预答辩稿

slide：1

各位老师、同学大家下午好,我是2021级硕士研究生刘洋,我的导师是冉茂华老师,我的论文题目是：“非线性分数阶薛定谔波动方程的两类保结构数值方法”.

slide：2-4

接下来我将从以下几个方面做简要汇报. 首先本课题主要考虑以下具有周期边界条件的非线性分数阶薛定谔波动方程 (NFSWEs) , 它是对经典整数阶薛定谔波动方程的推广. 后者在 Klein-Gordon 方程的非相对论极限、等离子体中的 Langmuir 波包络近似以及光弹 Sine-Gordon 模型的调制平面脉冲近等物理场景中具有广泛应用. 由于该方程中的分数阶拉普拉斯算子具有非局部性, 使其能更好地描述许多经典薛定谔波动方程无法描述的新现象. 然而, 这也给其数值求解带来了挑战.

slide：5

此外, 与其他许多基于物理场景的微分模型一样, 该方程也具有一些守恒性质. 在某些领域, 保留原始微分方程的某些不变性质的能力已成为评估数值模拟成功与否的标准 [19, 20]. 因此, 为非线性分数阶薛定谔波动方程构建有效的保结构数值方法就显得尤为重要.

slide：6-14

在过去的 10 年里, 许多学者都在关注这个话题. 2016年,Ran和Zhang首先构造了一种三层线性隐式差分格式,它很好地守恒了修正后的离散质量和能量. 随后, 产生了一系列的研究成果.

slide：15-16

尽管对于该方程数值算法的研究已有不少工作(换页), 但大多集中在一维情况下. 这些方法时间方向上的精度未超过二阶, 甚至是完全隐式的, 并且仅能保持修正后的物理不变量.

slide：17-18

鉴于此，本文旨在为二维非线性分数阶薛定谔波动方程构建高效的保结构数值方法.

首先, 针对该方程, 考虑到显式松弛龙格库塔方法仅对二次形式的能量有效, 本文通过标量辅助变量方法将其转化为一个等价系统, 使其四次形式的能量重新表述为三个二次项和的形式. 随后在时空方向上分别采用显式松弛龙格库塔方法和傅里叶拟谱方法对获得的等价系统进行离散. 构造出一类在时间方向上可达任意高阶的显式能量守恒数值方法. 此类方法易于推广到分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程等类似方程. 数值实验验证了该方法的长时间数值稳定性.

为了构造能够同时保持系统多个原始不变量的数值方法, 本文还基于分数阶拉普拉斯泛函变分原理推导出二维非线性分数阶薛定谔波动方程的哈密顿结构. 通过将分区平均向量场方法和傅里叶拟谱方法相结合, 得到了一个新的数值方法, 并与其他格式进行了数值比较. 结果表明, 本文提出的方法能更好地守恒多个原始不变量.

值得一提的是，本文均采用傅里叶拟谱法进行空间离散化.这是因为傅里叶拟谱法是非局部方法, 这与分数阶薛定谔方程中的分数阶拉普拉斯算子的非局部性质相契合. 且快速傅里叶变换的使用使编程更加简便, 可以大大减少计算量, 提高计算效率.

slide：19-57

下面是具体构建过程，首先是SAV-RRK方法，数值算例展示出了与理论分析一致的结果（包括收敛阶、守恒性等），此外我们还展示了二维分数阶波动方程以及分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程的数值结果以验证该方法的普适性.

slide：58-103

接下来是FPAVF-P方法.

最后, 分别从波的演化过程可以观察到, 阶数 α 将显著影响波的形状, 当 α 变大时, 波的形状变化更快. 特别地, 当 α → 2 时, 数值解收敛到整数阶非线性薛定谔波动方程 .

slide：104-106

综上所述，本文为非线性分数阶薛定谔波动方程构造了在时间方向上任意高阶以及能够同时保持原始能量和质量的数值方法。

slide：107-110

在本文的研究过程中, 发现还存在以下改进空间：

本文仅考虑了具有周期性边界条件的问题, 未来的研究可以将方法推广至适用于不同类型的边界条件.

本文主要关注守恒性的研究, 未来考虑对所提出的方法进行更深入的稳定性及收敛性分析.

本文仅构建了 FPAVF-P 的二阶数值格式, 未来的研究可以考虑构建更高阶的 FPAVF-P 格式.

slide：104-111

下面是演示文稿中涉及到的参考文献以及在校期间的科研成果.

slide：112

以上就是我此次答辩的全部内容,恳请各位专家批评指正！