邯郸市 2024—2025 学年第二学期期末调研考试

高二数学参考答案

1. D　$A\cap B=\{1,2\}$，$C=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，所以$(A\cap B)\cap C=\{1,2\}$.

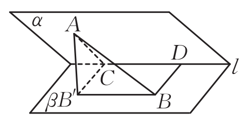
2. A　原式$=\dfrac{(1+2\mathrm{i})^2}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{5}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$.

3. B　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(m-1,-2)$，因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即$-(m-1)-2\times2=0$，解得$m=-3$.

4. A　因为图象过点$\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$，所以$f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi\right)=0$，结合图象可得$\dfrac{5\pi}{6}+\varphi=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为$|\varphi|<\pi$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

5. C　因为$a>1$，所以$g(x)=\log_a x$是增函数，$g(a)=1$，函数$h(x)=-x+a+1$在$(-\infty,a]$上单调递减，$h(a)=1$，所以$f(x)$的值域为$[1,+\infty)$.

6. B　作$B'C\perp l$于点C，且$B'C=BD$，连接$B'B$，$B'A$，则四边形$BDCB'$为矩形. $B'C=BD=AC=1$，$\angle ACB'=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\triangle ACB'$是正三角形，



$AB'=1$. 可证得$BB'\perp$平面$AB'C$，所以$BB'\perp AB'$，$AB=\sqrt{AB'^2+BB'^2}=\sqrt{5}$. 因为$BB'/\!/CD$，所以直线$AB$与$CD$所成的角即直线$AB$与$BB'$所成的角，直线$AB$与$BB'$所成的角为$\angle ABB'$，$\cos\angle ABB'=\dfrac{BB'}{AB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以直线$AB$与$CD$所成角的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

7. C　在$\mathrm{Rt}\triangle POF$中，$|PF|=b$，$|OF|=c$，所以$|PO|=a$. 在$\triangle PAO$中，$\cos\angle POA=\dfrac{|PO|^2+|OA|^2-|PA|^2}{2|PO||OA|}=\dfrac{a^2+a^2-(\sqrt{3}a)^2}{2a^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以$\angle POA=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle POF=\dfrac{\pi}{3}$，所以其中一条渐近线的斜率为$\dfrac{b}{a}=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$C$的离心率为$\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=2$.

8. D　兔子和鸡随机走出笼子，共有A_7^7种不同的情况，其中恰有2只兔子相邻走出笼子的情况共有$\mathrm{A}_4^4\mathrm{A}_3^2\mathrm{A}_5^2$种，故恰有2只兔子相邻走出笼子的概率$P=\dfrac{\mathrm{A}_4^4\mathrm{A}_3^2\mathrm{A}_5^2}{\mathrm{A}_7^7}=\dfrac{4}{7}$.

9. ACD　因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，所以$f(x)=-f(-x)$①，$f(0)=0$.
因为$f(1-x)=f(1+x)$，所以$f(x)=f(2-x)$②，$f(2)=f(0)=0$.
由①②可得$-f(-x)=f(2-x)$，即$-f(x)=f(2+x)$，所以$-f(2+x)=f(4+x)=f(x)$，即$f(x)$是周期为4的函数，$f(2\,024)=f(0)=0$.

10. ACD　s^2的值越大，亩产量不少于490千克且低于510千克的样本越少，不低于510千克的样本越多，A正确，B错误.

$P(X>480)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}P(480<X<520)=0.977\,25$，

$P(X>490)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P(490<X<510)=0.841\ 35$,C,D 正确.

11. ACD　由图可得,$a_1=1,a_2=a_1+2,a_3=a_2+3,a_4=a_3+4,\cdots,a_n=a_{n-1}+n$,累加可得 $a_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,A 正确.

$b_1=1,b_2=b_1+1\times2+1,b_3=b_2+2\times2+1,b_4=b_3+3\times2+1,\cdots,b_n=b_{n-1}+(n-1)\times2+1$,累加可得 $b_n=n+1\times2+2\times2+3\times2+\cdots+(n-1)\times2=n^2$.

$c_1=1,c_2=c_1+1\times3+1,c_3=c_2+2\times3+1,c_4=c_3+3\times3+1,\cdots,c_n=c_{n-1}+(n-1)\times3+1$,累加可得 $c_n=n+1\times3+2\times3+3\times3+\cdots+(n-1)\times3=n+\frac{n(n-1)}{2}\times3=\frac{3n^2-n}{2}$.

$e_1=1,e_2=e_1+1\times4+1,e_3=e_2+2\times4+1,e_4=e_3+3\times4+1,\cdots,e_n=e_{n-1}+(n-1)\times4+1$,累加可得 $e_n=n+1\times4+2\times4+3\times4+\cdots+(n-1)\times4=n+\frac{n(n-1)}{2}\times4=2n^2-n$,B 错误.

以此类推可得 $f_n=n+\frac{n(n-1)}{2}\times k=\frac{kn^2+(2-k)n}{2}$,C 正确.

若 $k=10$,则 $f_4=4+\frac{4\times(4-1)}{2}\times10=64$,D 正确.

12. $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$　因为 $\sin\alpha=\frac{1}{3},\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

13. 3　记 C 的焦点为 F. 由抛物线的定义知,点 P 到直线 l 的距离等于点 P 到点 F 的距离,点 P 到直线 l' 的距离与到直线 l 的距离之和的最小值即点 F 到直线 l' 的距离,即 $\frac{|4-0+11|}{5}=3$.

14. $(-\infty,1]$　构造函数 $f(x)=\ln x+x$,易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 由 $e^x-\ln(x+a)-a\geqslant0$,得 $\ln e^x+e^x\geqslant\ln(x+a)+x+a$,即 $f(e^x)\geqslant f(x+a)$,所以 $e^x\geqslant x+a>0$,即 $a\leqslant e^x-x(x>-a)$. 令函数 $g(x)=e^x-x(x>-a)$,$g'(x)=e^x-1$. 若 $a>0$,则当 $x\in(-a,0)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$,所以 $a\in(0,1]$. 若 $a\leqslant0$,则当 $x\in(-a,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,所以 $g(x)>g(-a)\geqslant g(0)=1$,满足 $a<g(x)$,所以 $a\leqslant0$ 符合条件. 综上,a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

15. 解:(1)因为 $\tan\angle ABD=3$,所以 $\cos\angle ABD=\frac{\sqrt{10}}{10}$,$\sin\angle ABD=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ·············· 1 分

在 $\triangle ABD$ 中,由余弦定理得 $AD^2=BD^2+AB^2-2\cdot BD\cdot AB\cdot\cos\angle ABD=18$,

解得 $AD=3\sqrt{2}$. ·· 3 分

由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle A}=\frac{AD}{\sin\angle ABD}$，即$\frac{\sqrt{10}}{\sin\angle A}=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$，解得 $\sin\angle A=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………… 5 分

因为 $BD<AB$，所以$\angle A<\angle ADB$，所以$\angle A<90°$，$\angle A=\frac{\pi}{4}$. ………………………… 6 分

(2)在$\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ADB=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\frac{\sqrt{5}}{5}$， ………………… 8 分

$\sin\angle BDC=\sin(90°-\angle ADB)=\cos\angle ADB=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\angle BDC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………… 10 分

在$\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $BC^2=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC=10+2-2\times\sqrt{10}\times\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=4$，所以 $BC=2$. …………………………………………… 13 分

注：第(1)问中，在求出 $AD=3\sqrt{2}$后，可由 $\cos A=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解出$\angle A=\frac{\pi}{4}$.

16. 解：(1)由题意可得$\begin{cases}c=2\sqrt{2},\\2a=4\sqrt{3},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=12,\\b^2=4,\end{cases}$

故 C 的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)联立$\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1,\\y=\frac{1}{3}x+m,\end{cases}$ 得$\frac{4}{3}x^2+2mx+3m^2-12=0$. ………………………… 6 分

$\Delta=4m^2-4\times\frac{4}{3}(3m^2-12)>0$，解得 $m^2<\frac{16}{3}$. ………………………………… 7 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{3m}{2},\\x_1x_2=\frac{9m^2-36}{4}.\end{cases}$ ……………………………… 8 分

$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ ……………………………… 10 分

$=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{16-3m^2}=5$， …………………………………………………… 13 分

解得 $m=\pm\sqrt{2}$，即 m 的值为$\pm\sqrt{2}$. ………………………………………………… 15 分

17. (1)证明：连接 AC，BD，记 $AC\cap BD=O$，AB，CD 的中点分别为 G，F，连接 PG，GF，PF，PO. ………………………………………………………………………… 1 分

在$\triangle PAC$，$\triangle PBD$ 中，$PA=PC$，$PB=PD$，O 是 AC，BD 的中点，

所以 $PO\perp AC$，$PO\perp BD$.

因为 $AC\cap BD=O$，AC，$BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $PO\perp$平面 $ABCD$. ······················ 2分

因为 $AB\subset$平面 $ABCD$，所以 $PO\perp AB$.

在矩形 $ABCD$ 中，$GF\perp AB$. 因为 $PO\cap GF=O$，PO，$GF\subset$平面 PGF，所以 $AB\perp$平面 PGF. ······················ 3分

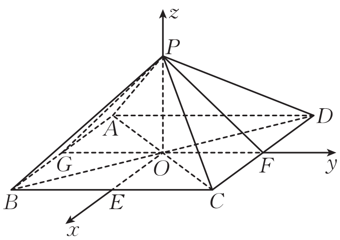
因为 $PF\subset$平面 PGF，所以 $AB\perp PF$. ······················ 4分

$PF=\sqrt{PC^2-CF^2}=4\sqrt{2}$，同理得 $PG=4\sqrt{2}$. $GF=BC=8$，所以 $GF^2=PF^2+PG^2$，即 $PF\perp PG$. ······················ 5分

因为 $AB\cap PG=G$，AB，$PG\subset$平面 PAB，所以 $PF\perp$平面 PAB. ······················ 6分

因为 $PF\subset$平面 PCD，所以平面 $PCD\perp$平面 PAB. ······················ 7分

(2)解：作 $OE\perp BC$，垂足为 E. 以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OE}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(6,-4,0)$，$C(6,4,0)$，$D(-6,4,0)$，$P(0,0,4)$. ······················ 9分



$\overrightarrow{PC}=(6,4,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(0,8,0)$，$\overrightarrow{DC}=(12,0,0)$. ······ 10分

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$是平面 PCB 的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}6x_1+4y_1-4z_1=0,\\ 8y_1=0,\end{cases}$可取 $\boldsymbol{n}=(2,0,3)$. ······················ 11分

设 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$是平面 PCD 的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}6x_2+4y_2-4z_2=0,\\ 12x_2=0,\end{cases}$可取 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$. ······················ 12分

$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2^2+3^2}\times\sqrt{1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{26}}=\dfrac{3\sqrt{26}}{26}$， ······················ 14分

$\sin\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\sqrt{442}}{26}$.

故二面角 B-PC-D 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{442}}{26}$. ······················ 15分

注：第(1)问中，也可先证明 $PG\perp$平面 PCD，从而得到平面 $PCD\perp$平面 PAB.

18. (1)解：当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-\ln x+1$，$f(1)=e+1$. ······················ 1分

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=e-1$. ······················ 2分

曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=(e-1)(x-1)+e+1$，

即 $y=(e-1)x+2$. ······················ 4分

(2)证明：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. $f'(x)=ae^{ax}-\dfrac{1}{x}(x>0)$. ······················ 5分

令函数 $g(x)=f'(x)$，$g'(x)=a^2e^{ax}+\dfrac{1}{x^2}>0$， ······················ 7分

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ······················ 8分

(3)证明:(证法一)由(2)得,$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

因为$a>0$,所以$f'\left(\frac{1}{2a}\right)=a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-2a<0$,$f'\left(\frac{1}{a}\right)=a\mathrm{e}-a>0$, ························ 10 分

所以存在唯一实数$x_0\in\left(\frac{1}{2a},\frac{1}{a}\right)$,使得$f'(x_0)=a\mathrm{e}^{ax_0}-\frac{1}{x_0}=0$, ······················ 11 分

即$\mathrm{e}^{ax_0}=\frac{1}{ax_0}$,$-\ln x_0=ax_0+\ln a$. ·· 12 分

当$x\in(0,x_0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当$x\in(x_0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增, ··· 13 分

所以$f(x)$的极小值为$f(x_0)=\mathrm{e}^{ax_0}-\ln x_0+a=\frac{1}{ax_0}+ax_0+\ln a+a$ ························ 15 分

$\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ax_0}\cdot ax_0}+\ln a+a=2+a+\ln a$,当且仅当$x_0=\frac{1}{a}$时,等号成立. ·············· 16 分

因为$x_0\in\left(\frac{1}{2a},\frac{1}{a}\right)$,所以$f(x_0)>2+a+\ln a$,所以$f(x)>2+a+\ln a$. ··············· 17 分

(证法二)当$a>0$时,$f(x)>2+a+\ln a$等价于$\mathrm{e}^{ax}-\ln x>2+\ln a$,

等价于$\mathrm{e}^{ax}-1>\ln(ax)+1$. ·· 10 分

令$ax=t>0$,即$\mathrm{e}^t-1>\ln t+1$. ·· 11 分

先证当$t>0$时,$\mathrm{e}^t-1>t$.令函数$F(t)=\mathrm{e}^t-t-1$,$F'(t)=\mathrm{e}^t-1$. ··························· 12 分

当$t>0$时,$F'(t)>0$,$F(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以当$t>0$时,$F(t)>F(0)=0$,即当$t>0$时,$\mathrm{e}^t-1>t$得证. ··································· 14 分

再证$t\geqslant\ln t+1$.令函数$G(t)=\ln t-t+1$,$G'(t)=\frac{1-t}{t}$. ······································ 15 分

当$t\in(0,1)$时,$G'(t)>0$,当$t\in(1,+\infty)$时,$G'(t)<0$,所以$G(t)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,$G(t)\leqslant G(1)=0$,即$t\geqslant\ln t+1$得证. ······························· 16 分

综上,$\mathrm{e}^t-1>t\geqslant\ln t+1$,即当$a>0$时,$f(x)>2+a+\ln a$得证. ·························· 17 分

19.解:(1)由分步乘法计数原理得,

$A_3(2)=2\times1=2$,$B_3(2)=2\times1=2$, ··· 2 分

$A_4(2)=3\times1=3$,$B_4(2)=3\times2=6$. ··· 4 分

(2)要使得第k次传球后,球回到甲手中,则第$k-1$次传球后,球不在甲手中,且第k次传球只能传给甲,所以$A_n(k)=B_n(k-1)$,即$A_n(k+1)=B_n(k)$.① ······················· 6 分

因为经过k次传球,每次传球都有$n-1$种选择,所以$A_n(k)+B_n(k)=(n-1)^k$.② ······ ·· 8 分

由①②得,$A_n(k+1)+A_n(k)=(n-1)^k$. ··· 9 分

设$A_n(k+1)+t(n-1)^{k+1}=-[A_n(k)+t(n-1)^k]$,

展开整理得$A_n(k+1)+A_n(k)=-nt(n-1)^k$,则$t=-\frac{1}{n}$,

所以 $A_n(k+1)-\frac{1}{n}(n-1)^{k+1}=-\left[A_n(k)-\frac{1}{n}(n-1)^k\right]$. ………………………… 11 分

又 $A_n(1)-\frac{1}{n}(n-1)=\frac{1}{n}-1$,所以 $\left\{A_n(k)-\frac{1}{n}(n-1)^k\right\}$ 是以 $\frac{1}{n}-1$ 为首项,-1 为公比的等比数列,所以 $A_n(k)-\frac{1}{n}(n-1)^k=\left(\frac{1}{n}-1\right)\cdot(-1)^{k-1}$,

即 $A_n(k)=\frac{1}{n}[(n-1)^k+(-1)^k(n-1)]$. ………………………… 13 分

(3)由(2)得 $A_4(k)=\frac{1}{4}[3^k+(-1)^k\times 3]$.

因为 $A_4(k)+B_4(k)=3^k$,所以 $B_4(k)=3^k-A_4(k)=\frac{3}{4}[3^k-(-1)^k]$,

$B_4(k)-A_4(k)=\frac{1}{2}\times 3^k-\frac{3}{2}(-1)^k$. ………………………… 14 分

若 k 为偶数,则 $B_4(k)-A_4(k)=\frac{1}{2}\times 3^k-\frac{3}{2}\geqslant\frac{1}{2}\times 3^2-\frac{3}{2}=3$;

若 k 为奇数,则 $B_4(k)-A_4(k)=\frac{1}{2}\times 3^k+\frac{3}{2}\geqslant\frac{1}{2}\times 3+\frac{3}{2}=3$.

综上,$\forall k\in\mathbf{N}_+$,$B_4(k)-A_4(k)\geqslant 3$, ………………………… 16 分

所以 M 的最大值为 3. ………………………… 17 分