

# 高三年级 12 月检测训练

## 数学试题参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	C	D	B	A	A
题号	7	8	9	10	11	
答案	D	B	AB	ACD	ACD	

### 1. 【答案】B

【解析】 $\because A = \{x | x \leq -1, \text{或 } x \geq 3\}, B = \{x | x \geq \sqrt{e}\}, \therefore A \cup B = \{x | x \leq -1, \text{或 } x \geq \sqrt{e}\}.$

### 2. 【答案】C

【解析】方法一： $\because (2+i)z = 3i-1, \therefore z = \frac{3i-1}{2+i} = \frac{(3i-1)(2-i)}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7i}{5}, \therefore |z| = \sqrt{2}, \therefore z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 2.$

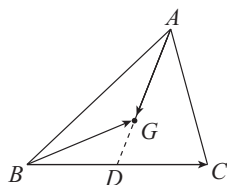
方法二： $\because (2+i)z = -1+3i, \therefore \sqrt{5}|z| = \sqrt{10}, \therefore |z| = \sqrt{2}, \therefore z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 2.$

### 3. 【答案】D

【解析】 $\because \sqrt{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}, \therefore ab \geq 2, \therefore \frac{1}{\log_a 2} + \frac{1}{\log_b 2} = \log_2 ab \geq \log_2 2 = 1, \therefore$ 最小值为 1, 此时  $a = b = \sqrt{2}.$

### 4. 【答案】B

【解析】如图, 延长  $AG$  交  $BC$  于点  $D$ , 则  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}, \therefore \overrightarrow{BG} = \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{AG},$  且  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AG}$  不共线,  $\therefore \lambda = \frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}, \therefore \lambda - \mu = 1.$



### 5. 【答案】A

【解析】方法一: 由  $a_n = \frac{S_n}{n} + 2(n-1)$  得  $na_n = S_n$

$+ 2n(n-1), \therefore$  当  $n \geq 2$  时,  $n(S_n - S_{n-1}) = S_n + 2n(n-1).$

$\therefore (n-1)S_n - nS_{n-1} = 2n(n-1), \therefore \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = 2(n \geq 2), \therefore \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是首项为  $-5$ , 公差为  $2$  的等差数列.

$\therefore \frac{S_n}{n} = -5 + 2(n-1) = 2n-7, \therefore S_n = n(2n-7) = 2n^2-7n, \therefore S_n$  的最小值为  $S_2 = -6, \therefore \lambda \leq -6.$

方法二: 当  $n \geq 2$  时,  $na_n = S_n + 2n(n-1)$  ①,  $(n-1)a_{n-1} = S_{n-1} + 2(n-1)(n-2)$  ②.

①-②得  $(n-1)a_n - (n-1)a_{n-1} = 4(n-1), n \geq 2, \therefore a_n - a_{n-1} = 4,$

$\therefore$  数列  $\{a_n\}$  是首项为  $-5$ , 公差为  $4$  的等差数列.  $\therefore a_n = -5 + 4(n-1) = 4n-9$ , 令  $a_n > 0$  得  $n \geq 3, \therefore S_n$  的最小值为  $S_2 = -6, \therefore \lambda \leq -6.$

### 6. 【答案】A

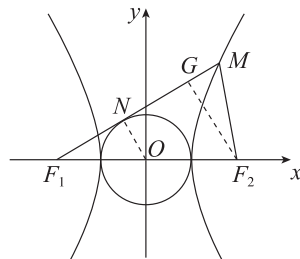
【解析】由题得筒车半径为  $2$  m, 转动一圈需要  $40$  s, 且轴心  $O$  距水面高度为  $\sqrt{3}$  m,

$\therefore A = \frac{(2+\sqrt{3}) - (\sqrt{3}-2)}{2} = 2, \omega = \frac{3\pi}{60} = \frac{\pi}{20}, K = \frac{(2+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-2)}{2} = \sqrt{3} \text{ (m)}.$

又以盛水桶  $P$  刚浮出水面时开始计时,  $\therefore d(0) = 0, \therefore \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 又 } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{3}.$

### 7. 【答案】D

【解析】如图, 设点  $M$  在第一象限, 过点  $F_2$  作  $F_2G \perp MF_1$  于点  $G$ , 设  $N$  为圆  $O$  的切点, 连接  $ON, \therefore F_1N = NG = m, F_2G = 2ON = 2.$



在  $\text{Rt}\triangle MGF_2$  中,  $MG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $MF_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , 由双

曲线定义得  $|MF_1| - |MF_2| = 2$ ,  $\therefore 2m + \frac{2\sqrt{3}}{3} -$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} = 2, \therefore m = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

#### 8. 【答案】B

【解析】 $\because g(x) = f(x) + f(-x)$ ,  $\therefore g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$ . 又  $g(x)$  定义域为  $\{x | x \neq 0\}$  关于原点对称,  $\therefore g(x)$  为偶函数. 要使  $y = g(x)$  恰有 4 个零点, 则需使  $y = g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上恰有 2 个零点.

当  $x > 0$  时,  $g(x) = e^x(2x-1) + k(-x+1) = e^x(2x-1) - k(x-1)$ .

方法一: 令  $e^x(2x-1) = k(x-1)$ , 显然  $x=1$  不是方程的根,  $\therefore k = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$ , 记  $h(x) = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$ , 问题转化为  $h(x) = k$  在区间  $(0, +\infty)$  上有 2 个解.

$$\text{又 } h'(x) = \frac{e^x(2x^2-3x)}{(x-1)^2},$$

$\therefore x \in (0, 1)$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减;

$x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减;

$x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$  时,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增,

且  $h(0) = 1$ . 当  $x$  从 1 的左侧无限趋近于 1 时,  $h(x)$  趋近于  $-\infty$ ; 当  $x$  从 1 的右侧无限趋近于 1 时,  $h(x)$  趋近于  $+\infty$ ; 当  $x$  趋近于  $+\infty$  时,  $h(x)$

趋近于  $+\infty$ . 又  $h\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{\frac{3}{2}}$ ,  $\therefore k \in (4e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ .

方法二:  $g'(x) = e^x(2x+1) - k$ , 易知  $g'(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $\therefore$  要使  $y = g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上恰有 2 个零点, 则需满足  $g'(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上有零点, 记为  $x_0$ , 且  $g'(0) = 1 - k < 0$ ,  $\therefore k > 1$ , 且  $g'(x_0) = e^{x_0}(2x_0+1) - k = 0$ .

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减; 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增.

$\because g(0) = k - 1 > 0$ ,  $g(k) = e^k(2k-1) + k(-k+1) > k(2k-1) + k(-k+1) = k^2 > k-1$ ,

$\therefore$  当  $y = g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上恰有 2 个零点时, 需满足  $g(x_0) < 0$ ,  $0 < x_0 < k$ .

$$\begin{aligned} \therefore g(x_0) &= e^{x_0}(2x_0-1) + k(-x_0+1) = \\ &= e^{x_0}(2x_0-1) + e^{x_0}(2x_0+1)(-x_0+1) = \\ &= x_0 e^{x_0}(-2x_0+3) < 0, \therefore x_0 > \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

易知  $h(x) = e^x(2x+1)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$$\therefore k = e^{x_0}(2x_0+1) > 4e^{\frac{3}{2}}.$$

综上所述,  $k \in (4e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ .

#### 9. 【答案】AB

【解析】极差为最大值与最小值的差,  $\therefore$  极差相同,  $\therefore$  选项 A 正确;

原数据的平均数  $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ , 新数据

$$\text{的平均数 } \bar{y} = \frac{x_1+\bar{x}+x_2+\bar{x}+\cdots+x_n+\bar{x}}{n} =$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} + \bar{x} = 2\bar{x}, \therefore \text{平均数不同, } \therefore \text{选}$$

项 B 正确;

原数据的方差  $s_1^2 = \frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots +$

$(x_n-\bar{x})^2]$ , 新数据的方差  $s_2^2 = \frac{1}{n}[(x_1+\bar{x}-2\bar{x})^2 +$

$(x_2+\bar{x}-2\bar{x})^2 + \cdots + (x_n+\bar{x}-2\bar{x})^2] = s_1^2$ ,  $\therefore$  方差相同,  $\therefore$  选项 C 错误;

中位数显然不同,  $\therefore$  选项 D 错误.

#### 10. 【答案】ACD

【解析】 $\because g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} - \ln x + \frac{1}{x} -$

$x - \ln \frac{1}{x} = 0$ ,  $\therefore$  选项 A 正确;

$\because g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2+1-x}{x^2} > 0$ ,  $\therefore g(x)$

在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增. 又  $g(1) = 0$ ,  $\therefore g(x) > 0$  解集为  $(1, +\infty)$ ,  $\therefore$  选项 B 错误;

$\because \sin \frac{\pi}{3} > \sin \frac{3\pi}{11} > 0$ , 且  $g\left(\frac{16}{3}\right) > g\left(\frac{11}{3}\right) > 0$ ,

$\therefore \sin \frac{\pi}{3} \cdot g\left(\frac{16}{3}\right) > \sin \frac{3\pi}{11} \cdot g\left(\frac{11}{3}\right)$ ,  $\therefore -\sin \frac{\pi}{3} \cdot$

$g\left(\frac{16}{3}\right) < -\sin \frac{3\pi}{11} \cdot g\left(\frac{11}{3}\right)$ , 由  $h\left(\frac{16}{3}\right) = \sin \frac{16}{3}\pi \cdot$

$g\left(\frac{16}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} \cdot g\left(\frac{16}{3}\right)$ ,  $h\left(\frac{3}{11}\right) = \sin \frac{3\pi}{11} \cdot$

$$g\left(\frac{3}{11}\right) = -\sin \frac{3\pi}{11} \cdot g\left(\frac{11}{3}\right), \therefore h\left(\frac{16}{3}\right) < h\left(\frac{3}{11}\right),$$

$\therefore$  选项 C 正确;

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \pi \cos \pi x \cdot$$

$$\left(x - \frac{1}{x} - \ln x\right) + \sin \pi x \cdot \frac{x^2 + 1 - x}{x^2}, \therefore x \in$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ 时, } h'(x) > 0; x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ 时, } h'(x) < 0.$$

又  $h'(1) = 0$ ,  $\therefore 1$  为  $h(x)$  极大值点,  $\therefore$  选项 D 正确.

# 11. 【答案】ACD

【解析】记正方形  $ABCD$  和正方形  $A_1B_1C_1D_1$  的中心分别为  $O$  和  $O_1$ , 则点  $P$  在线段  $OO_1$  (不含端点  $O$ ) 上, 易知  $0 < h \leq 1$ ,  $\therefore$  选项 A 正确;

$$\text{在 Rt } \triangle POC \text{ 中, } h = PO = \sqrt{PC^2 - OC^2} =$$

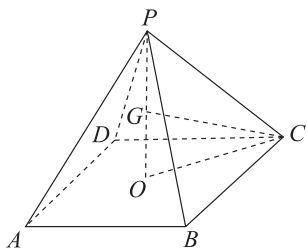
$$\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{2}{4}} = \frac{1}{2}, \therefore \text{选项 B 错误};$$

如图, 记四棱锥  $P-ABCD$  的外接球球心为  $G$ , 则点  $G$  则在  $OP$  上, 连接  $CG$ . 在  $\text{Rt} \triangle OGC$  中,

$$OG = 1 - R, OC = \frac{\sqrt{2}}{2}, GC = R, \text{ 则 } R^2 = (1 - R)^2 +$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \therefore R = \frac{3}{4}, \therefore S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{9}{16} = \frac{9}{4}\pi,$$

$\therefore$  选项 C 正确;



该正方体恰好放入与四棱锥  $P-ABCD$  体积相同的 6 个四棱锥,  $\therefore$  公共部分的体积为正方体

$$\text{内切球体积的 } \frac{1}{6}, \therefore \text{公共部分的体积为 } \frac{1}{6} \times \frac{4}{3}\pi$$

$$\times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{36}, \therefore \text{选项 D 正确}.$$

# 12. 【答案】6

【解析】 $\because T_6 = C_n^5 x^{n-5} \left(\frac{2}{x}\right)^5$ ,  $\therefore$  第 6 项系数为

$$C_n^5 \cdot 2^5, \text{ 又 } T_7 = C_n^6 x^{n-6} \left(\frac{2}{x}\right)^6, \therefore \text{第 7 项系数为}$$

$$C_n^6 \cdot 2^6.$$

$$\text{由题可知 } C_n^5 \cdot 2^5 = 3C_n^6 \cdot 2^6, \therefore \frac{n!}{5!(n-5)!} =$$

$$\frac{6 \cdot n!}{6!(n-6)!}, \therefore (n-5)! = (n-6)!, \therefore n = 6.$$

# 13. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 由抛物线定

$$\text{义得 } |FM| = x_1 + \frac{p}{2}, |FN| = x_2 + \frac{p}{2}.$$

$$\therefore \frac{||FM| - |FN||}{|MN|} = \frac{\left| \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) - \left(x_2 + \frac{p}{2}\right) \right|}{\sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|}$$

$$= \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

# 14. 【答案】-3

【解析】令  $x = \sin \alpha, y = \cos \beta$ , 则  $(x - \sqrt{1-y^2}) \cdot$

$$(y - \sqrt{1-x^2}) = 0, \therefore x = \sqrt{1-y^2}, \text{ 或 } y =$$

$$\sqrt{1-x^2}, \therefore x^2 + y^2 = 1 (x \geq 0), \text{ 或 } x^2 + y^2 = 1$$

$$(y \geq 0).$$

$\therefore$  点  $(\sin \alpha, \cos \beta)$  在圆  $x^2 + y^2 = 1$  位于第一、二、四象限 (包括坐标轴) 的部分上.

$\because$  点  $(\sin \alpha, \cos \beta)$  到直线  $x + y - 2 = 0$  距离为

$$\frac{|\sin \alpha + \cos \beta - 2|}{\sqrt{2}} = d,$$

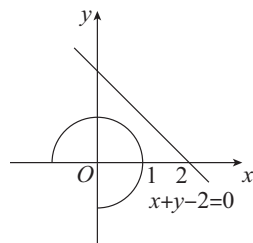
$$\text{又 } \sin \alpha + \cos \beta - 2 \leq 0, \therefore \sin \alpha + \cos \beta - 2 = -\sqrt{2}d.$$

下求  $d$  的最大值. 如图,  $d$  的最大值为点  $(-1,$

$0)$  到直线  $x + y - 2 = 0$  的距离,  $\therefore d_{\max} =$

$$\frac{|-1+0-2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore (\sin \alpha + \cos \beta - 2)_{\min} = -\sqrt{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = -3.$$



15. 解: (1) 在  $\triangle ABC$  中,  $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$ ,  $\therefore \frac{1}{2}(1 +$

$$\cos A) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} + 1\right), \therefore \cos A = \frac{b}{c}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

方法一: 在  $\triangle ABC$  中, 由正弦定理得  $\cos A =$

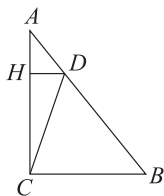
$$\frac{\sin B}{\sin C}, \therefore \sin B = \cos A \sin C.$$

$\because A+B+C=\pi, \therefore \sin B=\sin(A+C).$   
 $\therefore \sin A \cos C+\cos A \sin C=\cos A \sin C,$   
 $\therefore \sin A \cos C=0. \because \sin A \neq 0, \therefore \cos C=0,$   
 $\therefore C=\frac{\pi}{2}.$  ..... 6 分

方法二:  $\because \cos A=\frac{b}{c}, \therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{c},$   
 $\therefore a^2+b^2=c^2, \therefore C=\frac{\pi}{2}.$  ..... 6 分

(2)方法一:如图,过点  $D$  作  $DH$  垂直于  $AC$  于点  $H$ .由题可得  $\frac{AH}{HC}=\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}.$

设  $AH=x, HC=2x, \tan A=\frac{HD}{x}, \tan \angle ACD$   
 $=\frac{HD}{2x}, \therefore \frac{\tan A}{\tan \angle ACD}=2.$  ..... 13 分



方法二:在  $\triangle ACD$  中,由正弦定理得  $\frac{CD}{\sin A}=\frac{AD}{\sin \angle ACD}$  ①, ..... 8 分

在  $\triangle BCD$  中,由正弦定理得  $\frac{CD}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}=\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\angle ACD\right)}, \therefore \frac{CD}{\cos A}=\frac{BD}{\cos \angle ACD}$  ②,  
 ..... 10 分

② $\div$ ①,得  $\frac{\tan A}{\tan \angle ACD}=2.$  ..... 13 分

16. 解:(1)由题可知  $X$  的可能取值为  $-2, 0, 2,$   
 $\therefore P(X=-2)=(1-p)^2, P(X=0)=2p(1-p),$   
 $P(X=2)=p^2.$  ..... 3 分  
 $X$  的分布列如下.

$X$	$-2$	$0$	$2$
$P$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	$p^2$

$\therefore E(X)=-2 \cdot(1-p)^2+2 p^2=4 p-2>0,$   
 $\therefore \frac{1}{2}<p<1.$ (不列分布列不扣分) ..... 7 分

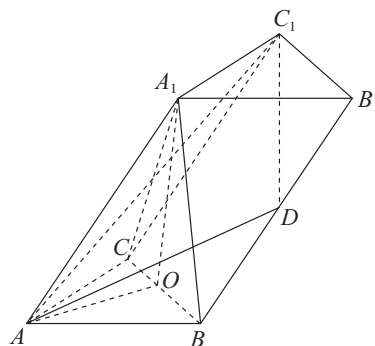
(2)移动四次,样本空间的样本点总数为  $n=4^4$

$=256$ ,每个样本点出现的可能性相等,且为有限个, ..... 9 分

记质点经过 4 次移动后回到点  $A$  为事件  $B$ ,要 4 次回到起点  $A$ ,则向左向右移动次数相等,向上向下移动次数相等,  $\therefore$  事件  $B$  包含的样本点个数为  $m=A_4^4+\frac{A_4^4}{A_2^2 \cdot A_2^2}+\frac{A_4^4}{A_2^2 \cdot A_2^2}=36,$ (或  $m=A_4^4+2 C_4^2=36$ ) ..... 13 分

由古典概型计算公式得  $P(B)=\frac{36}{256}=\frac{9}{64}.$   $\therefore$  质点移动四次后回到点  $A$  的概率为  $\frac{9}{64}.$  ... 15 分

17. (1)证明:如图,连接  $A_1 B, A_1 C.$



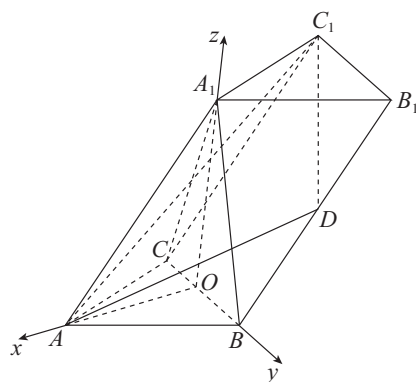
$\because AB=AC, \angle A_1 A B=\angle A_1 A C, A_1 A=A_1 A,$   
 $\therefore \triangle A_1 A B \cong \triangle A_1 A C, \therefore A_1 B=A_1 C.$

$\because O$  为  $BC$  中点,  $\therefore BC \perp A_1 O.$ 又  $AC=AB,$   
 $\therefore BC \perp A O.$  ..... 4 分

又  $A O \cap A_1 O=O, A O \subset$  平面  $A_1 A O, A_1 O \subset$  平面  $A_1 A O, \therefore B C \perp$  平面  $A_1 A O.$  ..... 5 分

$\because B C \subset$  平面  $B C C_1 B_1, \therefore$  平面  $A_1 A O \perp$  平面  $B C C_1 B_1.$  ..... 6 分

(2)解:  $\because A_1 O \perp$  平面  $A B C, \therefore \angle A_1 A O$  为  $A_1 A$  与平面  $A B C$  所成的角,即  $\angle A_1 A O=60^{\circ}.$ 由题可知  $O A, O B, O A_1$  两两垂直,以  $O$  为坐标原点,  $\overrightarrow{O A}, \overrightarrow{O B}, \overrightarrow{O A_1}$  分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系.



设  $AC=AB=4$ ,  $\therefore A_1(0,0,2\sqrt{6}), A(2\sqrt{2},0,0), B(0,2\sqrt{2},0), C(0,-2\sqrt{2},0)$ .  $\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ ,  $\therefore C_1(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{6}), B_1(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$ , ..... 10 分  
 $\therefore D(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{6})$ ,  $\therefore \overrightarrow{AD} = (-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{6})$ ,  $\overrightarrow{AC_1} = (-4\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$ .

设平面  $AC_1D$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,  
 $\therefore \begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{AC_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$   
 $\therefore \begin{cases} -3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + \sqrt{6}z = 0, \\ -4\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{6}z = 0, \end{cases}$  令  $y = \sqrt{3}$ ,

$\therefore \mathbf{n} = (3\sqrt{3}, \sqrt{3}, 7)$ . ..... 13 分  
 $\because A_1O \perp$  平面  $ABC$ ,  $\therefore$  取平面  $ABC$  的法向量  $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ , 记平面  $AC_1D$  与平面  $ABC$  的夹角为  $\alpha$ , 则  $\cos \alpha = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} =$

$$\frac{7}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 7^2}} = \frac{7\sqrt{79}}{79},$$

$\therefore$  平面  $AC_1D$  与平面  $ABC$  夹角的余弦值为  $\frac{7\sqrt{79}}{79}$ . ..... 15 分

18. 解: (1)  $\because$  椭圆  $C$  的左、右焦点分别为  $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$ , 且过  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ,

$$\therefore \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} + 3 + \sqrt{(\sqrt{2}+2)^2} + 3 = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore 2a = 4\sqrt{2}, \therefore a = 2\sqrt{2}. \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 4,$$

$\therefore$  椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ . ..... 4 分

(2) ① 直线  $l$  方程为  $x = \frac{1}{2}y + 2$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ .

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ x = \frac{1}{2}y + 2, \end{cases} \text{消去 } x, \text{得 } 9y^2 + 8y - 16 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{8}{9}, y_1 y_2 = -\frac{16}{9}. \text{ ..... 6 分}$$

$$\text{由题得 } \frac{S_1 + S_3}{S_2 + S_3} = \frac{|BP| + |AF_2|}{|BF_2| + |AF_2|} = \frac{y_2 + 4 + y_1}{y_1 - y_2}$$

$$= \frac{y_2 + 4 + y_1}{\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}} = \frac{4 - \frac{8}{9}}{\sqrt{\frac{64}{81} + \frac{64}{9}}} = \frac{7\sqrt{10}}{20}.$$

..... 9 分

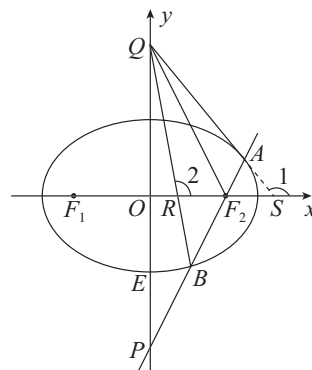
② 假设存在直线  $l$ , 设直线  $l$  方程为  $x = my + 2, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ .

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ x = my + 2, \end{cases} \text{消去 } x, \text{得 } (m^2 + 2)y^2 + 4my - 4 = 0, \Delta > 0 \text{ 恒成立},$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{-4m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-4}{m^2 + 2}, \therefore (y_1 -$$

$$y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = \frac{32(m^2 + 1)}{(m^2 + 2)^2}.$$

如图, 延长  $QA$  交  $x$  轴于点  $S$ , 若  $Q, R, F_2, A$  四点共圆, 则  $\angle AF_2 S = \angle AQR$ . ..... 11 分



$$\therefore \tan \angle AF_2 S = \frac{1}{m}, \therefore \tan \angle AQR = \frac{1}{m}.$$

又  $\angle AQR = \angle 1 - \angle 2$ ,  $\therefore \tan \angle AQR = \tan(\angle 1 - \angle 2) = \frac{\tan \angle 1 - \tan \angle 2}{1 + \tan \angle 1 \cdot \tan \angle 2} = \frac{k_{QA} - k_{QB}}{1 + k_{QA} \cdot k_{QB}}$ . (此步骤不推理不扣分)

$$\text{由 } k_{QA} = \frac{y_1 - \frac{2}{m}}{m y_1 + 2}, k_{QB} = \frac{y_2 - \frac{2}{m}}{m y_2 + 2} \text{ 得 } \tan \angle AQR$$

$$= \frac{4(y_1 - y_2)}{(m^2 + 1)y_1 y_2 + \left(2m - \frac{2}{m}\right)(y_1 + y_2) + 4 + \frac{4}{m^2}},$$

$$\therefore \frac{4(y_1 - y_2)}{(m^2 + 1)y_1 y_2 + \left(2m - \frac{2}{m}\right)(y_1 + y_2) + 4 + \frac{4}{m^2}} =$$

$$\frac{1}{m}, \therefore \frac{1}{m} = \frac{16\sqrt{2m^2 + 2}}{16 + \frac{8}{m^2} - 8m^2}, \therefore 2m\sqrt{2m^2 + 2} = 2 +$$

$$\frac{1}{m^2} - m^2, \dots \dots \dots 15 \text{ 分}$$

由点  $P$  在点  $E$  下方得  $-\frac{2}{m} < -2, \therefore 0 < m < 1$ ,

记  $f(m) = 2m\sqrt{2m^2+2} + m^2 - \frac{1}{m^2} - 2, 0 < m < 1$ ,

$$\therefore f'(m) = 2\sqrt{2m^2+2} + \frac{4m^2}{\sqrt{2m^2+2}} + 2m + \frac{2}{m^3}$$

$> 0$ . 又  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, f(1) > 0$ ,

$\therefore$  存在直线  $l$ , 条数为 1 条.  $\dots \dots \dots 17 \text{ 分}$

19. 解: (1) 当  $x=4$  时,  $\left[\frac{2\cos 4}{4}\right] = \left[\frac{\cos 4}{2}\right] = -1$ ,  
 $\dots \dots \dots 2 \text{ 分}$

当  $x=5$  时,  $\left[\frac{2\cos 5}{5}\right] = 0. \dots \dots \dots 4 \text{ 分}$

(2) ① 由条件  $g(x) = \frac{40}{\sqrt{x+45} + \sqrt{x+5}}$  可知, 当

$x > 0$  时,  $g(x)$  连续且单调递减  $\dots \dots \dots 5 \text{ 分}$

$\therefore x_1 = 5, \therefore x_2 = g(x_1) = g(5). \therefore g(4) = 4$ ,  
 $\therefore g(5) < g(4) = 4$ . 又  $g(5) > 3.9, \therefore 3.9 < g(5)$   
 $< 4$ , 即  $3.9 < x_2 < 4$ .

$\therefore x_3 = g(x_2), 3.9 < x_2 < 4, \therefore g(3.9) > g(x_2)$   
 $> g(4)$ . 又  $g(4) = 4, g(3.9) < 4.1, \therefore 4 < x_3 < 4.1$ .

$\therefore x_4 = g(x_3), 4 < x_3 < 4.1, \therefore g(4) > g(x_3) >$   
 $g(4.1)$ . 又  $g(4) = 4, g(4.1) > 3.9, \therefore 3.9 < x_4 < 4$ .

同理, 可得  $4 < x_5 < 4.1, \therefore$  依此规律, 归纳可得  
 $x_{2t} \in (3.9, 4), x_{2t+1} \in (4, 4.1), t \in \mathbf{N}^*$ .

下面用数学归纳法证明此归纳结论:

当  $t=1$  时,  $x_2 \in (3.9, 4), x_3 \in (4, 4.1)$ .

假设当  $t=k (k \in \mathbf{N}^*)$  时,  $x_{2k} \in (3.9, 4), x_{2k+1} \in$   
 $(4, 4.1)$ .

则当  $t=k+1$  时,  $x_{2(k+1)} = x_{2k+2} = x_{2k+1+1} =$   
 $g(x_{2k+1}) \in (g(4.1), g(4)) \subset (3.9, 4)$ .

$x_{2(k+1)+1} = x_{2k+3} = g(x_{2k+2}) \in (g(4), g(3.9))$   
 $\subset (4, 4.1)$ .

综上所述,  $x_{2t} \in (3.9, 4), x_{2t+1} \in (4, 4.1)$ , 对  $\forall t$   
 $\in \mathbf{N}^*$  成立. (不用数学归纳法证明不扣分)  $\dots$

$\dots \dots \dots 9 \text{ 分}$

$\therefore \cos x_1 \in (0, 1), \cos x_n \in (-1, 0), n \geq 2, n \in$   
 $\mathbf{N}^*, \therefore \left[\frac{2\cos x_1}{x_1}\right] = 0, \left[\frac{2\cos x_n}{x_n}\right] = -1, n \geq 2, n$   
 $\in \mathbf{N}^*.$

$$\therefore \sum_{i=1}^n [f(x_i)] = 1 - n, n \in \mathbf{N}^*. \left( \text{或} \sum_{i=1}^n [f(x_i)] \right. \\ \left. = \begin{cases} 0, n=1, \\ 1-n, n \geq 2, \text{且 } n \in \mathbf{N}^* \end{cases} \right) \dots \dots \dots 10 \text{ 分}$$

② 设  $\varphi(x) = x + g(x), x > 0, \varphi'(x) = 1 +$   
 $\frac{1}{2\sqrt{x+45}} - \frac{1}{2\sqrt{x+5}} > 0$  恒成立,  $\therefore$  当  $x > 0$   
 时,  $\varphi(x)$  单调递增.  $\dots \dots \dots 11 \text{ 分}$

$\therefore \varphi(4) = 8$ , 由 ① 知  $x_{2t} < 4, x_{2t+1} > 4, t \in \mathbf{N}^*$ ,  
 且  $x_1 > 4, \varphi(x_1) = x_1 + x_2 > 8$ ,

$\therefore \varphi(x_{2t+1}) > \varphi(4) = 8, \varphi(x_{2t}) < \varphi(4) = 8, t \in$   
 $\mathbf{N}^*. \dots \dots \dots 12 \text{ 分}$

当  $n=1$  时,  $[x_1] = 5$ ;

当  $n=2t (t \in \mathbf{N}^*)$  时, 由  $\varphi(x) = x + g(x)$  得

$$\varphi(x_n) = x_n + g(x_n) = x_n + x_{n+1}, \\ \therefore x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{2t-1} + x_{2t}) = \varphi(x_1) + \varphi(x_3) + \dots + \varphi(x_{2t-1}) > 8t = 4n,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5) + \dots + (x_{2t-2} + x_{2t-1}) + x_{2t} = x_1 + \varphi(x_2) + \varphi(x_4) + \dots + \varphi(x_{2t-2}) + x_{2t} < 5 + 8(t-1) + 4 = 8t + 1 = 4n + 1,$$

$$\therefore \left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = 4n; \dots \dots \dots 14 \text{ 分}$$

同理, 当  $n=2t+1 (t \in \mathbf{N}^*)$  时,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{2t-1} + x_{2t}) + x_{2t+1} = \varphi(x_1) + \varphi(x_3) + \dots + \varphi(x_{2t-1}) + x_{2t+1} > 8t + 4 = 4n,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5) + \dots + (x_{2t-2} + x_{2t-1}) + (x_{2t} + x_{2t+1}) = x_1 + \varphi(x_2) + \varphi(x_4) + \dots + \varphi(x_{2t}) < 5 + 8t = 4n + 1,$$

$$\therefore \left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = 4n. \dots \dots \dots 16 \text{ 分}$$

综上所述,  $\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \begin{cases} 5, n=1, \\ 4n, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*. \end{cases} \dots$   
 $\dots \dots \dots 17 \text{ 分}$

多维细目表

题型	题号	分值	必备知识	学科素养						预估难度		
				数学 抽象	逻辑 推理	数学 建模	直观 想象	数学 运算	数据 分析	易	中	难
选择题	1	5	集合的运算					√		√		
选择题	2	5	复数的运算及模的性质					√		√		
选择题	3	5	基本不等式、对数运算					√		√		
选择题	4	5	平面向量基本定理	√				√		√		
选择题	5	5	数列通项公式及最大项		√			√			√	
选择题	6	5	三角函数的图象与性质		√			√	√	√		
选择题	7	5	双曲线的定义及综合		√		√	√			√	
选择题	8	5	函数的零点		√		√	√				√
选择题	9	6	统计基础					√	√	√		
选择题	10	6	函数的基本性质		√			√			√	
选择题	11	6	立体几何中的组合体问题		√		√	√				√
填空题	12	5	二项式定理					√		√		
填空题	13	5	抛物线的定义及弦长					√		√		
填空题	14	5	直线与圆中的最值问题		√		√	√				√
解答题	15	13	三角变换与解三角形				√	√		√		
解答题	16	15	二项分布与古典概型计算		√	√		√		√		
解答题	17	15	点线面位置关系与空间角		√		√	√			√	
解答题	18	17	椭圆综合		√		√	√				√
解答题	19	17	导数与数列综合		√			√				√