编号：4　　永年二中高三上学期数学试题

一、单选题

1．已知集合$P=\{x|-1<x<2\},Q=\{x|0<x<1\}$，则$P\cup Q=$（　）

A．$\{x|0<x<1\}$　　B．$\{x|-1<x<2\}$

C．$\{x|-1<x<0$ 或 $1<x<2\}$　　D．$\emptyset$

【答案】B

【解析】$\because P=\{x|-1<x<2\},Q=\{x|0<x<1\}$，

由并集的含义得$P\cup Q=\{x|-1<x<2\}$.

故选：B.

2．若复数$z=3+\mathrm{i}-2\mathrm{i}^3$，则$|z|=$（　）

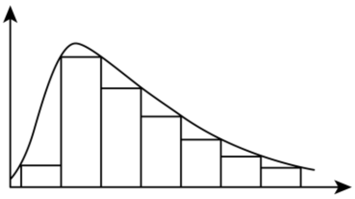
A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{6}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．$3\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】由题可知：$z=3+\mathrm{i}-2\mathrm{i}^3=3+3\mathrm{i}$，所以$|z|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

故选：D.

3．如图，已知某频率分布直方图形成“右拖尾”形态，则下列结论正确的是（　）



A．众数=平均数=中位数　　B．众数<中位数<平均数

C．众数<平均数<中位数　　D．中位数<平均数<众数

【答案】B

【解析】由频率直方图可得，单峰不对称且“右拖尾”，最高峰偏左，众数最小，

平均数易受极端值的影响，与中位数相比，平均数总是在“拖尾”那边，

故平均数大于中位数，所以众数<中位数<平均数.

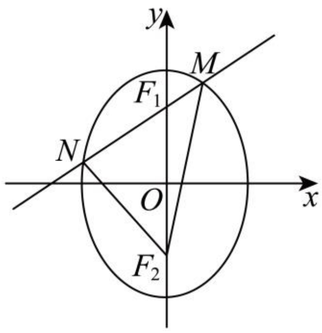
故选：B.

4．已知椭圆$C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上、下焦点分别为$F_1,F_2$，离心率为$\frac{2}{3}$，过点$F_1$作直线$l$（与$y$轴不重合）交椭圆$C$于$M,N$两点，$\triangle MNF_2$的周长为12，则椭圆$C$的标准方程是（　）

A．$\frac{x^2}{3}+y^2=1$　　B．$\frac{y^2}{3}+x^2=1$　　C．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$　　D．$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{5}=1$

【答案】D

【解析】如图依题意，$\triangle MNF_2$的周长为$|MF_2|+|MN|+|NF_2|=|MF_1|+|MF_2|+|NF_1|+|NF_2|=4a=12$，



解得$a=3$.

设椭圆C的半焦距为c，因为椭圆C的离心率为$\frac{2}{3}$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$，解得$c=2$.

所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

故椭圆C的标准方程为$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{5}=1$.

故选：D.

5．已知随机变量$\xi\sim N(1,\sigma^2)$，$P(\xi\le -1)=P(\xi\ge a)$，则$\frac{1}{x}+\frac{9}{a-x}(0<x<a)$的最小值为（　）

A．$\frac{16}{3}$　　B．5　　C．3　　D．$\frac{5}{3}$

【答案】A

【解析】因为随机变量$\xi\sim N(1,\sigma^2)$，所以正态分布的曲线的对称轴为$\xi=1$.

又因为$P(\xi\le -1)=P(\xi\ge a)$，所以$\frac{-1+a}{2}=1$，解得$a=3$.

当$0<x<3$时，$\frac{1}{x}+\frac{9}{3-x}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{3-x}\right)(x+3-x)=\frac{1}{3}\left(10+\frac{3-x}{x}+\frac{9x}{3-x}\right)\ge\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{3-x}{x}\cdot\frac{9x}{3-x}}\right)=\frac{16}{3}$,

当且仅当$\frac{3-x}{x}=\frac{9x}{3-x}$，即$x=\frac{3}{4}$时等号成立，故$\frac{1}{x}+\frac{9}{a-x}(0<x<a)$的最小值为$\frac{16}{3}$.

故选：A.

6．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_8=2a_5-2,a_3+a_{11}=26$，则数列$\{a_n\cdot\cos n\pi\}$的前 2026 项的和为（　）

A．1013　　B．1014　　C．2026　　D．2028

【答案】C

【解析】设等差数列的首项为a_1，公差为d，则由$\begin{cases}a_1+a_8=2a_5-2\\a_3+a_{11}=26\end{cases}$，得

$\begin{cases}a_1+a_1+7d=2(a_1+4d)-2\\a_1+2d+a_1+10d=26\end{cases}$

化简得$\begin{cases}7d=8d-2\\2a_1+12d=26\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，$\therefore a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$，

又$\because\cos n\pi=(-1)^n$，故数列$\{a_n\cdot\cos n\pi\}$的通项公式为$(2n-1)\cdot(-1)^n$，

设数列$\{a_n \cdot \cos n\pi\}$的前n项和为S_n，

则$S_{2026} = (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \cdots + (-a_{2025} + a_{2026})$，

$\because -a_{2k-1} + a_{2k} = -[2(2k-1)-1] + 2 \times 2k - 1 = 2$，

$\therefore$从1到2026共2026项，两两一组，可分为1013组，

$\therefore S_{2026} = 2 \times 1013 = 2026$.

故选：C.

7．已知$f(x) = (ax - a - 1)\mathrm{e}^x + x + 1$，若 0 是$f(x)$的极小值点，则$a$的取值范围为（　）

A．$(-\infty, 1)$　　B．$(-\infty, 0)$　　C．$[0, +\infty)$　　D．$(1, +\infty)$

【答案】D

【解析】$f'(x) = a\mathrm{e}^x + (ax - a - 1)\mathrm{e}^x + 1 = (ax - 1)\mathrm{e}^x + 1$，

因为$x = 0$是函数$f(x)$的极小值点，所以$f'(0) = -\mathrm{e}^0 + 1 = 0$恒成立，

令$g(x) = f'(x) = (ax - 1)\mathrm{e}^x + 1$，则$g'(x) = (ax + a - 1)\mathrm{e}^x$，

$g'(0) = (a - 1)\mathrm{e}^0 = a - 1$，

当$a > 1$时，$g'(0) > 0$，$g(x)$即$f'(x)$在$x = 0$附近单调递增，

又$g(0) = 0$，所以当$x < 0$时，在$x = 0$附近$g(x) = f'(x) < 0$，

当$x > 0$时，在$x = 0$附近$g(x) = f'(x) > 0$，满足 0 是$f(x)$的极小值点；

当$a = 1$时，$g(x) = f'(x) = (x - 1)\mathrm{e}^x + 1, g'(x) = x\mathrm{e}^x$，

当$x < 0$时，$g'(x) < 0$，$g(x)$单调递减，当$x > 0$时，$g'(x) > 0$，$g(x)$单调递增，

所以$g(x) = f'(x) \geq g(0) = 0$，所以$f(x)$单调递增，此时$f(x)$无极小值点；

当$a < 1$时，$g'(0) < 0$，$g(x)$即$f'(x)$在$x = 0$附近单调递减，又$g(0) = 0$，

所以当$x < 0$时，在$x = 0$附近$g(x) = f'(x) > 0$，

当$x > 0$时，在$x = 0$附近$g(x) = f'(x) < 0$，

此时 0 是$f(x)$的极大值点，不符合题意．

综上所述：a的取值范围为$(1, +\infty)$．

故选：D.

8．实数a、b、c、d满足$cd = a^2 + b^2 = 2$，则$(a - c)^2 + (b - d)^2$的最小值为（　）

A．$3 - 2\sqrt{2}$　　B．$6 - 4\sqrt{2}$　　C．$2 - \sqrt{2}$　　D．$2 + \sqrt{2}$

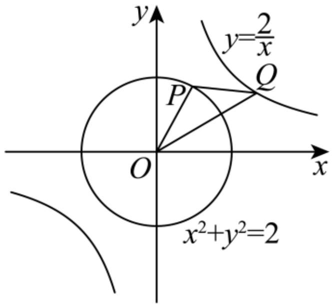
【答案】B

【解析】因为$a^2 + b^2 = 2$，所以点$P(a, b)$为圆$x^2 + y^2 = 2$上的一点，

因为$cd = 2$，所以点$Q(c, d)$是曲线$y = \frac{2}{x}$上的一点，

所以$|PQ|^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$，

如图：



因为$|PQ|+|OP|\geq|OQ|$，O为原点，$|OP|=\sqrt{2}$，

所以$|PQ|\geq|OQ|-\sqrt{2}$，当且仅当P为线段OQ与圆$x^2+y^2=2$的交点时取等号，

又$cd=2$，故$c^2+d^2\geq2\sqrt{c^2d^2}=4$，当且仅当$c=d=\sqrt{2}$或$c=d=-\sqrt{2}$时等号成立，

所以$|OQ|=\sqrt{c^2+d^2}\geq2$，当且仅当$c=d=\sqrt{2}$或$c=d=-\sqrt{2}$时等号成立，

所以$|PQ|\geq2-\sqrt{2}$，当且仅当$\begin{cases}c=d=\sqrt{2}\\a=b=1\end{cases}$或$\begin{cases}c=d=-\sqrt{2}\\a=b=-1\end{cases}$时等号成立，

所以当$\begin{cases}c=d=\sqrt{2}\\a=b=1\end{cases}$或$\begin{cases}c=d=-\sqrt{2}\\a=b=-1\end{cases}$时，$|PQ|$取最小值，最小值为$2-\sqrt{2}$，

所以当$\begin{cases}c=d=\sqrt{2}\\a=b=1\end{cases}$或$\begin{cases}c=d=-\sqrt{2}\\a=b=-1\end{cases}$时，$(a-c)^2+(b-d)^2$取最小值，最小值为

$\left(2-\sqrt{2}\right)^2=6-4\sqrt{2}$，

故选：B.

二、多选题

9．已知事件A,B，且$P(A)=0.3,P(B)=0.5$，则（　）

A．事件A与事件B互为对立事件

B．若事件A与事件B互斥，则$P(A\cup B)=0.8$

C．若事件A与事件B互斥，则$P(AB)=0.2$

D．若$P\left(\overline{AB}\right)=0.35$，则事件$A$与事件$B$相互独立

【答案】BD

【解析】对于 A，由于对立事件概率和为 1，但$P(A)+P(B)=0.8\neq1$，A 错误，

对于 B、C，由事件A与事件B互斥，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.8$，$P(AB)=0$,

所以 B 正确，C 错误，

对于 D，因为$P\left(\overline{AB}\right)=0.35$，$P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)=0.7\times0.5=0.35$，故事件$\overline{A}$与事件$\overline{B}$相互独立，

所以事件A与事件B相互独立，D 正确.

故选：BD.

10．若$f(x)=(x-1)^3+2(x-1)-\ln\frac{x}{2-x}+2$，数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且$S_1=\frac{1}{10},2S_n=na_{n+1}$，则下列说法正确的是（　）

A．$f(x)$关于点$(1,2)$成中心对称　　　　B．数列$\{a_n\}$是等差数列

C．数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n}{5}$　　　　D．$\sum_{i=1}^{19} f(a_i)=38$

【答案】ABD

【解析】函数$f(x)=(x-1)^3+2(x-1)-\ln\frac{x}{2-x}+2$的定义域为$(0,2)$，

由已知$f(2-x)=(1-x)^3+2(1-x)-\ln\frac{2-x}{x}+2$，

所以$f(x)+f(2-x)=(x-1)^3+2(x-1)-\ln\frac{x}{2-x}+2+(1-x)^3+2(1-x)-\ln\frac{2-x}{x}+2$，

所以$f(x)+f(2-x)=(x-1)^3+(1-x)^3+2(x-1)+2(1-x)-\left(\ln\frac{x}{2-x}+\ln\frac{2-x}{x}\right)+4$，

又$(x-1)^3+(1-x)^3=(x-1)^3-(x-1)^3=0$，$\ln\frac{x}{2-x}+\ln\frac{2-x}{x}=\ln 1=0$，

所以$f(x)+f(2-x)=4$，所以$f(x)$的图象关于点$(1,2)$对称．故 A 正确；

因为$2S_n=na_{n+1}$，所以$2S_{n-1}=(n-1)a_n(n\geq 2)$，

所以$2S_n-2S_{n-1}=na_{n+1}-(n-1)a_n(n\geq 2)$，所以$2a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n(n\geq 2)$，

所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}(n\geq 2)$，又$S_1=\frac{1}{10},2S_n=na_{n+1}$，

所以$a_1=\frac{1}{10},2a_1=a_2$，

所以$a_1=\frac{1}{10},a_2=\frac{2}{10}$，故$\frac{a_1}{1}=\frac{1}{10},\frac{a_2}{2}=\frac{1}{10}$，

所以$\frac{a_n}{n}=\frac{1}{10}$，所以$a_n=\frac{n}{10}$．C 错误；

所以当$n\geq 2$时，$a_n-a_{n-1}=\frac{n}{10}-\frac{n-1}{10}=\frac{1}{10}$，所以数列$\{a_n\}$是等差数列，故 B 正确，

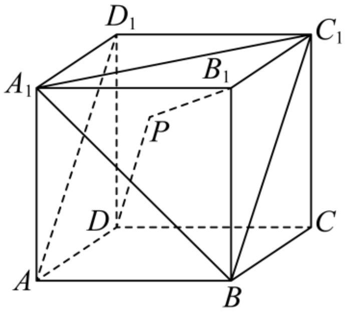
所以$a_i+a_{20-i}=2a_{10}=2$，$f(a_i)+f(a_{20-i})=4$，$1\leq i\leq 19$，$i\in\mathbf{N}^*$，$f(a_{10})=f(1)=2$，

所以$\sum_{i=1}^{19} f(a_i)=[f(a_1)+f(a_{19})]+[f(a_2)+f(a_{18})]\cdots+[f(a_9)+f(a_{11})]+f(a_{10})$，

$\sum_{i=1}^{19} f(a_i)=4\times 9+2=38$，故 D 正确．

故选：ABD．

11．在棱长为 3 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P是平面A_1BC_1内一个动点，且满足$PD+PB_1=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$，则下列结论正确的是（　）



A．$B_1D \perp PB$　　B．点P的轨迹是一个半径为$\sqrt{2}$的圆

C．直线B_1P与平面A_1BC_1所成角为定值　　D．三棱锥$P-BB_1C_1$体积的最大值为 3

【答案】ACD

【解析】对于 A，连接B_1D_1，因为四边形$A_1B_1C_1D_1$为正方形，则$A_1C_1 \perp B_1D_1$，

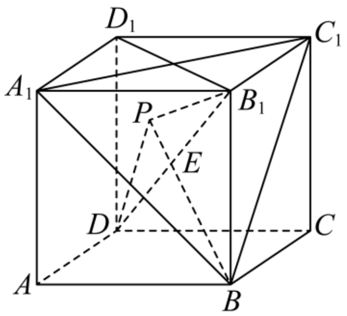
因为$DD_1 \perp$平面$A_1B_1C_1D_1, A_1C_1 \subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，则$A_1C_1 \perp DD_1$，

因为$B_1D_1 \cap DD_1 = D_1, B_1D_1$、$DD_1 \subset$平面$B_1DD_1$，所以$A_1C_1 \perp$平面$B_1DD_1$，

$B_1D \subset$平面B_1DD_1，所以$B_1D \perp A_1C_1$，同理可得$B_1D \perp A_1B$，

因为$A_1C_1 \cap A_1B = A_1, A_1C_1, A_1B \subset$平面$A_1BC_1$，所以$B_1D \perp$平面$A_1BC_1$，

因为$PB \subset$平面A_1BC_1，所以$B_1D \perp PB$，故 A 正确；



对于 B，由 A 选项知$B_1D \perp$平面A_1BC_1，设$B_1D \cap$平面$A_1BC_1 = E$，

即$B_1E \perp$平面$A_1BC_1, DE \perp$平面A_1BC_1，

因为$A_1B = BC_1 = A_1C_1 = 3\sqrt{2}$，$A_1B_1 = BB_1 = B_1C_1 = 3$，

所以三棱锥$B_1 - A_1BC_1$为正三棱锥，因为$B_1E \perp$平面A_1BC_1，则E为正$\triangle A_1BC_1$的中心，则$BE = \sqrt{6}$，

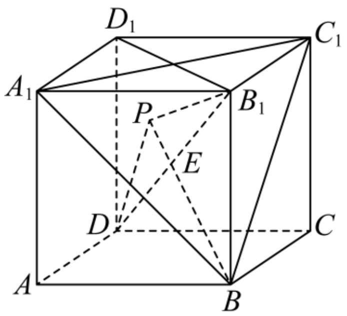
所以$B_1E = \sqrt{BB_1^2 - BE^2} = \sqrt{3}$，因为$B_1D = 3\sqrt{3}$，

所以$DE = 2\sqrt{3}$，因为$PD + PB_1 = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$，即$\sqrt{PE^2 + DE^2} + \sqrt{PE^2 + EB_1^2} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$，

即$\sqrt{PE^2 + 12} + \sqrt{PE^2 + 3} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$，化简可得$PE = \frac{\sqrt{6}}{2}(PE > 0)$，

因为E点到等边三角形A_1BC_1的边的距离为$BE\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} = PE$，

所以点P的轨迹是在$\triangle A_1BC_1$内，且以E为圆心、半径为$\frac{\sqrt{6}}{2}$的圆，故 B 错误；



对于 C，由选项 B 可知，点P的轨迹是在$\triangle A_1BC_1$内，且以E为圆心、半径为$\frac{\sqrt{6}}{2}$的圆，$EP =$

$\frac{\sqrt{6}}{2}$，且$B_1E=\sqrt{3}, B_1E\perp$平面A_1BC_1，

所以$\angle B_1PE$就是直线B_1P与平面A_1BC_1所成角，

所以$\tan\angle B_1PE=\frac{B_1E}{PE}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{2}$，因为$0<\angle B_1PE<\frac{\pi}{2}$，所以直线$B_1P$与平面$A_1BC_1$所成角为定值，故 C 正确；

对于 D，因为点E到直线BC_1的距离为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，点P到直线BC_1的最大距离为$\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$，

故$\triangle BPC_1$的面积的最大值为$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times 3\sqrt{2}=3\sqrt{3}$，因为$B_1E\perp$平面$A_1BC_1$，

则三棱锥B_1-BPC_1体积的最大值为$\frac{1}{3}\times 3\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$，故 D 正确.

故选：ACD.

三、填空题

12．$\left(\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^6$的展开式中常数项为___________.

【答案】135

【解析】二项式$\left(\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^6$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_6^r\cdot(-3)^r\cdot x^{3-\frac{3r}{2}}$，

令$3-\frac{3}{2}r=0$，求得$r=2$.所以展开式中常数项为$C_6^2(-3)^2=135$.

故答案为：135.

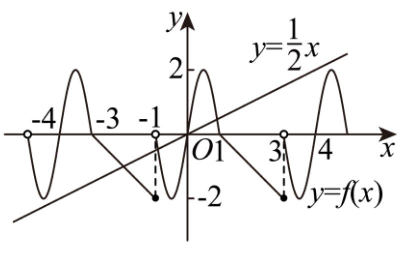
13．已知函数$f(x)$满足$f(x+2)=f(x-2)$，且$f(x)=\begin{cases}2\sin\pi x,-1<x\le 1\\ 1-|x|,1<x\le 3\end{cases}$，则方程$2f(x)=x$的实数解的个数为________.

【答案】4

【解析】由函数$f(x)$满足$f(x+2)=f(x-2)$，则$f(x+4)=f(x)$，所以$f(x)$的周期为4，

由$f(x)=\begin{cases}2\sin\pi x,-1<x\le 1\\ 1-|x|,1<x\le 3\end{cases}$，$f(4)=f(0)=2\sin 0=0$，

可得函数$f(x)$的图象如下：



方程$2f(x)=x$的解，即为$y=\frac{1}{2}x$的交点横坐标，

当$x>4$时，$y=\frac{1}{2}x>2$，此时$f(x)$与$y=\frac{1}{2}x$无交点，

当$x<-4$时，$y=\frac{1}{2}x<-2$，此时$f(x)$与$y=\frac{1}{2}x$无交点，

由图可知两图象交点个数为4，即方程$2f(x)=x$的实数解的个数为4.

故答案为：4.

14．不透明的盒子中装有大小质地相同的 3 个红球、2 个白球，每次从盒子中摸出一个小球，若摸到红球得 1 分，并放回盒子中摇匀继续摸球；若摸到白球，则得 2 分且游戏结束．摸球 n 次后游戏结束的概率记为P_n，则$P_3 =$________；在数列中，若$|q| <$ $1, \lim\limits_{n\to\infty}[(n+A)\cdot q^n]=0$，$A$ 为常数，现游戏进行了 n 次，n 趋近于无穷大，游戏结束后，总得分记为 X，则 X 的数学期望$E(X)=$________．

【答案】$\frac{18}{125}$；$\frac{7}{2}$

【解析】根据题意可知，摸到红球的概率为$\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$，摸到白球的概率为$\frac{2}{3+2}=\frac{2}{5}$,

摸球 3 次后游戏结束，意味着前两次摸到红球，第三次摸到白球，

因为每次摸球相互独立，所以$P_3=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{18}{125}$;

根据题意，X的可能取值为 2，3，4，⋯，k，⋯，$k\geq 2$且$k\in\mathbf{Z}$，

则$P(X=k)=\left(\frac{3}{5}\right)^{k-2}\cdot\frac{2}{5}$,

则$E(X)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{2}{5}\times 2+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^1\times 3+\cdots+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\times(n+1)\right]$,

则$\frac{3}{5}E(X)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^1\times 2+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times 3+\cdots+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n\times(n+1)\right]$,

则$\frac{2}{5}E(X)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n\times(n+1)\right]$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2}{5}+\frac{\frac{2}{5}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{1-\frac{3}{5}}-\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n\times(n+1)\right]$$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{7}{5}-\frac{2n+7}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$,

即$E(X)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{7}{2}-\frac{2n+7}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]=\frac{7}{2}-\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{2n+7}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$,

又$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{2n+7}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]=0$，故$E(X)=\frac{7}{2}$.

故答案为：$\frac{18}{125}$；$\frac{7}{2}$.

四、解答题

15．已知$\triangle ABC$的面积为$5\sqrt{3}$，O 为边 BC 的中点，$OA=5$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5$．

（1）求 BC 的长；

（2）求角 C 的正弦值．

解：（1）由已知O为边BC的中点，

所以$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOB}=2\cdot\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\angle AOB=5\sqrt{3}$，

即$|OA|\cdot|OB|\sin\angle AOB=5\sqrt{3}$，

又$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB=5$，两式相除得$\tan\angle AOB=\sqrt{3}$，

所以$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，又$|OA|=5$，则$|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB=\frac{5}{2}|OB|=5$，

故$|OB|=2,|BC|=2|OB|=4$；

（2）由（1）得$\angle AOB=\frac{\pi}{3},|OC|=|OB|=2$，则$\angle AOC=\frac{2\pi}{3}$，

在$\triangle AOC$中，由余弦定理可知$|AC|^2=|OA|^2+|OC|^2-2|OA|\cdot|OC|\cdot\cos\angle AOC$，

即$|AC|^2=25+4+2\times5\times2\times\frac{1}{2}=39$，则$|AC|=\sqrt{39}$，

又由正弦定理可知$\frac{|OA|}{\sin\angle C}=\frac{|AC|}{\sin\angle AOC}$，则$\sin\angle C=\frac{|OA|\cdot\sin\angle AOC}{|AC|}=\frac{5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{39}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

16．近年来新能源汽车的热度明显上升．某平台对某地区 2020~2024 年新能源汽车购买数量y（单位：万台）进行了统计，得到如下相关数据：

年份	2020	2021	2022	2023	2024
年份代码 t	1	2	3	4	5
y/万台	30	36	51	60	78

（1）分析上述统计表可知y与t有较强的线性相关关系，求y关于t的经验回归方程．

（2）通过调查发现男性比女性更愿意购买新能源汽车．某平台随机抽查某天在该平台购买新车的 400 名车主作为样本，其中男性购买新能源汽车的有N名，购买汽油车的有 90 名，女性购买新能源汽车的有 80 名．

（i）当$N=190$时，将样本中购买新能源汽车的男性人数与样本中购买新能源汽车的总人数的比例作为概率，用样本估计总体，结合（1）的结果估计 2025 年在该平台购买新能源汽车的男性人数（精确到个位数，四舍五入保留整数）．

（ii）用样本的频率估计概率．设男性车主中购买汽油车的概率为p，从所有男性车主中随机抽出 3 名，记恰好有 2 名男性购买汽油车的概率为$f(p)$，当$f(p)$取得最大值时，求N的值．

参考公式：回归方程$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为，$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{5}t_iy_i=885,\ \sum\limits_{i=1}^{5}t_i^2=55,\ \sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2=14481$.

解：（1）由题意得$\overline{t}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3,\overline{y}=\frac{30+36+51+60+78}{5}=51$，

则$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\overline{t})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}t_iy_i-5\overline{t}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}t_i^2-5\overline{t}^2}=\frac{885-5\times3\times51}{55-5\times9}=12$，

于是，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}=51-12\times3=15$，

所以y关于t的经验回归方程为$\hat{y}=12t+15$.

（2）（i）由题意知，400 名车主中购买新能源汽车有 270（名），其中男性有 190（名），

则样本中购买新能源汽车的车主中，男性所占比例为$\frac{19}{27}$,

所以估计一名购买新能源汽车的车主为男性的概率为$\frac{19}{27}$.

因为 2025 年对应的年份代码$t=6$，所以$\hat{y}=12\times 6+15=87$，

因此估计 2025 年在该平台购买新能源汽车的车主中男性的人数为$\frac{19}{27}\times 870000\approx 612222$.

（ii）由题意知，$p=\frac{90}{N+90},0\le N\le 230,N\in\mathbf{Z}$,

则当$N=0$时，p取得最大值 1，当$N=230$时，p取得最小值$\frac{9}{32}$,

即$p\in\left[\frac{9}{32},1\right]$，且$f(p)=\mathrm{C}_3^2p^2(1-p)=-3p^3+3p^2$.

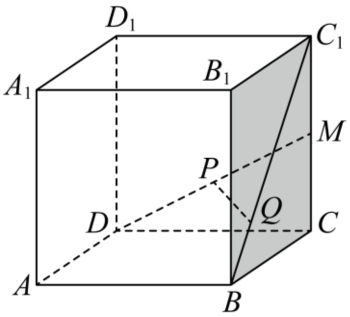
设函数$g(x)=-3x^3+3x^2,x\in\left[\frac{9}{32},1\right]$，则$g'(x)=-9x^2+6x=-3x(3x-2)$.

当$x\in\left[\frac{9}{32},\frac{2}{3}\right)$时，$g'(x)>0$, $g(x)$在$\left[\frac{9}{32},\frac{2}{3}\right)$上单调递增，

当$x\in\left(\frac{2}{3},1\right]$时，$g'(x)<0$, $g(x)$在$\left(\frac{2}{3},1\right]$上单调递减.

故当$x=\frac{2}{3}$时，$g(x)$取得最大值，即当$p=\frac{2}{3}$时，$f(p)$取得最大值，此时$\frac{90}{N+90}=\frac{2}{3}$，得$N=45$.

17．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，棱长为 2，M是棱CC_1的中点，P是DM的中点，$\overrightarrow{C_1Q}=3\overrightarrow{QB}$.

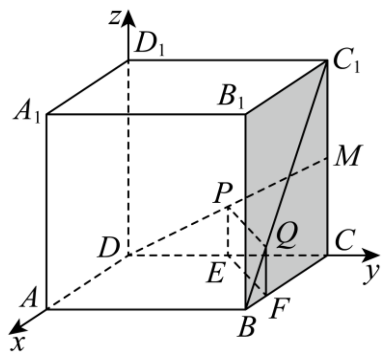


（1）证明：PQ//平面$ABCD$；

（2）求四棱锥A_1-ABCD和四棱锥B_1-ABCD重合部分的体积；

（3）求二面角C_1-PQ-C的平面角的余弦值.

（1）证明：如图所示，取CD的中点E，在BC上取$CF=3BF$，



因为P是DM的中点，M是CC_1的中点，

所以$PE//CM$，且$PE=\frac{1}{2}CM=\frac{1}{4}CC_1$，

因为$C_1Q=3QB$，$CF=3BF$，

所以$QF//CM$，且$QF=\frac{1}{4}CC_1$，

所以$PE//QF$，$PE=QF$，

所以四边形$PEFQ$是平行四边形，则$PQ//EF$，

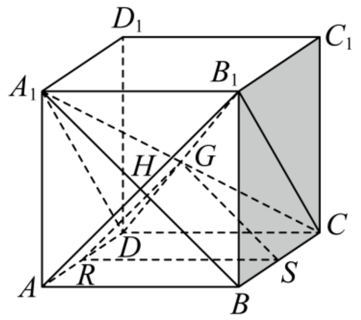
因为$PQ\not\subset$平面$ABCD, EF\subset$平面$ABCD$，

所以$PQ//$平面$ABCD$；

（2）如图，设$A_1C\cap B_1D=G$，$A_1B\cap B_1A=H$，取AD中点为R，BC的中点为S，

由正方体性质可知，点G为正方体的中心，

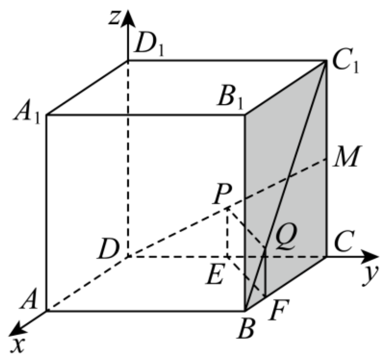
所以四棱锥A_1-ABCD和四棱锥B_1-ABCD重合的几何体为四棱锥$G-CDRS$和三棱柱$ABH-RSG$形成的组合体.



$S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1, S_{\text{四边形}CDRS}=2\times 1=2$，

$V=V_{ABH-RSG}+V_{G-CDRS}=S_{\triangle ABH}\cdot|BS|+\frac{1}{3}\cdot S_{\text{四边形}CDRS}\cdot h=1\times 1+\frac{1}{3}\times 2\times 1=\frac{5}{3}$；

（3）以D点为坐标原点，DA为x轴，DC为y轴，DD_1为z轴建立如图所示的空间直角坐标系，



有$C_1(0,2,2)$，$C(0,2,0)$，$B(2,2,0)$，$M(0,2,1)$，$P\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$Q\left(\frac{3}{2},2,\frac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{C_1P}=\left(0,-1,-\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{C_1Q}=\left(\frac{3}{2},0,-\frac{3}{2}\right)$，

设平面C_1PQ的法向量$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}-y-\frac{3}{2}z=0\\ \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}z=0\end{cases}$，令$x=1$，解得：$\begin{cases}x=1\\ y=-\frac{3}{2}\\ z=1\end{cases}$，$\vec{m}=\left(1,-\frac{3}{2},1\right)$，

$\overrightarrow{CP}=\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{CQ}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，

设平面CPQ的法向量$\vec{n}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}-b+\frac{1}{2}c=0\\ \frac{3}{2}a+\frac{1}{2}c=0\end{cases}$，令$b=1$，解得：$\begin{cases}a=-\frac{2}{3}\\ b=1\\ c=2\end{cases}$，即$\vec{n}=\left(-\frac{2}{3},1,2\right)$，

设C_1-PQ-C所成二面角的平面角为θ，

$|\cos\theta|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\left|-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+2\right|}{\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{17}}{119}$，

由图可知，二面角C_1-PQ-C所成角的平面角为钝角，

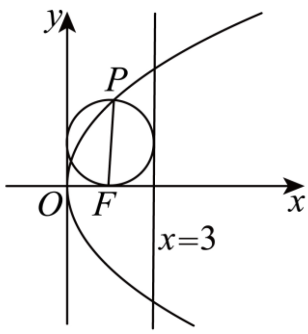
所以C_1-PQ-C所成二面角的平面角的余弦值为$-\frac{\sqrt{17}}{119}$.

18．已知F为抛物线$C:y^2=2px$的焦点，点P在抛物线C上，且点P的纵坐标为3，以线段PF为直径的圆与直线$x=3$相切．

（1）求抛物线C的方程；

（2）直线l交抛物线C于A、B两点，作$PD\perp l$于点D，若直线PA、PB的斜率之和为3，是否存在定点R，使得$|DR|$为定值？若存在，求出定点R的坐标；若不存在，请说明理由．

解：（1）由题意得点P的坐标为$\left(\frac{9}{2p},3\right)$，焦点$F$的坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$，



根据抛物线的定义得$|PF| = \frac{9}{2p} + \frac{p}{2} = \frac{9+p^2}{2p}$，即以线段$PF$为直径的圆的直径为$\frac{9+p^2}{2p}$.

记线段PF的中点为Q，则点Q的坐标为$\left(\frac{9+p^2}{4p}, \frac{3}{2}\right)$,

因为以线段PF为直径的圆与直线$x = 3$相切，

所以有$3 - \frac{9+p^2}{4p} = \frac{9+p^2}{4p}$，解得$p = 3$，

所以抛物线C的方程为$y^2 = 6x$.

（2）设直线l的方程为$x = ty + m$，易验证t必存在且不为 0.

与抛物线方程联立得$y^2 - 6ty - 6m = 0$，

不妨设$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，则可得$y_1 + y_2 = 6t, y_1 \cdot y_2 = -6m$，

由（1）得点P的坐标为$\left(\frac{3}{2}, 3\right)$，

$k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_1-3}{x_1-\frac{3}{2}} + \frac{y_2-3}{x_2-\frac{3}{2}} = \frac{y_1-3}{\frac{y_1^2}{6}-\frac{3}{2}} + \frac{y_2-3}{\frac{y_2^2}{6}-\frac{3}{2}} = \frac{6(y_1+y_2)+36}{y_1y_2+3(y_1+y_2)+9} = \frac{12t+12}{-2m+6t+3} = 3$，

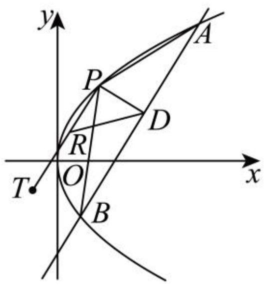
化简得$m = -\frac{1}{2} + t$所以直线l的方程为$x = ty - \frac{1}{2} + t = t(y+1) - \frac{1}{2}$,

所以直线l恒过定点$T\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

因为$PD \perp l$于点D所以在直角三角形PDT中，

令R为线段PT的中点，坐标为$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$，

此时$|DR| = \frac{1}{2}|PT| = \sqrt{5}$.



19．已知函数$f(x) = (x+k)\ln(x+1)(k \in \mathbf{R}), g(x) = ax + b\ln x(a < 0, b > 0)$.

（1）当$k = 1$时，$y = f(x)$在$\left(0, f(0)\right)$处的切线方程；

（2）当$x > 0$时，$f(x) > 2x$恒成立，求k的取值范围；

（3）$\exists x_1,x_2\in(0,+\infty)$，使$g(x_1)=g(x_2)(x_1\neq x_2)$，证明$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>2\sqrt{\frac{b}{-a}}$.

（1）解：当$k=1$时，$f(x)=(x+1)\ln(x+1),f'(x)=\ln(x+1)+1$

因为$f(0)=0,f'(0)=1$，所以$y=f(x)$在$\left(0,f(0)\right)$处的切线方程为$y=x$.

（2）解：当$x>0$时，$f(x)>2x$恒成立，即$(x+k)\ln(x+1)-2x>0$恒成立，

设$m(x)=(x+k)\ln(x+1)-2x(x>0),m'(x)=\ln(x+1)+\frac{x+k}{x+1}-2$，

$m(0)=0,m'(0)=k-2$

要使得当$x>0$时，$m(x)>0$恒成立，则$m'(0)\geq 0$，即$k\geq 2$.

下面验证$k\geq 2$的充分性：

当$x>0$时，$m(x)\geq(x+2)\ln(x+1)-2x$

设$h(x)=(x+2)\ln(x+1)-2x$，$h'(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-1$，

设$p(x)=h'(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-1$，则$p'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$

当$x>0$时，$p'(x)>0$，所以$h'(x)$单调递增，即$h'(x)>h'(0)=0$，

所以$h(x)$单调递增，即$h(x)>h(0)=0$，所以当$x>0$时，$m(x)>0$，充分性得证

所以k的取值范围为$[2,+\infty)$.

（3）证明：$g(x_1)=g(x_2)$即$ax_1+b\ln x_1=ax_2+b\ln x_2$

不妨设$0<x_1<x_2,-a(x_2-x_1)=b\ln\frac{x_2}{x_1}$

由（2）知$x>0$时，$(x+2)\ln(x+1)>2x$，即$\ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$

所以$x>1$时，$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$.

所以$x>1$时，$\ln\sqrt{x}>\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+1}$，即$\ln x>\frac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+1}$.

因为$a<0,b>0$，

所以$-a(x_2-x_1)=b\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{4b\left(\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-1\right)}{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}+1}$,

即$-a(x_2-x_1)>\frac{4b(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}},(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2>\frac{4b}{-a}$,

所以$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>2\sqrt{\frac{b}{-a}}$.