

复数和解析几何

姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

一、单选题

1. 若 $(1+i)z = 3+i$ (i 为虚数单位), 则 $z - \bar{z} =$ ()

- A. -2 B. 4 C. $-2i$ D. $2i$

【答案】 C

【解析】 已知 $(1+i)z = 3+i$, 则 $z = \frac{3+i}{1+i}$.

对 z 化简: $z = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i+i-i^2}{1-i^2} = 2-i$

共轭复数 $\bar{z} = 2+i$.

所以 $z - \bar{z} = (2-i) - (2+i) = -2i$.

故选: C.

2. 若复数 z 满足 $(2-i)z = i^{2023}$, 则 $\bar{z} =$ ()

- A. $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ B. $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ C. $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ D. $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

【答案】 D

【解析】 因为 $i^{2023} = i^{505 \times 4 + 3} = i^3 = -i$.

则 $z = \frac{-i}{2-i}$, 化简得 $z = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

所以 $\bar{z} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

答案选D.

3. 已知直线 l 的一个方向向量为 $\vec{a} = (3, -2)$, 则直线 l 的斜率为 ()

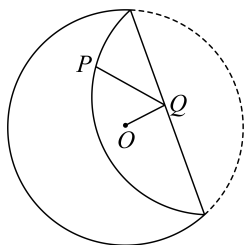
- A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

【答案】 B

【解析】 因为直线 l 的一个方向向量为 $\vec{a} = (3, -2)$, 所以直线 l 的斜率为 $-\frac{2}{3}$.

故选: B.

4. 折纸既是一种玩具，也是一种艺术品，更是一种思维活动.如图，有一张直径为4的圆形纸片，圆心为 O ，在圆内任取一点 P ，折叠纸片，使得圆周上某一点刚好与点 P 重合，记此时的折痕为 l ，点 Q 在 l 上，则 $|OQ| + |PQ|$ 的最小值为（ ）



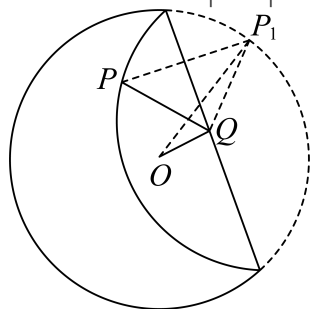
- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

【答案】 D

【解析】 如图，设 P 关于 l 对称的点为 P_1 ，则 P_1 在圆 O 上，连接 P_1Q ， OP_1 ，

$$\text{则有 } |PQ| = |QP_1|,$$

$$\text{故 } |QP| + |QO| = |QP_1| + |QO| \geq |OP_1| = 2.$$



故选：D

5. 直线 $x - 2y + 2 = 0$ 关于直线 $x = 1$ 对称的直线方程是（ ）

- A. $2x + y - 4 = 0$ B. $x + 2y - 1 = 0$ C. $2x + y - 3 = 0$ D. $x + 2y - 4 = 0$

【答案】 D

【解析】 直线 $x - 2y + 2 = 0$ 上的点 $(-2, 0)$ 关于直线 $x = 1$ 对称的点为 $A(4, 0)$ ，直线 $x - 2y + 2 = 0$ 上的点 $(0, 1)$ 关于直线 $x = 1$ 对称的点为 $B(2, 1)$ ，故直线 $x - 2y + 2 = 0$ 关于直线 $x = 1$ 对称的直线方程，即直线 AB 的方程，为 $\frac{y - 1}{0 - 1} = \frac{x - 2}{4 - 2}$ ，即 $x + 2y - 4 = 0$ 。

6. 圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 与两个坐标轴都相切，可以得出的结论是（ ）

- A. $D^2 = E^2 = 4F$ B. $D^2 + E^2 = 4F$ C. $D^2 = E^2 + 4F$ D. $D^2 + E^2 + 4F = 0$

【答案】 A

【解析】 分别令 $y=0$ 和 $x=0$ ，得
$$\begin{cases} x^2 + Dx + F = 0, \\ y^2 + Ey + F = 0. \end{cases}$$

由于圆与两个坐标轴都相切，因此两个一元二次方程均有两个相等的实根.

分别令 $\Delta_x = D^2 - 4F = 0$ 和 $\Delta_y = E^2 - 4F = 0$,

即可得到 $D^2 = E^2 = 4F$ ，A选项正确. BCD选项均错误.

故选：A.

7. 若直线 $ax - by - 6 = 0 (a > 0, b > 0)$ 始终平分圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$ 的周长，则 $\frac{3}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值为()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】 圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$ ，即 $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$ ，圆心为 $(2, -2)$ ，依题意，点 $(2, -2)$ 在直线 $ax - by - 6 = 0$ 上，

则有 $2a - (-2)b - 6 = 0$ ，整理得 $a + b = 3$ ，而 $a > 0, b > 0$ ，

于是得 $\frac{3}{a} + \frac{3}{b} = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4$ ，当且仅当 $a = b = \frac{3}{2}$ 时取“=”，

所以 $\frac{3}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值为 4.

8. 圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 10$ 与圆 $C_2: (x+2)^2 + (y-4)^2 = 16$ 的公共弦长为 () .

A. $2\sqrt{7}$

B. $\sqrt{7}$

C. $\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{6}$

【答案】 A

【解析】 C_1, C_2 的圆心和半径分别为 $C_1(1,0), C_2(-2,4)$ ， $r = \sqrt{11}, R = 4$ ，

$R - r < |C_1C_2| = 5 < R + r$ ，故两圆相交，

将两个圆的方程作差得 $6x - 8y + 14 = 0$ ，即公共弦所在的直线方程为

$3x - 4y + 7 = 0$ ，

又知 $C_2(-2,4)$ ， $R = 4$ ，

则 $C_2(-2,4)$ 到直线的 $3x - 4y + 7 = 0$ 的距离 $d = \frac{|3 \times (-2) - 4 \times 4 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$ ，

所以公共弦长为 $2\sqrt{4^2 - 3^2} = 2\sqrt{7}$ ，

故选:A.

9. 若直线 $4x - 3y - m + 2 = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 = 16$ 所截得的弦的长度为 $4\sqrt{3}$, 则 $m =$ ()

A. 12

B. 8

C. 12 或 -8

D. 8 或 -12

【答案】 C

【解析】 对于圆 $x^2 + y^2 = 16$, 其圆心坐标为 $(0,0)$, 半径 $r = 4$.

已知弦长 $l = 4\sqrt{3}$.

圆心到直线的距离 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$, 可得 $d = \sqrt{16 - 12} = 2$.

点 $(0,0)$ 到直线 $4x - 3y - m + 2 = 0$ 的距离公式为 $d = \frac{|-m+2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$.

由 $\frac{|-m+2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2$, 解得 $m = 12$ 或 $m = -8$.

故答案选C.

10. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$, 则两圆公切线的条数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 C

【解析】 圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $C_1(0,0)$, 半径 $r_1 = 1$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ 的圆心 $C_2(3,4)$, 半径 $r_2 = 4$,

则 $|C_1C_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = r_1 + r_2$, 故两圆外切, 则两圆公切线的条数为3.

故选: C.

11. 过椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的中心作直线 l 交椭圆于 P, Q 两点, F 是 C 的一个焦点, 则

$\triangle PFQ$ 周长的最小值为 ()

A. 16

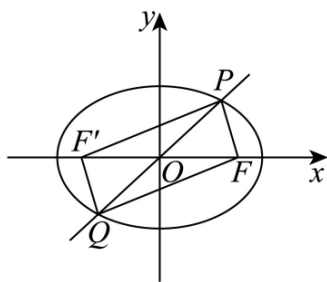
B. 14

C. 12

D. 10

【答案】 B

【解析】 设 C 的另一个焦点为 F' , 根据椭圆的对称性知 $|PF| = |QF'|$,



所以 $\triangle PFQ$ 的周长为 $|PF| + |QF| + |PQ| = |QF'| + |QF| + |PQ| = 8 + |PQ|$,
 当线段 PQ 为椭圆短轴时, $|PQ|$ 有最小值 6, 所以 $\triangle PFQ$ 的周长的最小值为 14.
 故选: B.

12. 与椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同焦点, 且过点 $(0, \sqrt{2})$ 的椭圆方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$
- B. $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$
- C. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$
- D. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

【答案】 C

【解析】 设与椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同焦点的椭圆方程为 $\frac{x^2}{8+k} + \frac{y^2}{4+k} = 1$,

因为点 $(0, \sqrt{2})$ 在所求椭圆上,

所以 $\frac{0}{8+k} + \frac{2}{4+k} = 1$, 解得 $k = -2$,

所以所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

故选: C.

13. 椭圆 $4x^2 + 9y^2 = 144$ 内有一点 $P(3, 2)$, 则以点 P 为中点的弦所在直线的斜率为 ()

- A. $-\frac{2}{3}$
- B. $-\frac{3}{2}$
- C. $-\frac{4}{9}$
- D. $-\frac{9}{4}$

【答案】 A

【解析】 设以点 P 为中点的弦所在的直线与椭圆交于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 斜率为 k , 则 $4x_1^2 + 9$

$y_1^2=144, 4x_2^2+9y_2^2=144$, 两式相减得 $4(x_1+x_2)(x_1-x_2)+9(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$, 又

$x_1+x_2=6, y_1+y_2=4, \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$, 代入解得 $k=-\frac{2}{3}$. 故选 A.

14. 已知抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$, 以点 $M(-2,0)$ 为圆心, 半径为 5 的圆与抛物线 C 交于 A, B 两点, 若 $|AB|=8$, 则 $p=()$

A. 4

B. 8

C. 10

D. 16

【答案】 B

【解析】 以点 $M(-2,0)$ 为圆心, 半径为 5 的圆的方程为 $(x+2)^2+y^2=5^2$,

由抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$, 得到抛物线关于 x 轴对称,

又 \because 圆 M 的圆心在 x 轴上,

\therefore 圆的图形也关于 x 轴对称,

\therefore 它们的交点 A, B 关于 x 轴对称,

因为 $|AB|=8$, $\therefore A, B$ 点的纵坐标的绝对值都是 4,

\because 它们在抛物线上, 于是 A 点的横坐标的值 $\frac{4^2}{2p}=\frac{8}{p}$,

不妨设点 A 在 x 轴上方, 则 A 点的坐标为 $\left(\frac{8}{p}, 4\right)$,

又 \because 点 A 在圆上, $\therefore \left(\frac{8}{p}+2\right)^2+4^2=25$, 解得 $p=8$,

故选: B.

二、多选题

15. 已知直线 $l: (a^2+a+1)x-y+1=0$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, 则 ()

A. 当 $a=-1$ 时, 直线 l 与直线 $x+y=0$ 垂直

B. 若直线 l 与直线 $x-y=0$ 平行, 则 $a=0$

C. 直线 l 过定点 $(0,1)$

D. 当 $a=0$ 时, 直线 l 在两坐标轴上的截距相等

【答案】 AC

【解析】 对于 A, 当 $a=-1$ 时, 直线 l 的方程为 $x-y+1=0$, 其斜率为 1, 而直线 $x+y=0$ 的斜率为 -1,

因此当 $a = -1$ 时, 直线 l 与直线 $x + y = 0$ 垂直, A 正确;

对于 B, 若直线 l 与直线 $x - y = 0$ 平行, 则 $a^2 + a + 1 = 1$, 解得 $a = 0$ 或 $a = -1$, B 错误;

对于 C, 当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 与 a 无关, 则直线 l 过定点 $(0, 1)$, C 正确;

对于 D, 当 $a = 0$ 时, 直线 l 的方程为 $x - y + 1 = 0$, 在两坐标轴上的截距分别是 $-1, 1$, 不相等, D 错误.

故选: AC.

16. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是 C 上的动点, 则下列说法正确的是
()

A. $|PF_1|$ 的最大值为 8

B. 椭圆 C 的离心率 $e = \frac{4}{5}$

C. $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值等于 12

D. 以线段 F_1F_2 为直径的圆与圆 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ 相切

【答案】 ACD

【解析】 对于椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $a^2 = 25$, $b^2 = 16$,
则 $a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$.

A 选项: 根据椭圆性质, $|PF_1|$ 最大值为 $a + c$, 即 $5 + 3 = 8$, A 正确.

B 选项: 椭圆离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$, B 错误.

C 选项: 设 $P(x_0, y_0)$, $|y_0|$ 最大值为 $b = 4$, $|F_1F_2| = 2c = 6$,

$\triangle PF_1F_2$ 面积 $S = \frac{1}{2} \times |F_1F_2| \times |y_0|$, 最大值为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$, C 正确.

D 选项: 以 F_1F_2 为直径的圆方程为 $x^2 + y^2 = 9$, 圆心 $O(0, 0)$, 半径 $r_1 = 3$;

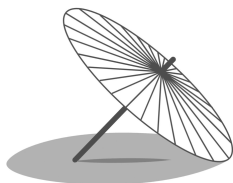
圆 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ 圆心 $C(4, 3)$, 半径 $r_2 = 2$.

两圆心距离 $|OC| = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = 5 = r_1 + r_2$, 两圆外切, D 正确.

综上, 答案选 ACD.

17. 油纸伞是中国传统工艺品, 至今已有 1 000 多年的历史, 为宣传和推广这一传统工艺, 某市文化宫于春分时节开展油纸伞文化艺术节. 活动中, 某油纸伞撑开后摆放在户外展览场地

上, 如图所示, 该伞的伞沿是一个半径为1的圆, 圆心到伞柄底端的距离为1, 阳光照射油纸伞在地面上形成了一个椭圆形的影子(春分时, 该市的阳光照射方向与地面的夹角为 60°), 若伞柄底端正好位于该椭圆的左焦点位置, 则()

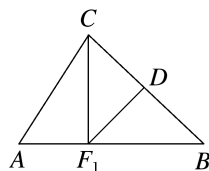


- A. 该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
C. 该椭圆的焦距为 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

- B. 该椭圆的离心率为 $2-\sqrt{3}$
D. 该椭圆的焦距为 $2\sqrt{3}-1$

【答案】 BC

【解析】 $\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,



如图, A, B 分别是椭圆的左、右顶点, F_1 是椭圆的左焦点, BC 是圆的直径, D 为圆的圆心.

因为 $|BD|=|DF_1|=1$, $DF_1 \perp BC$, 所以 $|BF_1|=\sqrt{2}$,

设椭圆的长轴长为 $2a$, 焦距为 $2c$, 则 $a+c=\sqrt{2}$.

因为 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$, $|BC|=2$, $|AB|=2a$,

由正弦定理得 $\frac{2}{\sin 60^\circ}=\frac{2a}{\sin(60^\circ+45^\circ)}$,

解得 $a=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}$,

所以 $c=\sqrt{2}-a=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$,

所以 $\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}=2-\sqrt{3}$, $2c=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$.

三、填空题

18. 已知三角形的三个顶点 $A(-5, 0)$, $B(3, -3)$, $C(0, 2)$, 则 BC 边上中线所在的直线方程为

_____.

【答案】 $x+13y+5=0$

【解析】 BC 的中点坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$,

$$\therefore BC \text{ 边上中线所在的直线方程为 } \frac{y-0}{-\frac{1}{2}-0} = \frac{x+5}{\frac{3}{2}+5},$$

$$\text{即 } x+13y+5=0.$$

19. 已知 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, C 为平面内的一个动点, 且满足 $|AC| = \sqrt{2}|BC|$, 则点 C 的轨迹方程为_____.

【答案】 $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$

【解析】 依题意, 设 $C(x, y)$, 由 $|AC| = \sqrt{2}|BC|$, 得

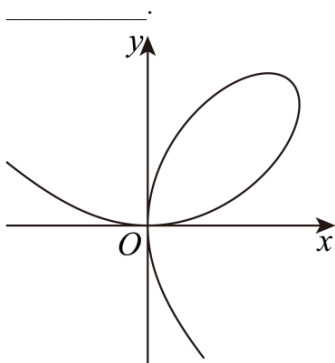
$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$

$$\text{即 } (x+1)^2 + y^2 = 2[(x-1)^2 + y^2], \text{ 整理得 } x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0,$$

$$\text{所以点 } C \text{ 的轨迹方程为 } x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0.$$

20. 1688年, 笛卡尔根据他所研究的一簇花瓣与叶形曲线特征, 提出了笛卡尔叶形线方程:

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$. 若点 $P(x, y)$ 是笛卡尔叶形线上第一象限内的点, 则 $x^2 + y^2$ 的最大值为



【答案】 $\frac{9}{2}a^2$

【解析】 对于方程 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, 互换 x, y 后方程不变,

可知笛卡尔叶形线关于直线 $y = x$ 对称.

$$\text{令 } x = y, \text{ 代入方程 } x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

$$\text{得 } 2x^3 - 3ax^2 = 0, \text{ 即 } x^2(2x - 3a) = 0.$$

$$\text{解得 } x = 0 \text{ 或 } x = \frac{3}{2}a,$$

$$\text{所以在第一象限的交点为 } \left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right).$$

因为 $x^2 + y^2$ 表示点 (x, y) 到原点距离的平方,

由图象及对称性可知, 第一象限内点 $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$ 到原点距离最大.

则 $x^2 + y^2$ 的最大值为 $\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{9}{2}a^2$.

21. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$, 则两圆公共弦所在直线的方程为_____.

【答案】 $x - y - 2 = 0$

【解析】 圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 的圆心 $C_1(0,0)$, 半径 $r_1 = 2$, 圆 $C_2: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 的圆心 $C_2(-1,1)$, 半径 $r_2 = \sqrt{2}$,
显然 $|C_1C_2| = \sqrt{2} \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, 因此圆 C_1, C_2 相交,
所以两圆公共弦所在直线的方程为 $4 - 2x + 2y = 0$, 即 $x - y - 2 = 0$.
故答案为: $x - y - 2 = 0$.

四、解答题

22. 椭圆 C 的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 右焦点 F 的坐标为 $(2, 0)$, 且点 F 到短轴的一个端点的距离是 $\sqrt{6}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)过点 F 作斜率为 k 的直线 l , 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > -\frac{4}{3}$, 求 k 的取值范围.

【答案】 解 (1)由已知, $c=2, a=\sqrt{6}$; $b=\sqrt{a^2 - c^2}=\sqrt{2}$,

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2)设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$,

则 A, B 坐标是方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = k(x-2) \end{cases}$ 的解.

消去 y 得 $(1+3k^2)x^2 - 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0$, 则

$$x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{1+3k^2}, x_1x_2 = \frac{12k^2 - 6}{1+3k^2},$$

$$y_1y_2 = k(x_1 - 2) \cdot k(x_2 - 2) = k^2[x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4]$$

$$= k^2\left(\frac{12k^2 - 6}{1+3k^2} - 2 \cdot \frac{12k^2}{1+3k^2} + 4\right) = -\frac{2k^2}{1+3k^2},$$

$$\text{由 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{12k^2 - 6}{1 + 3k^2} - \frac{2k^2}{1 + 3k^2} = \frac{10k^2 - 6}{1 + 3k^2} > -\frac{4}{3},$$

$$\text{解得 } k^2 > \frac{1}{3}.$$

$$\text{所以 } k \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty).$$

23. 已知点 $T(2, -2)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上, 也在斜率为1的直线 l 上.

(1) 求抛物线 C 和直线 l 的方程;

(2) 若点 M, N 在抛物线 C 上, 且关于直线 l 对称, 求直线 MN 的方程.

【答案】 解: (1) 因为 $T(2, -2)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上, 所以 $(-2)^2 = 4p$, 解

得: $p = 1$,

所以抛物线 C 为: $y^2 = 2x$,

又直线 l 的斜率为1, 所以直线 l 方程为: $y - (-2) = x - 2$, 即 $y = x - 4$.

(2) 由 (1) 设直线 MN 的方程为 $y = -x + n$,

由 $\begin{cases} y = -x + n \\ y^2 = 2x \end{cases}$ 消去 x 得: $y^2 + 2y - 2n = 0$, 有 $\Delta = 4 + 8n > 0$, 解得

$$n > -\frac{1}{2},$$

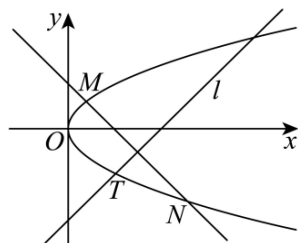
设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -2$, 于是线段 MN 的中点坐标为

$(n+1, -1)$,

显然点 $(n+1, -1)$ 在直线 $l: y = x - 4$ 上, 即 $-1 = (n+1) - 4$,

解得 $n = 2 > -\frac{1}{2}$, 符合题意,

所以直线 MN 的方程为 $y = -x + 2$.



24. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与双曲线 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{2} = 1$ 的渐近线相同, 且经过点 $(2, 3)$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 已知双曲线 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 l 经过 F_2 , 倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$, l 与双曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle F_1AB$ 的面积.

【答案】 解 (1) 设所求双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{2} = \lambda (\lambda \neq 0)$,

代入点 $(2, 3)$ 得 $\frac{3^2}{6} - \frac{2^2}{2} = \lambda$, 即 $\lambda = -\frac{1}{2}$,

\therefore 双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}$, 即 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由(1)知, $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$,

由题意得直线 AB 的方程为 $y = -(x-2)$,

即 $x + y - 2 = 0$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立
$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

得 $2x^2 + 4x - 7 = 0$, 满足 $\Delta > 0$ 且 $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 x_2 = -\frac{7}{2}$,

由弦长公式得 $|AB| = \sqrt{1+k^2} \times |x_1 - x_2|$

$$= \sqrt{1+(-1)^2} \times \sqrt{(-2)^2 - 4 \times \left(-\frac{7}{2}\right)} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6,$$

点 $F_1(-2, 0)$ 到直线 $AB: x + y - 2 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-2+0-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

所以 $S_{\triangle F_1 AB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.