分类号: O241.82 单位代码: 10636

密 级: 公开 学 号: 20210801068

四川師範大學

硕士学位论文

中文论文题目: 二维分数阶非线性 Schrödinger 波方程的数值方法与守恒性质研究

英文论文题目: Numerical Methods and Conservation Properties for the Two-Dimensional Fractional Nonlinear Schrödinger Wave Equation

论文作者: 刘洋

指导教师: 冉茂华

专业名称: 偏微分方程与数学物理

研究方向: 偏微分方程数值解

所在学院: 数学科学学院

论文提交日期: 2023 年 5 月 20 日

论文答辩日期: 2023 年 5 月 20 日

四川师范大学学位论文独创性声明

本人声明：所呈交学位论文 二维分数阶非线性 Schrödinger 波方程的数值方法与守恒性质研究 ，是本人在导师 冉茂华 指导下，独立进行研究工作所取得的成果. 除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果. 对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明. 本声明的法律结果由本人承担.

本人承诺：已提交的学位论文电子版与论文纸本的内容一致. 如因不符而引起的学术声誉上的损失由本人自负.

学位论文作者： 签字日期： 年 月 日

四川师范大学学位论文版权使用授权书

本人同意所撰写学位论文的使用授权遵照学校的管理规定：

学校作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者须授权所在大学拥有学位论文的部分使用权，即：1）已获学位的研究生必须按学校规定提交印刷版和电子版学位论文，可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库供检索；2）为教学、科研和学术交流目的，学校可以将公开的学位论文或解密后的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所或在有关网络上供阅读、浏览.

本人授权万方数据电子出版社将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》，并通过网络向社会公众提供信息服务. 同意按相关规定享受相关权益.

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名： 导师签名：

签字日期： 年 月 日 签字日期： 年 月 日

二维分数阶非线性 Schrödinger 波方程的数值方法与守恒性质研究

偏微分方程与数学物理专业

研究生: 刘洋　　指导教师: 冉茂华 副教授

摘要　本文研究了二维分数阶非线性 Schrödinger 波方程的数值方法和守恒性质. 这类方程在非线性光学、传播动力学、水波动力学等物理问题中有广泛的应用.

首先, 我们利用标量辅助变量（SAV）方法和显式松弛 Runge-Kutta 方法构造了一种高阶显式守恒格式. 我们引入一个标量变量得到一个等价系统, 并用傅里叶拟谱法在空间方向上离散化, 保证了半离散格式的二次守恒律. 接着, 我们对半离散系统应用四阶显式松弛 Runge-Kutta 方法, 从而得到了一个格式, 该格式可以精确地守恒离散能量, 提高了长时间计算的数值稳定性. 数值实验表明了我们的格式在长时间计算中的优越性, 并验证了理论分析的正确性.

接下来, 我们建立了一种结构保持的数值方法, 用于二维分数阶非线性 Schrödinger 波方程. 我们的主要贡献是所提出的数值方法不仅完全保持原始能量, 还完全保持原始质量. 我们首先利用分数阶 Laplacian 函数的变分原理, 建立了问题的哈密顿结构. 然后, 我们将分区平均向量场加方法和傅里叶拟谱法应用于哈密顿系统, 得到了一个全离散格式. 所得全离散格式在离散层面上证明了完全保持原始质量和能量. 为了比较, 我们列出了其他一些数值方法. 最后, 我们给出一些数值实验来支持我们的理论结果.

关键词:　分数阶非线性 Schrödinger 波方程　哈密顿系统　标量辅助变量方法　松弛 Runge-Kutta 方法　分区平均向量场方法　傅里叶拟谱法

Numerical Methods and Conservation Properties for the Two-Dimensional Fractional Nonlinear Schrödinger Wave Equation

Partial Differential Equations and Mathematical Physics Major

Master: Liu Yang Supervisor: Ran Maohua

Abstract This paper investigates numerical methods and conservation properties for the two-dimensional fractional nonlinear Schrödinger wave equation, which has widespread applications in physical problems such as nonlinear optics, propagation dynamics, and water wave dynamics.

First, we construct a high-order explicit conservative scheme using the scalar auxiliary variable (SAV) method and explicit relaxed Runge-Kutta method. We introduce a scalar variable to obtain an equivalent system and discretize in the spatial direction using the Fourier pseudospectral method, ensuring the second-order conservation law of the semi-discrete scheme. Then, we apply a fourth-order explicit relaxed Runge-Kutta method to the semi-discrete system, obtaining a scheme that accurately conserves discrete energy and improves the numerical stability of long-time computations. Numerical experiments demonstrate the superiority of our scheme in long-time computations and validate the correctness of theoretical analysis.

Next, we develop a structure-preserving numerical method for the two-dimensional fractional nonlinear Schrödinger wave equation. Our main contribution is that the proposed numerical method not only completely preserves the original energy but also completely preserves the original mass. We first establish the Hamiltonian structure of the problem using the variational principle of the fractional Laplacian function. Then, we apply the partitioned averaged vector field method and Fourier pseudospectral method to the Hamiltonian system, obtaining a fully discrete scheme. The resulting fully discrete scheme proves the complete preservation of the original mass and energy at the discrete level. To compare, we list some other numerical methods. Finally, we present some numerical experiments to support our theoretical results.

Keywords: Fractional Nonlinear Schrödinger Wave Equation　Hamiltonian System　Scalar Auxiliary Variable Method　Relaxation Runge-Kutta Metho　Partitioned Vector Field Method　Fourier Spectral Method

插图和附表清单

目录

1 二维分数阶非线性 Schrödinger 波方程的哈密顿结构和保结构算法

摘要

参考文献

[1] Bao, W., and Cai, Y. Uniform Error Estimates of Finite Difference Methods for the Nonlinear Schrödinger Equation with Wave Operator. Siam J Numer Anal (Mar. 2012).

[2] Brugnano, L., Zhang, C., and Li, D. A class of energy-conserving Hamiltonian boundary value methods for nonlinear Schrödinger equation with wave operator. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 60 (July 2018), 33–49.

[3] Caffarelli, L., and Silvestre, L. An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian. Comm. Partial Differential Equations 32, 8 (Aug. 2007), 1245–1260.

[4] Cheng, X., Qin, H., and Zhang, J. Convergence of an energy-conserving scheme for nonlinear space fractional Schrödinger equations with wave operator. J. Comput. Appl. Math. 400 (Jan. 2022), 113762.

[5] Cheng, X., and Wu, F. Several conservative compact schemes for a class of nonlinear Schrödinger equations with wave operator. Bound Value Probl 2018, 1 (Dec. 2018), 40.

[6] Colin, T., and Fabrie, P. Semidiscretization in time for nonlinear Schrödinger-waves equations. Discrete Cont Dyn-A 4, 4 (Tue Jun 30 20:00:00 EDT 1998), 671–690.

[7] Hairer, E., and Wanner, G. Runge–Kutta Methods, Explicit, Implicit. In Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics, B. Engquist, Ed. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2015, pp. 1282–1285.

[8] Hu, D., Cai, W., Gu, X.-M., and Wang, Y. Efficient energy preserving Galerkin–Legendre spectral methods for fractional nonlinear Schrödinger equation with wave operator. Appl. Numer. Math. 172 (Feb. 2022), 608–628.

[9] Ketcheson, D. I. Relaxation Runge–Kutta Methods: Conservation and Stability for Inner-Product Norms. Siam J Numer Anal 57, 6 (Jan. 2019), 2850–2870.

[10] Li, M., and Zhao, Y.-L. A fast energy conserving finite element method for the nonlinear fractional Schrödinger equation with wave operator. Appl. Math. Comput. 338 (Dec. 2018), 758–773.

[11] Ran, M., and Zhang, C. A linearly implicit conservative scheme for the fractional nonlinear Schrödinger equation with wave operator. Int. J. Comput. Math. 93, 7 (July 2016), 1103–1118.

[12] Ranocha, H., and Ketcheson, D. I. Relaxation Runge–Kutta Methods for Hamiltonian Problems. J Sci Comput 84, 1 (July 2020), 17.

[13] Ranocha, H., Lóczi, L., and Ketcheson, D. I. General relaxation methods for initial-value problems with application to multistep schemes. Numer Math 146, 4 (Dec. 2020), 875–906.

[14] Wang, P., and Huang, C. A conservative linearized difference scheme for the nonlinear fractional Schrödinger equation. Numer. Algorithms 69, 3 (July 2015), 625–641.

[15] Yang, X., and Ju, L. Efficient linear schemes with unconditional energy stability for the phase field elastic bending energy model. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 315 (Mar. 2017), 691–712.

[16] Yang, X., and Ju, L. Linear and unconditionally energy stable schemes for the binary fluid–surfactant phase field model. Comput Method Appl M 318 (May 2017), 1005–1029.

[17] Zhang, L., and Chang, Q. A conservative numerical scheme for a class of nonlinear Schrödinger equation with wave operator. Appl. Math. Comput. 145, 2 (Dec. 2003), 603–612.

[18] Zhang, X., Ran, M., Liu, Y., and Zhang, L. A high-order structure-preserving difference scheme for generalized fractional Schrödinger equation with wave operator. Math. Comput. Simulation 210 (Aug. 2023), 532–546.

致谢

值此毕业之际，我要向在我攻读硕士学位的三年中给予我帮助和支持的人们表示最真诚的感谢.

首先，我要衷心地感谢我的导师冉茂华教授，他是我在学术上的启蒙者和引路人. 硕士 3 年期间，我多次恍然大悟，常常感到过去自己的许多稚嫩之处，也因此更是心存感激，感激冉老师对我的教导和支持. 他为我提供了优良的研究条件和丰富的学术资源，让我能够接触到偏微分方程与数学物理领域的前沿知识和最新动态. 他给予了我无私的指导和悉心的关怀，不仅教授了我专业知识和研究方法，还培养了我的思维能力和创新意识. 他对我的论文提出了宝贵的修改意见和建议，使我的论文更加完善和规范.

其次，我要感谢我的师姐张溪、田智慧、曹晴，她们在学习上给予了我很多帮助和指导，在生活上给予了我很多关心和照顾. 她们用自己的经验和知识为我解答了许多困惑和难题，让我受益匪浅. 她们也是我的好朋友，我们一起分享快乐与悲伤，一起度过了难忘的时光.

再次，我要感谢我的同门杨丁、谭凤，他们是我的同道中人，我们一起参与课题研究、撰写论文、参加学术交流. 我们相互鼓励、相互支持、相互进步，在学术上形成了良好的合作关系，在友谊上形成了深厚的情感纽带.

我要感谢我的师妹张鹤赢、史心怡. 她们在研究和实验方面给予了我很多的新思路和实质性的协助. 她们年轻、充满活力和创新精神，也让我不断感受到新生代学者的力量和潜力.

在此之外，还有许多其他人值得我感激：数学系里其他教授同事、图书馆里工作人员等等. 正是因为有这么一群人在背后默默地支持着我、陪伴着我、鞭策着我、期待着我，才使得这篇论文能够顺利完成，并且才使得这段硕士生涯能够充满意义.

最后再次向所有关心过或者帮助过我的人表示衷心地感谢！

在校期间的科研成果

[1] Y. Liu, M. Ran, L. Zhang, Hamiltonian-preserving schemes for the two-dimensional fractional nonlinear Schrödinger wave equations, Comput. Math. Appl. 150 (2023) 54–69.

[2] Y. Liu, M. Ran, Arbitrarily high-order explicit energy-conserving methods for the generalized nonlinear fractional Schrödinger wave equations, Math. Comput. Simulation. 216 (2023) 126-144.

[3] Z. Tian, M. Ran, Y. Liu, Higher-order energy-preserving difference scheme for the fourth-order nonlinear strain wave equation, Comput. Math. Appl. 135 (2023) 124–133.

[4] X. Zhang, M. Ran, Y. Liu, L. Zhang, A high-order structure-preserving difference scheme for generalized fractional Schrödinger equation with wave operator, Math. Comput. Simulation. 210 (2023) 532–546.

[5] Z. Feng, M. Ran, Y. Liu, An efficient difference scheme for the non-Fickian time-fractional diffusion equations with variable coefficient, Appl. Math. Lett. 121 (2021) 107489.