武汉市 2025 届高三年级四月调研考试
数学试卷参考答案及评分标准

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	C	D	C	A	A	B	D	C	BCD	AD	BD

填空题：

12. 3　　13. 36　　14. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解答题：

15. （13 分）解：

（1）因为 $CA\perp AB, CA\perp A_1A$，$AA_1\cap AB=A$，$AB, AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $CA\perp$ 平面 ABB_1A_1，

$BE\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $CA\perp BE$，又因为 $BE\perp AB_1$

$AB_1\subset$ 平面 AB_1C，$CA\subset$ 平面 AB_1C，且 $AB_1\cap AC=A$，$BE\perp$ 平面 AB_1C.　　…………6 分

（2）以 A 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}$ 为 x,y,z 轴正方向，建立空间直角坐标系

$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(2,0,4)$，设 $E(0,0,t)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,0,t)$，$\overrightarrow{AB_1}=(2,0,4)$

$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BE}$，所以 $-4+4t=0, t=1$，所以 $E(0,0,1)$，$\overrightarrow{CE}=(0,-2,1), \overrightarrow{CB}=(2,-2,0)$

设平面 BCE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，$\begin{cases}-2y+z=0\\ 2x-2y=0\end{cases}$，

令 $x=1$ 则 $z=2, y=1$，$\therefore \vec{n}=(1,1,2)$，

平面 ABE 的法向量为 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，设平面 CBE 平面 ABE 之间的夹角为 α

$\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\times 2}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.　　…………13 分

16. （15 分）解：

（1）$f'(x)=e^x-\dfrac{1-\ln x}{x^2}-\dfrac{a}{x^2}$，$f'(1)=e-1-a=-1$　$\therefore a=e$　　…………7 分

（2）$f(x)=e^x-\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{a}{x}-1=\dfrac{xe^x-\ln x+a-x}{x}\ge 0$ 恒成立，因为 $x>0$，等价于

$xe^x-\ln x+a-x\ge 0$ 恒成立，令 $g(x)=xe^x-\ln x+a-x$，$g'(x)=(1+x)(e^x-\dfrac{1}{x})$

令 $h(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，$h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数，由于 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，

$h(1)=e-1>0$，$\exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$h\left(x_0\right)=0$，即$g'\left(x_0\right)=0$，

当$x\in\left(0,x_0\right)$，$g'\left(x\right)<0$，当$x\in\left(x_0,+\infty\right)$，$g'\left(x\right)>0$

所以$g(x)$在$(0,x_0)$单调递减，在$(x_0,+\infty)$单调递增，因为$h\left(x_0\right)=0$，所以$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$

$g(x)_{min}=g\left(x_0\right)=x_0\cdot e^{x_0}-lnx_0-x_0+a=1+x_0-x_0+a\geq 0$，$\therefore a\geq -1$ …………15 分

17.（15 分）解：

（1）记“五张字母牌不相邻” 为事件B，$P(B)=\frac{A_8^8A_9^5}{A_{13}^{13}}=\frac{14}{143}$ …………4 分

（2）记“在标有 8 的牌左侧，没有数字牌”为事件C

由于标$1\sim 7$的牌都在标有 8 的牌右侧，有$A_7^7=7!$种排法，$P(C)=\frac{A_7^7A_{13}^5}{A_{13}^{13}}=\frac{1}{8}$ …………9 分

（3）标号比k小的牌有$(k-1)$张，比k大的牌有$(8-k)$张，$P(A_k)=\frac{(k-1)!A_{13}^{5+8-k}}{A_{13}^{13}}=\frac{1}{k}$

…………15 分

18.（17 分）解：

（1）$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$符合，$\frac{1}{3-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$不符合，0 没有倒数，$\frac{1}{7+4\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$符合

综上$2+\sqrt{3}$，$7+4\sqrt{3}$属于B …………4 分

（2）先证明若$x\in A,y\in A$，则$xy\in A$

设$x=m+\sqrt{3}n,y=p+\sqrt{3}q$，$m,n,p,q$是整数，

$xy=(m+\sqrt{3}n)(p+\sqrt{3}q)=mp+3nq+(mq+np)\sqrt{3}$

由于$mp+3nq$，$mq+np$都是整数，所以$xy\in A$

该命题得证.

当$x\in B,y\in B$时，有$\frac{1}{x},\frac{1}{y}\in A$，所以$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}\in A$, 即证$xy\in B$ …………10 分

（3）根据题意，$\frac{1}{x}=\frac{1}{m+\sqrt{3}n}=\frac{m-\sqrt{3}n}{m^2-3n^2}=\frac{m}{m^2-3n^2}+\frac{-n}{m^2-3n^2}\sqrt{3}\in A$

所以$\frac{m}{m^2-3n^2}$，$\frac{-n}{m^2-3n^2}$都是整数

因此$\left(\frac{m}{m^2-3n^2}\right)^2-3\left(\frac{-n}{m^2-3n^2}\right)^2=\frac{m^2-3n^2}{\left(m^2-3n^2\right)^2}=\frac{1}{m^2-3n^2}$是整数，所以$m^2-3n^2=\pm 1$

假如$m^2-3n^2=-1$，$m^2+1=3n^2$，则m^2+1应为3的倍数

设 t 为整数，若 $m=3t$， $m^2+1=9t^2+1$，不是 3 的倍数

若 $m=3t+1$， $m^2+1=9t^2+6t+2=3(3t^2+2t)+2$，不是 3 的倍数

若 $m=3t+2$， $m^2+1=9t^2+12t+5=3(3t^2+4t+1)+2$，不是 3 的倍数

因此 $m^2-3n^2\neq-1$，即证 $m^2-3n^2=1$ …………17 分

19.（17 分）解：

（1）由题意得， $m=4$，又因为 $P_1(1,1)$ 在 Γ_1 上

代入 Γ_1 得 $\frac{1}{4}+\frac{1}{n}=1$，所以 $n=\frac{4}{3}$，则 $\Gamma_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{(\frac{4}{3})}=1$， $\Gamma_2:\frac{x^2}{(\frac{4}{3})}+\frac{y^2}{4}=1$ …………3 分

（2）设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$，则 $k_{P_1M}\cdot k_{P_3M}=\frac{(y_1-1)}{(x_1-1)}\frac{(y_1+1)}{(x_1+1)}=\frac{{y_1}^2-1}{{x_1}^2-1}$

又因为 $\frac{{x_1}^2}{4}+\frac{{y_1}^2}{(\frac{4}{3})}=1$，所以 ${y_1}^2=\frac{4}{3}(1-\frac{{x_1}^2}{4})=\frac{4-{x_1}^2}{3}$，则 $k_{P_1M}\cdot k_{P_3M}=\frac{\frac{4-{x_1}^2}{3}-1}{{x_1}^2-1}=-\frac{1}{3}$，

同理可得 $k_{P_1N}\cdot k_{P_3N}=-3$，所以 $\frac{k_2}{k_1}=9$ …………9 分

（3）设直线 $Q_1Q_2,Q_2Q_3,Q_3Q_4,Q_4N$ 分别为 l_1,l_2,l_3,l_4，其斜率依次为 k_1,k_2,k_3,k_4

设直线 $l_1:y-1=k_1(x-1)$，联立 $\frac{3x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$ 得 $(k_1^2+3)x^2+2k_1(1-k_1)x+(1-k_1)^2-4=0$

即有 $x_{Q_2}\cdot x_{P_1}=\frac{k_1^2-2k_1-3}{k_1^2+3}$，所以 $x_{Q_2}=\frac{k_1^2-2k_1-3}{k_1^2+3}$，代入直线方程得 $y_{Q_2}=\frac{-k_1^2-6k_1+3}{k_1^2+3}$

则 $k_2=\frac{y_{Q_2}-1}{x_{Q_2}+1}=\frac{-2k_1^2-6k_1}{2k_1^2-2k_1}=-\frac{k_1+3}{k_1-1}$，设 $f(x)=-\frac{x+3}{x-1}$，则经过 P_1,P_2 的两直线 l_1,l_2 之间斜率满足关系： $k_2=f(k_1)$，将直线 l_2,l_3 绕原点顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后也会经过 P_1,P_2，所以两者斜率满足 $-\frac{1}{k_3}=f(-\frac{1}{k_2})$，所以 $k_3=-\frac{1}{f(-\frac{1}{k_2})}=-\frac{-1-k_2}{-1+3k_2}=\frac{-1}{k_1+2}$

同理将直线 l_3,l_4 绕原点顺时针旋转 π 后也会经过 P_1,P_2，所以两直线斜率满足 $k_4=f(k_3)$

$k_4=-\frac{k_3+3}{k_3-1}=-\frac{(\frac{-1}{k_1+2})+3}{(\frac{-1}{k_1+2})-1}=\frac{3k_1+5}{k_1+3}$，设 $N(x,y)$，则有 $\frac{y-1}{x-1}=k_1$， $\frac{y-1}{x+1}=k_4$，代入上式得：

$\frac{y+1}{x-1}=\frac{3\cdot\frac{y-1}{x-1}+5}{\frac{y-1}{x-1}+3}$，得到 $y^2=5x^2-16x+12=(5x-6)(x-2)$ 所以 $\frac{y}{x-\frac{6}{5}}\cdot\frac{y}{x-2}=5$，因此存在定点 $G(\frac{6}{5},0)$，使直线 GN 和直线 HN 的斜率之积为定值5 …………17 分