排列组合和二项式定理 （二）

一、单选题

1.【答案】 C

【解析】 由题意男女都有的可能分为男同学1人，女同学2人；男同学2人，女同学1人两类：

第一类 $N_1=C_4^1C_5^2=40$ ；第二类 $N_2=C_4^2C_5^1=30$.

则男女生都有的选法为 $N=40+30=70$.

故选：C.

2.【答案】 B

【解析】 从除甲外的乙、丙、丁三名同学中选出2人，有C_3^2种选法，再将3人安排到3个科目，有A_3^3种，故共有$C_3^2\times A_3^3=18$(种).

3.【答案】 D

【解析】 5个人坐在5个座位上，共有不同坐法A_5^5种，其中3个号码一致的坐法有C_5^3种，有4个号码一致时必定5个号码全一致，只有1种，故所求种数为$A_5^5-C_5^3-1=109$.

4.【答案】 C

【解析】 先将4名医生分成3组，其中1组有2人，共有C_4^2种选法，然后将这3组医生分配到3个不同的住户中去，有A_3^3种方法，由分步乘法计数原理可知共有$C_4^2\times A_3^3=36$种不同的分配方案.

5.【答案】 B

【解析】 当$A=B\neq0$时，表示同一直线$x+y=0$；

当$A=0$，$B\neq0$时，表示直线$y=0$；

当$A\neq0$，$B=0$，表示直线$x=0$；

当$A\neq0$，$B\neq0$，$A\neq B$时有A_5^2条直线，

故共有$1+1+1+A_5^2=23$(条)直线.

6.【答案】 C

【解析】 根据题意，分2种情况讨论：

①若0在个位，则只需在1,2,3,4,5中任取2个数字，作为十位和百位数字即可，此时没有重复数字的三位偶数有$A_5^2=20$(个)；

②若0不在个位，此时必须在2或4中任取1个，作为个位数字，有2种取法，0不能作为百位数字，则百位数字有4种取法，十位数字也有4种取法，此时没有重复数字的三位偶数共有$2\times4\times4=32$(个).

综上可得，没有重复数字的三位偶数共有$20+32=52$(个)．故选C.

7.【答案】 B

【解析】 按照甲是否在天和核心舱划分，

①若甲在天和核心舱，天和核心舱需要从除了甲、乙之外的三人中选取两人，剩下两人去剩下两个舱位，则有$C_3^2\cdot A_2^2=6$(种)安排方案；

②若甲不在天和核心舱，需要从问天实验舱和梦天实验舱中挑选一个，剩下四人中选取三人进入天和核心舱即可，则有$C_2^1\cdot C_4^3=8$(种)安排方案；

根据分类加法计数原理，共有$6+8=14$(种)安排方案.

8.【答案】 C

【解析】 6名义工照顾三位老人，每两位义工照顾一位老人共有$C_6^2C_4^2=90$种安排方法，

其中A照顾老人甲的情况有$C_5^1C_4^2=30$(种)，B照顾老人乙的情况有$C_5^1C_4^2=30$(种)，

A照顾老人甲，同时B照顾老人乙的情况有$C_4^1C_3^1=12$(种).

故符合题意的安排方法有$90-30-30+12=42$(种).

故选C.

二、多选题

9.【答案】 BD

【解析】 由于生物在B层，只有第2,3节有，故分两类：

若生物选第2节，则地理可选第1节或第3节，有2种选法，

其他两节政治、自习任意选，

故有$2\times2=4$(种)(此种情况自习可安排在第1、3、4节中的某节)；

若生物选第3节，则地理只能选第1节，政治只能选第4节，自习只能选第2节，故有1种.

根据分类加法计数原理可得选课方式有$4+1=5$(种).

综上，自习可安排在4节课中的任一节．故选BD.

10.【答案】 CD

【解析】 $\because 51^{2\,020}+a=(52-1)^{2\,020}+a$

$=C_{2\,020}^{0}52^{2\,020}(-1)^{0}+C_{2\,020}^{1}52^{2\,019}(-1)^{1}+C_{2\,020}^{2}52^{2\,018}(-1)^{2}+\ldots+C_{2\,020}^{2\,019}+52^{1}\cdot(-1)^{2\,019}+C_{2\,020}^{2\,020}(-1)^{2\,020}+a$，

又52能被13整除，需使$C_{2\,020}^{2\,020}(-1)^{2\,020}+a$能被13整除，即$1+a$能被13整除，

$\therefore 1+a=13k$，$k\in\mathbf{Z}$，又$0\leq a<26$，$\therefore a=12$或25，故选CD.

11.【答案】 BCD

【解析】 令$1-x=\frac{1}{2}$，即$x=\frac{1}{2}$，

可得$\left(2\times\frac{1}{2}-m\right)^{7}=(1-m)^{7}=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_7}{2^7}=-128$，得$m=3$，故A错误；

令$x=1$，得$a_0=(-1)^7=-1$，$(2x-3)^7=[-1-2(1-x)]^7$，

所以$a_3=C_7^3\times(-1)^{7-3}\times(-2)^3=-280$，故B，C正确；

对$(2x-3)^7=a_0+a_1(1-x)+a_2(1-x)^2+\ldots+a_7(1-x)^7$，

等式两边求导得$14(2x-3)^6=-a_1-2a_2(1-x)-\ldots-7a_7(1-x)^6$，

令$x=2$得$-a_1+2a_2-3a_3+4a_4-5a_5+6a_6-7a_7=14$，故D正确.

故选BCD.

三、填空题

12.【答案】 $-1\,344$

【解析】 由题意，$(1-3x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7$，

两边求导可得$-3\times7(1-3x)^6=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5+7a_7x^6$，

令$x=1$，可得$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7=-3\times7\times(1-3)^6=-1\,344$.

13.【答案】 -1320

【解析】 因为$(1-2x)^n$的二项展开式中第3项二项式系数C_n^2与第10项的二项式系数C_n^9相等，即$C_n^2=C_n^9$，$\Rightarrow n=2+9=11$，即得二项式为$(1-2x)^{11}$，

其展开式的通项为$T_{r+1}=C_{11}^{r}(-2x)^r=(-2)^rC_{11}^{r}\cdot x^r$，

令$r=3$，可得$(-2)^3C_{11}^{3}\cdot x^3=-1320x^3$，即展开式中$x^3$的系数为$-1320$.

14.【答案】 $\frac{1}{140}$

【解析】 设第n行第m个数为$a_{n,\ m}$，

由题意知$a_{6,1}=\frac{1}{6}$，$a_{7,1}=\frac{1}{7}$，所以$a_{7,2}=a_{6,1}-a_{7,1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$，

$a_{6,2}=a_{5,1}-a_{6,1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$，

$a_{7,3}=a_{6,2}-a_{7,2}=\frac{1}{30}-\frac{1}{42}=\frac{1}{105}$，

$a_{6,3}=a_{5,2}-a_{6,2}=\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{60}$，

所以$a_{7,4}=a_{6,3}-a_{7,3}=\frac{1}{60}-\frac{1}{105}=\frac{1}{140}$.

四、解答题

15.【答案】 解：(1) 前4项分别是$1,-30x,420x^2,-3640x^3$.

(2)展开式的第8项$T_8=-2099520a^9b^{14}$.

(3)展开式的第7项$T_7=924$.

(4)展开式的中间两项分别为T_8, T_9, 其中

$T_8=C_{15}^{7}\left(x\sqrt{y}\right)^8\left(-y\sqrt{x}\right)^7=-6435x^{11}.\ y^{11}\sqrt{x}$,

$T_9=C_{15}^{8}\left(x\sqrt{y}\right)^7\left(-y\sqrt{x}\right)^8=6435x^{11}.\ y^{11}\sqrt{y}$.

16.【答案】 解：（1）先排数字0，0能占除最高位外的其余四个数位，有A_4^1种排法，

再排四个除0以为的四个数字有A_4^4种，

由分步乘法计数原理得$A_4^1A_4^4=4\times24=96$，

所以能组成96个无重复数字的五位数；

（2）当个位数字为0时，则剩余4位可以组成$A_4^4=24$个无重复数字的五位偶数，

当个位数字为2或4时，个位有$C_2^1=2$种排法，

再排最高位有$C_3^1=3$种排法，其

余的三位全排列有$A_3^3=6$种排法，

所以则可以组成$2\times3\times6=36$个无重复数字的五位偶数，

即可以组成$24+36=60$个无重复数字的五位偶数；

（3）计算比21034大的五位数的个数分两类：

万位比2大的五位数个数是$A_2^1A_4^4$，

万位是2的五位数中，千位比1大的有$A_2^2A_3^3$个，千位是1，百位比0大的有$A_2^2A_2^2$个，千位是1，百位是0，十位比3大的有1个，

由分类加法计数原理得$A_2^1A_4^4+A_2^2A_3^3+A_2^2A_2^2+1=65$，

所以组成无重复数字的五位数中比21034大的数有65个.

17.【答案】 解：（1）若计划前两天其中一天游玩金山，另外一天游玩焦山，有$A_2^2=2$

种，再安排游玩剩下的3座山有：$A_3^3=6$ 种，则总共有 $A_2^2A_3^3=12$ 种安排方案.

（2）金山、焦山、北固山位于市区，茅山、宝华山位于句容，

若考虑交通因素，计划市区的三山连续三天游玩有 $A_3^3=6$ 种，句容的两山连续两天游玩有 $A_2^2=2$ 种，最后再把两组进行全排列有 $A_2^2=2$ 种；共有 $A_3^3A_2^2A_2^2=24$ 种安排方案.

（3）金山、焦山、宝华山均属于佛教名地，若计划第一天与最后一天均游览佛教名地，

共有 $A_3^2A_3^3=36$ 种安排方案.

18.【答案】 解 (1)二项式展开式中第2项与第3项的二项式系数之比是C_n^1∶C_n^2＝2∶5，求得n＝6.

(2)展开式的通项为$T_{r+1}=C_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot x^{6-\frac{3r}{2}}$，

令$6-\frac{3r}{2}=0$，求得$r=4$，可得常数项为$C_6^4\cdot 2^2=60$.

(3)由$x=1$，$n=6$得，$C_6^0 2^6+C_6^1 2^5+C_6^2 2^4+C_6^3 2^3+C_6^4 2^2+C_6^5 2^1+C_6^6 2^0=(2+1)^6=3^6=729$.

19.【答案】 解：（1）若选③，易知 $C_n^2=15$，则 $n=6$，此时 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的常数项为 $C_6^3\left(\frac{1}{x}\right)^3(2x)^3=160$；

若选②，令 $x=1$，则 $\left(2+\frac{1}{1}\right)^n=3^n=729$，则 $n=6$，此时 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的常数项为$C_6^3\left(\frac{1}{x}\right)^3(2x)^3=160$；

若选①，易知 $2^n=64$，则 $n=6$，此时 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的常数项为 $C_6^3\left(\frac{1}{x}\right)^3(2x)^3=160$；（2）由上可知不论选①②③，都有 $n=6$，

则问题为求 $(1+x^2)\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中 x^2 的系数，

先求 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中含 x^2 的项乘以1，该项为 $C_6^2\left(\frac{1}{x}\right)^2(2x)^4=240x^2$，

再求 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中常数项乘以 x^2，知该项为 $160x^2$，

所以$\left(1+x^{2}\right)\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{6}$展开式中含$x^{2}$的项为$240x^{2}+160x^{2}=400x^{2}$，所以其系数为$400$.