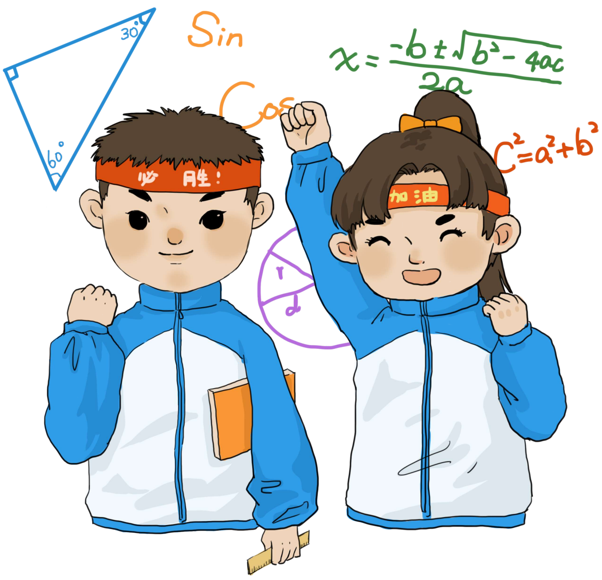
精准备考，点面结合
强化巩固，熟能生巧

2025年高考

数学真题卷

编写：罗建勇



目录

选择大于努力

知行成就未来

绝密★启用前

2025年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

类 型：新课标 I 卷

命 制：教育部教育考试院

适 用：浙江、山东、江苏、河北、福建、湖北、湖南、广东、江西、安徽、河南

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的。

1 $(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}$ 的虚部为 (C)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 6

解：$(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}=\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2=\mathrm{i}-5$

2 设全集 $U=\{x\mid x<9,x\in\mathbf{Z}_+\}$，集合 $A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素个数为 (C)

A. 0　　B. 3　　C. 5　　D. 8

解：$C_U A=\{2,4,6,7,8\}$，共有 5 个元素，故选 C

3 若双曲线 C 的虚轴长为实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍，则 C 的离心率为 (D)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{7}$　　D. $2\sqrt{2}$

解：$\because b=\sqrt{7}a$，$\therefore e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故选 D

4 若点 $(a,0)(a>0)$ 是函数 $y=2\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心，则 a 的最小值为 (B)

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{4\pi}{3}$

解：函数 $y=2\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 图像的对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2},0\right),k\in Z$

又 $\because a>0$，$\therefore a$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$，故选 B

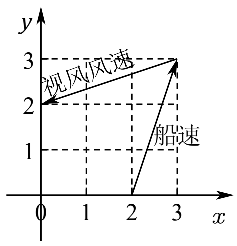
5 设 $f(x)$ 是定义在 R 上且周期为 2 的偶函数，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=5-2x$，则 $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=$ (A)

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

解：$\because f(-x)=f(x),f(x+2)=f(x),f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=f\left(\dfrac{3}{4}\right)=f\left(\dfrac{3}{4}+2\right)=f\left(\dfrac{11}{4}\right)=5-2\times\dfrac{11}{4}=-\dfrac{1}{2}$，选 A

6 帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小和方向，测出的结果在航海学中称为视风风速，视风风速对应的向量，是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和．其中行船风速对应的向量与船速对应的向量大小相等，方向相反，表中给出了部分风力等级、风速大小与名称的对应关系，已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图(风速的大小和向量的大小相同，单位 m/s)，则其风速等级是

级别	名称	风速
2	轻风	1.6~3.3
3	微风	3.4~5.4
4	和风	5.5~7.9
5	劲风	8.0~10.7



A. 轻风　　B. 微风　　C. 和风　　D. 劲风

解：视风风速 $\vec{a}=(0,2)-(3,3)=(-3,-1)$ ，船速 $\vec{b}=(3,3)-(2,0)=(1,3)$

$\therefore$ 真风风速 $\vec{n}=\vec{b}+\vec{a}=(-3,-1)+(1,3)=(-2,2)$ ，真风速大小 $\left|\vec{n}\right|=2\sqrt{2}\approx 2.828$

7 若圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 距离为 1 的点有且仅有 2 个，则 r 的取值范围是 （ B ）

A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

解：设与直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 平行的直线为 $y=\sqrt{3}x+m$，让两条直线之间的距离为 1，则有：

$$\frac{|m-2|}{\sqrt{3+1}}=1$$

$\Longrightarrow m=0$，或 $m=4$

即两条平行直线为 l_1: $y=\sqrt{3}x$， l_2: $y=\sqrt{3}x+4$

如图，设圆心为 C，当圆与 l_1 相交时，圆上只有两交点 A，B 到直线 l 的距离为 1

当圆与 l_2 相交时，圆上有 4 个点到直线 l 的距离为 1。

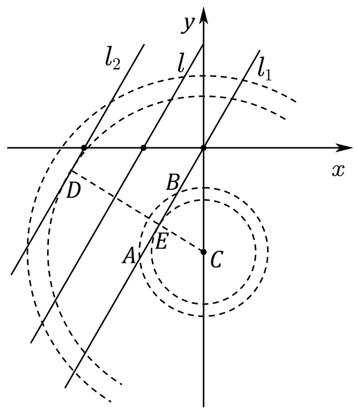
由此可知临界为相切 D，E 时取到。

设圆心 C 到 l_1 距离为 d_1，圆心 C 到 l_2 距离为 d_2，

$d_1=\dfrac{|2|}{\sqrt{3+1}}=1, d_2=\dfrac{|2+4|}{\sqrt{3+1}}=3$

$\therefore r\in(1,3)$

故选 B



8 若实数 x,y,z 满足 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$ ，则 x,y,z 的大小关系不可能是 （ B ）

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$　　C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

解：$2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=k$,

则 $\log_2 x=k-2, x=2^{k-2}$，$\log_3 y=k-3$，$y=3^{k-3}\log_5 z=k-5$，$z=5^{k-5}$ ，

当 $k=8$ 时，$y>z>x, D$ 正确

当 $k=0$ 时，$x=\dfrac{1}{4}, y=\dfrac{1}{27}, z=\dfrac{1}{5^5}, x>y>z, A$ 正确

当 $k=5$ 时，$x=2^3=8, y=3^2=9, z=1, y>x>z, C$ 正确

设 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=t$

$\therefore x=2^{t-2}, y=3^{t-3}, z=5^{t-5}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。全部选对得6分，选不全得3分，多选或选错一个得0分。

9 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 为 BC 中点, 则 （ BD ）

A. $AD\perp A_1C$　　B. $B_1C\perp$ 平面 AA_1D　　C. CC_1 // 平面 AA_1D　　D. AD // A_1B_1

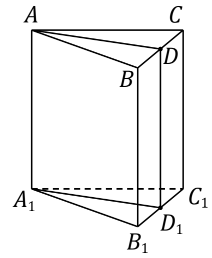
解：设 D_1 为 B_1C_1 的中点

①由题得 $AD\perp AA_1$, 若 $AD\perp A_1C$, 则 $AD\perp$ 平面 AA_1C, 则 $AD\perp AC$, 矛盾！ A 错误；

②由题得 $AD\perp BC$, $AA_1\perp BC$ ，则 $BC\perp$ 平面 AA_1D ，故 B 正确；

③由题得 AD // A_1D_1, 若 AD // A_1B_1 ，则 A_1D_1 // A_1B_1 ，矛盾！ 故 C 不正确；

④由题得 CC_1 // AA_1, 又 CC_1 不在面 AA_1D 上, 故 CC_1 // 平面 AA_1D ，故 D 正确；



10 设抛物线 C: $y^2=6x$ 的焦点为 F，过 F 的直线交 C 于 A、B，过 F 且垂直于 AB 的直线交 l: $x=-\dfrac{3}{2}$ 于 E，过 A 作 l 的垂线, 垂足为 D，则 （ ACD ）

A. $|AD|=|AF|$　　B. $|AE|=|AB|$　　C. $|AB|\geqslant 6$　　D. $|AE|\cdot|BE|\geqslant 18$

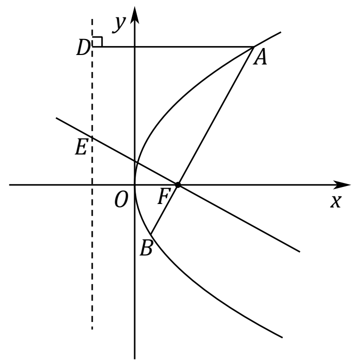
解：A：由抛物线的定义知：$AD=AF$，A 对.

B: 考虑特殊情况，即通径时，取 $A\left(\dfrac{3}{2},3\right)$，$B\left(\dfrac{3}{2},-3\right)$，此时，$E\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$

此时有 $AB=6, EF=3$, 此时 $EF\neq AB$ ，$\therefore B$ 错.

C: $\because$ 抛物线焦点弦性质可知：$AB\geqslant 2p$（通径）$=6$，C 对.

D: 设 AB: $x=my+\dfrac{3}{2}$，则 EF: $x=-\dfrac{1}{m}y+\dfrac{3}{2}$，$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $E\left(-\dfrac{3}{2},3m\right)$



联立 $\begin{cases}x=my+\dfrac{3}{2}\\ y^2=6x\end{cases}\Longrightarrow y^2-6my-9=0$

$y_1+y_2=6m, y_1y_2=-9, x_1+x_2=m(y_1+y_2)+3=6m^2+3$ ，

当 $m=0$ 时，$AE=BE=3\sqrt{2}$，$AE\cdot BE=18$

当 $m\neq 0$ 时，$EF=\sqrt{9+9m^2}$，$S_{\triangle AEB}=\dfrac{1}{2}AE\cdot BE\sin\angle AEB=\dfrac{1}{2}AB\cdot EF=\dfrac{1}{2}(6m^2+6)\sqrt{9+9m^2}>9$

$\therefore AE\cdot BE>\dfrac{18}{\sin\angle AEB}>18$, 综上 $AE\cdot BE\geqslant 18$， D 对.

11 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{4}$，若 $\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2, \cos A\cos B\sin C=\dfrac{1}{4}$，则 （ ABC ）

A. $\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$　B. $AB=\sqrt{2}$　　C. $\sin A+\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $AC^2+BC^2=3$

解： $\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2\Rightarrow 2\sin C=1-\cos 2A+1-\cos 2B\Rightarrow 2\sin C=2\sin^2 A+2\sin^2 B$ ，

$\therefore$ $\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$ ，故 A 正确

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R, a^2+b^2=c\cdot 2R\geqslant c^2$ ，若 $a^2+b^2>c^2$ ，即 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

则 $A+B>\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow A>\dfrac{\pi}{2}-B$ ，则 $\sin A>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$ ，即 $\sin A>\cos B$ ，代 $\lambda\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$ ，

有 $\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B>\cos^2 B+\sin^2 B=1$ ，矛盾, 故 $a^2+b^2=c^2$ ，

即 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=0\Rightarrow\cos A\cos B=\sin A\sin B=\dfrac{1}{4}$ ，

$\because$ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{4}\Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ $\dfrac{ab}{\sin A\sin B}=(2R)^2=2\Rightarrow 2R=\sqrt{2}, \dfrac{c}{\sin C}=2R=\sqrt{2}\Rightarrow c=\sqrt{2}$ ，故 B 正确;

$(\sin A+\sin B)^2=\sin^2 A\sin^2 B+2\sin A\sin B=\sin C+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\sin A+\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ，故 C 正确;

$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2=c^2=2$ ，故 D 错误. 故选择: ABC

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=\mathrm{e}^x+x+a$ 的切线，则 $a=$ __4__.

解：$y'=\mathrm{e}^x+1$ 令 $y'=\mathrm{e}^x+1=2\Rightarrow x=0$

代入 $y=2x+5\Rightarrow$ 切点为 $(0,5)$

再将 $(0,5)$ 代入 $y=\mathrm{e}^x+x+a\Rightarrow a=4$

13 若一个等比数列的前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则该等比数列的公比为__±2__.

解：$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=4$

$S_8=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+q^4(a_1+a_2+a_3+a_4)$

$=(1+q^4)(a_1+a_2+a_3+a_4)=4(1+q^4)=68$

$\Rightarrow 1+q^4=17\Rightarrow q^4=16\Rightarrow q=\pm2$

14 一个箱子里有 5 个球，分别以 1 ~5 标号，若有放回取三次，记至少取出一次的球的个数 X，

则 $E(X)=$ __$\frac{61}{25}$__.

解：X 可取 1,2,3

$$P(X=1)=\frac{5}{5^3}=\frac{1}{25},\ P(X=2)=\frac{C_5^2C_2^1C_3^1}{5^3}=\frac{12}{25},\ P(X=3)=\frac{5\times4\times3}{53}=\frac{12}{75}$$

X	1	2	3
P	$\frac{1}{75}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{12}{25}$

$$\therefore\ E(X)=1\times\frac{1}{25}+2\times\frac{12}{25}+3\times\frac{12}{25}=\frac{61}{25}$$

四、解答题：本题共5小题，共77分。应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15 (本小题 13 分)

调查 1000 人是否患某疾病与超声波检测结果的 2×2 到联表如下：

检测结果 是否患病	正常	不正常	合计
患病	20	180	200
不患病	780	20	800
合计	800	200	1000

(1) 若检测结果不正常者患病的概率为 p，求 p 的估计值；

(2) 能否根据小概率 $\alpha=0.001$ 的 χ^2 独立性检验认为样本数据中超声波检测结果是否患该疾病有关？

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解：(1) 超声波检查结果不正常患者有 200 人，患病有 180 人，$\therefore\ p=\dfrac{180}{1200}=0.9$

(2) $\chi^2=\dfrac{1000(20\times20-180\times780)^2}{800\times200\times200\times800}=\dfrac{(400-140400)^2}{8\times20\times200\times800}=\dfrac{140000\times140000}{8\times20\times200\times800}$

$=\dfrac{14000\times14}{8\times2\times2\times8}>10.828=\chi_{0.001}$

$\therefore$说认为样本数据中超声波检测结果是患该疾病有关.

16 (本小题 15 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(1) 证明: $\{na_n\}$ 为等差数列;

(2) 设 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$, 求 $f'(2)$.

解: (1) $\because \dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, $\therefore$ $\dfrac{a_{n+1}}{n}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}$

$\dfrac{a_{n+1}-1}{n}=\dfrac{a_n-1}{n+1}\implies (n+1)a_{n+1}-(n+1)=na_n-n$, $\therefore$ $(n+1)a_{n+1}-na_n=1, 1\times a_1=3$

$\therefore$ $\{na_n\}$ 以 3 为首项, 1 为公差的等差数列. $\therefore na_n=3+(n-1)\times 1=n+2$

(2)$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_mx^m$, $f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+ma_mx^{m-1}$

$xf'(x)=a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+4a_4x^4+\cdots+ma_mx^m$

$(1-x)f'(x)=a_1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{m-1}-ma_mx^m$, $(1-x)f'(x)=a_1+\dfrac{x(1-x^{m-1})}{1-x}-ma_m\cdot x^m$

令 $x=-2$. $(-2)=3+\dfrac{-2[1-(-2)^{m-1}]}{3}-(m+2)\cdot(-2)^m$

$f'(-2)=1+\dfrac{-2[1-(-2)^{m-1}]}{9}-\dfrac{(m+2)}{3}\cdot(-2)^m=\dfrac{7}{9}-\dfrac{(-2)^m}{9}-\dfrac{(m+2)}{3}\cdot(-2)^m$

$=\dfrac{7}{9}-\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{m+2}{3}\right)\cdot(-2)^m$.

17 (本小题 15 分)

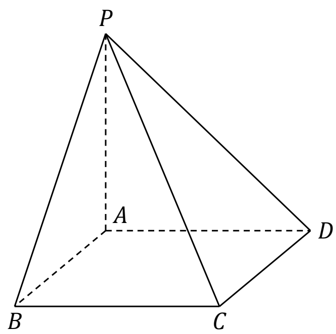
如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD, BC\parallel AD, AB\perp AD$.

(1) 证明: 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $PA=AB=\sqrt{2}, AD=\sqrt{3}+1, BC=2, P,B,C,D$ 在同一个球面上, 设该球面的球心为 O .

(i) 证明: O 在平面 $ABCD$ 上;

(ii) 求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.



解: (1) $\because PA\perp$ 面 $ABCD$ $AB\subset$ 面 $ABCD$ $\therefore$ $AB\perp PA$

又 $\because AB\perp AD$ 且 $PA\cap AD=A$ $\therefore$ $AB\perp$ 面 PAD

又 $\because AB\subset$ 面 PAB $\therefore$面 $PAB\perp$ 面 PAD

取 PB 中点 M,PC 中点 N,$AH=1$

(2) (i) $\because PA\perp$ 面 $ABCDBC\subset$ 面 $ABCD$ $\therefore$ $BC\perp PA$

$BC\perp ADPA\cap AD=A$ $\therefore$ $BC\perp PB$.

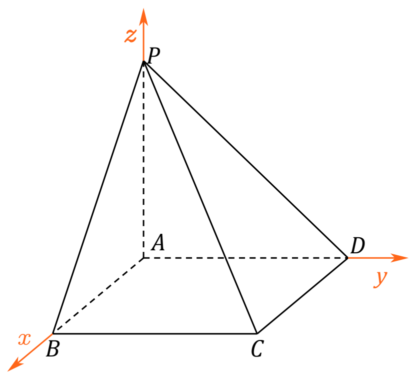
$\therefore$ $\triangle PBC$ 截面圆的圆心为 PC 中点 N $\therefore$ $PA=AB=\sqrt{2}$

又 $\because AM\perp PB, AM\perp BC, PB\cap BC=B$. $\therefore$ $AM\perp$ 面 PBC

四边形 $AHNM$ 为平行四边形 $\therefore$ $HN\perp$ 面 PBC , 球心在直线 NH 上

又 $\because HB=HC=HD=\sqrt{3}$. $\therefore$ H 即为球心 O .

法二：设 $\triangle BCD$ 外接圆圆心为 O_1 , 易知 BC 中垂线为 $y=1$;BD 中垂线为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}x+1$, 联立解得 $O_1(0,1,0)$, 由于 $PO_1=\sqrt{3}, BO_1=\sqrt{3}$, $\therefore$ $PO_1=BO_1$, 此时 O 与 O_1 重合, 故 O 在平面 $ABCD$ 上.



(ii) 由 (1),(2) 知, 建立如图所示坐标系 $A-xyz$,

$A(0,0,0), C(\sqrt{2},2,0), P(0,0,\sqrt{2}), O(0,1,0)$

$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},2,0)$, $\overrightarrow{PO}=(0,1,-\sqrt{2})$

$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PO}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PO}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore$ AC 与 PO 的夹角余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

18 (本小题 17 分)

设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，记 A 为椭圆下端点，B 为右端点，$|AB|=\sqrt{10}$，且椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 设点 $P(m,n)$. R 是射线 AP 上一点.

(i) 若 P 不在 y 轴上, $|AR|\cdot|AP|=3$，用 m,n 表示点 R 的坐标;

(ii) 设 O 为坐标原点, Q 是 C 上的动点, 直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍, 求 $|PQ|$ 的最大值.

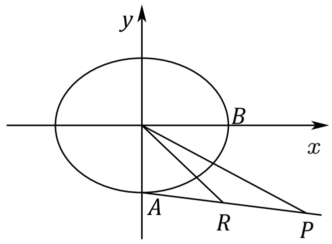
解：(1) $\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. $|AB|=a^2+b^2=10$, $\begin{cases} a^2=b^2+c^2 \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

$\therefore$ $a=3,b=1,c=2\sqrt{2}$. $\therefore$ C 的方程: $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2) (i) 由题可知直线 AP 斜率存在, 设其为 k，则直线 AP 的方向向量为 $(1,\ k)$,

故可设 $\overrightarrow{AP}=\lambda_1(1,k),\overrightarrow{AR}=\lambda_2(1,k)$,

$\because$ 点 R 在射线 AP 上, 故 $\lambda_1\lambda_2>0$, $\therefore$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=\lambda_1\lambda_2(1+k^2)=3$,



$\overrightarrow{AP}=(m,n+1),\overrightarrow{AR}=(x_R,y_R+1)$,

$$\begin{cases} m=\lambda_1 \\ n+1=\lambda_1 k \\ x_R=\lambda_2 \\ y_R+1=\lambda_2 k \\ \lambda_1\lambda_2(1+k^2)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=m \\ k=\dfrac{n+1}{m} \\ \lambda_2=\dfrac{3}{\lambda_1(1+k^2)} \end{cases}$$

$$x_R=\lambda_2=\frac{3}{\lambda_1(1+k^2)}=\frac{3}{m\left[1+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\right]}=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$$

$$y_R=k\lambda_2=\frac{n+1}{m}\times\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}-1=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$$

$\therefore$ R 的坐标为 $\left(\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1\right)$.

法二：$|AP|\cdot|AR|=3$，令 $\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AP},t>0$.

$|AP|\cdot|AR|=t|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AP}|=3$，$\therefore$ $t[m^2+(n+1)^2]=3$，$\therefore$ $t=\dfrac{3}{m^2+(n+1)^2}$，设 $R(x,y),\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AP}$

$(x,y+1)=\dfrac{3}{m^2+(n+1)^2}(m,n+1)$，$\therefore$ $x=\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$y=\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$

$\therefore R\left(\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1\right)$

$$(ii)k_{OR}=\frac{\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1}{\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2}}=\frac{3(n+1)-m^2-(n+1)^2}{3m},\ k_{OP}=\frac{n}{m}$$

$$\therefore\ \frac{3n}{m}=\frac{3(n+1)-m^2-(n+1)^2}{3m}\Longrightarrow 9n=3n+3-m^2-n^2-2n-1\Longrightarrow m^2+n^2+8n-2=0$$

$\Longrightarrow m^2+(n+4)^2=18 \Longrightarrow$ P 在以 $(0,\ -4)$ 为圆心, $3\sqrt{2}$ 半径的圆上.

$|PQ|_{\max}=P$ 到圆心 $(0,\ -4)$ 的距离 d $+$ 半径 r

设 $Q(3\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,2\pi]$,

$\therefore d=\sqrt{(3\cos\theta)^2+(\sin\theta+4)^2}=\sqrt{9\cos^2\theta+\sin^2\theta+8\sin\theta+16}=\sqrt{-8\sin^2\theta+8\sin\theta+25}$

令 $t=\sin\theta$ $\therefore$ $t\in[-1,1]$，$y=-8t^2+8t+25$，当 $t_0=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$ 时, $|PM|_{\max}=\sqrt{27}+3\sqrt{2}=3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

19 (本小题 17 分)

设函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值:

(2) 给定 $\theta\in(0,\pi)$,a 为给定实数, 证明: 存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$, 使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$;

(3) 若存在 φ , 使得对任意 x , 都有 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leqslant b$, 求 b 的最小值.

解: (1)$f'(x)=5(\sin 5x-\sin x)=5[\sin(3x+2x)-\sin(3x-2x)]=10\cos 3x\cdot\sin 2x$,

令 $f'(x)=0$, ∵ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, 解得 $x=0$ 或 $\frac{\pi}{6}$.

结合单调性可知, 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时, $f'(x)>0,f(x)$ 单调递增; 当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 时, $f'(x)<0$,

$f(x)$ 单调递减. 故 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$.

(2) 证明: 不妨设 $a\in[0,2\pi)$, 令 $g(y)=\cos y-\cos\theta$, 则 $g(a)=\cos a-\cos\theta$.

只需证明: $g(y)\leqslant 0$.

而 $g(a-\theta)=-2\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}-a\right)=2\sin\left(a-\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}$,

$g(a+\theta)=-2\sin\left(a+\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}$,

(i) 若 $a-\theta<\theta<a+\theta$, 则 $a<2\theta$.

令 $y=\theta\in[a-\theta,a+\theta]$, 则 $\cos y\geqslant\cos\theta$;

(ii) 若 $\theta\leqslant a-\theta,a\geqslant 2\theta$, 令 $y=a-\theta$, 则 $y\in(0,\pi)$ 且 $y\in[a-\theta,a+\theta],\cos y\geqslant\cos\theta$.

由周期性, $\forall a\in[2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in Z)$, 上述结论都成立.

综上, 存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$, 使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$.

(3) 令 $h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi),h'(x)=-5\sin x+5\sin(5x+\varphi)$,

由于 $h(x)$ 周期为 2π , 不妨设 $x\in[-\pi,\pi],\varphi\in[-\pi,\pi]$,

因为 $h(x)$ 连续且处处可导, 所以 $h(x)$ 最大值在极值点处取到,

令 $h'(x)=0,\sin(5x+\varphi)=\sin x$, 所以 $5x+\varphi=x+2k_1\pi$ 或 $5x+\varphi=\pi-x+2k_2\pi$,

所以 $x=-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1\pi}{2}$ 或 $x=\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2\pi}{3}(k_1,k_2\in Z)$,

当 $x=-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1\pi}{2}$ 时, $h(x)=5\cos x-\cos x=4\cos x=4\cos\left(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi\right)$,

当 $x=\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2\pi}{3},h(x)=5\cos x-\cos(\pi-x+2k_2\pi)=6\cos x=6\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi\right)$,

所以 $h(x)_{\max}=\max\left\{4\cos\left(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi\right),6\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi\right)\right\}$,

显然 $4\cos\left(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi\right)\leqslant 4$, 记 $q(\varphi)=6\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi\right)$,

取值情况最多有 6 种, 相当于 $p(x)=6\cos x$ 图象上以 $A\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6},p\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}\right)\right)$ 为起点, 横坐标以 $\frac{\pi}{3}$ 为跨度, 往后总共取 6 个点, 由 $p(x)$ 图象可知, $\varphi=0$ 时, $q(\varphi)$ 取最小值 $3\sqrt{3},3\sqrt{3}>4$,

所以 $b\geqslant 5\cos x-\cos(5x+\varphi)$, 所以 $b\geqslant q(\varphi)_{\min}=3\sqrt{3}$,

此时 $h(x)\leqslant 3\sqrt{3}$ 恒成立, 且 $x=\pm\frac{\pi}{6}$ 时取等号, 所以 b 的最小值为 $3\sqrt{3}$.

绝密★启用前

2025年普通高等学校招生全国统一考试
数 学

类 型：新课标Ⅱ卷

命 制：教育部教育考试院

适 用：重庆、黑龙江、吉林、辽宁、山西、海南、广西、四川、内蒙古、云南、贵州、甘肃、新疆、西藏、新疆、青海、宁夏

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的。

1 样本数据2，8，14，16，20的平均数为 （ C ）

$A.$ 8　　$B.$ 9　　$C.$ 12　　$D.$ 18

解：$\bar{x}=\dfrac{2+8+14+16+20}{5}=12$

2 已知 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\dfrac{1}{z-1}=$ （ A ）

$A.$ $-\mathrm{i}$　　$B.$ i　　$C.$ -1　　$D.$ 1

解：$\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1+i-1}=\dfrac{1}{i}=-\mathrm{i}$

3 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\mid x^3=x\}$，则 $A\cap B=$ （ D ）

$A.$ $\{0,1,2\}$　　$B.$ $\{1,2,8\}$　　$C.$ $\{2,8\}$　　$D.$ $\{0,1\}$

解：$\because$ $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\mid x^3=x\}=\{-1,0,1\}$，$\therefore$ $A\cap B=\{0,1\}$

4 不等式 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2$ 的解集是 （ C ）

$A.$ $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$　　$B.$ $\{x\mid x\leqslant -2\}$　　$C.$ $\{x\mid -2\leqslant x<1\}$　　$D.$ $\{x\mid x>1\}$

解：法一：设不等式 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2$ 的解集为 D，则 $1\notin D$，$-1.5\in D$.

法二 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2\Leftrightarrow\dfrac{x-4}{x-1}-2\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{-x-2}{x-1}\geqslant 0\Leftrightarrow-(x+2)(x-1)\geqslant 0$ 且 $x-1\neq 0\Leftrightarrow -2\leqslant x<1.$

5 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，则 $A=$ （ A ）

$A.$ 45°　　$B.$ 60°　　$C.$ 120°　　$D.$ 135°

解：法一：$\because$ $BC<AC,BC<AB$，三边相等时，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore$ $A<\dfrac{\pi}{3}$，结合选项可知 A 正确

法二：$\cos A=\dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\times(1+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}=\dfrac{2(\sqrt{3}+3)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{\pi}{4}$.

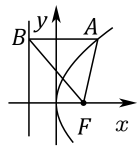
6 设抛物线 $C:y^2=2px(P>0)$ 的焦点为 F，点 A 在 C 上，过 A 作 C 准线的垂线，垂足为 B. 若直线 BF 的方程为 $y=-2x+2$，则 $|AF|=$ （ C ）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解：由题可得 $F(1,0)$，故 $\dfrac{p}{2}=1\Longleftrightarrow p=2\Longleftrightarrow C:y^2=4x$

$\therefore B(-1,4)$，而抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$

$\therefore A(4,4)\Longrightarrow|AF|=5$



7 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_3=6$，$S_5=-5$，则 $S_6=$ （ B ）

A. -20　　B. -15　　C. -10　　D. -5

解：S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，故 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，该等差数列的公差为 d

$\dfrac{S_5}{5}-\dfrac{S_3}{3}=2d_1\Longrightarrow d_1=-\dfrac{3}{2}\Longrightarrow\dfrac{S_6}{6}=\dfrac{S_5}{5}+d_1=-1-\dfrac{3}{2}\Longrightarrow S_6=-15.$

8 已知 $0<\alpha<\pi$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$ （ D ）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$　　D. $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

解：$\because\ \alpha\in(0,\pi)$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore\ \cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=-\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。全部选对得6分，选不全得3分，多选或选错一个得0分。

9 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，q 为 $\{a_n\}$ 的公比，$q>0$. 若 $S_3=7.a_3=1$，则 （ AD ）

A. $q=\dfrac{1}{2}$　　B. $a_5=\dfrac{1}{9}$　　C. $S_5=8$　　D. $a_n+S_n=8$

解：$S_3=a_1+a_2+a_3=\dfrac{a_3}{q^2}+\dfrac{a_3}{q}+a_3=\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{q}+1=7\Rightarrow\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{q}-6=0\Rightarrow\left(\dfrac{1}{q}+3\right)\left(\dfrac{1}{q}-2\right)=0$

又 $q>0$，则 $\dfrac{1}{q}=2\Longrightarrow q=\dfrac{1}{2}$

故 $a_1=\dfrac{a_3}{q^2}=4$，$a_n=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$，$S_n=8-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$，

$a_5=a_3q^2=\dfrac{1}{4}$，$S_5=8-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\neq8$，$a_n+S_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}+8-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}=8$，综上 AD 正确.

10 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=(x^2-3)e^x+2$，则 （ ABD ）

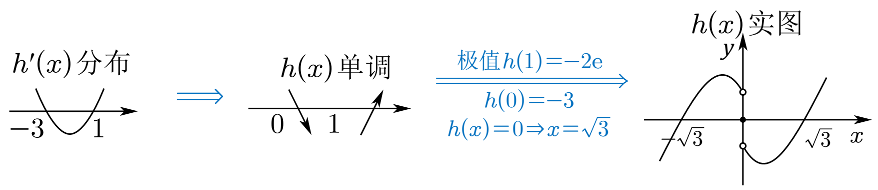
A. $f(0)=0$　　B. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C. $f(x)\geqslant2$，当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$　　D. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

解：$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$\therefore f(0)=0$，A 正确

当 $x<0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$，$B$ 正确;

当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant2\Longrightarrow(x^2-3)e^x\geqslant0$，设 $h(x)=(x^2-3)e^x$，$h'(x)=(x^2+2x-3)e^x=(x-3)(x+1)e^x$



由图可知：C 错误，D 正确;

11 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1，F_2，左、右顶点分别为 A_1,A_2，以 F_1F_2 为直径的圆与曲线 C 的一条渐近线交于 M,N 两点，且 $\angle NA_1M=\dfrac{5\pi}{6}$，则 （ ACD ）

A. $\angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$　　　　B. $|MA_1|=2|MA_2|$

C. C 的离心率为 $\sqrt{13}$　　　　D. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

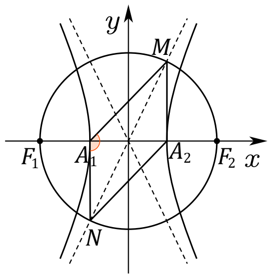
解： 由曲线对称性可知：NA_1MA_2 为平行四边形，$\angle NA_1M=\dfrac{5\pi}{6}$，$\therefore\ \angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$，A 正确；

在 $\triangle MOA_2$ 中，$|OM|=c$，$|OA_2|=a$，由渐近线可得：$\cos\angle MOA_2=\dfrac{a}{c}$，$\therefore\ \angle MA_2O=\dfrac{\pi}{2}$

结合 A 选项可知：$|MA_1|=2|A_1A_2|=4a$，$\therefore\ |MA_2|=b=2\sqrt{3}a$，$B$ 错误；

$c^2=a^2+b^2=13a^2$，$e^2=13$，C 正确；

当 $a=\sqrt{2}$ 时，$S_{NA_1MA_2}=2ab=4\sqrt{3}a^2=8\sqrt{3}$，$D$ 正确.



三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12 已知平面向量 $\vec{a}=(x,1)$,$\vec{b}=(x-1,2x)$，若 $\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则 $|\vec{a}|=$ $\underline{\ \sqrt{2}\ }$.

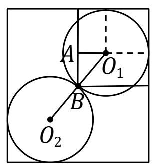
解： $\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$,$\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow x+1-2x=0\Rightarrow x=1$，故 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$

13 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0)=$ $\underline{\ -4\ }$.

解： $\because\ x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，$\therefore\ a=2$，故 $f(0)=-4$

14 一个底面半径为 4cm，高为 9cm 的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为 $\underline{\ \dfrac{5}{2}\ }$ cm .

解： 作出轴截面如图：当两圆相切时半径最大。



两圆的公切点为圆矩形的中心，设铁球半径为 r，$r\in(0,4)$，

在 $Rt\triangle ABO_1$ 中，$AO_1=4-r$，$AB=\dfrac{9}{2}-r$

则有：$(4-r)^2+\left(\dfrac{9}{2}-r\right)^2=r^2$，解得：$r=\dfrac{5}{2}$ 或 $r=\dfrac{29}{2}$ 舍

四、解答题：本题共5小题，共77分。应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15 (13 分)

已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0\leqslant\varphi<\pi)$,$f(0)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 φ；

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

解： (1) $f(0)=\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$，由 $0\leqslant\varphi<\pi$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) 由 (1) 可知：$f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\therefore\ g(x)=f(x)+f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

故 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，

令 $2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\pi+2k\pi$，解得 $-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$，

即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$

同理可得 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{11\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$

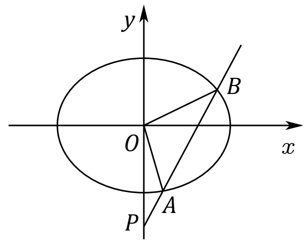
16 (15 分)

已知椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，长轴长为 4,

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $(0,-2)$ 的直线 l 与 C 交于 A、B 两点, O 为坐标原点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$ ，求 $|AB|$.

解: (1) $a=2,\ \ b=\sqrt{2},c=\sqrt{2}$, 椭圆方程为: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ ；



(2) 设 l: $y=kx-2$ ，点 $P(0,-2)$ ，点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=kx-2\end{cases} \Longrightarrow (2k^2+1)x^2-8kx+4=0$

$\Delta=32k^2-16$，　　$x_1+x_2=\dfrac{8k}{2k^2+1}$　　$x_1x_2=\dfrac{4}{2k^2+1}>0$ (两根同号)

由 $\Delta>0$ ，可得 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OPB}-S_{\triangle OPA}=\dfrac{1}{2}\times 2|x_2|-\dfrac{1}{2}\times 2|x_1|=|x_2-x_1|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2k^2+1}=\sqrt{2}$,

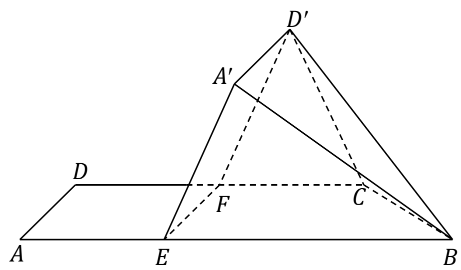
解得 $k^2=\dfrac{3}{2}$, $|AB|=\sqrt{k^2+1}|x_2-x_1|=\sqrt{\dfrac{5}{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{5}$.

17 (15 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, \angle DAB=90^\circ$, F 为 CD 中点, E 在 AB 上, $EF \parallel AD$, $AB=3AD$, $CD=2AD$, 将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$, 使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 60° .

(1) 证明: $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$.

(2) 求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值.



解: (1) 由 $EB \parallel FC, A'E \parallel D'F$ ，可得平面 $A'EB \parallel$ 平面 $D'FC$ ，

又由 $A'B \subset$ 平面 $A'EB$

故 $A'B \parallel$ 平面 $D'FC$ ；

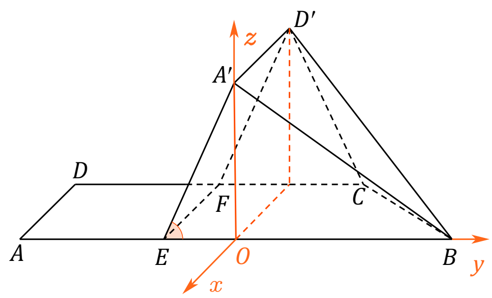
(2) 由 $EF \perp A'E$ 且 $EF \perp EB$ ，

可知 $A'EB$ 即为二面角的平面角, 为 60°

不妨设 $AD=1$ 在平面 $A'EB$ 内, 由点 A' 作 EB 垂线, 垂足为 O,

可证 $A'O \perp$ 底面 $EBCF$, $EO=\dfrac{1}{2}$, $OB=\dfrac{3}{2}$, 如图建系,

$\overrightarrow{FE}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{EA'}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，



设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$

则有 $\begin{cases}x_1=0\\ \dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\end{cases}$ ，取 $y_1=-\sqrt{3}$, $\overrightarrow{n_1}=(0,-\sqrt{3},1)$ ；

$\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$ ， $\overrightarrow{D'B}=\left(1,\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

设平面 BCD' 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

则有 $\begin{cases}x_2+y_2=0\\ x_1+\dfrac{3}{2}y_1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\end{cases}$ ，取 $y_2=\sqrt{3}$ ，则 $\overrightarrow{n_2}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$

即平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 成角 θ ，则有 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\times|\overrightarrow{n_2}|}\right|=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ ，故 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

18 (17 分)

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$，其中 $0<k<\frac{1}{3}$．

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点；

(2) 设 x_1,x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的极值点和零点.

(*i*) 设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，证明: $g(t)$ 在区间 $(0,x_1)$ 单调递减;

(*ii*) 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小, 并证明你的结论.

解：(1) 证明: ∵ $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3,k\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，

$\therefore\ f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-3kx^2$

$=\frac{1-1-x+x+x^2-3kx^2-3kx^3}{1+x}$

$=\frac{-3kx^2}{1+x}\left(x+1-\frac{1}{3k}\right)$,

当 $x>0$ 时, 令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{3k}-1>0$，

∴当 $0<x<\frac{1}{3k}-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增;

当 $x>\frac{1}{3k}-1$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 单调递减,

$\therefore\ x=\frac{1}{3k}-1$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上唯一的极值点, 是极大值点.

又∵ $f\left(\frac{1}{3k}-1\right)>f(0)=0$，$f\left(\frac{1}{2k}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2k}<0$，

$\therefore\ \exists x_2\in\left(\frac{1}{3k}-1,\frac{1}{2k}\right)$，$f(x_2)=0$，

即 x_2 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上唯一的零点;

(2) 解:(i) ∵ $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，

$\therefore\ g'(t)=f'(x_1+t)+f'(x_1-t)$

$=\frac{-3k(x_1+t)^2}{1+x_1+t}(x_1+t-x_1)+\frac{-3k(x_1-t)^2}{1+x_1-t}(x_1-t-x_1)$

$=3kt\left[\frac{(x_1-t)^2}{1+x_1+t}+\frac{(x_1+t)^2}{1+x_1-t}\right]$

$=\frac{6kt^2(t^2-x_1^2-2x_1)}{(1+x_1)^2-t^2}$，

∵ $t\in(0,x_1)$，∴ $t^2-x_1^2-2x_1<0,(1+x_1)^2-t^2>0$，

$\therefore\ g'(t)=\frac{6kt^2(t^2-x_1^2-2x_1)}{(1+x_1)^2-t^2}<0$，

即 $g(t)$ 在 $t\in(0,x_1)$ 上单调递减;

(*ii*) 由 (i) 得，$g(t)$ 在 $t\in(0,x_1)$ 上单调递减,

$\therefore\ g(x_1)<g(0)$，

即 $f(2x_1)-f(0)<f(x_1)-f(x_1)=0,f(2x_1)<0$，

∵ x_2 是 $f(x)$ 的零点, ∴ $f(x_2)=0$，

$\therefore\ f(2x_1)<f(x_2)$，

又∵ $x_2>x_1,2x_1>x_1$，且 $f(x)$ 在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递减,

$\therefore\ 2x_1>x_2$．

19 (17 分)

甲、乙两人进行乒乓球练习, 每个球胜者得 1 分、负者得 0 分. 设每个球甲胜的概率为 $p\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$, 乙胜的概率为 $q, p+q=1$, 且各球的胜负相互独立, 对正整数 $k\geqslant 2$, 记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率, q_k 为打完 k 个的球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1) 求 p_3, p_4 (用 p 示)

(2) 若 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$, 求 p;

(3) 证明: 对任意正整数 $m, p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.

解: (1)3 球后甲比乙至少多两分, 只能是甲 3 分乙 0 分, 因此 $p_3=p^3$;

4 球后甲比乙至少多两分, 可能是甲 4 分乙 0 分, 或者甲 3 分乙 1 分,

因此 $p_4=C_4^3p^3q+p^4=4p^3q+p^4=4p^3(1-p)+p^4=4p^3-3p^4$.

(2) 根据对称性, 以及 (1) 的结果, 可得 $q_3=q^3, q_4=4q^3-3q^4$.

因此 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=\frac{4p^3-3p^4-p^3}{4q^3-3q^4-q^3}=\frac{3p^3(1-p)}{3q^3(1-q)}=\frac{p^3q}{q^3p}=\frac{p^2}{q^2}=4$

因此 $\frac{p}{q}=2$, 又 $p+q=1$, 故 $p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}$.

答案为 $p=\frac{2}{3}$

(3) 记 $a_m(x)$ 表示 m 球甲得 x 分的概率

$$p_{2m+1}=p_{2m}-q\cdot a_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+1}=q_{2m}-p\cdot a_{2m}(m-1)$$

故

$$p_{2m+1}-p_{2m}=-q\cdot a_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+1}-q_{2m}=-p\cdot a_{2m}(m-1)$$

故要证: $$p_{2m+1}-p_{2m}<q_{2m+1}-q_{2m}$$

只需证: $$p\cdot a_{2m}(m-1)<q\cdot a_{2m}(m+1)$$

即只需证: $$p\cdot p^{m-1}\cdot q^{m+1}\cdot C_{2m}^{m-1}<q\cdot p^{m+1}\cdot q^{m-1}\cdot C_{2m}^{m+1}$$

即只需证: $$p^mq^{m+1}<q^mp^{m+1}$$

即 $q<p$. 由条件 $q=1-p<\frac{1}{2}<p$, 故结论成立.

由

$$p_{2m+2}=p_{2m+1}+p\cdot a_{2m+1}(m+1)=p_{2m}+p\cdot a_{2m+1}(m+1)-qa_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+2}=q_{2m+1}+q\cdot a_{2m+1}(m)=q_{2m}+q\cdot a_{2m+1}(m)-pa_{2m}(m-1)$$

现在考虑右边的不等式

$$p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$$

只需证:

$$p\cdot a_{2m+1}(m+1)-qa_{2m}(m+1)>qa_{2m+1}(m)-p\cdot a_{2m}(m-1)$$

只需证: $$p^{m+2}q^mC_{2m+1}^{m+1}-p^{m+1}q^mC_{2m}^{m+1}>q^{m+2}p^mC_{2m+1}^{m+1}-q^{m+1}p^mC_{2m}^{m+1}$$

只需证: $$p^2C_{2m+1}^{m+1}-pC_{2m}^{m+1}>q^2C_{2m+1}^{m+1}-qC_{2m}^{m+1}$$

只需证: $$(p-q)(p+q)C_{2m+1}^{m+1}>(p-q)C_{2m}^{m+1}$$

只需证:

$$C_{2m+1}^{m+1}>C_{2m}^{m+1}$$

$\because$ $C_{2m+1}^{m+1}=C_{2m}^{m+1}+C_{2m}^{m}$, 且 $C_{2m}^{m}>0$, 故上面不等式成立. 证毕