024}{2025}$ . 故选 C.
7. D 如图, 以  $DA, DC, DD_1$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立空间直角坐标系,  $B_1(4, 4, 4), D_1(0, 0, 4), A(4, 0, 0), C(0, 4, 0), E(2, 4, 0), \overrightarrow{DB_1} = (4, 4, 4), \overrightarrow{AD_1} = (-4, 0, 4), \overrightarrow{CD_1} = (0, -4, 4), \overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0, \overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0$ , 所以  $DB_1 \perp AD_1, DB_1 \perp CD_1$ , 由于  $AD_1 \cap CD_1 = D_1$ , 所以  $DB_1 \perp$  平面  $ACD_1$ , 即平面  $ACD_1$  的一个法向量为  $\overrightarrow{DB_1} = (4, 4, 4), \overrightarrow{D_1E} = (2, 4, -4)$ , 设直线  $D_1E$  与平面  $ACD_1$  所成的角为  $\alpha$ , 所以  $\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{D_1E} \cdot \overrightarrow{DB_1}|}{|\overrightarrow{D_1E}| \cdot |\overrightarrow{DB_1}|} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ . 又  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 所以  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{78}}{9}$ . 故选 D.
8. A 根据题意, 对于给定的  $P$  点, 当直线  $l$  过圆心  $M$  时,  $\left|\frac{AB}{PA}\right| = \frac{4}{|PM| - 2}$ , 此时  $\left|\frac{AB}{PA}\right|$  有最大值, 所以  $\frac{4}{|PM| - 2} \geq 2$ , 所以  $|PM| \leq 4$ , 即  $\sqrt{x_0^2 + 9} \leq 4$ , 解得  $-\sqrt{7} \leq x_0 \leq \sqrt{7}$ . 故选 A.
9. AC 对于 A, 由  $a_2 = a_5 = 0$ , 可得  $a_n = 0$ , 所以  $a_8 = 0$ , A 正确; 对于 B, 由  $S_n = 8n - n^2$ , 得  $a_8 = S_8 - S_7 = -7$ , B 错误; 对于 C, 由  $a_3 = 5, a_5 = 3$ , 得  $\{a_n\}$  的公差为  $-1, a_8 = a_5 - 3 = 0$ , C 正确; 对于 D,  $S_{16} = \frac{16(a_1 + a_{16})}{2} = 8(a_8 + a_9) = 0, a_8 + a_9 = 0, a_8$  的值不确定, D 错误. 故选 AC.
10. BD 对于选项 A, 由题意可知抛物线  $C$  的焦点为  $F(1, 0)$ , 准线  $l$  的方程为  $x = -1$ , 所以点  $F$  到直线  $l$  的距离是 2, 故 A 错误; 对于选项 B, 由  $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$  得  $y^2 - 2y - 8 = 0$ , 解得  $y = -2$  或  $y = 4$ , 所以  $|y_P - y_Q| = 6$ , 又  $PQ$  与  $x$  轴的交点为  $E(2, 0)$ , 所以  $|EF| = 1$ , 所以  $\triangle FPQ$  的面积为  $\frac{1}{2}|EF| \cdot |y_P - y_Q| = 3$ , 故 B 正确; 对于选项 C, 因为  $PQ$  的中点  $G$  到直线  $l$  的距离为 3, 所以  $\frac{x_P + x_Q}{2} + 1 = 3$ , 即  $x_P + x_Q = 4$ , 所以  $|FP| + |FQ| = x_P + x_Q + 2 = 6$ , 故 C 错误; 对于选项 D, 设  $PQ: x = my + 4, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ , 由  $\begin{cases} x = my + 4, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$  得  $y^2 - 4my - 16 = 0, \Delta = 16m^2 + 64 > 0, y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -16$ , 因为  $k_{OP} \cdot k_{OQ} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 y_2}{y_1^2 y_2^2} = \frac{16}{y_1 y_2} = -1$ , 所



以  $OP \perp OQ$ , 故 D 正确. 故选 BD.

11. ABC 连接  $BD$  交  $AC$  于点  $O$ , 连结  $PO$ , 由题意, 得  $PO \perp$  平面  $ABCD$ , 因为  $AC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PO \perp AC$ , 因为四边形  $ABCD$  是正方形, 所以  $BD \perp AC$ , 因为  $PO \cap BD = O$ ,  $PO, BD \subset$  平面  $PBD$ , 所以  $AC \perp$  平面  $PBD$ , 因为  $MN \subset$  平面  $PBD$ , 所以  $AC \perp MN$ , 故 A 正确; 以  $OA, OB, OP$  所在直线分别为  $x, y, z$  轴建立空间直角坐标系, 如图所示, 因为  $PA = AB = 2\sqrt{2}$ , 所以  $OA = OB = 2, OP = 2$ , 所以  $A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2, 0, 0), D(0, -2, 0), P(0, 0, 2), M(0, 1, 1), N(0, -1, 1)$ , 所以  $\overrightarrow{AM} = (-2, 1, 1), \overrightarrow{CN} = (2, -1, 1)$ , 所以  $|\cos \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{CN}|} = \frac{|-4|}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2}{3}$ ,



所以直线  $AM$  和  $CN$  所成角的余弦值是  $\frac{2}{3}$ , 故 B 正确;  $\overrightarrow{AN} =$

$(-2, -1, 1), \overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$ , 与  $\overrightarrow{AN}$  同向的单位向量为  $u = \frac{\overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{AN}|} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ , 所以点  $B$  到直

线  $AN$  的距离  $d_1 = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot u)^2} = \frac{\sqrt{66}}{3}$ , 故 C 正确; 设  $m = (x, y, z)$  为平面  $ACN$  的法向量, 则

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{CN} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AN} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ -2x - y + z = 0, \end{cases} \text{ 令 } y = 1, \text{ 得 } m = (0, 1, 1), \text{ 点 } M \text{ 到平面 } ACN \text{ 的距离 } d_2 = \left| \overrightarrow{AM} \cdot \frac{m}{|m|} \right| =$$

$\sqrt{2}$ , 故 D 错误. 故选 ABC.

12.  $\frac{12}{5}$  方法一: 直线  $l$  过点  $A(4, 0)$  与  $B(0, -3)$ , 记  $O(0, 0)$  到直线  $l$  的距离为  $d$ , 则在  $\triangle AOB$  中,  $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot$

$$|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} |AB| \cdot d, \text{ 而 } |OA| = 4, |OB| = 3, |AB| = 5, \text{ 所以 } d = \frac{12}{5}.$$

方法二: 直线  $l$  的方程改写为  $3x - 4y - 12 = 0$ , 由点到直线的距离公式, 原点到直线  $l$  的距离为  $\frac{|3 \times 0 - 4 \times 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{12}{5}$ .

13.  $\sqrt{2}$  设  $C$  的半焦距为  $c$ , 则  $F(c, 0)$ , 渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , 故点  $F$  到渐近线的距离为  $\frac{\left| \frac{bc}{a} \right|}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}} = b$ , 所以

$$|OP| = a, \text{ 所以 } S_{\triangle OPF} = \frac{1}{2} ab = \frac{\sqrt{2}}{4} ac, \text{ 所以 } 2b = \sqrt{2}c, \text{ 所以 } 4(c^2 - a^2) = 2c^2, \text{ 所以 } \frac{c^2}{a^2} = 2, \text{ 所以 } e = \sqrt{2}.$$

14. 973 当  $n = 1$  时,  $a_1 = S_1 = 2a_1 - 2$ , 解得  $a_1 = 2$ ; 当  $n \geq 2$  时, 由  $S_n = 2a_n - 2$ , 得  $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$ , 两式相减, 得

$a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$ , 即  $a_n = 2a_{n-1}$ , 所以  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ , 数列  $\{a_n\}$  是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 因此  $a_n = 2^n, b_n =$

$\log_2 a_n = n$ , 即  $a_n$  是数列  $\{b_n\}$  中的第  $2^n$  项, 因为  $a_6 = 2^6 = 64, a_5 = 2^5 = 32$ , 所以数列  $\{c_n\}$  的前 40 项是由数列  $\{b_n\}$  的前 45 项去掉数列  $\{a_n\}$  的前 5 项后构成的, 所以数列  $\{c_n\}$  的前 40 项和为  $(b_1 + b_2 + \cdots + b_{45}) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = \frac{1+45}{2} \times 45 - \frac{2(1-2^5)}{1-2} = 973$ .

15. 解: (1) 因为  $a_n = 2n - 1, a_{n+1} - a_n = 2n + 1 - (2n - 1) = 2$ ,

所以数列  $\{a_n\}$  是等差数列, ..... 2 分

$$\text{所以 } S_{2n-1} = \frac{(a_1 + a_{2n-1})(2n-1)}{2} = \frac{(1 + 4n - 3)(2n-1)}{2} = (2n-1)^2. \text{ ..... 6 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } a_n = \frac{1-4^n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2^n, \text{ ..... 7 分}$$

数列  $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$  与数列  $\{2^n\}$  分别是公比为  $\frac{1}{2}, 2$  的等比数列, ..... 9 分

$$\text{所以 } S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 1 - \frac{1}{2^n} + 2(1-2^n) = 3 - \frac{1}{2^n} - 2^{n+1}. \text{ ..... 13 分}$$

16. 解: (1) 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 因为  $a_3 - a_1 = 2d > 0$ , 所以  $d > 0$ , ..... 1 分

因为  $a_1 + a_3 = 10, a_1, a_2 - 1, a_3$  成等比数列,

所以  $\begin{cases} 2a_1 + 2d = 10, \\ (a_1 + d - 1)^2 = a_1(a_1 + 2d), \end{cases}$  ..... 3 分

解得  $\begin{cases} a_1 = 8, \\ d = -3 \end{cases}$  (舍去) 或  $\begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 3, \end{cases}$  ..... 5 分

所以  $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$ . ..... 7 分

(2) 由(1)得  $a_n = 3n - 1$ , 所以  $b_n = \frac{3n-1}{3^n}$ , ..... 8 分

所以  $T_n = \frac{2}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{8}{3^3} + \dots + \frac{3n-4}{3^{n-1}} + \frac{3n-1}{3^n}$ , ①

$\frac{1}{3} T_n = \frac{2}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{8}{3^4} + \dots + \frac{3n-4}{3^n} + \frac{3n-1}{3^{n+1}}$ , ② ..... 9 分

①-②得  $\frac{2}{3} T_n = \frac{2}{3} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} \right) - \frac{3n-1}{3^{n+1}}$   
 $= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right) - \frac{3n-1}{3^{n+1}} = \frac{7}{6} - \frac{6n+7}{2 \cdot 3^{n+1}}$ , ..... 13 分

所以  $T_n = \frac{7}{4} - \frac{6n+7}{4 \cdot 3^n}$ . ..... 15 分

17. 解: (1) 设  $P(x_0, y_0)$ , 因为  $PF_1 \perp F_1F_2$ , 所以  $x_0 = -c, |y_0| = \frac{b^2}{a}$ , ..... 1 分

因为  $\triangle PF_1F_2$  的周长为  $4 + 2\sqrt{3}$ , 面积为  $\frac{1}{2}c$ ,

所以  $2a + 2c = 4 + 2\sqrt{3}, \frac{1}{2} \times 2c \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}c$ , ..... 3 分

即  $a + c = 2 + \sqrt{3}, a = 2b^2$ , 又  $a^2 = b^2 + c^2$ , ..... 4 分

所以  $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$ , ..... 5 分

所以  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . ..... 6 分

(2) 由(1)知  $F_2(\sqrt{3}, 0)$ , 因为  $C$  的长轴长为 4, 故  $l$  的斜率不为 0,

设  $l$  的方程为  $x = my + \sqrt{3}, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , ..... 8 分

与  $C$  的方程联立, 得  $\begin{cases} x = my + \sqrt{3}, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$

消去  $x$  并整理, 得  $(m^2 + 4)y^2 + 2\sqrt{3}my - 1 = 0$ , ..... 10 分

所以  $y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{3}m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 4}$ . ..... 11 分

又  $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1 + m^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$   
 $= \sqrt{1 + m^2} \sqrt{\left( -\frac{2\sqrt{3}m}{m^2 + 4} \right)^2 + \frac{4}{m^2 + 4}} = \frac{4(1 + m^2)}{m^2 + 4} = 2$ , ..... 13 分

解得  $m = \pm\sqrt{2}$ , 故  $l$  的方程为  $x = \pm\sqrt{2}y + \sqrt{3}$ , 即  $x \pm \sqrt{2}y - \sqrt{3} = 0$ . ..... 15 分

18. (1) 证明: 连接  $AC, A_1C$ , 因为四边形  $ABCD$  与四边形  $A_1BCD_1$  均为菱形, 且  $\angle ABC = \angle A_1BC = 60^\circ$ , 所以  $\triangle ABC$  与  $\triangle A_1BC$  均为等边三角形, ..... 1 分

取  $BC$  的中点  $O$ , 连接  $AO, A_1O$ , 则  $AO \perp BC, A_1O \perp BC$ , ..... 2 分

设  $AB = 2$ , 则  $AO = A_1O = \sqrt{3}$ ,

在  $\triangle ABA_1$  中, 由  $\cos \angle A_1AB = \frac{\sqrt{6}}{4}$  及余弦定理, 得  $2^2 = AA_1^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times AA_1 \times \frac{\sqrt{6}}{4}$ ,

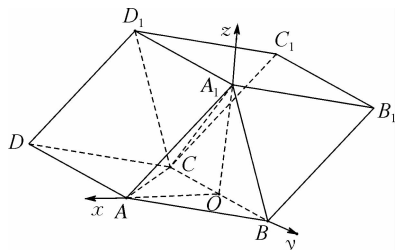
即  $AA_1^2 - \sqrt{6}AA_1 = 0$ , 所以  $AA_1 = \sqrt{6}$  ( $AA_1 = 0$  舍去). ..... 4 分

所以  $AO^2 + A_1O^2 = AA_1^2$ , 所以  $AO \perp A_1O$ , ..... 5 分

因为  $BC \cap A_1O = O, BC, A_1O \subset \text{平面 } A_1BCD_1$ , 所以  $AO \perp \text{平面 } A_1BCD_1$ , ..... 6 分

又  $AO \subset \text{平面 } ABCD$ , 所以  $\text{平面 } ABCD \perp \text{平面 } A_1BCD_1$ . ..... 7 分

(2)解:由(1)可知, $OA,OB,OA_1$  两两垂直,以  $O$  为原点,以  $OA,OB,OA_1$  所在直线分别为  $x$  轴, $y$  轴, $z$  轴,建立空间直角坐标系  $Oxyz$ .



..... 8 分

设  $AB=2$ , 则  $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, -1, 0), A_1(0, 0, \sqrt{3}),$   
 $\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AA_1} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{CB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{AB} =$   
 $(-\sqrt{3}, 1, 0).$  ..... 9 分

设平面  $A_1DD_1$  的一个法向量  $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1),$

由  $\begin{cases} \overrightarrow{DD_1} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{D_1A_1} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ 2y_1 = 0, \end{cases}$  取  $x_1 = 1$ , 解得  $y_1 = 0, z_1 = 1$ , 故  $\mathbf{m} = (1, 0, 1),$  ..... 11 分

设平面  $C_1D_1D$  的一个法向量  $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2),$

由  $\begin{cases} \overrightarrow{DD_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{D_1C_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} -\sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \\ -\sqrt{3}x_2 + y_2 = 0, \end{cases}$  取  $x_2 = 1$ , 解得  $y_2 = \sqrt{3}, z_2 = 1$ , 故  $\mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, 1),$  ..... 13 分

所以  $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$  ..... 15 分

设二面角  $A_1-DD_1-C_1$  的大小为  $\theta,$

所以  $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$  ..... 17 分

19. (1)证明:设不过原点的直线  $E_1$  的方程是  $ax+by+c=0$  ( $a, b, c$  都是常数, 且  $a, b$  不同时为  $0, c \neq 0$ ), 则曲线  $E_2$  的方程是  $a(\lambda x)+b(\lambda y)+c=0$  ( $\lambda > 0$ , 且  $\lambda \neq 1$ ), 即  $ax+by+\frac{c}{\lambda}=0,$  ..... 2 分

因为  $a, b, c, \frac{c}{\lambda}$  都是常数, 且  $a, b$  不同时为  $0, c \neq 0, c \neq \frac{c}{\lambda},$

所以曲线  $E_2$  是一条直线, 且与直线  $E_1$  平行. .... 3 分

(2)①解:伸缩比  $\lambda = \frac{1}{2}$  时, 曲线  $E_1$  通过关于原点的“伸缩变换”得到的曲线是  $E_2: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1,$

所以曲线  $E_1$  的方程是  $\frac{(2x)^2}{16} - \frac{(2y)^2}{4} = 1$ , 即  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$  ..... 5 分

$E_1$  与  $x$  轴的两个交点  $A, B$  的坐标分别是  $(-2, 0), (2, 0),$

因为直线  $l$  过点  $(4, 0)$ , 斜率为  $k$ , 所以直线  $l$  的方程为  $y = k(x-4),$  代入  $x^2 - 4y^2 = 4,$

消去  $y$  并整理得  $(4k^2 - 1)x^2 - 32k^2x + 64k^2 + 4 = 0,$  ..... 7 分

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$  则  $1 - 4k^2 \neq 0, \Delta = (-32k^2)^2 - 4(4k^2 - 1)(64k^2 + 4) = 16(12k^2 + 1) > 0, x_1 + x_2 =$   
 $\frac{32k^2}{4k^2 - 1}, x_1x_2 = \frac{64k^2 + 4}{4k^2 - 1},$  ..... 9 分

因为  $l$  与  $E_1$  在  $y$  轴的右侧有两个交点, 所以  $x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{4k^2 - 1} > 0,$  且  $x_1x_2 = \frac{64k^2 + 4}{4k^2 - 1} > 0,$  ..... 11 分

解得  $k < -\frac{1}{2}$  或  $k > \frac{1}{2},$  所以  $k$  的取值范围是  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty).$  ..... 12 分

②证明:由①知  $k < -\frac{1}{2}$  或  $k > \frac{1}{2},$  所以  $k \neq 0,$

$k_2k_3 = \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{k^2(x_1 - 4)(x_2 - 4)}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{k^2x_1x_2 - 4k^2(x_1 + x_2) + 16k^2}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} =$   
 $\frac{k^2(64k^2 + 4) - 4k^2 \times 32k^2 + 16k^2}{\frac{64k^2 + 4}{4k^2 - 1} - \frac{2 \times 32k^2}{4k^2 - 1} + 4} = \frac{-12k^2}{16k^2} = -\frac{3}{4},$  ..... 15 分

$k_1k_2 = \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y_1^2}{x_1^2 - 4} = \frac{\frac{x_1^2}{4} - 1}{x_1^2 - 4} = \frac{1}{4},$  ..... 16 分

所以  $k_2(k_1 - k_3) = k_1k_2 - k_2k_3 = \frac{1}{4} - (-\frac{3}{4}) = 1$  为定值. .... 17 分