math 也是柠檬精考研数学辅导讲义 24

ElegantLaTeX 经典之作

作者：柠宝

时间：April 9, 2022

版本：4.3

ElegantLaTeX Program

念念不忘，必有回响；但行好事，莫问远方

目录

第 1 章 极限、连续与求极限的方法

内容提要

1.1 极限的概念与性质

本章作为高等数学的开篇之章，重要程度这里有必要再次强调，很多同学学到后面甚至是末期，连极限的保号性都不会用，请务必引起重视。

本章内容会深入挖掘定义和性质，要求能熟练掌握各种极限的数学定义，且能对极限的性质能够用 $\varepsilon - N$ 或者 $\varepsilon - \delta$ 语言证明

不要觉得无聊和证明无所谓。

不要觉得无聊和证明无所谓。

不要觉得无聊和证明无所谓。

不听劝后果自负

1.1.1 极限的概念

1.1.1.1 数列极限

定义 1.1 (数列极限的定义)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, a 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在在一个 $N \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

就说数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋向无穷大时以 a 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

也可以简记为 $a_n \to a(n \to \infty)$. 我们也说数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 称极限存在的数列为“收敛数列”；不收敛的数列称为“发散数列” ♣

有一些大部分书上没有写（默认大家知道），但是会造成困扰的东西，这里有必要作一些说明：

- $n \to \infty$ 特指 $n \to +\infty$, 没有 $n \to -\infty$ 或者 $n \to$ 某个具体的正整数
- a_1, a_2 等都是具体的数字, 即不会出现 $a_i = \pm 10$ 或 $a_i = \infty$
- $\{a_n\}$ 有无穷多项, 有限项的数列没有讨论的意义

笔记 有关此定义的理解

1. 目标：为了说明 a_n 和 A 无限接近
2. 将 ε 理解为 a_n 和 A 之间的“误差”，即两者距离的一个上限
3. 在“误差 ε”的标准下, 将 a_n 和 A 视为同一个数字
4. N 的作用是“限制”自变量 n 的范围

结论

1. ε 既是任意的，又是给定的

2. 定义中的 N 是不依赖于 a_n 而只依赖于 ε 的函数，不一定非得是 ε，可以是 $2\varepsilon, \varepsilon^2$ 等，甚至将定义中的 $|a_n - A| < \varepsilon$ 改成 $|a_n - A| \leq \varepsilon$ 都可以

3. 进一步, $N_{\min}$ 是 ε 的函数而 N 不是 ε 的函数 (不满足一对一)
4. 只需要满足 $N \geq N_{\min}$ 即可
5. 用定义证明极限的过程就是求出一个满足条件的 N

例题 1.1 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

例题 1.2 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

例题 1.3 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$

例题 1.4 (1999) “对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$, 总存在正整数 N, 当 $n\geq N$ 时, 恒有 $|x_n-a|<2\varepsilon$” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 (　　)

A. 充分条件但非必要条件

B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非必要也非充分条件

例题 1.5 (* 难度较大) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$$

1.1.1.2 函数极限

柠宝提醒：要认真体会数列极限和函数极限在定义上的相同点和不同点整个函数极限分为四种情况

定义 1.2 (第一种函数极限)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x > X$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

此时 X 的作用与数列极限中 N 的作用相同，都是为了限制自变量 x(数列极限中是 n) 的变化范围 ♣

定义 1.3 (第二种函数极限)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x < -X$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

定义 1.4 (第三种函数极限)

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall |x| > X$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

定义 1.5 (第四种函数极限)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

这里有一个非常严重的问题：

为什么在“第四种函数极限”中，不等式为

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

而不是

$$0 \leq |x - x_0| < \delta$$

答：在函数极限原本的定义中, 我们只关注这个点“附近”的值, 而不关心这个点本身是什么，若允许等号的成立，其实就是连续的定义。注意到这种定义中的 δ 的作用, 和数列极限中的 N 、函数极限中 X 相同, 都是为了限制自变量的范围, 不同于之前定义中的自变量 $\to\infty$, 这里的是 $\to x_0$

笔记 函数极限的存在情况 (是否存在)，包括即使存在所对应的极限值，与函数在这一点有无定义，或者即使有定义其值为多少，没有关系！没有关系！没有关系！

有了上面的四种函数极限的定义，这里再补充一下单侧极限的定义

定义 1.6 (左极限 $f(x_0 - 0) = A$)

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall -\delta < x - x_0 < 0$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

定义 1.7 (右极限 $f(x_0 + 0) = A$)

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < x - x_0 < \delta$, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

1.1.2 极限的性质

下面三个性质均要求能熟练证明

定理 1.1 (极限的唯一性)

如果极限存在，则极限唯一

♡

证明

定理 1.2 (极限的保号性 (保序性))

♡

证明

定理 1.3 (数列极限的有界性与函数极限的局部有界性)

♡

证明

1.1.3 补充内容：数列与子列的关系

1.1.3.1 子列的概念

1.1.3.2 收敛数列属于子列的关系

1.1.4 极限的存在准则

1.1.4.1 夹逼定理

1.1.4.2 单调有界准则

1.1.4.3 极限存在的两个充要条件

1.1.5 几个重要极限

1.1.6 关于 1^{∞} 极限的处理 (第一次强调)

1.1.7 补充内容：Heine 定理 (函数极限与函数列极限的关系)

1.2 无穷小量与无穷大量

1.3 函数的连续性和间断点

1.4 函数的连续性和间断点

第 2 章 绝活级数（数一）

内容提要

本章学习的注意事项：

- 注意条件的充分性和必要性
- 联系反常积分相互对比, 注意两者的异同，21 大纲新增“级数的积分判别法”
- 时刻注意“形式上的统一”，即“整体性”和“一致性”

2.1 常数项级数及其选择题秒杀

2.1.1 常数项级数的概念

同反常积分一样，级数作为极限的一种，也是“用有限定义无限”，当然在第一章讲的“存在 ± 不存在 = 不存在”对于级数来说同样适用（级数收敛理解为极限存在）

定义 2.1 (数项级数)

定义无穷多个数 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 依次相加所得到的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数）u_n 称为级数的一般项或通项

级数部分和为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, (n = 1, 2, \cdots)$$

注意到此时 n 是一个具体的数字，若数列 S_n 的极限存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，称极限值 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 为此级数的和，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S$$

当级数收敛时，$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 称为级数的余项（或余和）♣

显然收敛时 $r_n \to 0$

命题 2.1

有限项不会影响级数的敛散性，但是可能会影响收敛级数的收敛值 ♠

2.1.2 数项级数的基本性质

定理 2.1 (收敛级数的必要条件)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ♡

笔记

- 此条件是必要非充分条件
- (任何定理均可考虑其逆否命题来加深理解和应用)其否命题为:若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 原级数发散

定理 2.2 (收敛级数的线性运算)

若两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

其中 λ, μ 为常数

定理 2.3 (收敛级数的结合律)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,在不改变其项的次序的前提下,任意加括号,并把每个括号内的各项的和作为一项,这样所得到的新级数仍收敛,且和不变

特别的,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

笔记

- 只是原级数收敛 → 加括号收敛,反之不成立
- 考虑其逆否命题,若加括号发散 → 原级数发散

命题 2.2

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ 又其相继两项加括号所得的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛,则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

2.1.3 两个重要的级数(p 级数与 q 级数)

注意 p 级数与 q 级数和反常积分的两个标准函数的联系

定理 2.4 (几何级数(q 级数))

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} |q| < 1 & \text{收敛} \\ |q| \geqslant 1 & \text{发散} \end{cases}$$

定理 2.5 (p 级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1 & \text{收敛} \\ p \leqslant 1 & \text{发散} \end{cases}$$

定理 2.6 (补充一个常考的)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}\begin{cases} p>1,\forall q \\ p=1\text{ 且}q>1\end{cases}\quad \text{收敛, 其余均发散}$$

笔记 以下结论仅针对正项级数适用，也就是说若题干只谈“级数”没有明确说明“正项级数”或者讨论其“绝对收敛”的情况，一律 不适用，常出现在选择题中。

2.1.4 正项级数的的概念和收敛的充要条件

定理 2.7

若 $u_n\geqslant 0$ 则，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，正项级数的特点是部分和数列 $\{S_n\}$ 单调非减，利用极限的“单调有界准则可知，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件为 $\to$ 部分和数列有（上）界

2.1.5 正项级数的判别法之比较判别法

定理 2.8

设 $u_n\le kv_n, u_n\ge 0, v_n\ge 0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{ 收敛}\to\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{ 收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{ 发散}\to\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{ 发散}$$

笔记 同反常积分的比较判别法一样：大的收敛 $\to$ 小的收敛；小的发散 $\to$ 大的发散

2.1.6 正项级数的判别法之比较判别法的极限形式

定理 2.9

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l(0\leqslant l\leqslant+\infty)$

1. 若 $0<l<+\infty,$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散

2. 若 $l=0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\to\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\to\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散

3. 若 $l=+\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\to\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\to\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛

笔记

1. 站在“无穷小的阶”的高度来理解比较判别法的极限形式
2. 与反常积分中“找分母的等价无穷大”形式相同
3.p 级数与 q 级数常常用作比较的基准级数

2.1.7 正项级数的判别法之比值判别法

定理 2.10

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛}, \rho<1\\ \text{发散}, \rho>1\\ \text{不一定}, \rho=1\end{cases}$$

笔记

1. 通项越小，收敛的“概率”就越高
2. 这 $\rho<1$ 理解为当 $n>N$ 整个通项的公比 $q<1$
3. 收敛和发散以“1”为界限

2.1.8 正项级数的判别法之根值判别法

定理 2.11

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛}, & \rho<1\\ \text{发散}, & \rho>1\\ \text{不一定}, & \rho=1\end{cases}$$

2.1.9 正项级数的判别法之确定 u_n 的阶数（可用泰勒展开）

笔记 泰勒展开的目的是找等价无穷小（用于确定 u_n 的阶）

定理 2.12

设 $u_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n^p}}=A$

1. 若 $0\leqslant A<+\infty, p>1$（即当 $n\to\infty$ 时 u_n 是 $\frac{1}{n}$ 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小, $p>1$）则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛
2. 若 $0<A\leqslant+\infty, p\leqslant 1$（即当 $n\to\infty$ 时 u_n 是 $\frac{1}{n}$ 的 p 阶或低于 p 阶的无穷小, $p\leqslant 1$）则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

笔记 若 $u_n\geq 0$ 且当 $n\to\infty$ 时, $u_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 不能断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

2.1.10 交错级数的定义和判别法

定义 2.2 (交错级数)

若 $u_n>0$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$

笔记

1. 对于交错级数，第一项是 $+$ 还是 $-$ 不是重点，重点一定是 $+-$ 交替的

$2.u_n > 0$

定理 2.13 (莱布尼茨交级数判别法)

设上述交错级数满足

$1.u_n \geqslant u_{n+1}, n \geqslant N \geqslant 1$

$2. \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

2.1.11 级数学习的核心思想

命题 2.3

上述所讲的判别法，只是充分条件，而非必要条件，即

$$满足条件 \to 收敛$$

级数收敛**不能推出**满足条件

2.1.12 绝对收敛与条件收敛

上面给出了若干正项级数的判别法和交错级数的判别法，对于一般的通项符号不规律不安华的级数，可以优先考虑其绝对敛散性

定义 2.3 (绝对收敛和条件收敛)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛

笔记 正项级数因为加了绝对值之后是其本身，所以正项级数收敛 $\leftrightarrow$ 正项级数绝对收敛

定理 2.14 (绝对收敛和条件收敛的性质)

1. 绝对收敛的级数一定收敛，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ 收敛} \to \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 必收敛}$$

即加了绝对值收敛（去掉绝对值）收敛

2. 条件收敛的级数所有的正项（或负项）构成的级数**一定发散**，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 条件收敛} \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+|u_n|}{2} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n-|u_n|}{2} \text{ 发散}$$

2.1.13 级数收敛性的 $\pm\times$（重点）

注意到这里的乘法指的是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n v_n$

1.

$$收敛 \pm 收敛 =$$

2.

$$\text{收敛} \times \text{收敛} =$$

2.1.14 绝对收敛与条件收件级数的 $\pm\times$（重点）

笔记 注意到“收敛数列必定有界”

1.

$$\text{绝对} \pm \text{绝对}$$

2.

$$\text{绝对} \pm \text{条件}$$

3.

$$\text{条件} \pm \text{条件}$$

4.

$$\text{绝对} \times \text{绝对}$$

5.

$$\text{绝对} \times \text{条件}$$

上述反例需要掌握

2.1.15 选择题的秒杀技巧

笔记

- 没见过的都是错的
- 注意条件的充分性和必要性
- 看见乘法，利用不等式

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

注意除法也是乘法
- 先考虑其绝对收敛性（先加绝对值再说）
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 的敛散性与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 的敛散性相同

例题 2.1 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_n}}{n}$(　)

A. 发散

B. 条件收敛

C. 绝对收敛

D. 敛散性不确定

例题 2.2 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $(a_n>0)$，令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$(　)

A. 发散

B. 收敛于 $-\frac{1}{a_1}$

C. 收敛于 0

D. 敛散性不确定

例题 2.3 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)(a>0)$(　)

A. 发散

B. 条件收敛

C. 绝对收敛

D. 敛散性与 a 有关

例题 2.4 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $(u_n > 0)$, 则下列结论正确的是 (　)

A. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho < 1$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 一定收敛

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$ 收敛

例题 2.5 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列正确的是 (　)

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 一定收敛

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 一定发散

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 一定收敛

例题 2.6 设常数 $k > 0$ 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{k+n}{n^2}$ (　)

A. 发散

B. 绝对收敛

C. 条件收敛

D. 敛散性与 k 有关

例题 2.7 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则 (　)

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

例题 2.8 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列级数必收敛的是 (　)

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{u_n}{n}$

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$

D.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

例题 2.9 下列说法正确的是（ ）

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定收敛

B 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 一定收敛

C. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收收, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 一定收敛

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 一定收敛

2.2 幂级数的收敛判别法和展开

下设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的基本要求是 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 有共同的定义域

2.2.1 收敛点与收敛域的概念

定义 2.4

若 $x_0 \in I$, 对应的常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点

收敛点的集合 $\rightarrow$ 收敛域

发散点的集合 $\rightarrow$ 发散域

♣

2.2.2 幂级数的定义

首先要说明的是，幂级数是函数项级数的一种特殊形式

定义 2.5 (幂级数)

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 级数称为 $x-x_0$ 的幂级数，其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 为常数，称为幂级数的系数。当 $x_0=0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 称为 x 的幂级数

♣

2.2.3 函数项级数的重要理解

函数项级数只是将数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中的 u_n “函数化”为 $u_n(x)$，本质上 $u_n(x)$ 最终还是（关于 x 的）一个数，所以数项级数中的判别法仍然适用

例题 2.10 求下列函数项级数的收敛域

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

笔记 在理解下列有关定理的时候，要特别注意：同反常积分讲的一样，通项的值越小，收敛的“概率”就越高，注意到此处的“小”仅和 0 作比较（想想看为什么？）

2.2.4 幂级数的收敛之阿贝尔定理

定理 2.15

1. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_0\,(x_0\neq 0)$ 时收敛，则当 $|x|<|x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛
2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_0$ 时发散, 则当 $|x|>|x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散

♡

笔记 注意到上述两条定义对于端点处是无法判断的，只能单独讨论。即使是单独讨论，通常出现的形式也是莱布尼茨交错级数，调和级数等简单的判定，请勿担心

由上述的阿贝尔定理，我们可以得到如下关于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛性的可能情况如下

- 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 均收敛
- 仅在 $x = 0$ 初收敛
- 存在一个正数 R，当 $|x| < R$ 时绝对收敛，$|x| > R$ 时发散，至于 $x = \pm R$ 时的敛散性，需要单独讨论（具体如何讨论后面会讲）

2.2.5 幂级数的收敛之收敛半径和收敛域的求法

在上述定理中, 正数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 开区间$(-R, R)$ 称为它的收敛区间, 再考察 $x = \pm R$ 的时候的敛散性, 就可以得出该级数收敛点的全体, 称为收敛域

笔记 要注意收敛半径、收敛区间、收敛域三者的区别。其中收敛半径是一个非负实数，收敛区间是开区间，收敛域是整个收敛点的集合（可能是开区间、闭区间、半开半闭区间）

定理 2.16 (收敛半径的根值判别法)

$$\text{如果} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho,\ \text{则} R = \frac{1}{\rho}$$

♡

定理 2.17 (收敛半径的比值判别法)

$$\text{如果} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho,\ \text{则} R = \frac{1}{\rho}$$

♡

笔记 上述两个判别法仅仅是充分非必要条件！还要注意到是加了绝对值的

2.2.6 关于非标准形式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径的求法

在求收敛半径的时候, 若并非标准的 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 而是诸如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的形式, 作如下处理: 将整个 $a_n x^{2n+1}$ 看作一个整体进行根值判别或比值判别，注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1} \text{ 的敛散性和} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}\text{、} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1} \text{ 的敛散性相同}$$

例如：对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$，为了求其收敛半径，可以考虑极限（假设极限存在）

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}}\right|$$

同理可以考虑比值判别法的形式（不再赘述）

2.2.7 两个幂级数四则运算的收敛半径

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2，令 $R = \min\{R_1, R_2\}$

1. 加法：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n, x \in (-R, R)$

2. 减法：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n, x \in (-R, R)$

3. 乘法：$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right), x \in (-R, R)$

4. 除法：$\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n}, x \in (-R, R)$

笔记 上述是无条件成立的，但是如果考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

的收敛半径时，需要考虑 $R_1 = R_1$ 的情况

2.2.8 幂级数的分析性质（连续、求导、积分）

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，和函数为 $S(x)$，则

定理 2.18

1. 连续性：$S(x)$ 在收敛域上连续
2. 可导性（也称逐项可导性）$S(x)$ 在收敛区间$(-R, R)$ 内可导，且可逐项求导，即

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

3. 可积性（也称逐项可积性）$S(x)$ 在收敛区间$(-R, R)$ 内可积，且可逐项积分，即

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

♡

笔记 特别注意：在求导或积分后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径，但是不一定有相同的收敛域，仅仅针对区间的边界点

2.2.9 函数的幂级数展开

定义 2.6

设函数在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上有定义，若

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

对任意的 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 都成立，称函数 $f(x)$ 在 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数，进一步，展开后在区间 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$任意阶可导

♣

定理 2.19 (幂级数展开的唯一性)

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

则 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上任意阶可导，且其展开式是唯一的，其中

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$$

笔记 唯一性定理保证了我们无论使用何种展开方式（直接展开或间接展开），最后的幂级数的结果是一样的

定义 2.7

若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数

特别的，$x_0=0$ 处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数

定理 2.20

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上收敛于 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

中的余项 $R_n(x)$

2.2.10 常见函数的泰勒级数展开

1.
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-1<x<1)$$

2.
$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum^{\infty}(-1)^nx^n(-1<x<1)$$

3.
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

4.
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}(-\infty<x<+\infty)$$

5.
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<+\infty)$$

6.
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}(-1<x\leqslant 1)$$

7.
$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n (-1 < x < 1)$$

笔记 幂级数的展开方法:

1. 直接法（基本不用）
2. 间接展开法（常用）

2.2.11 典型例题——求收敛域

例题 2.11 求下列幂级数的收敛域

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n x^{2n+1}}{\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n}$

例题 2.12 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-a)^n$ 在 $x = \ln\frac{1}{2}$ 处 (　)

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 必发散

D. 敛散性由 a 决定

重要技巧：将括号看做一个整体

例题 2.13 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=0$ 收敛，在 $x=2$ 发散，则该幂级数的收敛域为________

2.2.12 典型例题——求幂级数展开

笔记 核心技巧:

1. 有限项与敛散性无关，强行凑成已知函数的幂级数展开
2. 看见复杂的形式（非标准形式）可以考虑“先积分再求导”或者“先求导再积分”
3. 注意基本公式的应用（如立方和、立方差、$1-x^n$ 等）

例题 2.14

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2}$$

例题 2.15

$$f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$$

例题 2.16

$$f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x - x$$

例题 2.17

$$f(x) = \ln\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)$$

在指定点展开

笔记 这里采用和不定积分一样的做法：看不懂就令

例题 2.18

$$f(x) = \ln x, \text{在} x = 1 \text{ 处}$$

例题 2.19

$$f(x) = \sin x, \ \text{在} x = \frac{\pi}{4} \text{ 处}$$

2.3 幂级数的求和（送分绝活）

2.3.1 先看出答案和哪一个函数有关的方法（核心技巧）

首先来回忆一下上节内容：常见的幂级数展开

1.
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-1<x<1)$$

2.
$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum^{\infty}(-1)^n x^n(-1<x<1)$$

3.
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

4.
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-\infty<x<+\infty)$$

5.
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<+\infty)$$

6.
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}(-1<x\leqslant 1)$$

7.
$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n(-1<x<1)\end{aligned}$$

笔记 记忆方法：

例题 2.20 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$

解

$$S(x)=\begin{cases}(\sin x-x\cos x)/\left(2x^3\right), & x\neq 0\\ 1/6, & x=0\end{cases}$$

例题 2.21（2002 真题）

（1）验证函数

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$

（2）利用（1）的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数

例题 2.22（2018 选择题）

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\_\_\_\_\_\_\_\_$$

例题 2.23（2019 真题） 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_$

2.3.2 幂级数的和函数的求法及秒杀技巧（特别注意下标的变化）

笔记 首先需要明确的是：

1. 在级数中，“有限项不影响级数的敛散性和收敛域”
2. 在需要单独讨论的时候，将$0^0=1$来处理，原因是因为连续性
3. 函数的重要改写在之前的章节中讲过，这里重复一下

$$S(x)-S\left(x_0\right)=\int_{x_0}^{x}S'(t)dt$$

特别地，当 $x_0=0$ 时，有

$$S(x)-S(0)=\int_{0}^{x}S'(t)dt$$

当然还有在微分学和积分学的形式，这里不再赘述（自己翻之前的笔记）

4.尤其注意“整体性”、“一致性”

2.3.3 补充内容：幂级数的下标变化

核心思想是通过适当的下标变化，将待求级数处理成我们熟悉的那几个级数（下标也处理成一致），差项就强行凑

笔记 （听课时补充）

考研数学范围内的和函数，大致可以分为如下三类

- 系数 a_n 中的 n 在分母上
- 系数 a_n 中的 n 在分子上 $(n=\frac{n}{1})$
- 通过题干中的条件 (通常是 a_n 和 a_{n+1} 的递推式) 来构造微分方程（大题常考，已多次出现在真题中）

2.3.4 和函数第一式——n 在分母上

形如 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2-1\right)2^n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)3^n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$ 的形式

这是典型的送分题，操作方法如下

笔记

1. 形式统一（和 n 有关的尽量保持一致）
2. “先求导后积分”：注意为了方便求导，需要将 x 的指数部分与分母转化为一致，例如求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$

应该处理成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

对于 $x=0$ 的情况单独讨论

3. 注意裂项（将原级数分成几个单独的级数分别求和函数）
4. “核心技巧：保证分母的 n 和 x 的次数相等”

例题 2.24（2010 真题，10 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

例题 2.25（2012 真题，10 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

例题 2.26 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^{n}$ 的收敛域与和函数（此题结果作与“常见函数的幂级数展开”的补充，当作结论记忆）

2.3.5 和函数第二式——n 在分子上

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n}$$

这是典型的送分题，操作方法如下

笔记

1. 形式统一（和 n 有关的尽量保持一致）

2. “先积分后求导”：注意为了方便积分，需要将 x 的指数部分指数部分比系数少 1，例如求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^{n}$ 应该处理成

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-1)x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$$

这样做的目的是为了在“先积分”时刚好消去，因为

$$\int(n+1)x^{n}dx=x^{n+1}$$

3. 注意裂项（将原级数分成几个单独的级数分别求和函数）

4. “核心技巧：指数部分比系数少 1”

例题 2.27 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的收敛域与和函数

例题 2.28（2012 真题，10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

例题 2.29 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的收敛域与和函数

例题 2.30 补充习题：求某些类似于幂级数的数项级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

2.3.6 和函数第三式——构造微分方程

首先说，微分方程与级数结合是最简单的题目，没有之一。要熟练运用刚刚讲的下标变换

我们只有一个目的：通过已知条件构造微分方程

笔记 通过“逐项求导”，强行凑出题干中的递推式，主要是凑系数和重复出现 $S(x)$

例题 2.31（2013 真题，10 分） 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数

（1）证明 $S''(x)-S(x)=0$

（2）求 $S(x)$ 的表达式

例题 2.32（2020 真题，10 分） 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, (n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$

证明：当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数

例题 2.33 已知 $a_0=1, a_1=\frac{1}{2}$, 且当 $n\geqslant 2$, 有 $na_n=\left[\frac{1}{2}+(n-1)\right]a_{n-1}$

证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，并求其和函数

2.4 *Fourier* 级数

2.4.1 三角函数的正交性

三角函数系 $\{1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \cdots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, \cdots\}$ 任意两个不同的函数在区间 $[-l, l]$ 上的积分等于 0

即

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = 0, n = 1, 2\cdots$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = 0, m, n = 1, 2, \cdots$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = 0, m, n = 1, 2, \cdots, m \neq n$$

2.4.2 *Fourier* 系数与 *Fourier* 级数

设 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期或只定义在 $[-l, l]$ 上, 在 $[-l, l]$，且在 $[-l, l]$ 上可积（通常 $l = \pi$）

在三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

中，令

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, n = 1, 2, 3, \cdots$$

则称之为函数 $f(x)$ 的 *Fourier* 级数（以 $2l$ 为周期），记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

对应的系数 a_n, b_n 称为 $f(x)$ 的 *Fourier* 系数

特别地，若 $l = \pi$，则有

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

对应的系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, n = 1, 2, 3, \cdots$$

2.4.3 *Fourier* 级数的收敛性——Dirichlet 收敛定理（充分条件）

定理 2.21

设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的分段单调函数，除有限个第一类间断点外都是连续的，则 $f(x)$ 的 *Fourier* 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛，且收敛于

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=\begin{cases} f(x), & \text{若}x\in(-l,l)\text{ 为}f(x)\text{ 的连续点,}\\ \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{若}x\in(-l,l)\text{ 为}f(x)\text{ 的第一类间断点,}\\ \frac{1}{2}[f(-l+0)+f(l-0)], & \text{若}x=\pm l. \end{cases}$$

笔记 上述定理也可以等价记忆为:

1.$f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，或只有有限个间断点，且均为第一类间断点

2.$f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上只有有限个极值点

2.4.4 偶延拓与奇延拓

笔记 偶延拓与偶延拓与奇延拓，就是利用构造新函数，将原本的非周期函数强行转化为 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数或奇函数，且进一步拓展成整个实数域上的周期函数

定理 2.22 (偶延拓)

设 $f(x)$ 是 $[0,\pi]$ 上的非周期函数, 令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ f(-x), & -\pi\leqslant x<0 \end{cases}$$

则 $F(x)$ 除 $x=0$ 外在 $[-\pi,\pi]$ 上为偶函数, 有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx(\text{余弦级数})$$

其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$$

定理 2.23 (奇延拓)

设 $f(x)$ 是 $[0,\pi]$ 上的非周期函数, 令

$$F(x)=\begin{cases} f(x),0\leqslant x\leqslant\pi\\ -f(-x),-\pi\leqslant x<0 \end{cases}$$

则 $F(x)$ 除 $x=0$ 外在 $[-\pi,\pi]$ 上为奇函数, 有

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx(\text{余弦级数})$$

其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$$

2.4.5 典型例题

例题 2.34 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1,1]$ 上定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0\\ x^3, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数在$x=1$ 处收敛于________

例题 2.35 设函数 $f(x)=x^2, x\in[0,\pi]$，将 $f(x)$ 展开为 2π 为周期的 $Fourier$ 级数，并证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

第 3 章 ElegantLaTeX 系列模板介绍

ElegantLaTeX 项目组致力于打造一系列美观、优雅、简便的模板方便用户使用。目前由 ElegantNote，ElegantBook，ElegantPaper 组成，分别用于排版笔记，书籍和工作论文。强烈推荐使用最新正式版本！本文将介绍本模板的一些设置内容以及基本使用方法。如果您有其他问题，建议或者意见，欢迎在 GitHub 上给我们提交 issues 或者邮件联系我们。

我们的联系方式如下，建议加入用户 QQ 群提问，这样能更快获得准确的反馈，加群时请备注 LaTeX 或者 ElegantLaTeX 相关内容。

- 官网：https://elegantlatex.org/（暂时歇业）
- GitHub 地址：https://github.com/ElegantLaTeX/
- Gitee 地址：https://gitee.com/ElegantLaTeX
- CTAN 地址：https://ctan.org/pkg/elegantbook
- 下载地址：正式发行版，最新版
- 微博：ElegantLaTeX（密码有点忘了）
- 微信公众号：ElegantLaTeX（不定期更新）
- 用户 QQ 群：692108391（建议加群）
- 邮件：`elegantlatex2e@gmail.com`

3.1 模板安装与更新

你可以通过免安装的方式使用本模板，包括在线使用和本地（文件夹内）使用两种方式，也可以通过 TeX 发行版安装使用。

3.1.1 在线使用模板

我们把三套模板全部上传到 Overleaf 上了，网络便利的用户可以直接通过 Overleaf 在线使用我们的模板。使用 Overleaf 的好处是无需安装 TeX Live，可以随时随地访问自己的文件。查找模板，请在 Overleaf 模板库里面搜索 `elegantlatex` 即可，你也可以直接访问搜索结果。选择适当的模板之后，将其 `Open as Template`，即可把模板存到自己账户下，然后可以自由编辑以及与别人一起协作。更多关于 Overleaf 的介绍和使用，请参考 Overleaf 的官方文档。

3.1.2 本地免安装使用

免安装使用方法如下：从 GitHub 或者 CTAN 下载最新版，严格意义上只需要类文件 `elegantbook.cls`。然后将模板文件放在你的工作目录下即可使用。这样使用的好处是，无需安装，简便；缺点是，当模板更新之后，你需要手动替换 `cls` 文件。

3.1.3 发行版安装与更新

本模板测试环境为

1. Win10 + TeX Live 2022；
2. Ubuntu 20.04 + TeX Live 2022；
3. macOS Monterey + MacTeX 2022。

TeXLive/MacTeX 的安装请参考啸行的一份简短的关于安装 LaTeX 安装的介绍。

安装 TEX Live 之后，安装后建议升级全部宏包，升级方法：使用 cmd 或 terminal 运行 `tlmgr update --all`，如果 tlmgr 需要更新，请使用 cmd 运行 `tlmgr update --self`，如果更新过程中出现了中断，请改用 `tlmgr update --self --all --reinstall-forcibly-removed` 更新，也即

```
tlmgr update --self
tlmgr update --all
tlmgr update --self --all --reinstall-forcibly-removed
```

更多的内容请参考 How do I update my TEX distribution?

3.1.4 其他发行版本

由于宏包版本问题，本模板不支持 CTEX 套装，请务必安装 TeX Live/MacTEX。更多关于 TEX Live 的安装使用以及 CTEX 与 TEX Live 的兼容、系统路径问题，请参考官方文档以及啸行的一份简短的关于安装 LATEX 安装的介绍。

3.2 关于提交

出于某些因素的考虑，ElegantLATEX 项目自 2019 年 5 月 20 日开始，**不再接受任何非作者预约性质的提交**（pull request）！如果你想改进模板，你可以给我们提交 issues，或者可以在遵循协议（LPPL-1.3c）的情况下，克隆到自己仓库下进行修改。

第 4 章 ElegantBook 设置说明

本模板基于基础的 book 文类，所以 book 的选项对于本模板也是有效的（纸张无效，因为模板有设备选项）。默认编码为 UTF-8，推荐使用 TEX Live 编译。

4.1 语言模式

本模板内含两套基础语言环境 lang=cn、lang=en。改变语言环境会改变图表标题的引导词（图，表），文章结构词（比如目录，参考文献等），以及定理环境中的引导词（比如定理，引理等）。不同语言模式的启用如下：

```
\documentclass[cn]{elegantbook}
\documentclass[lang=cn]{elegantbook}
```

除模板自带的两套语言设定之外，由**网友**提供的其他语言环境设置如下：

- 由 VincentMVV 提供的意大利语翻译 lang=it，相关讨论见 Italian translation；
- 由 abfek66 提供的法语翻译 lang=fr，相关讨论见 Italian translation；
- 由 inktvis75 提供的荷兰语翻译 lang=nl，相关讨论见 Dutch Translation；
- 由 palkotamas 提供的匈牙利语翻译 lang=hu，相关讨论见 Hungarian translation；
- 由 Lisa 提供的德语翻译 lang=de，相关讨论见 Deutsch translation；
- 由 Gustavo A. Corradi 提供的西班牙语的翻译 lang=es，相关讨论见 Spanish translation；
- 由 Altantsooj 提供的蒙古语的翻译 lang=mn，相关讨论见 Mongolian translation；
- 由 inusturbo 提供的日本语的翻译 lang=jp，相关讨论见 Japanese Translation。

注 以上各个语言的设定均为网友设定，我们未对上述翻译进行过校对，如果有问题，请在对应的 issue 下评论。并且，只有中文环境（lang=cn）才可以输入中文。

4.2 设备选项

最早我们在 ElegantNote 模板中加入了设备选项（device），后来，我们觉得这个设备选项的设置可以应用到 ElegantBook 中[1]，而且 Book 一般内容比较多，如果在 iPad 上看无需切边，放大，那用户的阅读体验将会得到巨大提升。你可以使用下面的选项将版面设置为 iPad 设备模式[2]

```
\documentclass[pad]{elegantbook} %or
\documentclass[device=pad]{elegantbook}
```

4.3 颜色主题

本模板内置 5 组颜色主题，分别为 green[3]、cyan、blue（默认）、gray、black。另外还有一个自定义的选项 nocolor。调用颜色主题 green 的方法为

```
\documentclass[green]{elegantbook} %or
\documentclass[color=green]{elegantbook}
```

[1]不过因为 ElegantBook 模板封面图片的存在，在修改页面设计时，需要对图片进行裁剪。

[2]默认为 normal 模式，也即 A4 纸张大小。

[3]为原先默认主题。

表 4.1: ElegantBook 模板中的颜色主题

	green	cyan	blue	gray	black	主要使用的环境
structure						chapter section subsection
main						definition exercise problem
second						theorem lemma corollary
third						proposition

如果需要自定义颜色的话请选择 `nocolor` 选项或者使用 `color=none`，然后在导言区定义 structurecolor、main、second、third 颜色，具体方法如下：

```
\definecolor{structurecolor}{RGB}{0,0,0}
\definecolor{main}{RGB}{70,70,70}
\definecolor{second}{RGB}{115,45,2}
\definecolor{third}{RGB}{0,80,80}
```

4.4 封面

4.4.1 封面个性化

从 3.10 版本开始，封面更加弹性化，用户可以自行选择输出的内容，包括 `\title` 在内的所有封面元素都可为空。目前封面的元素有

表 4.2: 封面元素信息

信息	命令	信息	命令	信息	命令
标题	`\title`	副标题	`\subtitle`	作者	`\author`
机构	`\institute`	日期	`\date`	版本	`\version`
箴言	`\extrainfo`	封面图	`\cover`	徽标	`\logo`

另外，额外增加一个 `\bioinfo` 命令，有两个选项，分别是信息标题以及信息内容。比如需要显示 User Name：111520，则可以使用

```
\bioinfo{User Name}{115520}
```

封面中间位置的色块的颜色可以使用下面命令进行修改：

```
\definecolor{customcolor}{RGB}{32,178,170}
\colorlet{coverlinecolor}{customcolor}
```

4.4.2 封面图

本模板使用的封面图片来源于 pixabay.com[4]，图片完全免费，可用于任何场景。封面图片的尺寸为 1280×1024，更换图片的时候请**严格**按照封面图片尺寸进行裁剪。推荐一个免费的在线图片裁剪网站 fotor.com。用户 QQ 群

[4]感谢 ChinaTEX 提供免费图源网站，另外还推荐 pexels.com。

内有一些合适尺寸的封面，欢迎取用。

4.4.3 徽标

本文用到的 Logo 比例为 1:1，也即正方形图片，在更换图片的时候请选择合适的图片进行替换。

4.4.4 自定义封面

另外，如果使用自定义的封面，比如 Adobe illustrator 或者其他软件制作的 A4 PDF 文档，请把 `\maketitle` 注释掉，然后借助 `pdfpages` 宏包将自制封面插入即可。如果使用 `titlepage` 环境，也是类似。如果需要 2.x 版本的封面，请参考 etitlepage。

4.5 章标标题

本模板内置 2 套章标题显示风格，包含 `hang`（默认）与 `display` 两种风格，区别在于章标题单行显示（`hang`）与双行显示（`display`），本说明使用了 `hang`。调用方式为

```
\documentclass[hang]{elegantbook} %or
\documentclass[titlestyle=hang]{elegantbook}
```

在章标题内，章节编号默认是以数字显示，也即第 1 章，第 2 章等等，如果想要把数字改为中文，可以使用

```
\documentclass[chinese]{elegantbook} %or
\documentclass[scheme=chinese]{elegantbook}
```

4.6 数学环境简介

在我们这个模板中，我们定义了两种不同的定理模式 `mode`，包括简单模式（`simple`）和炫彩模式（`fancy`），默认为 `fancy` 模式，不同模式的选择为

```
\documentclass[simple]{elegantbook} %or
\documentclass[mode=simple]{elegantbook}
```

本模板定义了四大类环境

- 定理类环境，包含标题和内容两部分，全部定理类环境的编号均以章节编号。根据格式的不同分为 3 种
  - **definition** 环境，颜色为 main；
  - **theorem**、**lemma**、**corollary**、**axiom**、**postulate** 环境，颜色为 second；
  - **proposition** 环境，颜色为 third。
- 示例类环境，有 **example**、**problem**、**exercise** 环境（对应于例、例题、练习），自动编号，编号以章节为单位，其中 **exercise** 有提示符。
- 提示类环境，有 **note** 环境，特点是：无编号，有引导符。
- 结论类环境，有 **conclusion**、**assumption**、**property**、**remark**、**solution** 环境[5]，三者均以粗体的引导词为开头，和普通段落格式一致。

[5]本模板还添加了一个 result 选项，用于隐藏 `solution` 和 `proof` 环境，默认为显示（`result=answer`），隐藏使用 `result=noanswer`。

4.6.1 定理类环境的使用

由于本模板使用了 tcolorbox 宏包来定制定理类环境，所以和普通的定理环境的使用有些许区别，定理的使用方法如下：

```
\begin{theorem}{theorem name}{label}
  The content of theorem.
\end{theorem}
```

第一个必选项 theorem name 是定理的名字，第二个必选项 label 是交叉引用时所用到的标签，交叉引用的方法为 \ref{thm:label}。请注意，交叉引用时必须加上前缀 thm:。

在用户多次反馈下，4.x 之后，引入了原生定理的支持方式，也就是使用可选项方式：

```
\begin{theorem}[theorem name] \label{thm:theorem-label}
  The content of theorem.
\end{theorem}
% or
\begin{theorem} \label{thm:theorem-withou-name}
  The content of theorem without name.
\end{theorem}
```

其他相同用法的定理类环境有：

表 4.3: 定理类环境

环境名	标签名	前缀	交叉引用
definition	label	def	\ref{def:label}
theorem	label	thm	\ref{thm:label}
postulate	label	pos	\ref{pos:label}
axiom	label	axi	\ref{axi:label}
lemma	label	lem	\ref{lem:label}
corollary	label	cor	\ref{cor:label}
proposition	label	pro	\ref{pro:label}

4.6.2 修改计数器

当前定理等环境计数器按章计数，如果想修改定理类环境按节计数，可以修改计数器选项 thmcnt：

```
  \documentclass[section]{elegantbook} %or
  \documentclass[thmcnt=section]{elegantbook}
```

4.6.3 其他环境的使用

其他三种环境没有选项，可以直接使用，比如 example 环境的使用方法与效果：

```
\begin{example}
   This is the content of example environment.
\end{example}
```

这几个都是同一类环境，区别在于

- 示例环境（example）、练习（exercise）与例题（problem）章节自动编号；
- 注意（note），练习（exercise）环境有提醒引导符；
- 结论（conclusion）等环境都是普通段落环境，引导词加粗。

4.7 列表环境

本模板借助于 tikz 定制了 itemize 和 enumerate 环境，其中 itemize 环境修改了 3 层嵌套，而 enumerate 环境修改了 4 层嵌套（仅改变颜色）。示例如下

- first item of nesti;
- second item of nesti;
    - first item of nestii;
    - second item of nestii;
        - first item of nestiii;
        - second item of nestiii.

1. first item of nesti;
2. second item of nesti;
    (a). first item of nestii;
    (b). second item of nestii;
        I. first item of nestiii;
        II. second item of nestiii.

4.8 参考文献

文献部分，本模板调用了 biblatex 宏包，并提供了 biber（默认）和 bibtex 两个后端选项，可以使用 bibend 进行修改：

```
\documentclass[bibtex]{elegantbook}
\documentclass[bibend=bibtex]{elegantbook}
```

关于文献条目（bib item），你可以在谷歌学术，Mendeley，Endnote 中取，然后把它们添加到 reference.bib 中。在文中引用的时候，引用它们的键值（bib key）即可。

为了方便文献样式修改，模板引入了 bibstyle 和 citestyle 选项，默认均为数字格式（numeric），参考文献示例：[1–3] 使用了中国一个大型的 P2P 平台（人人贷）的数据来检验男性投资者和女性投资者在投资表现上是否有显著差异。

如果需要设置为国标 GB7714-2015，需要使用：

```
\documentclass[citestyle=gb7714-2015, bibstyle=gb7714-2015]{elegantbook}
```

如果需要添加排序方式，可以在导言区加入

```
\ExecuteBibliographyOptions{sorting=ynt}
```

启用国标之后，可以加入 sorting=gb7714-2015。

4.9 添加序章

如果你想在第一章前面添序章，不改变原本章节序号，可以在第一章内容前面使用

```
\chapter*{Introduction}
\markboth{Introduction}{Introduction}
The content of introduction.
```

4.10 目录选项与深度

本模板添加了一个目录选项 toc，可以设置目录为单栏（onecol）和双栏（twocol）显示，比如双栏显示可以使用

```
\documentclass[twocol]{elegantbook}
\documentclass[toc=twocol]{elegantbook}
```

默认本模板目录深度为 1，你可以在导言区使用

```
\setcounter{tocdepth}{2}
```

将其修改为 2 级目录（章与节）显示。

4.11 章节摘要

模板新增了一个章节摘要环境（introduction），使用示例

```
\begin{introduction}
  \item Definition of Theorem
  \item Ask for help
  \item Optimization Problem
  \item Property of Cauchy Series
  \item Angle of Corner
\end{introduction}
```

效果如下：

内容提要

- Definition of Theorem
- Ask for help
- Optimization Problem
- Property of Cauchy Series
- Angle of Corner

环境的标题文字可以通过这个环境的可选参数进行修改，修改方法为：

```
\begin{introduction}[Brief Introduction]
...
\end{introduction}
```

4.12 章后习题

前面我们介绍了例题和练习两个环境，这里我们再加一个，章后习题（`problemset`）环境，用于在每一章结尾，显示本章的练习。使用方法如下

```
\begin{problemset}
  \item exercise 1
  \item exercise 2
  \item exercise 3
\end{problemset}
```

效果如下：

第 4 章 练习

1. exercise 1
2. exercise 2
3. exercise 3

4. 测试数学公式
$$a^2 + b^2 = c_{2_i}(1,2)[1,23] \tag{4.1}$$

注 如果你想把 problemset 环境的标题改为其他文字，你可以类似于 introduction 环境修改 problemset 的可选参数。另外，目前这个环境会自动出现在目录中，但是不会出现在页眉页脚信息中（待解决）。

解 如果你想把 problemset 环境的标题改为其他文字，你可以类似于 introduction 环境修改 problemset 的可选参数。另外，目前这个环境会自动出现在目录中，但是不会出现在页眉页脚信息中（待解决）。

4.13 旁注

在 3.08 版本中，我们引入了旁注设置选项 marginpar=margintrue 以及测试命令 \elegantpar，但是由此带来一堆问题。我们决定在 3.09 版本中将其删除，并且，在旁注命令得到大幅度优化之前，不会将此命令再次引入书籍模板中。对此造成各位用户的不方便，非常抱歉！不过我们保留了 marginpar 这个选项，你可以使用 marginpar=margintrue 获得保留右侧旁注的版面设计。然后使用系统自带的 \marginpar 或者 marginnote 宏包的 \marginnote 命令。

注 在使用旁注的时候，需要注意的是，文本和公式可以直接在旁注中使用。

```
% text
\marginpar{margin paragraph text}

% equation
\marginpar{
  \begin{equation}
    a^2 + b^2 = c^2
  \end{equation}
}
```

但是浮动体（表格、图片）需要注意，不能用浮动体环境，需要使用直接插图命令或者表格命令环境。然后使用 \captionof 为其设置标题。为了得到居中的图表，可以使用 \centerline 命令或者 center 环境。更多详情请参考：Caption of Figure in Marginpar。

```
% graph with centerline command
\marginpar{
  \centerline{
    \includegraphics[width=0.2\textwidth]{logo.png}
  }
  \captionof{figure}{your figure caption}
}

% graph with center environment
\marginpar{
  \begin{center}
    \includegraphics[width=0.2\textwidth]{logo.png}
    \captionof{figure}{your figure caption}
  \end{center}
}
```

第 5 章 字体选项

字体选项独立成章的原因是，我们希望本模板的用户关心模板使用的字体，知晓自己使用的字体以及遇到字体相关的问题能更加便捷地找到答案。

重要提示：从 3.10 版本更新之后，沿用至今的 newtx 系列字体被重新更改为 cm 字体。并且新增中文字体（`chinesefont`）选项。

5.1 数学字体选项

本模板定义了一个数学字体选项（`math`），可选项有三个：

1. `math=cm`（默认），使用 LaTeX 默认数学字体（推荐，无需声明）；
2. `math=newtx`，使用 `newtxmath` 设置数学字体（潜在问题比较多）。
3. `math=mtpro2`，使用 `mtpro2` 宏包设置数学字体，要求用户已经成功安装此宏包。

5.2 使用 newtx 系列字体

如果需要使用原先版本的 `newtx` 系列字体，可以通过显示声明数学字体：

```
\documentclass[math=newtx]{elegantbook}
```

5.2.1 连字符

如果使用 `newtx` 系列字体宏包，需要注意下连字符的问题。

$$\int_{R^q} f(x,y)dy.\mathit{of\kern0pt f} \tag{5.1}$$

的代码为

```
\begin{equation}
  \int_{R^q} f(x,y) dy.\emph{of \kern0pt f}
\end{equation}
```

5.2.2 宏包冲突

另外在 3.08 版本中，有用户反馈模板在和 `yhmath` 以及 `esvect` 等宏包搭配使用的时候会出现报错：

```
LaTeX Error:
   Too many symbol fonts declared.
```

原因是在使用 `newtxmath` 宏包时，重新定义了数学字体用于大型操作符，达到了**最多 16 个数学字体**的上限，在调用其他宏包的时候，无法新增数学字体。为了减少调用非常用宏包，在此给出如何调用 `yhmath` 以及 `esvect` 宏包的方法。

请在 `elegantbook.cls` 内搜索 `yhmath` 或者 `esvect`，将你所需要的宏包加载语句取消注释即可。

```
%%% use yhmath pkg, uncomment following code
% \let\oldwidering\widering
% \let\widering\undefined
% \RequirePackage{yhmath}
```

```
% \let\widering\oldwidering

%%% use esvect pkg, uncomment following code
% \RequirePackage{esvect}
```

5.3 中文字体选项

模板从 3.10 版本提供中文字体选项 chinesefont，可选项有

1. ctexfont：默认选项，使用 ctex 宏包根据系统自行选择字体，可能存在字体缺失的问题，更多内容参考 ctex 宏包官方文档[1]。
2. founder：方正字体选项（**需要安装方正字体**），后台调用 ctex 宏包并且使用 fontset=none 选项，然后设置字体为方正四款免费字体，方正字体下载注意事项见后文，用户只需要安装方正字体即可使用该选项。
3. nofont：后台会调用 ctex 宏包并且使用 fontset=none 选项，不设定中文字体，用户可以自行设置中文字体，具体见后文。

5.3.1 方正字体选项

由于使用 ctex 宏包默认调用系统已有的字体，部分系统字体缺失严重，因此，用户希望能够使用其它字体，我们推荐使用方正字体。方正的方正书宋、**方正黑体**、方正楷体、方正仿宋四款字体均可免费试用，且可用于商业用途。用户可以自行从方正字体官网下载此四款字体，在下载的时候请**务必**注意选择 GBK 字符集，也可以使用 LaTeX 工作室提供的方正字体，提取码为：njy9 进行安装。安装时，Win 10 用户请右键选择为全部用户安装，否则会找不到字体。

5.3.2 其他中文字体

如果你想完全自定义字体[2]，你可以选择 chinesefont=nofont，然后在导言区设置

```
\setCJKmainfont[BoldFont={FZHei-B01},ItalicFont={FZKai-Z03}]{FZShuSong-Z01}
\setCJKsansfont[BoldFont={FZHei-B01}]{FZKai-Z03}
```

[1]可以使用命令提示符，输入 texdoc ctex 调出本地 ctex 宏包文档

[2]这里仍然以方正字体为例。

```
\setCJKmonofont[BoldFont={FZHei-B01}]{FZFangSong-Z02}
\setCJKfamilyfont{zhsong}{FZShuSong-Z01}
\setCJKfamilyfont{zhhei}{FZHei-B01}
\setCJKfamilyfont{zhkai}[BoldFont={FZHei-B01}]{FZKai-Z03}
\setCJKfamilyfont{zhfs}[BoldFont={FZHei-B01}]{FZFangSong-Z02}
\newcommand*{\songti}{\CJKfamily{zhsong}}
\newcommand*{\heiti}{\CJKfamily{zhhei}}
\newcommand*{\kaishu}{\CJKfamily{zhkai}}
\newcommand*{\fangsong}{\CJKfamily{zhfs}}
```

第 6 章 ElegantBook 写作示例

内容提要

6.1 Lebesgue 积分

在前面各章做了必要的准备后，本章开始介绍新的积分。在 Lebesgue 测度理论的基础上建立了 Lebesgue 积分，其被积函数和积分域更一般，可以对有界函数和无界函数统一处理。正是由于 Lebesgue 积分的这些特点，使得 Lebesgue 积分比 Riemann 积分具有在更一般条件下的极限定理和累次积分交换积分顺序的定理，这使得 Lebesgue 积分不仅在理论上更完善，而且在计算上更灵活有效。

Lebesgue 积分有几种不同的定义方式。我们将采用逐步定义非负简单函数，非负可测函数和一般可测函数积分的方式。

由于现代数学的许多分支如概率论、泛函分析、调和分析等常常用到一般空间上的测度与积分理论，在本章最后一节将介绍一般的测度空间上的积分。

6.1.1 积分的定义

我们将通过三个步骤定义可测函数的积分。首先定义非负简单函数的积分。以下设 E 是 $\mathcal{R}^n$ 中的可测集。

定义 6.1 (可积性)

设 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i}(x)$ 是 E 上的非负简单函数，中文其中 $\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$ 是 E 上的一个可测分割，$a_1,a_2,\ldots,a_k$ 是非负实数。定义 f 在 E 上的积分为 $\int_a^b f(x)$

$$\int_E f dx=\sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i)\pi\alpha\beta\sigma\gamma\nu\xi\epsilon\varepsilon.\oint_a^b\oint_a^b\prod_{i=1}^{n} \tag{6.1}$$

一般情况下 $0\le\int_E f dx\le\infty$。若 $\int_E f dx<\infty$，则称 f 在 E 上可积。♣

一个自然的问题是，Lebesgue 积分与我们所熟悉的 Riemann 积分有什么联系和区别？在 4.4 在我们将详细讨论 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系。这里只看一个简单的例子。设 $D(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数。即 $D(x)=\chi_{Q_0}(x)$，其中 Q_0 表示 $[0,1]$ 中的有理数的全体。根据非负简单函数积分的定义，$D(x)$ 在 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 积分为

$$\int_0^1 D(x)dx=\int_0^1\chi_{Q_0}(x)dx=m(Q_0)=0 \tag{6.2}$$

即 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 Lebesgue 可积的并且积分值为零。但 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积的。

有界变差函数是与单调函数有密切联系的一类函数。有界变差函数可以表示为两个单调递增函数之差。与单调函数一样，有界变差函数几乎处处可导。与单调函数不同，有界变差函数类对线性运算是封闭的，它们构成一线空间。练习题 6.1 是一个性质的证明。

练习 6.1 设 $f\notin\in L(\mathcal{R}^1)$，$g$ 是 $\mathcal{R}^1$ 上的有界可测函数。证明函数

$$I(t)=\int_{\mathcal{R}^1} f(x+t)g(x)dx\quad t\in\mathcal{R}^1 \tag{6.3}$$

是 $\mathcal{R}^1$ 上的连续函数。

解 即 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 Lebesgue 可积的并且积分值为零。但 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积的。

证明 即 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 Lebesgue 可积的并且积分值为零。但 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积的。

定理 6.1 (Fubini 定理)

(1) 若 $f(x,y)$ 是 $\mathcal{R}^p\times\mathcal{R}^q$ 上的非负可测函数，则对几乎处处的 $x\in\mathcal{R}^p$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数是 $\mathcal{R}^q$ 上的非负可测函数，$g(x)=\int_{\mathcal{R}^q}f(x,y)dy$ 是 $\mathcal{R}^p$ 上的非负可测函数。并且

$$\int_{\mathcal{R}^p\times\mathcal{R}^q}f(x,y)dxdy=\int_{\mathcal{R}^p}\left(\int_{\mathcal{R}^q}f(x,y)dy\right)dx. \tag{6.4}$$

(2) 若 $f(x,y)$ 是 $\mathcal{R}^p\times\mathcal{R}^q$ 上的可积函数，则对几乎处处的 $x\in\mathcal{R}^p$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数是 $\mathcal{R}^q$ 上的可积函数，并且 $g(x)=\int_{\mathcal{R}^q}f(x,y)dy$ 是 $\mathcal{R}^p$ 上的可积函数。而且 6.4 成立。

6.1

笔记 在本模板中，引理（lemma），推论（corollary）的样式和定理 6.1 的样式一致，包括颜色，仅仅只有计数器的设置不一样。

我们说一个实变或者复变量的实值或者复值函数是在区间上平方可积的，如果其绝对值的平方在该区间上的积分是有限的。所有在勒贝格积分意义下平方可积的可测函数构成一个希尔伯特空间，也就是所谓的 L^2 空间，几乎处处相等的函数归为同一等价类。形式上，L^2 是平方可积函数的空间和几乎处处为 0 的函数空间的商空间。

命题 6.1 (最优性原理)

如果 u^* 在 $[s,T]$ 上为最优解，则 u^* 在 $[s,T]$ 任意子区间都是最优解，假设区间为 $[t_0,t_1]$ 的最优解为 u^*，则 $u(t_0)=u^*(t_0)$，即初始条件必须还是在 u^* 上。

我们知道最小二乘法可以用来处理一组数据，可以从一组测定的数据中寻求变量之间的依赖关系，这种函数关系称为经验公式。本课题将介绍最小二乘法的精确定义及如何寻求点与点之间近似成线性关系时的经验公式。假定实验测得变量之间的 n 个数据，则在平面上，可以得到 n 个点，这种图形称为“散点图”，从图中可以粗略看出这些点大致散落在某直线近旁，我们认为其近似为一线性函数，下面介绍求解步骤。

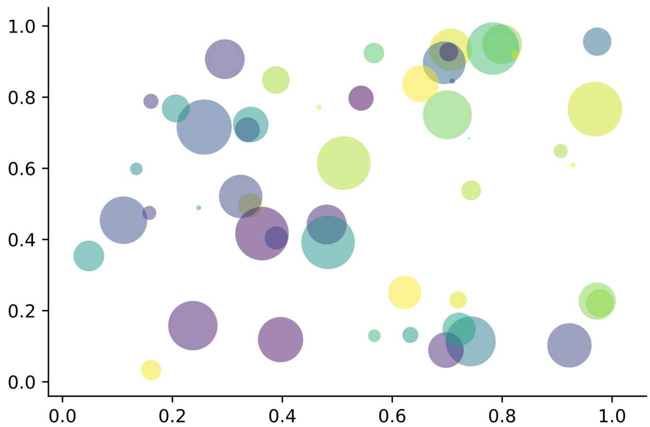

图 6.1: 散点图示例 $\hat{y}=a+bx$

以最简单的一元线性模型来解释最小二乘法。什么是一元线性模型呢？监督学习中，如果预测的变量是离散的，我们称其为分类（如决策树，支持向量机等），如果预测的变量是连续的，我们称其为回归。回归分析中，如果只包括一个自变量和一个因变量，且二者的关系可用一条直线近似表示，这种回归分析称为一元线性回归分析。如果回归分析中包括两个或两个以上的自变量，且因变量和自变量之间是线性关系，则称为多元线性回

归分析。对于二维空间线性是一条直线；对于三维空间线性是一个平面，对于多维空间线性是一个超平面。

性质 柯西列的性质

1. $\{x_k\}$ 是柯西列，则其子列 $\{x_k^i\}$ 也是柯西列。
2. $x_k \in \mathcal{R}^n$，$\rho(x,y)$ 是欧几里得空间，则柯西列收敛，$(\mathcal{R}^n,\rho)$ 空间是完备的。

结论 回归分析（regression analysis) 是确定两种或两种以上变量间相互依赖的定量关系的一种统计分析方法。运用十分广泛，回归分析按照涉及的变量的多少，分为一元回归和多元回归分析；按照因变量的多少，可分为简单回归分析和多重回归分析；按照自变量和因变量之间的关系类型，可分为线性回归分析和非线性回归分析。

第 6 章 练习

1. 设 A 为数域 K 上的 n 级矩阵。证明：如果 K^n 中任意非零列向量都是 A 的特征向量，则 A 一定是数量矩阵。
2. 证明：不为零矩阵的幂零矩阵不能对角化。
3. 设 $A=(a_{ij})$ 是数域 K 上的一个 n 级上三角矩阵，证明：如果 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，并且至少有一个 $a_{kl}\neq 0(k<l)$，则 A 一定不能对角化。

第 7 章 常见问题集

我们根据用户社区反馈整理了下面一些常见的问题，用户在遇到问题时，应当首先查阅本手册和本部分的常见的问题。

1. 有没有办法章节用“第一章，第一节，(一)”这种？
   见前文介绍，可以使用 `scheme=chinese` 设置。

2. 大佬，我想把正文字体改为亮色，背景色改为黑灰色。
   页面颜色可以使用 `\pagecolor` 命令设置，文本命令可以参考这里进行设置。

3. `Package ctex Error: CTeX fontset 'Mac' is unavailable.`
   在 Mac 系统下，中文编译请使用 XeLaTeX。

4. `! LaTeX Error: Unknown option 'scheme=plain' for package 'ctex'.`
   你用的 CTeX 套装吧？这个里面的 `ctex` 宏包已经是已经是 10 年前的了，与本模板使用的 `ctex` 宏集有很大区别。不建议 CTeX 套装了，请卸载并安装 TeX Live 2022。

5. 我该使用什么版本？
   请务必使用最新正式发行版，发行版间不定期可能会有更新（修复 bug 或者改进之类），如果你在使用过程中没有遇到问题，不需要每次更新最新版，但是在发行版更新之后，请尽可能使用最新版（发行版）！最新发行版可以在 GitHub 或者 TeX Live 2021 内获取。

6. 我该使用什么编辑器？
   你可以使用 TeX Live 2021 自带的编辑器 TeXworks 或者使用 TeXstudio，TeXworks 的自动补全，你可以参考我们的总结 TeXworks 自动补全。推荐使用 TeX Live 2021 + TeXstudio。我自已用 VS Code 和 Sublime Text，相关的配置说明，请参考 LaTeX 编译环境配置：Visual Studio Code 配置简介 和 Sublime Text 搭建 LaTeX 编写环境。

7. 您好，我们想用您的 ElegantBook 模板写一本书。关于机器学习的教材，希望获得您的授权，谢谢您的宝贵时间。
   模板的使用修改都是自由的，你们声明模板来源以及模板地址（GitHub 地址）即可，其他未尽事宜按照开源协议 LPPL-1.3c。做好之后，如果方便的话，可以给我们一个链接，我把你们的教材放在 ElegantLaTeX 用户作品集里。

8. 请问交叉引用是什么？
   本群和本模板适合有一定 LaTeX 基础的用户使用，新手请先学习 LaTeX 的基础，理解各种概念，否则你将寸步难行。

9. 代码高亮环境能用其他语言吗？
   可以的，ElegantBook 模板用的是 `listings` 宏包，你可以在环境（`lstlisting`）之后加上语言（比如 Python 使用 `language=Python` 选项），全局语言修改请使用 `lsset` 命令，更多信息请参考宏包文档。

10. 群主，什么时候出 Beamer 的模板（主题），ElegantSlide 或者 ElegantBeamer？
    由于 Beamer 中有一个很优秀的主题 Metropolis。后续确定不会再出任何主题/模板，请大家根据需要修改已有主题。

第 8 章 版本更新历史

根据用户的反馈，我们不断修正和完善模板。由于 3.00 之前版本与现在版本差异非常大，在此不列出 3.00 之前的更新内容。

2022/04/09 更新：版本 4.3 正式发布。

① 放弃 newtx 系列宏包的设置，改用 TeX Gyre Terms，并设置其他字体；
② 修改定理类环境内部字体设置，修复环境内部中文无法加粗问题；
③ 增加定理类环境的计数器选项 `thmcnt`，可选 `chapter` 和 `section`；
④ 增加 `bibend` 选项，可选 `bibend=biber`（默认）和 `bibend=bibtex`。

2022/03/08 更新：版本 4.2 正式发布。

① 对于 newtx 系列宏包更新导致的字体 bug 的修复；
② 修缮目录格式，为了达到这个目的，重新改写 `\chaptername` 的重定义语句；
③ 增加日语 `lang=jp` 设定。
④ 这个版本为一个临时性版本，在 TEXLive 2022 发布之后，将尽快发布 4.3 版本，由于对于中文的改动比较大，可能会出现预期之外的 bug，有问题可以在 QQ 群或者 Github 反馈。

2021/05/02 更新：版本 4.1 正式发布。

① **重要改动**：由原先的 BIBTEX 改为 biblatex 编译方式（后端为 `biber`），请注意两者之间的差异；
② **重要改进**：修改对于定理写法兼容方式，提高数学公式代码的兼容性；
③ 页面设置改动，默认页面更宽；方便书写和阅读；
④ 支持目录文字以及页码跳转；
⑤ 不再维护 pdfLATEX 中文支持方式，请务必使用 XELATEX 编译中文文稿。
⑥ 增加多个语言选项，法语 `lang=fr`、荷兰语 `lang=nl`、匈牙利语 `lang=hu`、西班牙语 `lang=es`、蒙古语 `lang=mn` 等。

2020/04/12 更新：版本 3.11 正式发布，此版本为 3.x 最后版本。

① **重要修正**：修复因为 gbt7714 宏包更新导致的 `natbib option clash` 错误；
② 由于 `pgfornament` 宏包未被 TEX Live 2020 收录，因此删除 base 相关的内容；
③ 修复部分环境的空格问题；
④ 增加了意大利语言选项 `lang=it`。

2020/02/10 更新：版本 3.10 正式发布

① 增加数学字体选项 `math`，可选项为 `newtx` 和 `cm`。
重要提示：原先通过 `newtxmath` 宏包设置的数学字体改为 LATEX 默认数学字体，如果需要保持原来的字体，需要显式声明数学字体（`math=newtx`）；
② 新增中文字体选项 `chinesefont`，可选项为 `ctexfont`、`founder` 和 `nofont`。
③ 将封面作者信息设置为可选，并且增加自定义信息命令 `\bioinfo`；
④ 在说明文档中增加版本历史，新增 `\datechange` 命令和 `change` 环境；
⑤ 增加汉化章节选项 `scheme`，可选项为汉化 `chinese`；
⑥ 由于 `\lvert` 问题已经修复，重新调整 `ctex` 宏包和 `amsmath` 宏包位置。
⑦ 修改页眉设置，去除了 `\lastpage` 以避免 page anchor 问题，加入 `\frontmatter`。
⑧ 修改参考文献选项 `cite`，可选项为数字 `numbers`、作者-年份 `authoryear` 以及上标 `super`。

⑨ 新增参考文献样式选项 bibstyle，并将英文模式下参考文献样式 apalike 设置为默认值，中文仍然使用 gbt7714 宏包设置。

2019/08/18 更新：版本 3.09 正式发布

① \elegantpar 存在 bug，删除 \elegantpar 命令，建议用户改用 \marginnote 和 \marginpar 旁注命令。
② 积分操作符统一更改为 esint 宏包设置；
③ 新增目录选项 toc，可选项为单栏 onecol 和双栏 twocol；
④ 手动增加参考文献选项 cite，可选项为上标形式 super；
⑤ 修正章节习题（problemset）环境。

2019/05/28 更新：版本 3.08 正式发布

① 修复 \part 命令。
② 引入 Note 模板中的 pad 选项 device=pad。
③ 数学字体加入 mtpro2 可选项 math=mtpro2，使用免费的 lite 子集。
④ 将参考文献默认显示方式 authoyear 改为 numbers。
⑤ 引入旁注命令 \marginpar（测试）。
⑥ 新增章节摘要环境 introduction。
⑦ 新增章节习题环境 problemset。
⑧ 将 \equote 重命名为 \extrainfo。
⑨ 完善说明文档，增加致谢部分。

2019/04/15 更新：版本 3.07 正式发布

① 删除中英文自定义字体总设置。
② 新增颜色主题，并将原绿色默认主题设置为蓝色 color=blue。
③ 引入隐藏装饰图案选项 base，可选项有显示 show 和隐藏 hide。
④ 新增定理模式 mode，可选项有简单模式 simple 和炫彩模式 fancy。
⑤ 新增隐藏证明、答案等环境的选项 result=noanswer。

2019/02/25 更新：版本 3.06 正式发布

① 删除水印。
② 新封面，新装饰图案。
③ 添加引言使用说明。
④ 修复双面 twoside。
⑤ 美化列表环境。
⑥ 增加 \subsubsection 的设置。
⑦ 将模板拆分成中英文语言模式。
⑧ 使用 lstlisting 添加代码高亮。
⑨ 增加定理类环境使用说明。

2019/01/22 更新：版本 3.05 正式发布

① 添加 xeCJK 宏包中文支持方案。
② 修复模板之前对 TikZ 单位的改动。
③ 更新 logo 图。

2019/01/15 更新：版本 3.04 正式发布

① 格式化模板代码。
② 增加 \equote 命令。
③ 修改 \date。

2019/01/08 更新：版本 3.03 正式发布
① 修复附录章节显示问题。
② 小幅优化封面代码。

2018/12/31 更新：版本 3.02 正式发布
① 修复名字系列命令自定义格式时出现的空格问题，比如 \listfigurename。
② 英文定理类名字改为中文名。
③ 英文结构名改为中文。

2018/12/16 更新：版本 3.01 正式发布
① 调整 ctex 宏包。
② 说明文档增加更新内容。

2018/12/06 更新：版本 3.00 正式发布
① 删除 mathpazo 数学字体选项。
② 添加邮箱命令 \mailto。
③ 修改英文字体为 newtx 系列，另外大型操作符号维持 cm 字体。
④ 中文字体改用 ctex 宏包自动设置。
⑤ 删除 xeCJK 字体设置，原因是不同系统字体不方便统一。
⑥ 定理换用 tcolobox 宏包定义，并基本维持原有的定理样式，优化显示效果，支持跨页；定理类名字重命名，如 etheorem 改为 theorem 等等。
⑦ 删去自定义的缩进命令 \Eindent。
⑧ 添加参考文献宏包 natbib。
⑨ 颜色名字重命名。

参考文献

[1] Charles T Carlstrom and Timothy S Fuerst. “Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis”. In: *The American Economic Review* (1997), pp. 893–910. ISSN: 0002-8282.

[2] 方军雄. “所有制、制度环境与信贷资金配置”. In: 经济研究 12 (2007), pp. 82–92. ISSN: 0577-9154.

[3] Qiang Li, Liwen Chen, and Yong Zeng. “The Mechanism and Effectiveness of Credit Scoring of P2P Lending Platform: Evidence from Renrendai.com”. In: *China Finance Review International* 8.3 (2018), pp. 256–274.

[4] 刘凤良, 章潇萌, and 于泽. “高投资、结构失衡与价格指数二元分化”. In: 金融研究 02 (2017), pp. 54–69. ISSN: 1002-7246.

[5] 吕捷 and 王高望. “CPI 与 PPI “背离” 的结构性解释”. In: 经济研究 50.04 (2015), pp. 136–149. ISSN: 0577-9154.

[6] Vincenzo Quadrini. “Financial Frictions in Macroeconomic Fluctuations”. In: *FRB Richmond Economic Quarterly* 97.3 (2011), pp. 209–254.

附录 A 基本数学工具

本附录包括了计量经济学中用到的一些基本数学，我们扼要论述了求和算子的各种性质，研究了线性和某些非线性方程的性质，并复习了比例和百分数。我们还介绍了一些在应用计量经济学中常见的特殊函数，包括二次函数和自然对数，前 4 节只要求基本的代数技巧，第 5 节则对微分学进行了简要回顾；虽然要理解本书的大部分内容，微积分并非必需，但在一些章末附录和第 3 篇某些高深专题中，我们还是用到了微积分。

A.1 求和算子与描述统计量

求和算子是用以表达多个数求和运算的一个缩略符号，它在统计学和计量经济学分析中扮演着重要作用。如果 $\{x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ 表示 n 个数的一个序列，那么我们就把这 n 个数的和写为：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{A.1}$$