分类号: O241.82

密级:公开

单位代码:10636

学号:20210801068

硕士学位论文

中文论文题目:非线性薛定谔波方程

的保结构算法

英文论文题目: Structure-Preserving Algorithms for the Nonlinear

Fractional Schrödinger Wave Equation

论文作者:刘洋

指导教师:冉茂华

专业名称:偏微分方程与数学物理

研究方向:偏微分方程数值解

所在学院:数学科学学院

论文提交日期:2024年5月20日论文答辩日期:2024年5月20日

四川师范大学学位论文独创性声明

本人声明:所呈交学位论文非线性分数阶薛定谔波方程的保结构算法,是本人在导师冉茂华指导下,独立进行研究工作所取得的成果.除文中已经注明引用的内容外,本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果.对本文的研究做出重要贡献的个人和集体,均已在文中以明确方式标明.本声明的法律结果由本人承担.

本人承诺:已提交的学位论文电子版与论文纸本的内容一致.如因不符而引起的学术声誉上的损失由本人自负.

学位论文作者:签字日期:年月日

四川师范大学学位论文版权使用授权书

本人同意所撰写学位论文的使用授权遵照学校的管理规定:

学校作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者须授权所在大学拥有学位论文的部分使用权,即:1)已获学位的研究生必须按学校规定提交印刷版和电子版学位论文,可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库供检索;2)为教学、科研和学术交流目的,学校可以将公开的学位论文或解密后的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所或在有关网络上供阅读、浏览.

本人授权万方数据电子出版社将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》,并通过网络向社会公众提供信息服务.同意按相关规定享受相关权益.

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名:

签字日期:年月日

导师签名:

签字日期:年月日

非线性分数阶薛定谔波方程的保结构算法

偏微分方程与数学物理专业

研究生:刘洋指导教师:冉茂华副教授

摘要:本文研究了二维非线性分数阶薛定谔波方程的数值方法和守恒性质.这类方程在非线性光学、传播动力学、水波动力学等物理问题中有广泛的应用.

首先,针对具有周期性边界条件的二维非线性分数阶薛定谔波方程,通过标量辅助变量方法将其转化为一个等效系统,其能量被重新表述为三个二次项和的形式.随后在时空方向上分别采用显式松弛龙格库塔方法和傅里叶拟谱方法对等效系统进行离散.构造出一个在时间方向可达任意高阶的显式保结构数值格式.数值实验验证了该格式在长时间仿真中的数值稳定性,且很容易推广到分数 Klein-Gordon-Schrödinger 方程等类似方程.

进一步的,为了能同时守恒更多的不变量,本文基于分数阶拉普拉斯泛函变分原理推导出了非线性分数阶薛定谔波方程的哈密顿结构.并将分区平均向量场方法和傅里叶拟谱方法应用于哈密顿系统,构造了一个能同时守恒原始能量和质量的数值格式.最后通过与其它方法进行数值比较,验证了本文所提出的方法具有更好的守恒性质.

关键词:非线性分数阶薛定谔波方程哈密顿系统标量辅助变量方法

松弛龙格库塔方法分区平均向量场方法傅里叶拟谱法

四川师范大学硕士学位论文

Structure-Preserving Algorithms for the Nonlinear Fractional

Schrödinger Wave Equation

Partial Differential Equations and Mathematical Physics Major

Master: Liu Yang Supervisor: Ran Maohua

Abstract This paper investigates numerical methods and conservation properties ofthe two-dimensional nonlinear fractional Schrödinger wave equation, which finds exten-sive applications in nonlinear optics, propagation dynamics, hydrodynamics, and relatedphysical phenomena.

Initially, for the two-dimensional nonlinear fractional Schrödinger wave equation withperiodic boundary conditions, a scalar auxiliary variable method is employed to trans-form it into an equivalent system, where the energy is reformulated as the sum of threequadratic terms. Subsequently, explicit structured numerical schemes are developed inboth temporal and spatial directions using the explicit relaxed Runge-Kutta method andFourier spectral method, respectively, resulting in an explicit structure-preserving numer-ical format attainable to arbitrary high-order accuracy in time. Numerical experimentsconfirm the numerical stability of this format in long-time simulations and its straight-forward extension to similar equations such as the fractional Klein-Gordon-Schrödingerequation.

Furthermore, to conserve additional invariants simultaneously, the Hamiltonianstructure of the nonlinear fractional Schrödinger wave equation is derived based on thefractional Laplacian functional variational principle. The method of fractional vectorfields and Fourier spectral method are applied to the Hamiltonian system, leading to anumerical scheme that conserves both the original energy and mass. Finally, numeri-cal comparisons with other methods validate the superior conservation properties of theproposed approach.

Keywords: Nonlinear Fractional Schrödinger Wave Equation Hamiltonian Sys-tem Scalar Auxiliary Variable Method Relaxation Runge-Kutta Metho Par-

titioned Vector Field Method Fourier Spectral Method

四川师范大学硕士学位论文

插图和附表清单

表3.1当 N =32,T =1时,例3.1在时间方向的误差和收敛阶................22

图3.1例3.1中一些松弛格式(RT)所对应的 maxm |γm −1|和 maxm |Sm(1)|...23

图3.2当 N =32,τ=0.01时,例3.1中不同的α对应的相对能量误差..........24

表3.2当 N =4, T =1时,例3.2在时间方向的误差和收敛阶.................25

图3.3例3.2中一些松弛格式(RT)所对应的 maxm |γm −1|和 maxm |Sm(1)|...25

图3.4当 N =4,τ=0.01时,例3.2中不同的α对应的相对能量误差...........26

表3.3当 N =4, T =1时,例3.3在时间方向的误差和收敛阶.................27

图3.5当 N =4,τ=0.01时,例3.3中不同的α对应的相对能量误差...........27

表3.4当 N =4, T =1时,例3.4在时间方向的误差和收敛阶.................28

图3.6当 N =4,τ=0.01时,例3.4中不同的α对应的相对能量误差...........29

图4.1当α=1.5时,例4.1中四种格式的收敛阶............................40

图4.2当α=2.0时,例4.1中四种格式的收敛阶............................41

图4.3在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散能量...........42

图4.4在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散质量...........43

表4.1在例4.1中,当α=2.0时,时刻 t = tn 的离散能量 Hn..................43

表4.2在例4.1中,当α=1.3时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn..................44

表4.3在例4.1中,当α=1.6时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn..................44

表4.4在例4.1中,当α=2.0时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn..................44

图4.5在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散质量相对误差...45

图4.6在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散能量相对误差...45

图4.7当α=1.5时,例4.2中四种格式的收敛阶............................46

图4.8当α=2.0时,例4.2中四种格式的收敛阶............................46

图4.9在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散质量............47

图4.10在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散能量...........47

四川师范大学硕士学位论文

图4.11在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散质量相对误差...48

图4.12在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散能量相对误差...48

表4.5在例4.2中,当α=2.0时,时刻 t = tn 的离散能量 Hn..................48

表4.6在例4.2中,当α=1.3时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn..................49

表4.7在例4.2中,当α=1.6时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn..................49

表4.8在例4.2中,当α=2.0时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn..................49

图4.13示例4.2中,α=1.3时的波传播图...................................50

图4.14示例4.2中,α=1.6时的波传播图...................................50

图4.15示例4.2中,α=1.99时的波传播图..................................51

图4.16示例4.2中,α=2.0时的波传播图...................................51

目录

摘要 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . I

ABSTRACT . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . III

插图和附表清单 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . V

1 绪论 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.1 研究意义 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.2 研究背景与发展现状 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.3 研究内容 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.4 论文安排 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

2 预备知识 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

2.1 分数阶微积分理论 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

2.2 傅里叶谱方法 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2.3 分区平均向量场方法 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

3.1 NFSWEs 的 SAV 格式构建 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

3.2 傅里叶拟谱离散格式 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

3.3 显式 SAV-RRK 保结构格式. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

3.4 显式 SAV-RRK 方法的精度. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

3.4.1 松弛因子的估计 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

3.4.2 显式 SAV-RRK 方法的截断误差. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

3.5 数值实例 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

3.6 小结 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

4.1 NFSWEs 的哈密顿格式构建 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

4.2 傅里叶拟谱离散格式 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

4.3 PAVF-P 保结构格式 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

4.3.1 PAVF-P 格式 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

4.3.2 离散守恒律 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

4.3.3 其他数值方法 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

4.4 数值算例 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

4.5 小结 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52

5 总结与展望 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

5.1 本文总结 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

5.2 研究展望 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

参考文献 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55

致谢 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

在校期间的科研成果 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

1绪论

1.1研究意义

分数阶微积分理论是研究任意阶微分和积分的理论,它是整数阶微积分理论的拓展.该理论起源于17世纪末,经过三个世纪的不懈努力,包括 Riemann-Liouville、Grüwald-

Letnikov、Caputo 和 Riesz 在内的多种分数阶微积分理论被形成,并在专著[50]中得到详细介绍.由于分数阶微积分的物理及几何解释存在挑战,因此该领域在很长一段时间内停留在纯数学理论层面.但近几十年来,随着多个学科领域的研究发现,分数阶微分方程的保记忆性可优美地描述复杂问题,其描述精度超过整数阶微分方程.目前,分数阶微分方程已成功地应用于物理学、化学、生物学、水文学、混沌理论、复杂粘弹性材料、系统控制、信号处理、经济学等领域的问题,详见[2-4,11,31,40,43,53,70,76].

非线性分数阶薛定谔波动方程(NFSWEs)可以被看作是经典整数阶薛定谔波动方程的推广,后者在 Klein-Gordon 方程的非相对论极限[42,54],等离子体中 Langmuir 波包络的近似[18],以及用于光子弹的正弦-戈登方程的调制平面脉冲近似[6,64]等物理应用中具有广泛应用,并且已经得到深入研究,例如见[5,16,73?]. NFSWEs 中的空间导数

采用了分数阶拉普拉斯算子(−∆)

α

2,α∈(0,2),而不再是经典薛定谔波动方程中的二阶(α=2)空间导数.由于分数阶拉普拉斯算子的非局部性质,NFSWEs 能很好地描述许多经典薛定谔波动方程不能描述的新现象.然而,分数阶拉普拉斯算子的非局部性质也给 NFSWEs 的解析求解带来了挑战.此外,与许多其他基于物理场景的微分模型一样,NFSWEs 也具有很多的守恒性质.在某些领域,保留原始微分方程的某些不变性质的能力已成为评估数值模拟成功与否的标准[38].因此,对 NFSWEs 解的精确、高效、保结构数值模拟就显得尤为重要.

1.2研究背景与发展现状

非线性薛定谔方程是非线性科学中普适性很强的一个基本方程,在很多物理分支有着广泛的应用.它也引起了学者们的广泛关注,基于有限差分法[37]、有限元法[34]、间断有限元法[74]、谱方法[26]的各类守恒型数值方法被不断提出.就有限差分方法而言, Bao等[5]建立了整数阶薛定谔波方程在有限差分方法下的一致误差估计,这里的误差界限适用于一般非线性的薛定谔波方程一维、二维和三维的情形. Wang 和 Zhang[62]针对一类薛定谔波方程初边值问题,给出了一些新的守恒有限差分格式.它们的优点是有一些离散的能量分别是守恒的.利用 Leray-Schauder 不动点定理证明了有限差分格式解的存在

性.在能量范数下证明了 O(h2+τ2)阶差分解的唯一性、稳定性和收敛性. Zhang 等[73]

四川师范大学硕士学位论文

研究了一类非线性整数阶薛定谔波方程的初界值问题,提出了一种显式而有效的有限差分格式.这是一个具有离散守恒律的四层格式,并证明了其收敛性和稳定性. Li 等[39]对非线性整数阶薛定谔波方程的周期初值问题,构造了一个紧凑有限差分格式.这是一个具有离散守恒定律的三层格式.用能量法证明了该模型在最大范数下 O(h4+τ2)阶的无条件稳定性和收敛性. Wang 等[61]给出了离散时间正交样条的配置格式,采用正交样条配置法结合有限差分法构造了这些格式.从理论上分析了这些方法的守恒性、收敛性和稳定性. Guo 等[29]采用局部不连续 Galerkin 方法对空间进行离散, Crank-Nicholson 格式对时间进行离散,建立起能量守恒的全离散格式.

随着分数阶微积分的发展,研究者开始重视分数阶模型的研究.例如,Wang 和 Xiao

[55]首先提出了一种 Crank-Nicolson 差分格式,该格式为耦合非线性分数阶薛定谔方程保留了离散质量,然后,他们进一步提出了一种线性隐式格式,该格式保留了修改后的离散质量和能量[56]. Ran 和 Zhang [46]提出了一种隐式差分格式和线性差分格式,分别为强耦合非线性分数阶薛定谔方程保留原始和修正的质量和能量. Wang 和 Huang

[58,59]推导出单三次分数阶薛定谔方程的能量和质量守恒 Crank-Nicolson 差分格式和线性差分格式. Wang 等[63]提出了一种用于二维非线性空间分数阶薛定谔方程的分步谱Galerkin 方法,该方法仅保留离散质量.

由于 NFSWEs 的非局部性和非线性,使其与经典的非线性薛定谔方程相比,理论和数值方法的研究相对较少,可参考的文献也比较有限.针对模型 NFSWEs,Ran 和 Zhang

[47]首先开发了一种三层线性隐式差分格式,它很好地保留了修改后的离散质量和能量.Li 和 Zhao [37]考虑将 Crank-Nicolson 方法与 Galerkin 有限元方法相结合的守恒策略,并设计了具有合适循环预调节器的快速 Krylov 子空间求解器以节省计算成本. Cheng和 Qin [17]开发了一种基于 SAV 方法的线性隐式守恒数值格式,该格式仅保留修改后的能量,而不保留质量. Hu 等[32]分别在时间上应用 Crank-Nicolson、SAV 和 ESAV 方法,提出了三种能量守恒的谱 Galerkin 方法. Zhang 和 Ran [75]提出并分析了基于三角SAV(T-SAV)方法的更高阶能量守恒差分格式.

尽管对于 NFSWEs 数值算法的研究已有不少工作,但大多数方法仅关注一维情况,在时间方向的精度没有高于二阶,并且/或者是完全隐式的.此外,目前提出这些算法只能保修正后的能量和(或)质量守恒.这意味着仍然存在许多开放问题,对于未来的研究,特别是在高维情况下,需要高效、准确、显式的数值方法,以及能够同时保持原始能量和质量的数值方法.

1.3研究内容

基于以上研究的空白,本篇论文主要从以下两个方面给出了数值求解 NFSWEs 的研究成果.

一方面,注意到在具有高阶精度的各种数值方法中,显式龙格库塔(RK)方法是很好的选择,因为它们属于单步方法,具有高阶精度和易于实现的特点.然而,标准 RK 方法并不一定保持系统的期望物理特性.为了解决这个问题,Ketcheson [35]提出了松弛龙格库塔(RRK)方法,该方法保证相对于任何内积范数的守恒或稳定性.随后,RRK 技术在[48]中扩展到一般的凸量上.因此,通过在每一步中添加一个乘以龙格库塔更新的松弛参数,可以强制执行相对于任何凸泛函的守恒、耗散或其他属性.这些优势的代价是必须求解一个非线性代数系统来确定松弛参数.然而,对于非二次不变量的情况,作者们并未考虑构建显式的守恒格式.幸运的是,不变能量二次化(IEQ)方法[67,68]和 SAV方法[17]可以通过变量变换将非二次能量转化为新变量的二次形式,而由此产生的新等效系统仍然保留了关于新变量的类似能量定律. IEQ 方法和 SAV 方法已被广泛应用于梯度流模型.例如,具有熔体对流[12]的树状凝固相场模型,具有一般非线性势的梯度流动方程[69],外延薄膜生长模型[15],使用 SAV [27]的任意高阶无条件能量稳定格式.有关IEQ 和 SAV 的更多细节、扩展和改进,建议感兴趣的读者参考[14,41,51,78].受到这些发展的启发,本文通过结合 SAV 方法和显式 RRK 方法,为一维和二维 NFSWEs 开发了一种任意高阶的显式保结构数值格式.

另一方面,注意到平均向量场(AVF)方法可以保持哈密顿系统的能量[8,45].此外,最近提出的分区平均向量场(PAVF)方法不仅可以保持传统能量,还可以保持更多的守恒性质,并且已被用于构造哈密顿常微分方程的守恒数值格式,参见[10].这些研究基础使有可能实现的目标,而对 NFSWEs 的哈密顿结构的推导是构建保结构方法的成功关键.据所知,目前很少有关注分数微分方程的哈密顿结构的研究.最近,王和黄[60]提出了带有分数拉普拉斯的泛函的变分导数,并将一维分数非线性薛定谔方程重新表述为一个哈密顿系统.傅和蔡[24]推导了二维分数 Klein-Gordon-Schrödinger 方程的哈密顿形式,并随后发展了守恒数值格式.基于此,首先推导了具有周期边界条件的二维NFSWEs 的哈密顿形式,然后通过分区平均向量场加法(PAVF-P)方法,成功构建了能够同时守恒原始能量和质量的数值格式.

谱方法是非局部方法,这与分数阶薛定谔方程中的分数阶拉普拉斯算子的非局部性质相契合.傅里叶基函数是周期边界条件下的拉普拉斯算子的特征函数,且快速傅里叶变换(FFT)的使用使编程更加简便,可以大大减少计算量,提高计算效率.因此,本文空间离散均选用傅里叶拟谱方法.

1.4论文安排

本文结构安排如下:

第2章主要有3节.分别介绍了分数阶微积分、傅里叶谱方法以及分区平均向量场方法.

四川师范大学硕士学位论文

第3章主要分6节.在第3.1节中,通过引入一个标量辅助变量,将 NFSWEs (3.1)重新表述为一个等效系统.第3.2节通过对等效系统应用傅里叶拟谱逼近,得到一个半离散的守恒系统.在第3.3节,通过在时间方向上应用松弛龙格库塔方法,构造了对等效系统的显式全离散格式,.在第3.4节中,进一步估计引入的松弛系数得到松弛方法的精度.第3.5节通过数值算例验证了所提出格式的精度和守恒特性.并在第3.6节中进行了简要总结.

第4章主要分4节.在第4.1节,首先推导了带有周期边界条件的二维分数非线性薛定谔波方程(3.1)-(3.2)的哈密顿结构,接着在4.2节中通过使用傅里叶拟谱方法在空间方向进行半离散.在第4.3节,通过使用 PAVF-P 方法对前述空间半离散系统进行离散化,得到能够同时守恒原始能量和质量的数值格式,并证明了离散守恒定律.在第4.4节,通过丰富的数值算例进一步验证了理论结果.第4.5节简要总结了一些结论.第5章为总结与展望.

2预备知识

在引入本文主要内容之前,本章首先介绍了分数阶微积分、傅里叶谱方法以及分区平均向量场方法.

2.1分数阶微积分理论

分数阶微积分理论是研究任意阶微分和积分的理论,它是整数阶微积分理论的拓展.该理论起源于17世纪末,经过三个世纪的不懈努力,包括 Riemann-Liouville、Grüwald-

Letnikov、Caputo 和 Riesz 在内的多种分数阶微积分理论被形成,并在专著[50]中得到详细介绍.由于分数阶微积分的物理及几何解释存在挑战,因此该领域在很长一段时间内停留在纯数学理论层面.但近几十年来,随着多个学科领域的研究发现,分数阶微分方程的保记忆性可优美地描述复杂问题,其描述精度超过整数阶微分方程.目前,分数阶微分方程已成功地应用于物理学、化学、生物学、水文学、混沌理论、复杂粘弹性材料、系统控制、信号处理、经济学等领域的问题,详见[2-4,11,31,40,43,53,70,76].本章主要介绍非线性分数阶薛定谔波动方程(NFSWEs)方程的研究意义、研究背景和发展现状,以及本文的实际研究内容.

分数阶微分方程的解析解通常包含一些特殊函数,如 Mittag-Leffler 函数、Fox 函数和 Wright 函数等,这些函数由无穷级数定义,因此数值计算相当困难.对于某些非线性微分方程,解析解更是难以获得.因此,构造数值方法以求解分数阶微分方程具有重要的理论意义和实用价值.然而,到目前为止,关于分数阶微分方程的数值计算仍存在大量挑战性难题,例如长时间历程的计算和大空间区域的计算等.同时,研究算法大部分集中于有限差分方法和有限元法.因此,如何快速、准确地数值求解分数阶微分方程并进一步完善数值方法仍是一个紧迫而重要的研究课题.

其中,在对空间分数阶方程进行数值求解时,如何有效逼近分数阶拉普拉斯算子是最为关键的一步.在过去的几十年,众多数学家针对一问题进行了深入的研究,其中,最为有效的途径是利用分数阶拉普拉斯算子与 Riesz 导数在齐次 Dirichlet 边界条件下的

等价性关系[19,66],即

−(−∆)α/2u(x)=

∂α

∂|x|α

u(x):=−1

2 cos απ

(

−∞D

α

xu(x)+ xD

α

+∞u(x)

)

,(2.1)

其中−∞D

α

xu(x)为左 Riemann-Liouville 分数阶导数

d2

∫ x

u(ξ)

dξ,(2.2)

四川师范大学硕士学位论文

xD

α

+∞u(x)为右 Riemann-Liouville 分数阶导数

xD

α

+∞u(x)=

Γ(2−α)

d2

dx2

∫−∞

x

u(ξ)

(ξ− x)α−1

dξ.(2.3)

注意到, Riesz 分数阶导数可看作左右 Riemann-Liouville 分数阶导数的线性组合.基于上述等价关系,对于分数阶拉普拉斯或 Riemann-Liouville 分数阶导数的数值逼近已存在很多数值方法,如有限元方法[20,23],间断 Galerkin 方法[65],谱方法[71,72],有限差分方法[13,44]等.此外,对于 Riesz 导数的一个直接离散方法是分数阶中心差分方法,该方

法由[22]首次提出,随后,基于带权平均思想,更高阶 Riesz 导数逼近被提出[21,77].同时,

分数阶拉普拉斯算子有下列奇异积分形式的等价性[22]

(−∆)α/2u(x)= Cα

∫+∞

−∞

u(x)− u(y)

|x− y|1+α

dy (2.4)

其中常数 Cα=

α2α−1Γ(α+1

2)

π1/2Γ(−α

2)

.基于上述等价性,许多学者也给出了很多数值方法[25,33].在

周期边界下,分数阶拉普拉斯算子定义为[1]

(−∆)α/2u(x)=

∑

k∈Z

|µk|αûkeiµkx (2.5)

其中, x ∈ T, ûk 表示傅里叶系数,即

u =

∑

k∈Z

ûke

iµkx, ûk =

L

∫

T

u(x)e−iµkxdx (2.6)

这里,µ=2π/L,T = R/LZ 表示长度为 L 的一维环面.

2.2傅里叶谱方法

对于在(−∞,∞)有定义且绝对可积、并在任一有限区间上满足狄利克莱条件的函数 u(x),傅里叶变换(Fourier transform)及其逆变换(inverse Fourier transform)定义

为:

û(k)=

∫∞

−∞

u(x)e−ikx dx (2.7)

u(x)=

2π

∫∞

−∞

û(k)eikx dk (2.8)

上述定义式给出了一个傅里叶变换对(Fourier transform pair),本专栏中将它们

记为 û(k)= F [u(x)]和 u(x)= F−1[û(k)].实际上,傅里叶变换对的定义并不是唯一的,两个定义式中的系数可以随意修改,只要它们的积为1/2π即可.此外,定义式中的 e−ikx和 eikx(称为积分变换的核)也可以互换.容易知道,u(x)先后经过傅里叶变换及其逆变换仍将得到它本身,即:u(x)= F−1{F [u(x)]}.

通常来讲,若不对"傅里叶变换"加任何限定,那么它指的就是连续傅里叶变换,也就是针对定义在无限区间内的连续函数 u(x)的傅里叶变换,这是在理想条件下的数学定义.在实际应用中,尤其是计算机的信号采样、信号处理当中,信号是离散的、有限的,离散傅里叶变换(discrete Fourier transform)就是针对这一情况提出的.在 Matlab 中,对

于序列 u1,..., uj,..., uN 的离散傅里叶变换及逆变换定义为:

ûk =

N∑

j=1

uje

−2π(j−1)(k−1)i

N , k =1,..., N (2.9)

uj =

N

N∑

k=1

ûke

2π(j−1)(k−1)i

N , j =1,..., N (2.10)

同样,上述定义中的归一化系数也可以有其他选择,但它们的乘积必须为1/N .如果将序列 u1,..., uj,..., uN 看作等间隔空间(时间)点上的信号幅度值,那么经过离散傅里叶变换得到的序列 û1,..., ûk,..., ûN 就是其相应的频谱信息.通过定义式(2.9)和

(2.10)容易得到 ûk = ûk+N 和 uj = uj+N ,这就是说,离散傅里叶变换已经隐含了周期性边界条件.

对于 F [u′(x)],由傅里叶变换的定义和分部积分法,得到:

F [u′(x)]=

∫∞

−∞

u′(x)e−ikx dx = u(x)e−ikx∣∣∞

−∞−

∫∞

−∞

u(x)(−ik)e−ikx dx (2.11)

当| x |→∞时, u(x)→0,则:

F [u′(x)]= ik

∫∞

−∞

u(x)e−ikx dx = ikF [u(x)](2.12)

类似地,可以得到:

F

[

u(n)(x)

]

=(ik)nF [u(x)](2●13)其中 u(n)(x)代表 u(x)的 n 阶导数.上式的意义在于:函数的求导运算在傅里叶变换的作用下,可转化为相对简单的代数运算,即: u(n)(x)= F−1{(ik)nF [u(x)]}.正是基于此原理,傅里叶谱方法(Fourier spectral method)利用傅里叶变换将偏微分方程中空域(space domain)或时域(time domain)上的求导运算简化为频域(spectral domain)上的代数运算,求解后再通过傅里叶逆变换得到空域或时域上的结果.在代码层面上, Matlab提供的快速傅里叶变换函数 fft、逆变换函数 ifft 以及强大的矩阵运算能力也为简洁、优雅地实现傅里叶谱方法奠定了基础.

2.3分区平均向量场方法

考虑以下哈密顿系统

= f(w)= Sk∇H(w), w(0)= w0,(2.14)

四川师范大学硕士学位论文

其中 w ∈ Rk,Sk 是一个 k × k 的反对称矩阵,k 是偶数,哈密顿量 H(w)被假定具有足够

的可微性.二阶 AVF 方法对于系统(2.14)定义为

wm+1− wm

τ

=

∫1

f

(

εwm+1+(1−ε)wm

)

dε

= Sk

∫1

∇H

(

εwm+1+(1−ε)wm

)

dε

(2.15)

其中τ是时间步长.令 k =2d,w =(w1, w2,, wd;wd+1, wd+2,, wk)

T =(y, z)T ,则原

始问题(2.14)的等价系统如下(

ẏ

ż

)

= S2d

(

Hy(y, z)

Hz(y, z)

)

, y, z ∈ Rd,(2.16)

其中 S2d 是一个辛矩阵,而且哈密顿量 H(y, z)在任何连续流上仍然保持不变.

AVF 方法得到的数值格式只能保原始哈密顿量守恒.为了能保额外的不变量守恒,

为哈密顿系统(2.16)开发了 PAVF 方法,即

τ

(

ym+1− yn

zm+1− zn

)

= S2d

(∫1

Hy (εy

m+1+(1−ε)ym, zm) dε∫1

Hz (y

m+1,εzm+1+(1−ε)zm) dε

)

.(2.17)

容易证明 PAVF 方法能够在保持系统(2.14)的哈密顿量守恒的同时,额外保持某些系统的其他不变量守恒.

注意到 PAVF 方法(2.17)仅具有一阶精度[10].为了提高精度并继续保持哈密顿量守恒,将 PAVF 方法与其伴随方法相结合,得到 PAVF 组合(PAVF-C)方法和 PAVF

加(PAVF-P)方法.设上述 PAVF 方法(2.17)为Φτ,其伴随方法Φ∗

τ定义如下

τ

(

ym+1− ym

zm+1− zm

)

= S2d

(∫1

Hy (εy

m+1+(1−ε)ym, zm+1) dε∫1

Hz (y

m,εzm+1+(1−ε)zm) dε

)

(2.18)

然后,PAVF 组合(PAVF-C)方法定义为

Υτ:=Φ∗

τ

◦Φτ

,(2.19)

而 PAVF 加(PAVF-P)方法定义为

Υ̂τ:=

(

Φ∗

τ

+Φτ

)

(2.20)

可以验证,PAVF-C 以及 PAVF-P 方法均能保持原始哈密顿量守恒,并且具有二阶精度[10].

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

本文主要考虑周期边界的空间非线性分数阶薛定谔波方程(NFSWEs)的初边值问

题

utt +(−∆)α/2u+ iκut +β|u|2u =0, x ∈Ω, t ∈(0, T ],(3.1)

u(x,0)= u0(x), ut(x,0)= u1(x), x ∈Ω,(3.2)

u(x+L, t)= u(x, t), t ∈[0, T ],(3.3)

其中,i =

√

−1,1<α≤2,κ,β(>0)为两个实常数,u(x, t)是未知的复值函数,u0(x)和

u1(x)为已知的光滑函数,x ∈Ω⊂Rd (d=1,2),L 是周期.分数阶拉普拉斯算子可以通过

傅里叶变换表示为:

(−∆)

α

2 u(x, t)= F−1[|ξ|αF(u(ξ, t))],(3.4)其中,F 和 F−1分别表示傅里叶变换及其逆变换[9].NFSWEs (3.1)可以被看作是经典薛定谔波方程的推广,后者在等离子体中的 Langmuir 波包络近似等物理应用中具有广泛应用[18],并且已经得到深入研究[5,7,16,73].

设 Lp(Ω)为定义在Ω上的可测复函数的空间.定义内积和范数如下:

(u, v)=

∫

Ω

uv̄ dx,∥u∥Lp =

(∫

Ω

|u|pdx

)1

p

,1≤ p <∞,(3.5)

其中 v̄表示 v 的复共轭.与许多其他基于物理场景的微分模型一样,所研究的具有周期

性边界条件的初边值问题(3.1)-(3.3)具有如下两条守恒定律[5,47]

质量守恒:

G(t)=κ∥u(, t)∥2+2 Im (ut, u)= G(0),0≤ t ≤ T,(3.6)

能量守恒:

E(t)=∥ut(, t)∥2+

∥∥(−∆)

α

4 u(, t)

∥∥2+β

∥u(, t)∥4L4= E(0),0≤ t ≤ T,(3.7)

证明.将方程(3.1)与 u 求内积,并取虚部,有

Im (utt, u)+ Im

(

(−∆)α/2u, u

)

+ Im (iκut, u)+ Im

(

β|u|2u, u

)

=0.(3.8)

不难验证

Im (utt, u)=

d

dt Im (ut, u), Im (iut, u)=

d

dt∥u(, t)∥

L2.(3.9)

四川师范大学硕士学位论文

将方程(3.9)代入方程(3.8)得到

κ

d

dt∥u(, t)∥

L2+2

d

dt Im (ut, u)=0,(3.10)

其中使用了 Im

(

(−∆)α/2u, u

)

=0,详见[28]第3.1引理的证明.

类似地,将方程(3.1)与 ut 求内积,并取实部,得到

Re (utt, ut)+ Re

(

(−∆)α/2u, ut

)

+ Re (iκut, ut)+ Re

(

β|u|2u, ut

)

=0.(3.11)

容易验证

Re (utt, ut)=

d

dt ∥ut(, t)∥

L2,Re

(

|u|2u, ut

)

=

d

dt∥u(, t)∥

L4.(3.12)

此外,有

Re

(

(−∆)α/2u, ut

)

=

d

dt

∥∥(−∆)α/4u(, t)

∥∥2

L2,(3.13)

参见[28]第3.2引理的证明.将方程(3.12)和(3.13)代入方程(3.11)得到

d

dt ∥ut(, t)∥

L2+

d

dt

∥∥(−∆)α/4u(, t)

∥∥2

L2+

β

d

dt∥u(, t)∥

L4=0.(3.14)

其与方程(3.10)分别意味着质量守恒(3.6)和能量守恒(3.7).□

据所知,尽管对于 NFSWEs 的保结构数值算法的研究已有不少工作,但大多数方法仅关注一维情况,在时间方向的精度没有高于二阶,并且(或者)是完全隐式的.这意味着仍然存在许多开放问题,对于未来的研究,特别是在高维情况下,需要高效、准确、显式的保结构数值方法.

注意到在具有高阶精度的各种数值方法中,显式 Runge-Kutta(RK)方法是很好的选择,因为它们属于单步方法,具有高阶精度和易于实现的特点.然而,标准 RK 方法并不一定能保持系统原有的物理特性.为了解决这个问题,Ketcheson [35]提出了松弛Runge-Kutta(RRK)方法,该方法能够保证任何内积范数的守恒或稳定性.随后,RRK技术[48]扩展到一般的凸量上.它们都是通过在 Runge-Kutta 更新的每一步中添加一个松弛因子,可以强制满足任何凸泛函的守恒、耗散或其他属性.这些优势的代价是必须求解一个非线性代数系统来确定松弛因子.然而,对于非二次不变量的情况,作者们并未考虑构建显式的守恒方案.幸运的是,不变能量二次化(IEQ)方法[67,68]和 SAV 方法

[17]可以通过变量变换将非二次能量转化为新变量的二次形式,而由此产生的新等效系统仍然保留了关于新变量的类似能量守恒定律. IEQ 方法和 SAV 方法已被广泛应用于梯度流模型.例如,具有熔体对流[12]的树状凝固相场模型,具有一般非线性势的梯度流动方程[69],外延薄膜生长模型[15],使用 SAV 的任意高阶无条件能量稳定格式[27].有关IEQ 和 SAV 的更多细节、扩展和改进,建议感兴趣的读者参考[14,41,51,78].受到这些发展的启发,本章通过结合 SAV 方法和显式 RRK 方法,为一维和二维 NFSWEs 开发了一种任意高阶的显式保结构数值格式.

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

3.1 NFSWEs 的 SAV 格式构建

众所周知,所有的 RK 方法都可以保持任意线性不变量守恒,而只有辛 RK 方法能够保持任意二次不变量守恒.然而,没有 RK 方法可以保持高于二次的任意多项式不变量或非多项式非线性不变量.为了克服这一限制并利用松弛 RK 方法保持二次不变量的特性,首先采用了新开发的 SAV 方法将 NFSWEs 的高次能量泛函重写为二次形式.它能将 NFSWEs (3.1)以二次能量泛函的等效形式重新表述.

为了保证能量的正性,通过在β

∥u(, t)∥4L4中添加一个正常数 C0来修改(3.7)中的能量.这种修改对于(3.7)中系统的能量不变性没有实质性影响.因此,将继续使用 E(t)

表示修改后的能量,即

E(t)

def

=∥ut(, t)∥2+

∥∥(−∆)

α

4 u(, t)

∥∥2+β

∥u(, t)∥4L4+ C0.(3.15)

在此基础上,考虑引入一个标量辅助变量

w(t)

def

=

√

H(t)+ C0,(3.16)

这里 H(t)

def

=β

∥u(, t)∥4L4.直接计算得到

wt =

√

H(t)+ C0

dH(t)

dt

=

√

H(t)+ C0

d

dt

∫

Ω

β

|u|4dx

=

β√

H(t)+ C0

∫

Ω

|u|2ℜ(uūt) dx

=ℜ

∫

Ω

β|u|2uūt√

H(t)+ C0

dx

=ℜ(b(u), ut),(3.17)

其中

b(u)

def

=βg(|u|2)u/

√

H(t)+ C0,(3.18)

ℜ表示实部,(,)表示Ω上的 L2内积.因此,NFSWEs (3.1)-(3.3)可以等效地重新表述

为

ut = v,(3.19)

vt =−(−∆)α/2u− iκv − b(u)w,(3.20)

wt =ℜ(b(u), ut),(3.21)

四川师范大学硕士学位论文

初始条件为

u(x,0)= u0(x), v(x,0)= u1(x), w(0)=

√

β

∥u0∥4L4+ C0.(3.22)

将系统(3.19)-(3.20)分别与 vt 和 ut 做内积,(3.21)乘以 w(t),然后将得到的方程相加,并最终在时间区间[0, t]上进行实部积分,可以立即得到重构后的修正能量守恒定律

E(t)=∥v(, t)∥2+

∥∥(−∆)

α

4 u(, t)

∥∥2+ w2(t)= E(0),(3.23)

这与 NFSWEs (3.1)-(3.3)的原始能量守恒定律(3.7)本质上是一致的.

3.2傅里叶拟谱离散格式

不失一般性,假设空间维度为2(即 d =2).傅里叶拟谱法是解决偏微分方程的一种成熟技术,它是非局部方法,这与分数阶薛定谔方程中的分数阶拉普拉斯算子的非局部性质相契合.傅里叶基函数是周期边界条件下的拉普拉斯算子的特征函数,且快速傅里叶变换(FFT)的使用使编程更加简便,可以大大减少计算量,提高计算效率.因此,本文利用傅里叶拟谱法对等效系统(3.19)到(3.22)进行空间离散化.

对于正整数 M 和偶数正整数 Nx、Ny,定义τ= T/M ,hx = L/Nx,hy = L/Ny.令

Ωh ={(xi, yj)|0≤ i ≤ Nx −1;0≤ j ≤ Ny −1},Ωτ={tm |0≤ m ≤M},Ωτ

h =Ωh ×Ωτ,

其中 tm = mτ,xi = ihx,yj = jhy.在任意时刻 tm,向量形式为

Um =

(

um0,0,, umNx−1,0, u

m

0,1,, umNx−1,1,, um0,Ny−1,, umNx−1,Ny−1

)T

,(3.24)

V m =

(

vm0,0,, vmNx−1,0, v

m

0,1,, vmNx−1,1,, vm0,Ny−1,, vmNx−1,Ny−1

)T

,(3.25)

Wm = wm.(3.26)

对于定义在Ωh 上的任意网格函数 u 和 v,定义离散内积和相关的离散范数如下

(u, v)= hxhy

Nx−1∑

i=0

Ny−1∑

j=0

ui,j v̄i,j,∥u∥=(u, u)

2,∥u∥∞= sup

(xi,yj)∈Ωh

|ui,j|.(3.27)

设(xi, yj)为傅里叶插值点.定义 uN(x, y)为 u(x, y)的插值多项式函数,其中

uN(x, y)=

Nx/2∑

k1=−Nx/2

Ny/2∑

k2=−Ny/2

ũk1,k2e

iµ(k1(x+L)+k2(y+L)),(3.28)

这里µ=π/L,系数

ũk1,k2=

Nx−1∑

Ny−1∑

u(xl1, yl2)e

−iµ(k1(xl1

+L)+k2(yl2+L)),(3.29)

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

其中 ck1=1对于|k1|< Nx/2,ck2=1对于|k2|< Ny/2,ck1=2对于 k1=±Nx/2,ck2=2

对于 k2=±Ny/2.

因此,分数阶拉普拉斯算子−(−∆)

α

2 u(x, y)可以通过以下逼近得到:

−(−∆)

α

2 uN (x, y)=−

Nx/2∑

k1=−Nx/2

Ny/2∑

k2=−Ny/2

∣∣(k1µ)2+(k2µ)

∣∣α2 ũk1,k2eiµ(k1(x+L)+k2(y+L)).

(3.30)

将(3.29)插入(3.30),并考虑在点(xi, yj)处得到的方程:

−(−∆)

α

2 uN (xi, yj)

=

Nx−1∑

l1=0

Ny−1∑

l2=0

u(xl1, yl2)

(

−

Nx/2∑

k1=−Nx/2

Ny/2∑

k2=−Ny/2

Nxck1

Nyck2

∣∣µ2 k2

∣∣α2 eiµ(k1(xi−xl1)+k2(yj−yl2))

)

=(DαU)i+jNx

,(3.31)

其中µ2 k2=µ2(k21+ k22),Dα是具有以下元素的谱对称微分矩阵:

(Dα)i+jNx,l1+l2Nx

=−

Nx/2∑

k1=−Nx/2

Ny/2∑

k2=−Ny/2

Nxck1

Nyck2

∣∣µ2 k2

∣∣α2 eiµ(k1(xi−xl1)+k2(yj−yl2)).

(3.32)

综上所述,将傅里叶拟谱法应用于之前的等效系统(3.19)-(3.21),得到空间半离散

系统如下:

Ut = V,(3.33)

Vt = DαU − iκV − b(U) W,(3.34)

Wt =ℜ(b(U), Ut),(3.35)

其中初始条件为 U0, V 0,W 0,这里的表示向量之间的点乘.对于空间半离散系统(3.33)到(3.35),有以下定理.

定理3.1.空间半离散系统(3.33)-(3.35)具有半离散二次能量守恒律

dE

dt

=0,(3.36)

其中

2U∥2+(W )2.(3.37)

四川师范大学硕士学位论文

证明.将(3.33)和(3.34)分别与 Vt 和 Ut 做内积,同时将(3.35)乘以 W ,得到以下

方程:

(Vt, Ut)=(Vt, V ),(3.38)

(Vt, Ut)=(DαU,Ut)− iκ(V, Ut)−W (b(U), Ut),(3.39)

WWt = Wℜ(b(U), Ut).(3.40)

将方程(3.38)-(3.40)相加,得到

(Vt, V )+WWt =(DαU,Ut)− iκ(V, Ut)−W (b(U), Ut)+Wℜ(b(U), Ut).(3.41)

对上述方程取实部得到

ℜ(Vt, V )+ℜ(WWt)=ℜ(DαU,Ut)−ℜ(iκ(V, Ut))−Wℜ(b(U), Ut)+Wℜ(b(U).Ut).

(3.42)

因此,

ℜ(Vt, V )+ℜ(WWt)=ℜ(DαU,Ut).(3.43)

注意到

ℜ(Vt, V )=

d

dt

∥V ∥2,ℜ(WWt)=

d

dt

(W )2,ℜ(DαU,Ut)=−1

d

dt

∥D

α

2U∥2,(3.44)

将(3.44)代入(3.43)得到

d

dt

(

∥V ∥2+∥D

α

2U∥2+(W )2

)

=0.(3.45)

证毕.□

3.3显式 SAV-RRK 保结构格式

本节旨在介绍基于 SAV 方法的 NFSWE 的不变量守恒显式 RRK 方法.首先回顾RRK 方法并讨论它们的保结构性质.

为简洁起见,引入以下符号:

y =(U, V,W )T , y0=

(

U0, V 0,W 0

)T

,

f =(f 1, f 2, f 3)T

def

=(V,DαU − iκV − b(U) W,ℜ(b(U), Ut))T .

(3.46)

然后,基于 SAV 方法的半离散系统(3.33)-(3.35)可以重写为:{

yt = f(y), t ∈(0, T ],

(3.47)

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

设 ym 是 y (tm)的近似.对于应用于(3.47)的 s 阶显式 RK 方法[30],其形式为:

Ymi = ym +τ

i−1∑

j=1

aijfmj, i =1,..., s,

ym+1= ym +τ

s∑

i=1

bifmi,

(3.48)

其中 fmj = f (Ymj),j =1,..., s.用以下符号表示:

A =(aij)s×s , aij =0对于 j ≥ i,

b =(b1,, bs)T ,

(3.49)

于是 s 阶显式 SAV-RK 方法可以用 Butcher 表表示为:

c A

bT

(3.50)

其中横坐标向量 c =(c1, c2,..., cs)满足 ci =

s∑

j=1

aij,i =1,..., s.

然而,众所周知,只有特定的隐式 RK 方法可能是辛的或代数上稳定的,而没有辛的或代数上稳定的显式 RK 方法.这导致了显式 SAV-RK 方法无法保持原始问题(3.47)的

能量守恒特性.因此,引入显式 SAV-RRK 方法.具体而言,考虑在区间

[

t̂m, t̂m+1

]

,m ≥0

上的单步操作,设 ym

γ=

(

Um

γ, V

m

γ,Wm

γ

)T

是 y

(

t̂m

)

的数值逼近,那么对于(3.47),s 阶显

式 SAV-RRK 方法定义为:

Ymi = ym

γ+τ

i−1∑

j=1

aijfmj, i =1,..., s,

ym+1

γ= ym

γ+γmτ

s∑

i=1

bifmi.

(3.51)

同样,s 阶 RRK 方法(3.51)可以用 Butcher 表表示为:

c A

b̃T

(3.52)

其中 b̃=γmb,γm ̸=0,并且满足:

Em+1

γ= Em

γ,若

s∑

i=1

bifmi ̸=0,

γm =1,若

s∑

i=1

bifmi =0,

(3.53)

这里

α

(

)2

.(3.54)

四川师范大学硕士学位论文

显式 SAV-RRK 方法(3.51)的一个显著优势在于可以精确计算参数γm.实际上,

从(3.53)中可知,当

s∑

i=1

bifmi =0时,γm =1.当

s∑

i=1

bifmi ̸=0时,通过直接计算,可以得

到:

Em+1

γ=∥V m

γ∥2+∥D

α

2Um

γ∥2+

(

Wm

γ

)2

+

(

V m

γ,γmτ

s∑

i=1

bif

mi

)

+

(

γmτ

s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ

)

−

(

Um

γ, D

α

(

γmτ

s∑

i=1

bif

mi

))

−

(

γmτ

s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ

)

+2Wm

γγmτ

s∑

i=1

bif

mi +

(

γmτ

s∑

i=1

bif

mi

)2

.(3.55)

将其与(3.53)结合,得到:

γmτ

[(

V m

γ,

s∑

i=1

bif

mi

)

+

( s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ

)

−

(

Um

γ, D

α

( s∑

i=1

bif

mi

))

−

( s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ

)

+2Wm

γ

s∑

i=1

bif

mi

]

+γ2mτ

[∥∥ s∑

i=1

bif

mi

∥∥2+∥∥D α

( s∑

i=1

bif

mi

)∥∥2+( s∑

i=1

bif

mi

)2]

=0,

这是关于γm 的二次代数方程.注意到γm ̸=0,因此可得:

γm=

(

V m

γ,

s∑

i=1

bif

mi

)

+

( s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ

)

−

(

Um

γ, Dα

( s∑

i=1

bif

mi

))

−

( s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ

)

+2Wm

γ

s∑

i=1

bif

mi

−τ

[∥∥ s∑

i=1

bif2

mi

∥∥2+∥∥D α

( s∑

i=1

bif1

mi

)∥∥2+( s∑

i=1

bif3

mi

)2].

(3.56)

这意味着当

s∑

i=1

bifmi ̸=0时,γm 的值也可以通过式(3.56)精确计算.

实际上,定义在(3.53)中的γm 的值在τ→0时接近于1,这将在第3.4.1节中进一步讨论.因此,显式 SAV-RRK 方法(3.51)是良定的.此外,可以证明所提出的方法保持以下定理中描述的能量守恒律.

定理3.2.假设显式 SAV-RK 方法(3.48)的阶数至少为2,则显式 SAV-RRK 方

法(3.51)的解满足

Em+1

γ= Em

γ,(3.57)

其中 Em

γ由(3.54)定义.

证明.当

s∑

i=1

bifmi =0时,根据(3.51)中的第二个方程可知, ym+1

γ≡ ym

γ,它自动满足

式(3.57).对于

s∑

bifmi ̸=0的情况,还可以从条件(3.53)中得到式(3.57).证毕.□

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

3.4显式 SAV-RRK 方法的精度

在本节中,将讨论显式 SAV-RRK 方法(3.51)的精度.为此,首先估计松弛因子γm,它在接下来的分析中起着关键作用.由于松弛因子γm 往往在不同时间层会发生变化,

因此可以通过类似的方式在不同步骤上进行估计.因此,这里只考虑在区间

[

t̂m, t̂m+1

]

内的单个步骤.

3.4.1松弛因子的估计

本文将仅关注

s∑

i=1

bifmi ̸=0的情况,因为相反的情况很简单.令

Sm(γ)=

∥∥V m

γ+γτ

s∑

i=1

bif

mi

∥∥2+∥∥D α

(

Um

γ+γτ

s∑

i=1

bif

mi

)∥∥2

+

(

Wm

γ+γτ

s∑

i=1

bif

mi

)2−∥V m

γ∥2−∥D

α

2Um

γ∥2−

(

Wm

γ

)2

,

(3.58)

则式(3.53)中定义的γm 的值恰好是函数 Sm(γ)的非零根.此外,对 Sm(γ)有以下结果.

引理3.3.假设显式 SAV-RK 方法(3.48)的阶数为 p,则有

Sm(1)= O(τ p+1).(3.59)

证明.类似于[36]中引理3.1的证明,考虑初值问题

{

ỹ′= f(ỹ), t ≥ t̂m,

ỹ

(

t̂m

)

= ym

γ,

(3.60)

其中 ym

γ是显式 SAV-RRK 方法(3.51)的解.通过使用显式 SAV-RRK 方法(3.51)进行单

步计算,得到数值解 ym+1

γ.根据式(3.58),有

Sm(γ)=∥V m+1

γ∥2+∥D

α

2Um+1

γ∥2+

(

Wm+1

γ

)2−∥V m

γ∥2−∥D

α

2Um

γ∥2−

(

Wm

γ

)2

=∥V m+1

γ∥2+∥D

α

2Um+1

γ∥2+

(

Wm+1

γ

)2−∥Ṽ(t̂m)∥2−∥D

α

2 Ũ(t̂m)∥2−

(

W̃(t̂m)

)2

.

(3.61)

从 ym

γ开始,对于足够小的τ,显式 SAV-RK 方法(3.48)生成阶数为 p的数值解 ỹm+1,

有 ỹm+1= ỹ

(

t̂m +τ

)

+ O (τ p+1).值得注意的是,当γ=1时,由式(3.51)定义的显式

SAV-RRK 方法将简化为由式(3.48)描述的显式 SAV-RK 方法.也就是说,ym+1

四川师范大学硕士学位论文

因此,可以得到

Sm(1)=∥Ṽ m+1∥2+∥D

α

2 Ũm+1∥2+

(

W̃m+1

)2−∥Ṽ(t̂m)∥2−∥D

α

2 Ũ(t̂m)∥2−

(

W̃(t̂m)

)2

=∥Ṽ m+1∥2−∥Ṽ(t̂m +τ)∥2+∥Ṽ(t̂m +τ)∥2−∥Ṽ(t̂m)∥2

+∥D

α

2 Ũm+1∥2−∥D

α

2 Ũ(t̂m +τ)∥2+∥D

α

2 Ũ(t̂m +τ)∥2−∥D

α

2 Ũ(t̂m)∥2

+

(

W̃m+1

)2−(W̃(t̂m +τ)

)2

+

(

W̃(t̂m +τ)

)2−(W̃(t̂m)

)2

=O

(

τ p+1

)

+2

∫ t̂m+τ

t̂m

[

ℜ

(

Vt, V

)

+ℜ

(

WWt

)

−ℜ

(

DαU,Ut

)]

dt.(3.62)

通过将(3.62)和(3.43)结合起来,证毕.□根据引理3.3,可以得到关于松弛因子γm 的以下估计.

定理3.4.假设显式 SAV-RK 方法(3.48)的阶数为 p (p ≥2),那么在式(3.53)中定

义的松弛因子γm 满足

γm =1+O(τ p−1).(3.63)

证明.根据

s∑

i=1

bifmi 的值考虑两种情况.

情况1:根据式(3.53)中γm 的定义,当

s∑

i=1

bifmi =0时,有γm =1,这显然满足(3.63).

情况2:当

s∑

i=1

bifmi ̸=0时,由式(3.55)可得

Sm(γ)= Em+1

γ− Em

γ

=γτ

[

(V m

γ,

s∑

i=1

bif

mi)+(

s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ)−(Um

γ, D

α(

s∑

i=1

bif

mi))−(

s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ)

+2Wm

γ

s∑

i=1

bif

mi

]

+γ2τ2

[

∥

s∑

i=1

bif

mi∥2+∥D

α

2(

s∑

i=1

bif

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif

mi)

]

.

(3.64)

注意到 Sm(γ)是γ的二次函数,它有非零根

γ=

τ

[

(V m

γ,

s∑

i=1

bif

mi)+(

s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ)−(Um

γ, Dα(

s∑

i=1

bif

mi))−(

s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ)+2Wm

γ

s∑

i=1

bif

mi

]

−τ2

[

∥

s∑

i=1

bif2

mi∥2+∥D α

2(

s∑

i=1

bif1

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif3

mi)

].

(3.65)

根据引理3.3,有

Sm(1)=τ

[

(V m

γ,

s∑

i=1

bif

mi)+(

s∑

i=1

bif

mi, V

m

γ)−(Um

γ, D

α(

s∑

i=1

bif

mi))−(

s∑

i=1

bif

mi, D

αUm

γ)

+2Wm

γ

s∑

i=1

bif

mi

]

+τ2

[

∥

s∑

i=1

bif

mi∥2+∥D

α

2(

s∑

i=1

bif

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif

mi)

]

,

(3.66)

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

这是 O(τ p+1)的阶数.定义 f̃m = f

(

y

(

t̃m

))

,那么当τ→0时,有 fmi = f̃m +O(τ).因

此,有

τ2

[

∥

s∑

i=1

bif

mi∥2+∥D

α

2(

s∑

i=1

bif

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif

mi)

]

=τ2

[

∥

s∑

i=1

bif̃

mi∥2+∥D

α

2(

s∑

i=1

bif̃

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif̃

mi)

]

+O(τ3)

=O(τ2).(3.67)

将(3.67)和(3.66)代入(3.65)中,得到

γ=1+

O(τ p+1)

−τ2

[

∥

s∑

i=1

bif 2

mi∥2+∥D α

2(

s∑

i=1

bif 1

mi)∥2+(

s∑

i=1

bif 3

mi)

]

=1+

O(τ p+1)

O(τ2)

=1+O(τ p−1).(3.68)

证毕.□

备注3.5.定理3.4表明,当τ→0时,松弛因子γm 接近于1,这意味着松弛 RK 方法可以被视为标准 RK 方法的小扰动.

3.4.2显式 SAV-RRK 方法的截断误差

基于定理3.4给出的松弛因子γm 的估计,本小节进一步研究显式 SAV-RRK 方法(3.51)的准确性.

在分析方法的准确性之前,将显式 SAV-RRK 方法(3.51)重新表示为

Ymi = ym

γ+τ

i−1∑

j=1

aijfmj, i =1,..., s,

ym+1= ym

γ+τ

s∑

i=1

bifmi,

ym+1

γ= ym+1+(γm −1)

(

ym+1− ym

γ

)

.

(3.69)

前两个方程本质上构成标准的显式 SAV-RK 方法.

数值解 ym+1

γ在 t̂m+1处可以用两种方式解释[35],即增量方向技术(IDT)和松弛技术(RT).

1. IDT 的角度:ym+1

γ被视为对 y

(

t̂m +τ

)

的近似,其中对于 m ≥0,t̂m = tm.

2. RT 的角度:ym+1

γ被视为对 y

的近似,当 m >0时,t̂m 可能不等于 tm.

四川师范大学硕士学位论文

值得注意的是,对数值解 ym+1

γ的不同解释可能导致不同的收敛结果.参考[49]中引理2.7的证明思路,得到了以下结果.

定理3.6.假设显式 SAV-RK 方法(3.48)的阶数为 p (p ≥2).那么以下结论成立:•对于 IDT,显式 SAV-RRK 方法(3.51)的阶数为 p−1.•对于 RT,显式 SAV-RRK 方法(3.51)的阶数为 p.

证明.设 t̂mi = t̂m + ciτ, i =1,..., s,则从式(3.69)中的第二个方程可以得到

y

(

t̂m +τ

)

= y

(

t̂m

)

+τ

s∑

i=1

bif

(

y

(

t̂mi

))

+O

(

τ p+1

)

.(3.70)

现在估计式(3.69)中第三个方程的截断误差.定义

ϕm(y(t))

def

= y

(

t̂m

)

+τ

s∑

i=1

bif

(

y

(

t̂mi

))

,

以及

y

(

t̂m+1

)

=ϕm(y(t))+(γm −1)

(

ϕm(y(t))− y

(

t̂m

))

+ Tm+1.(3.71)

利用定理3.4中给出的γm =1+O (τ p−1),可以得到从(3.70)中得到

Tm+1=y

(

t̂m+1

)

−ϕm(y(t))−(γm −1)

(

ϕm(y(t))−y

(

t̂m

))

=y

(

t̂m+1

)

−

(

y

(

t̂m+τ

)

−O(τ p+1)

)

−(γm −1)

(

y

(

t̂m +τ

)

−O(τ p+1)−y

(

t̂m

))

=y

(

t̂m+1

)

−y

(

t̂m+τ

)

−(γm −1)

(

y

(

t̂m +τ

)

−y

(

t̂m

))

+O(τ p+1)+O((γm −1)τ p+1)

=y

(

t̂m+1

)

−y

(

t̂m+τ

)

−(γm −1)y′(t̂m +τ

)

τ+O((γm −1)τ2)+O(τ p+1)

=y

(

t̂m+1

)

−y

(

t̂m+τ

)

−(γm −1)y′(t̂m +τ

)

τ+O(τ p+1).

(3.72)

对于 IDT,ym+1

γ被视为在 t̂m +τ处的近似,因此 t̂m+1= t̂m +τ,这意味着

Tm+1=−(γm −1)y′(t̂m +τ

)

τ+O

(

τ p+1

)

= O (τ p).

也就是说,该方法(3.51)的阶数为 p−1.

对于 RT,由于 ym+1

γ被视为在 t̂m +γmτ处的近似.再次使用上述估计中的 Taylor

展开,有

Tm+1=y

(

t̂m+τ+(γm−1)τ

)

−y

(

t̂m+τ

)

−(γm−1) y′

(

t̂m+τ

)

τ+O(τ p+1)

=y

(

t̂m+τ

)

+(γm−1)y′(t̂m+τ

)

τ+O((γm−1)2τ2)

−y

(

t̂m+τ

)

−(γm−1)y′(t̂m+τ

)

τ+O(τ p+1)

=O(τ p+1).(3.73)

这意味着该方法(3.51)的阶数为 p.□

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

备注3.7.在计算中,IDT 方法的阶数可能高于的期望,甚至可以达到 RT 方法的阶数,这可以在例3.1中观察到.

备注3.8.本章提出的方法可以轻松应用于其他类似的分数阶方程,例如非线性分数阶波动方程和分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程等.

3.5数值实例

在这一节中,进行了几个数值实验,以展示显式 SAV-RRK 方法(3.51)的精度和守恒性质.同时,与标准显式 SAV-RK 方法已有方法进行了比较.

不失一般性的,在计算中使用了以下的显式 RK 方法[52]:

1. RK(2,2):两级二阶 Heun 方法

(3.74)

2. RK(3,3):三级三阶 Heun 方法

(3.75)

3. RK(4,4):四级四阶 Gill 方法

00000

√

2−1

1−

√

10−

√

1+

√

2−

√

2+

√

(3.76)

值得一提的是,本文的主要关注点是时间方向精度.因此,并没有明确展示空间方向精度.另外,鉴于数值实例中能量的固有正性,在计算中简单地设置常数 C0=0.

时间方向上的误差和收敛阶通过以下方式计算:

Error(τ)=∥UM

N ∥∞, order = log2

[

Error(τ)

Error(τ/2)

]

.(3.77)

四川师范大学硕士学位论文

为了描绘守恒性能,能量相对误差通过以下方式计算:

REm

γ=

∣∣∣∣Em

γ− E0

γ

E0

γ

∣∣∣∣,(3.78)

其中 Em

γ表示时刻 tm 处的离散能量.

算例3.1.[47]首先,考虑一维 NFSWEs (3.1)-(3.3),形式如下:

utt +(−∆)α/2u+ iut +|u|2u =0,(x, t)∈(−25,25)×[0, T ],(3.79)

其中 u(x,0)=(1+ i)xe−10(1−x)2且 ut(x,0)=0.

不失一般性,这里设置α=1.5和 T =1,以确认显式 SAV-RRK 方法(3.51)的精度.

表3.1展示了标准 SAV-RK、SAV-RRK(RT)和 SAV-RRK(IDT)方法在时间上的误差和

收敛阶.可以看到,所有的 SAV-RRK(RT)方法在收敛阶与标准 SAV-RK 方法保持一致,

而 SAV-RRK(IDT)方法表现不同. SAV-RRK(IDT)(2,2)和 SAV-RRK(IDT)(4,4)给出了比在定理3.6中预期阶数更高的收敛阶.而 SAV-RRK(IDT)(3,3)给出了比预期阶数低一

个的收敛阶.这种不同的行为可能归因于 max

m

|γm −1|的收敛阶对于 SAV-RRK(RT)(2,

2)和 SAV-RRK(RT)(4,4)提高了一个阶,如图3.1所示.

表3.1当 N =32,T =1时,例3.1在时间方向的误差和收敛阶

RK(Stage,Order)τ

SAV-RK SAV-RRK(RT) SAV-RRK(IDT)

Error(τ) order Error(τ) order Error(τ) order

RK(2,2)

0.11.8552E-04-1.9063E-04-2.0325E-04-

0.054.6601E-051.99314.7240E-052.01265.0585E-052.0065

0.0251.1671E-051.99741.1750E-052.00741.2387E-052.0298

0.01252.9200E-061.99902.9294E-062.00402.9549E-062.0677

0.006257.3022E-071.99967.3130E-072.00216.6665E-072.1481

RK(3,3)

0.17.6862E-06-2.9857E-06-1.7245E-04-

0.059.5269E-073.01223.9037E-072.93524.3389E-051.9907

0.0251.1866E-073.00525.0077E-082.96261.0873E-051.9966

0.01251.4809E-083.00236.3449E-092.98052.7208E-061.9986

0.006251.8497E-093.00117.9858E-102.99016.8049E-071.9994

RK(4,4)

0.13.7701E-07-3.8894E-07-7.0733E-07-

0.052.3572E-083.99942.3939E-084.02214.4585E-083.9878

0.0251.4730E-094.00031.4843E-094.01152.8080E-093.9889

0.01259.2041E-114.00039.2397E-114.00581.7743E-103.9842

0.006255.7518E-124.00025.7630E-124.00291.1309E-113.9718

此外,对每一步的松弛因子γm 进行了调查.计算了 max

m

|γm −1|和 max

m

|Sm(1)|,

并使用不同的时间步长τ.一些松弛方法的数值结果显示在图3.1中,从中可以看出上述两个量的阶数与理论结果一致.这证实了引理3.3和定理3.4中的理论结果.值得注意的是,当改变α的值时,可以得到一些类似的结果,尽管这些现象在这里没有显示出来.

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

-7.5-7-6.5-6-5.5-5-4.5-4-3.5-3

log

10-10

10-9

10-8

10-7

10-6

10-5

10-4

10-3

10-2

m

a

x

m

|

m

-

|

SAV-RRK(2,2)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(4,4)

(a) maxm |γm −1|

-7.5-7-6.5-6-5.5-5-4.5-4-3.5-3

log

10-18

10-16

10-14

10-12

10-10

10-8

10-6

m

a

x

m

|

S m

(

)

|

SAV-RRK(2,2)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(4,4)

(b) maxm |Sm(1)|

图3.1例3.1中一些松弛格式(RT)所对应的 maxm |γm −1|和 maxm |Sm(1)|.

还进行了一个长时间的模拟,直到 T =1000,并使用不同的α绘制了 SAV-RRK(4,4)方法的相对能量图,如图3.2所示.这表明所提出的方案可以在离散级别上完全保持能量守恒,并且其保持性能明显优于 SAV 方法[17]和三级线性隐式差分法[58].

四川师范大学硕士学位论文

01002003004005006007008009001000

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

Lnear-Implicit

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(a)α=1.3

01002003004005006007008009001000

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

Lnear-Implicit

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(b)α=1.6

01002003004005006007008009001000

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

Lnear-Implicit

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(c)α=1.9

01002003004005006007008009001000

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

Lnear-Implicit

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(d)α=2

图3.2当 N =32,τ=0.01时,例3.1中不同的α对应的相对能量误差.

算例3.2.现在考虑具有以下初值的2D NFSWEs (3.1):

u(x, y,0)= sech

(

x2+ y2

)

, ut(x, y,0)= sin(x+y) sech

(

−2

(

x2+ y2

))

,(x, y, t)∈Ω×[0, T ],

其中Ω=[−5,5]×[−5,5].

为了重新确认理论结果在2D 情况下的适用性,考虑与例3.1中相同的参数.也就是,α=1.5和 T =1.表3.2和图3.3分别展示了时间上的收敛阶和松弛因子γ.可以观察到,与1D 情况唯一的不同之处是,在2D 情况下,SAV-RRK(IDT)方法未能达到预期的更高阶.

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

表3.2当 N =4, T =1时,例3.2在时间方向的误差和收敛阶

RK(Stage,Order)τ

SAV-RK SAV-RRK SAV-RRK(IDT)

Error(τ) order Error(τ) order Error(τ) order

RK(2,2)

0.13.0217E-03-3.0102E-03-1.5692E-02-

0.057.4615E-042.01787.4702E-042.01069.6213E-030.7057

0.0251.8513E-042.01091.8587E-042.00695.2472E-030.8747

0.01254.6090E-052.00604.6341E-052.00392.7312E-030.9420

0.006251.1497E-052.00321.1569E-052.00211.3923E-030.9721

RK(3,3)

0.11.2581E-04-3.9379E-05-3.2535E-03-

0.051.6180E-052.95895.5726E-062.82107.9304E-042.0365

0.0252.0532E-062.97837.4443E-072.90411.9546E-042.0205

0.01252.5863E-072.98899.6210E-082.95194.8500E-052.0108

0.006253.2454E-082.99441.2228E-082.97601.2078E-052.0056

RK(4,4)

0.17.9185E-06-8.0508E-06-3.4013E-05-

0.054.9103E-074.01134.9644E-074.01943.3898E-063.3268

0.0253.0531E-084.00753.0805E-084.01043.6901E-073.1995

0.01251.9026E-094.00421.9182E-094.00544.2681E-083.1120

0.006251.1873E-104.00221.1966E-104.00275.1191E-093.0596

-7.5-7-6.5-6-5.5-5-4.5-4-3.5-3

log

10-8

10-7

10-6

10-5

10-4

10-3

10-2

10-1

m

a

x

m

|

m

-

|

SAV-RRK(2,2)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(4,4)

(a) maxm |γm −1|

-7.5-7-6.5-6-5.5-5-4.5-4-3.5-3

log

10-11

10-10

10-9

10-8

10-7

10-6

10-5

10-4

10-3

10-2

10-1

m

a

x

m

|

S m

(

)

|

SAV-RRK(2,2)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(4,4)

(b) maxm |Sm(1)|

图3.3例3.2中一些松弛格式(RT)所对应的 maxm |γm −1|和 maxm |Sm(1)|.

为了展示所提方法在保持能量守恒方面的有效性,进行了长时间模拟,直到 T =

100,并在图3.4中绘制了使用 SAV-RRK(4,4)方法关于不同α相对能量误差.结果显示,所提出的方法可以在离散层面上精确地保持能量守恒,且其能量守恒性能显著优于中 SAV 方法[17].

四川师范大学硕士学位论文

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(a)α=1.3

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(b)α=1.6

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(c)α=1.9

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(d)α=2

图3.4当 N =4,τ=0.01时,例3.2中不同的α对应的相对能量误差.

算例3.3.[57]接下来,考虑二维非线性分数阶波动方程

 utt +(−∆)

α

2 u+ F ′(u)=0,(x, y, t)∈Ω×(0, T ],

u(x, y,0)=1

arctan

(

exp

(

−

√

x2+ y2

))

, ut(x, y,0)=0,

(3.80)

其中Ω=(−10,10)×(−10,10).

取势能 F (u)= u2

(

u2−1

)

.在 T =1时,α=1.5的时间收敛阶如表3.3所示.此外,图3.5展示了长时间模拟(T =100)的离散能量演化,这些数据是通过应用 SAV-RRK(4,4)方法计算的.结果表明,所提方法对非线性分数阶波动方程也是有效的.

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

表3.3当 N =4, T =1时,例3.3在时间方向的误差和收敛阶

RK(Stage,Order)τ

SAV-RK SAV-RRK(RT) SAV-RRK(IDT)

Error(τ) order Error(τ) order Error(τ) order

RK(2,2)

0.11.3395E-03-3.3870E-03-2.1470E-02-

0.053.4360E-041.96288.1480E-042.05551.0960E-020.9701

0.0258.6945E-051.98261.9951E-042.03005.5113E-030.9918

0.01252.1865E-051.99154.9347E-052.01542.7600E-030.9977

0.006255.4823E-061.99581.2270E-052.00781.3807E-030.9993

RK(3,3)

0.13.5168E-05-4.3927E-05-3.8213E-04-

0.054.3533E-063.01415.4825E-063.00228.0473E-052.2475

0.0255.3902E-073.01376.8378E-073.00321.8560E-052.1163

0.01256.7058E-083.00688.5344E-083.00224.4475E-062.0611

0.006258.3615E-093.00361.0659E-083.00121.0883E-062.0309

RK(4,4)

0.15.3561E-07-3.2716E-06-3.7745E-05-

0.053.6438E-083.87772.0654E-073.98554.8050E-062.9737

0.0252.3735E-093.94031.2898E-084.00126.0237E-072.9958

0.01251.5146E-103.97008.0476E-104.00247.5303E-082.9999

0.006259.5636E-123.98535.0241E-114.00169.4105E-093.0004

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(a)α=1.3

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(b)α=1.6

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(c)α=1.9

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(d)α=2

图3.5当 N =4,τ=0.01时,例3.3中不同的α对应的相对能量误差.

四川师范大学硕士学位论文

算例3.4.[24]最后,考虑二维分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程

i∂tu−1

(−∆)

α

2 u+ uϕ=0,(x, y, t)∈Ω×(0, T ],

∂ttϕ+(−∆)

β

2ϕ+ϕ−|u|2=0,(x, y, t)∈Ω×(0, T ],

(3.81)

其中初始条件为

u(x, y,0)=(1+ i) exp

(

−|x|2

)

,ϕ(x, y,0)= sech

(

|x|2

)

,

∂tϕ(x, y,0)= sin(x+ y) sech

(

−2|x|2

)

,

(3.82)

其中Ω=[−10,10]×[−10,10].

与前面的例子类似,表3.4列出了α=β=1.5时的一些数值误差和时间收敛阶.

表3.4当 N =4, T =1时,例3.4在时间方向的误差和收敛阶

RK(Stage,Order)τ

SAV-RK SAV-RRK(RT) SAV-RRK(IDT)

Error(τ) order Error(τ) order Error(τ) order

RK(2,2)

0.11.1875E-03-1.8837E-03-9.5325E-03-

0.052.7648E-042.10265.0394E-041.90236.7134E-030.5058

0.0256.6514E-052.05551.3036E-041.95083.8805E-030.7908

0.01251.6300E-052.02883.3151E-051.97542.0757E-030.9026

0.006254.0339E-062.01468.3587E-061.98771.0723E-030.9529

RK(3,3)

0.18.7748E-05-1.9567E-04-3.1789E-03-

0.051.1471E-052.93542.4630E-052.99008.2646E-041.9435

0.0251.4684E-062.96573.0916E-062.99402.1079E-041.9712

0.01251.8580E-072.98243.8731E-072.99685.3231E-051.9854

0.006252.3370E-082.99114.8471E-082.99831.3375E-051.9927

RK(4,4)

0.13.0741E-06-4.0627E-06-1.0278E-04-

0.051.9959E-073.94502.6020E-073.96471.3195E-052.9615

0.0251.2698E-083.97441.6461E-083.98251.6711E-062.9811

0.01258.0044E-103.98761.0350E-093.99132.1024E-072.9906

0.006255.0238E-113.99396.4882E-113.99572.6365E-082.9953

此外,长时间模拟(直至 T =100)中使用不同α和β的相对能量如图3.6所示.

图中所示的现象表明,所提出的方法可以在分数阶 Klein-Gordon-Schrödinger 方程的离散层面上准确保持能量守恒.

3 NFSWEs 的任意高阶显式能量守恒方法

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(a)α,β=1.3

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(b)α,β=1.6

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(c)α,β=1.9

0102030405060708090100

time(s)

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

R

e

l

a

t

e

e

n

e

r

g

y

e

r

r

o

r

SAV-RRK(4,4)

SAV-RRK(3,3)

SAV-RRK(2,2)

SAV-RK(4,4)

SAV-RK(3,3)

SAV-RK(2,2)

(d)α,β=2

图3.6当 N =4,τ=0.01时,例3.4中不同的α对应的相对能量误差.

3.6小结

在本章中,提出了一种开发二维分数非线性薛定谔波动方程高阶显式能量守恒数值方法的新途径.该方法基于最近引入的标量辅助变量方法和松弛龙格-库塔方法.理论分析和数值结果支持了所提方案的守恒性质.更多的数值结果表明,所提方法对于其他类似的分数守恒问题也是有效的,例如非线性分数波动方程和分数 Klein-Gordon-Schrödinger 方程等.

四川师范大学硕士学位论文

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

据我们所知,目前针对 NFSWEs 提出的方法只能保证修正后的能量和(或)质量守恒.缺乏能够同时保持原始能量和原始质量的数值方法.注意到平均向量场(AVF)方法可以保持哈密顿系统的原始能量守恒[8,45].此外,最近提出的分区平均向量场(PAVF)方法不仅可以保持能量守恒,还可以保持更多的守恒性质,并且已被用于构造哈密顿常微分方程的守恒数值方案,参见[10].而对 NFSWEs 的哈密顿结构的推导是构建构建PAVF 保结构方法的前提.最近,王和黄[60]提出了带有分数阶拉普拉斯的泛函的变分导数,并将一维分数非线性薛定谔方程重新表述为一个哈密顿系统.傅和蔡[24]推导了二维分数 Klein-Gordon-Schrödinger 方程的哈密顿形式,并随后构建了其保结构数值方案.基于此,本章首先推导了具有周期边界条件的二维 NFSWEs 的哈密顿形式,然后通过分区平均向量场加法(PAVF-P)方法,成功构建了能够同时守恒原始能量和质量的数值格式.最后提出了更多相关数值格式并给出了数值实验验证.

4.1 NFSWEs 的哈密顿格式构建

众所周知,哈密顿结构对于构建某些问题的保结构算法至关重要.然而,目前没有研究人员考虑过带有周期边界条件的 NFSWEs (3.1)-(3.3)的哈密顿结构.基于此,本小节推导了 NFSWEs 的哈密顿结构.

设

u = p+ iq, ut =φ+ iψ,(4.1)

其中 p, q,φ,ψ均为实值函数.那么,NFSWEs (3.1)-(3.3)可以重写为

φt + iψt +(−∆)

α

2 p+ i (−∆)

α

2 q + iκφ−κψ+β

(

p2+ q2

)

(p+ iq)=0.(4.2)

从上述方程中分离实部和虚部,得到

φt +(−∆)

α

2 p−κψ+β

(

p2+ q2

)

p =0,

ψt +(−∆)

α

2 q +κφ+β

(

p2+ q2

)

q =0.(4.3)

即,NFSWEs (3.1)-(3.3)可以重写为一个等效的耦合系统

φt =−(−∆)

α

2 p+κψ−β

(

p2+ q2

)

p,(4.4)

ψt =−(−∆)

α

2 q −κφ−β

(

p2+ q2

)

q,(4.5)

pt =φ,(4.6)

qt =ψ,(4.7)

四川师范大学硕士学位论文

其中 p, q,φ,ψ满足周期边界条件.

为了得到 NFSWEs (3.1)-(3.3)的哈密顿形式,引入以下两个重要引理.

引理4.1.[24]给定1<α≤2,那么对于任何实值周期函数 p, q ∈ L2(Ω),有∫

Ω

(−∆)

α

2 pqdx =

∫

Ω

(−∆)

α

4 p(−∆)

α

4 qdx =

∫

Ω

p(−∆)

α

2 qdx.(4.8)

证明.根据 Plancherel 定理,有∫

Ω

(−∆)

α

2 pqdx =(2L)2

∑

l1∈Z

∑

l2∈Z

∣∣v2l1+ v2l2

∣∣α2 p̂l1,l2 q̂l1,l2

=(2L)2

∑

l1∈Z

∑

l2∈Z

∣∣v2l1+ v2l2

∣∣α4 p̂l1,l2∣∣v2l1+ v2l2

∣∣α4 q̂l1,l2

=(2L)2

∑

l1∈Z

∑

l2∈Z

p̂l1,l2

∣∣v2l1+ v2l2

∣∣α2 q̂l1,l2.

(4.9)

然后,可以得到∫

Ω

(−∆)

α

2 pqdx =

∫

Ω

(−∆)

α

4 p(−∆)

α

4 qdx =

∫

Ω

p(−∆)

α

2 qdx (4.10)

□

引理4.2.[60]对于形如

F [g]=

∫

Ω

f

(

g(x),(−∆)

α

4 g(x)

)

dx,(4.11)

的泛函 F [g],其中 f 是Ω上的光滑函数,其变分导数如下

δF

δg

=

∂f

∂g

+(−∆)

α

∂f

∂

(

(−∆)

α

4 g

).(4.12)

证明.令ϕ(x)为带有周期边界条件的任意函数.根据分数阶拉普拉斯是线性算子

以及变分导数的定义,有∫

Ω

δF

δg

ϕ(x)dx =

[

d

dµ

∫

Ω

f

(

g +µϕ,(−∆)

α

4 g +µ(−∆)

α

4ϕ

)

dx

]

µ=0

=

∫

Ω

(

∂f

∂g

ϕ+

∂f

∂

(

(−∆)

α

4 g

)(−∆)

α

4ϕ

)

dx

=

∫

Ω

(

∂f

∂g

ϕ+

(

(−∆)

α

∂f

∂

(

(−∆)

α

4 g

))ϕ) dx

=

∫

Ω

(

∂f

∂g

+(−∆)

α

∂f

∂

(

(−∆)

α

4 g

))ϕdx

(4.13)

其中使用了(4.8).基于ϕ(x)的任意性,通过变分法基本引理,可以得到(4.12).□基于上述引理,可以得到以下结果.

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

定理4.3.设

G =κ

∫

Ω

(p2+ q2)dx+2 Im(

∫

Ω

(φ+ iψ)(p− iq)dx),(4.14)

H =

∫

Ω

(

(φ2+ψ2)+

(

(−∆)

α

4 p

)2

+

(

(−∆)

α

4 q

)2

+

β

(p2+ q2)2

)

dx.(4.15)

那么等效系统(4.4)-(4.7)具有以下两个守恒定律:

d

dt

G =0,

d

dt

H =0.(4.16)

证明.计算(4.4)和(4.5)与φ和ψ的内积,可以立即得到第一个守恒定律.注意到引理4.1,并将(4.4)-(4.7)与φt,ψt, pt,−qt 分别做内积,可以推导出第二个守恒定律.证毕.□

定理4.4. NFSWEs (3.1)-(3.3)可以被重构为以下哈密顿系统:

φt

ψt

pt

qt

= J



δH/δφ

δH/δψ

δH/δp

δH/δq

,(4.17)

其中哈密顿算符

J =



0κ−10

−κ00−1

,(4.18)

而能量泛函 H 定义如(4.15).

证明.注意到

(−∆)

α

4((−∆)

α

4 u(x, t))= F−1

[

|σ|

α

2 F(F−1

[

|σ|

α

2 F(u(σ, t))

]

)

]

= F−1

[

|σ|

α

2|σ|

α

2 F(u(σ, t))

]

= F−1[|σ|αF(u(σ, t))]

=(−∆)

α

2 u(x, t),(4.19)

并应用引理4.2中的分数阶变分原理,得到

δH

δp

=

(

2(−∆)

α

2 p+2β

(

p2+ q2

)

2p

)

=(−∆)

α

2 p+β

(

p2+ q2

)

p,(4.20)

δH

δq

=

(

2(−∆)

α

2 q +2β

(

p2+ q2

)

2q

)

=(−∆)

α

2 q +β

(

p2+ q2

)

q,(4.21)

δH

δφ

=φ,(4.22)

δH

=ψ.(4.23)

四川师范大学硕士学位论文

结合 NFSWEs (3.1)-(3.3)的等效形式(4.4)-(4.7),可得到

φt

ψt

pt

qt

=



0κ−10

−κ00−1





δH/δφ

δH/δψ

δH/δp

δH/δq

.(4.24)

证毕.□

4.2傅里叶拟谱离散格式

鉴于周期性边界条件,选择傅里叶拟谱法对 NFSWEs (3.1)-(3.3)进行空间离散化.将傅里叶拟谱法应用于空间以近似先前的等效系统(4.4)-(4.7),得到如下的空间半离散

系统:

Φt = DαP +κΨ−β

(

P 2+Q2

)

P,(4.25)

Ψt = DαQ−κΦ−β

(

P 2+Q2

)

Q,(4.26)

Pt =Φ,(4.27)

Qt =Ψ,(4.28)

其中 P 2= P P ,而表示向量之间的点乘.

简洁起见,定义向量

Y =

(

ΦT ,ΨT , P T , QT

)

,(4.29)

则上述半离散系统可以用正则哈密顿形式重新表示为

dY

dt

= f(Y )= S∇H(Y ),(4.30)

哈密顿能量定义以下

H(Y )=

(

(ΦTΦ+ΨTΨ)−P TDαP −QTDαQ+

β

(P 2+Q2)T (P 2+Q2)

)

,(4.31)

其中 S 是具有以下形式的反对称矩阵

S =



0κI −I 0

−κI 00−I

I 000

0 I 00

.(4.32)

此外,定义质量

G(Y )=κ∥P∥2+κ∥Q∥2+2ΨTP −2ΦTQ.(4.33)接下来有以下定理.

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

定理4.5.半离散系统(4.25)-(4.28)具有质量和能量守恒定律:

dG(Y )

dt

=0,

dH(Y )

dt

=0.(4.34)

证明.根据(4.33),可以推导出:

dG(Y )

dt

=2hxhy

(

κP TPt +κQTQt +ΨT

t P +ΨTPt −ΦT

t Q−ΦTQt

)

=2hxhy

(

κP TΦ+κQTΨ+P TDαQ−κP TΦ−βP T

(

P 2+Q2

)

Q

+ΨTΦ−QTDαP −κQTΨ+βQT

(

P 2+Q2

)

P −ΦTΨ

)

=0.(4.35)

基于矩阵 S 的反对称性质,结合(4.30),有

dH(Y )

dt

=∇H(Y )Tf(Y )=∇H(Y )TS∇H(Y )=0.(4.36)

证毕.□

4.3 PAVF-P 保结构格式

4.3.1 PAVF-P 格式

对于 NFSWEs(3.1)-(3.3),存在许多保结构的方法,但其中大多数只保持修正后的能量或质量,详见[32,37].基于上文建立的哈密顿系统(4.30),应用分区平均向量场(PAVF)方法[10],为 NFSWEs (3.1)-(3.3)构建能够同时保持原始能量和质量的数值格式.

考虑哈密顿系统(4.30),并应用 PAVF 方法,可以得到求解 NFSWEs (3.1)-(3.3)的

全离散格式,如下所示:

δtΦ

m =

∫1

κHΨ

(

Φm+1,εΨm+1+(1−ε)Ψm, Pm, Qm

)

dε

−

∫1

HP

(

Φm+1,Ψm+1,εPm+1+(1−ε)Pm, Qm

)

dε,(4.37)

δtΨ

m =−

∫1

κHΦ

(

εΦm+1+(1−ε)Φm,Ψm, Pm, Qm

)

dε

+

∫1

HQ

(

Φm+1,Ψm+1, Pm+1,εQm+1+(1−ε)Qm

)

dε,(4.38)

δtP

m =

∫1

HΦ

(

εΦm+1+(1−ε)Φm,Ψm, Pm, Qm

)

dε,(4.39)

∫1

(

Φm+1,εΨm+1+(1−ε)Ψm, Pm, Qm

)

dε.(4.40)

四川师范大学硕士学位论文

上述数值格式可以进一步整合为如下傅里叶拟谱 PAVF(FPAVF)格式:

δtΦ

m =κΨm+1

2+DαPm+1

2−β

(

(Pm+1)3+(Pm)2 Pm+1+(Pm+1)2 Pm

+(Pm)3+2Pm+1(Qm)2+2Pm (Qm)2

)

,(4.41)

δtΨ

m =−κΦm+1

2+DαQm+1

2−β

(

(Qm+1)3+(Qm)2 Qm+1+(Qm+1)2 Qm

+(Qm)3+2Qm+1(Pm+1)2+2Qm (Pm+1)2

)

,(4.42)

δtP

m =Φm+1

2,(4.43)

δtQ

m =Ψm+1

2.(4.44)

通过将(4.41)-(4.42)分别与δtP

m 和δtQ

m 做内积,即可证明 FPAVF 格式的能量守恒性

质.不幸的是,这个格式并不能保证质量守恒,这可以在数值算例中可以反映出来.

FPAVF 格式(4.41)-(4.44)的伴随可以表示为

δtΦ

m =κΨm+1

2+DαPm+1

2−β

(

(Pm+1)3+(Pm)2 Pm+1+(Pm+1)2 Pm

+(Pm)3+2Pm+1(Qm+1)2+2Pm (Qm+1)2

)

,(4.45)

δtΨ

m =−κΦm+1

2+DαQm+1

2−β

(

(Qm+1)3+(Qm)2 Qm+1+(Qm+1)2 Qm+(Qm)3+2Qm+1(Pm)2+2Qm (Pm)2

)

,(4.46)

δtP

m =Φm+1

2,(4.47)

δtQ

m =Ψm+1

2.(4.48)

将 FPAVF 格式(4.41)-(4.44)与其伴随 FPAVF 格式(4.45)-(4.48)相结合,得到傅里叶

拟谱 PAVF-P(FPAVF-P)格式如下:

δtΦ

m =κΨm+1

2+DαPm+1

2−β

(

(Pm+1)3+(Pm)2 Pm+1+(Pm+1)2 Pm

+(Pm)3+ Pm+1(Qm)2+ Pm (Qm)2+ Pm+1(Qm+1)2+ Pm (Qm+1)2

)

,

(4.49)

δtΨ

m =−κΦm+1

2+DαQm+1

2−β

(

(Qm+1)3+(Qm)2 Qm+1+(Qm+1)2 Qm

+(Qm)3+Qm+1(Pm+1)2+Qm (Pm+1)2+Qm+1(Pm)2+Qm (Pm)2

)

,

(4.50)

δtP

m =Φm+1

2,(4.51)

δtQ

m =Ψm+1

2.(4.52)

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

4.3.2离散守恒律

定理4.6. FPAVF-P 格式(4.49)-(4.52)在离散意义上具有以下能量守恒和质量守恒

的特性:

Gm+1= Gm, Hm+1= Hm,0≤ m ≤M −1,(4.53)

其中离散质量为

Gm =κ∥Pm∥2+κ∥Qm∥2+2(Ψm)T Pm −2(Φm)T Qm,(4.54)

离散能量的表达式为

Hm =

[((Φm)TΦm +(Ψm)TΨm)−(Pm)TDαPm −(Qm)TDαQm

+

β

((Pm)2+(Qm)2)T ((Pm)2+(Qm)2)].(4.55)

证明.将(4.49)与 Qm+1+Qm 进行内积,得到

(Qm+1+Qm)T δtΦ

m

=(Qm+1+Qm)TκΨm+1

2+(Qm+1+Qm)TDαPm+1

−(Qm+1+Qm)T

β

(

(Pm+1)3+(Pm)2 Pm+1+(Pm+1)2 Pm

+(Pm)3+ Pm+1(Qm)2+ Pm (Qm)2+ Pm+1(Qm+1)2+ Pm (Qm+1)2

)

.(4.56)

同样,将(4.50)与 Pm+1+ Pm 进行内积,得到

(Pm+1+ Pm)T δtΨ

m

=−(Pm+1+ Pm)TκΦm+1

2+(Pm+1+ Pm)TDαQm+1

−(Pm+1+ Pm)T

β

(

(Qm+1)3+(Qm)2 Qm+1+(Qm+1)2 Qm

+(Qm)3+Qm+1(Pm+1)2+Qm (Pm+1)2+Qm+1(Pm)2+Qm (Pm)2

)

(4.57)

将(4.57)与(4.56)相减,推导出

(Qm+1+Qm)T δtΦ

m −(Pm+1+ Pm)T δtΨ

m

=(Qm+1+Qm)TκΨm+1

2+(Pm+1+ Pm)TκΦm+1

2.(4.58)

注意到

δtP

m =Φm+1

2,δtQ

m =Ψm+1

2,

可以得到

(Qm+1+Qm)T δtΦ

m−(Pm+1+ Pm)T δtΨ

m

=(Qm+1+Qm)TκδtQ

m +(Pm+1+ Pm)TκδtPm.(4.59)

四川师范大学硕士学位论文

即

(Qm+1+Qm)T (Φm+1−Φm)−(Pm+1+ Pm)T (Ψm+1−Ψm)

=κ(∥Qm+1∥2−∥Qm∥2)+κ(∥Pm+1∥2−∥Pm∥2).(4.60)

将(4.51)和(4.52)交叉相乘

((Qm+1)TΦm+1−(Pm+1)TΨm+1)−((Qm)TΦm −(Pm)TΨm)

=((Qm)TΦm+1−(Pm)TΨm+1)−((Qm+1)TΦm −(Pm+1)TΨm).(4.61)

将(4.61)代入(4.60),得到

κ∥Pm+1∥2+κ∥Qm+1∥2+2(Pm+1)TΨm+1−2(Qm+1)TΦm+1

=κ∥Pm∥2+κ∥Qm∥2+2(Pm)TΨm −2(Qm)TΦm,(4.62)

这意味着

Gm+1= Gm.(4.63)

类似地,通过将(4.49)、(4.50)与δtP

m 和δtQ

m 进行离散内积并求和,可以得到离散

能量守恒定律

Hm+1= Hm.(4.64)

证毕.□

4.3.3其他数值方法

为了比较,本小节给出了用于求解 NFSWEs (3.1)-(3.3)的以下两个二阶 AVF 格式.

• FAVF(傅里叶拟谱 AVF)格式

δtΦ= DαPm+1

2+κΨm+1

2−β

(

3(Pm+1)3−5(Pm+1)2 Pm

−5(Pm)2 Pm+1+19(Pm)3−6Qm+1 Qm Pm +2Qm+1 Qm Pm+1

+3(Qm+1)2 Pm+1+(Qm)2 Pm+1−7(Qm+1)2 Pm +19(Qm)2 Pm

)

,(4.65)

δtΨ= DαQm+1

2−κΦm+1

2−β

(

3(Qm+1)3−5(Qm+1)2 Qm

−5(Qm)2 Qm+1+19(Qm)3−6Pm+1 Pm Qm +2Pm+1 Pm Qm+1

+3(Pm+1)2 Qm+1+(Pm)2 Qm+1−7(Pm+1)2 Qm +19(Pm)2 Qm

)

,(4.66)

δtP =Φm+1

2,(4.67)

2.(4.68)

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

• FPAVF-C(傅里叶拟谱 PAVF 组合)格式

τ

(Φ∗−Φm)=

κ(Ψ∗+Ψm)+

Dα(P ∗+ Pm)−β

(

(P ∗)3+(Pm)2 P ∗

+(P ∗)2 Pm +(Pm)3+2P ∗(Qm)2+2Pm (Qm)2

)

,(4.69)

τ

(Ψ∗−Ψm)=−1

κ(Φ∗+Φm)+

Dα(Q∗+Qm)−β

(

(Q∗)3+(Qm)2 Q∗

+(Q∗)2 Qm +(Qm)3+2Q∗(P ∗)2+2Qm (P ∗)2

)

,(4.70)

τ

(P ∗− Pm)=

(Φ∗+Φm),(4.71)

τ

(Q∗−Qm)=

(Ψ∗+Ψm),(4.72)

τ

(

Φm+1−Φ∗)=1

κ(Ψm+1+Ψ∗)+

DαPm+1

2−β

(

(Pm+1)3+(P ∗)2 Pm+1

+(Pm+1)2 P ∗+(P ∗)3+2Pm+1(Qm+1)2+2P ∗(Qm+1)2

)

,

(4.73)

τ

(

Ψm+1−Ψ∗)=−1

κ(Φm+1+Φ∗)+

DαQm+1

2−β

(

(Qm+1)3+(Q∗)2 Qm+1

+(Qm+1)2 Q∗+(Q∗)3+2Qm+1(P ∗)2+2Q∗(P ∗)2

)

,(4.74)

τ

(

Pm+1− P ∗)=1

(Φm+1+Φ∗),(4.75)

τ

(

Qm+1−Q∗)=1

(Ψm+1+Ψ∗),(4.76)

其中Φ∗,Ψ∗, P ∗, Q∗可以理解为从前一层迭代得到的中间变量,可作为计算后续层变量的输入.

备注4.7.类似于 FPAVF-P 格式(4.49)-(4.52),容易证明上述 FPAVF 格式(4.41)-

(4.44)、FAVF 格式(4.65)-(4.68)和 FPAVF-C 格式(4.69)-(4.76)均在离散意义上保证原始能量守恒,但不保证原始质量守恒.离散能量的形式与(4.55)中定义的相同.

备注4.8.值得强调的是,用于求解 NFSWEs (3.1)-(3.3)的其他现有方法仅保持修正后的能量和(或)修正后的质量.例如 SAV 方法[17]仅保持修正后的能量,三层线性隐式差分格式[47]保持修正后的能量和质量.然而,所提出的 FPAVF-P 格式(4.49)-(4.52)在离散意义上同时保持原始质量和能量,这是本文的主要贡献之一.此外,FPAVF-P 格式(4.49)-(4.52)在时间方向具有二阶精度,在空间方向具有谱精度.

4.4数值算例

本节给出了一些数值算例,为了展示守恒性能,通过以下方式计算能量和质量的相

对误差

∣∣,(4.77)

四川师范大学硕士学位论文

其中 Hn, Gn 分别表示 tn 时刻的离散能量和质量.为了获得数值误差,利用以下误差函

数

E(τ)=

∥∥UM

N − U2M

N

∥∥

∞=

∥∥∥∥U ( T

M

,

L

N

)

− U

(

T

2M

,

L

N

)∥∥∥∥

∞

,

E(N)=

∥∥UM

N − UM

2N

∥∥

∞=

∥∥∥∥U ( T

M

,

L

N

)

− U

(

T

M

,

L

2N

)∥∥∥∥

∞

.(4.78)

并且在两个连续的时间步长τ和τ/2以及两个连续的多项式阶次 N 和2N 上计算时间

方向和空间方向的收敛阶

order =

 log2[E(τ)/E(τ/2)],在时间方向log2[E(N)/E(2N)],在空间方向.

(4.79)

算例4.1.首先,考虑一维非线性分数阶波动方程(3.1)-(3.3),具体形式为utt +(−∆)α/2u+ iut +|u|2u =0,(x, t)∈Ω×[0, T ],(4.80)

其中 u(x,0)=(1+ i)xe−10(1−x)2以及 ut(x,0)=0.

基于离散守恒律(4.53),有 Gn ≡ G0和 Hn ≡ H0,并且 G0, H0仅依赖于给定的初值函数 u(x,0)和 ut(x,0).很容易验证初始值函数 u(x,0)沿着 x 轴迅速衰减为零,远离 x =1.这意味着在有界区间Ω外,初始值函数可以被忽略.考虑到机器精度的限制,此处,取Ω=(−25,25).基于守恒律(3.6)和(3.7),利用高斯数值积分,立即得到任意α下的原始质量 G(0)=0.812482096009503,以及α=2时的原始能量E(0)=4.56197648980619.

首先计算上述四种格式(FPAVF-P、FPAVF、FAVF 和 FPAVF-C 格式)在 T =1时,α=1.5以及α=2.0的收敛阶数,见图4.1-4.2.很容易发现这四种格式在空间方向均具有谱精度,而 FPAVF 格式在时间方向表现出一阶精度,其他格式则表现出二阶精度.

5010015020025030035040045050055

N

-24

-22

-20

-18

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

l

o

g 2

E

(

N

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(a)τ=1/1000

-11-10.5-10-9.5-9-8.5-8

log

-24

-22

-20

-18

-16

-14

-12

l

o

g 2

E

(

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

slope=1

slope=2

(b) N =128

图4.1当α=1.5时,例4.1中四种格式的收敛阶.

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

5010015020025030035040045050055

N

-24

-22

-20

-18

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

l

o

g 2

E

(

N

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(a)τ=1/1000

-11-10.5-10-9.5-9-8.5-8

log

-23

-22

-21

-20

-19

-18

-17

-16

-15

-14

-13

l

o

g 2

E

(

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

slope=1

slope=2

(b) N =128

图4.2当α=2.0时,例4.1中四种格式的收敛阶.

接下来关注现有方法的守恒性能.图4.3显示了在不同α值下,通过 N =512和τ=0.01计算的不同时间段内的离散能量演化情况.可以观察到,特别是在α=2的结果中,FPAVF-P、FPAVF、FAVF 和 FPAVF-C 格式计算得到的离散能量均一致收敛到原始能量,而 SAV 方法[17]和三层线性隐式差分格式[47]的性能较差.这一现象与后两者仅保留修正后的能量而不是原始能量是一致的.

四川师范大学硕士学位论文

05010015020025030035040045050

t

n

1.7

1.75

1.8

1.85

1.9

1.95

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

linear-implicit

480485490495500

1.8478116922625

1.847811692263

1.8478116922635

1.847811692264

(a)α=1.3

050100150200250300350400450500

t

n

2.5

2.55

2.6

2.65

2.7

2.75

2.8

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

linear-implicit

480485490495500

2.649287400316

2.6492874003165

2.649287400317

2.6492874003175

(b)α=1.6

05010015020025030035040045050

t

n

3.85

3.9

3.95

4.05

4.1

4.15

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

linear-implicit

480485490495500

3.958428677

3.958428677005

3.95842867701

3.958428677015

(c)α=1.9

050100150200250300350400450500

t

n

4.45

4.5

4.55

4.6

4.65

4.7

4.75

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

linear-implicit

original

480485490495500

4.5619764897846

4.5619764897848

4.561976489785

4.5619764897852

4.5619764897854

(d)α=2.0

图4.3在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散能量.

类似地,图4.4显示了在不同α值下,通过 N =512和τ=0.01计算的不同时间段内的离散质量演化情况.需要强调的是 SAV 方法不具有质量守恒.可以看到,FPAVF-P格式均匀收敛到原始质量,其他方法的性能相对较差,特别是 FAVF 格式,而三层线性隐式差分格式保留了修正后的质量.此外,基于 FPAVF-C 格式的离散质量显示出小幅度的频繁振荡.

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

050100150200250300350400450500

t

n

0.8121

0.8122

0.8123

0.8124

0.8125

0.8126

0.8127

0.8128

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

linear-implicit

original

480485490495500

0.812482

0.81248205

0.8124821

0.81248215

(a)α=1.3

050100150200250300350400450500

t

n

0.8121

0.8122

0.8123

0.8124

0.8125

0.8126

0.8127

0.8128

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

linear-implicit

original

480485490495500

0.812482

0.81248205

0.8124821

0.81248215

(b)α=1.6

050100150200250300350400450500

t

n

0.8116

0.8118

0.812

0.8122

0.8124

0.8126

0.8128

0.813

0.8132

0.8134

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

linear-implicit

original

480485490495500

0.8124815

0.812482

0.8124825

0.812483

(c)α=1.9

050100150200250300350400450500

t

n

0.8116

0.8118

0.812

0.8122

0.8124

0.8126

0.8128

0.813

0.8132

0.8134

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

linear-implicit

original

480485490495500

0.8124819

0.812482

0.8124821

0.8124822

(d)α=2.0

图4.4在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散质量.

更准确地说,表4.1到表4.4显示了不同α值下不同时间 t = tn 时的离散能量 Hn和离散质量 Gn 的值,这些值是通过取 N =512和τ=0.01获得的.从表4.1可以看出,提出的四种格式均保留了原始能量,而 SAV 格式和三层线性隐式差分格式仅保留了修正后的能量.类似地,从表4.2到表4.4,观察到 FPAVF-P 格式均匀收敛到原始质量,其他方法性能较差,而三层线性隐式差分格式仅保留了修正后的质量.

表4.1在例4.1中,当α=2.0时,时刻 t = tn 的离散能量 Hn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C SAV Linear-Implicit FPAVF-P

04.5619764897854.5619764897854.5619764897854.4574148152004.4538610694864.561976489785

104.5619764897854.5619764897854.5619764897854.4574148152004.4538610694864.561976489785

1004.5619764897854.5619764897854.5619764897824.4574148151974.4538610694894.561976489785

2004.5619764897854.5619764897854.5619764897794.4574148151954.4538610694924.561976489785

3004.5619764897854.5619764897854.5619764897764.4574148151924.4538610694944.561976489785

4004.5619764897854.5619764897854.5619764897724.4574148151904.4538610694974.561976489785

5004.5619764897854.5619764897854.5619764897684.4574148151874.4538610695004.561976489785

Original energy:4.56197648980619

四川师范大学硕士学位论文

表4.2在例4.1中,当α=1.3时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C Linear-Implicit FPAVF-P

00.8124820960116430.8124861083728530.8124810932282880.8122692121050790.812482096009232

100.8124816529135070.8154484111308310.8124822286230690.8122692121054490.812482096009234

1000.8124797010903390.8153373076706380.8124820814398820.8122692121051190.812482096009236

2000.8124767556608140.8153527726117030.8124820910289160.8122692121052980.812482096009256

3000.8124717061453040.8153694483117090.8124821027526820.8122692121051930.812482096009262

4000.8124668715931410.8153754066484850.8124821124076290.8122692121053610.812482096009263

5000.8124633323903320.8153913139144980.8124821251797180.8122692121054090.812482096009261

Original mass:0.812482096009503

表4.3在例4.1中,当α=1.6时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C Linear-Implicit FPAVF-P

00.8124820960145260.8124879329043550.8124806374597910.8121913427907790.812482096009232

100.8124795428444670.8152906805977440.8124823389801610.8121913427908690.812482096009234

1000.8124719936780660.8149646109889010.8124820778302700.8121913427905190.812482096009245

2000.8124650769968410.8149341350726540.8124821689491700.8121913427904380.812482096009252

3000.8124619643071830.8150267341960110.8124821322847320.8121913427902110.812482096009255

4000.8124562277583880.8150451899713540.8124821324547830.8121913427900670.812482096009255

5000.8124474724604400.8150971800302550.8124821226647580.8121913427895780.812482096009251

Original mass:0.812482096009503

表4.4在例4.1中,当α=2.0时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C Linear-Implicit FPAVF-P

00.8124820960274260.8124925661353820.8124794807089460.8120072798291620.812482096009232

100.8125015746039360.8156906894665380.8124822085497500.8120072798291850.812482096009233

1000.8124851793199110.8155595298042660.8124822242951880.8120072798290680.812482096009234

2000.8124365987207680.8157372640577780.8124821774813250.8120072798289060.812482096009234

3000.8123955657375190.8159141796752230.8124821226494460.8120072798289990.812482096009235

4000.8123538308414310.8162272026560590.8124821017870710.8120072798289690.812482096009235

5000.8123178494933740.8163362217707070.8124821096576620.8120072798290370.812482096009234

Original mass:0.812482096009503

由于对于α̸=2,原始能量的计算比较困难,从相对误差的角度验证了离散守恒定律,见图4.5到图4.6.同样,这些图表显示 FPAVF-P 格式在保持原始质量方面具有最佳性能.随着α的增加,它在保持原始能量方面的性能将更好.这些观察结果与之前的理论结果一致.

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-16

10-14

10-12

10-10

10-8

10-6

10-4

10-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

linear-implicit

(a)α=1.3

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-16

10-14

10-12

10-10

10-8

10-6

10-4

10-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

linear-implicit

(b)α=1.6

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-16

10-14

10-12

10-10

10-8

10-6

10-4

10-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

linear-implicit

(c)α=1.9

图4.5在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散质量相对误差

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-17

10-16

10-15

10-14

10-13

10-12

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

linear-implicit

(a)α=1.3

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-17

10-16

10-15

10-14

10-13

10-12

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

linear-implicit

(b)α=1.6

050100150200250300350400450500

t

n

10-18

10-17

10-16

10-15

10-14

10-13

10-12

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

linear-implicit

(c)α=1.9

图4.6在例4.1中,当 N =512且τ=0.01时,不同α下的离散能量相对误差

算例4.2.现在考虑带有初始值的二维非线性分数薛定谔波动方程(3.1)-(3.3):

u(x, y,0)= sech

(

x2+ y2

)

, ut(x, y,0)= sin(x+y)sech

(

−2(x2+ y2)

)

,(x, y, t)∈Ω×[0, T ],

(4.81)

其中Ω=[−5,5]×[−5,5].

类似于一维情况,首先计算 FPAVF-P、FPAVF、FAVF 和 FPAVF-C 格式在 T =1时α=1.5和α=2.0的收敛阶.误差变化如图4.7到图4.8所示.可以清晰地观察到这四种格式在空间方向都具有谱精度,而 FPAVF 格式在时间方向表现出一阶精度,其他格式在时间方向表现出二阶精度.

四川师范大学硕士学位论文

01020304050607

N

-24

-22

-20

-18

-16

-14

-12

-10

l

o

g 2

E

(

N

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(a)τ=1/1000

-11-10.5-10-9.5-9-8.5-8

log

-26

-25

-24

-23

-22

-21

-20

-19

-18

-17

-16

l

o

g 2

E

(

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

slope=1

slope=2

(b) N =16

图4.7当α=1.5时,例4.2中四种格式的收敛阶.

01020304050607

N

-40

-35

-30

-25

-20

-15

-10

l

o

g 2

E

(

N

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(a)τ=1/1000

-11-10.5-10-9.5-9-8.5-8

log

-28

-26

-24

-22

-20

-18

-16

l

o

g 2

E

(

)

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

slope=1

slope=2

(b) N =16

图4.8当α=2.0时,例4.2中四种格式的收敛阶.

为了比较与现有方法的保结构能力,首先计算了原始质量和能量.注意到原始质量 G(t)与α无关,通过使用高斯数值积分,得到了任何α下的原始质量 G(0)=

3.14159265323701.类似地,可以得到α=2时的原始能量 E(0)=3.22697078976648.

与一维问题不同,二维情况下没有三层线性隐式格式,因此只比较了 SAV 方法与本文提出的 FPAVF-P、FAVF 和 FPAVF-C 格式的性能.图4.9到图4.10展示了在不同α下通过 N =64和τ=0.01计算的离散质量和离散能量的演变.图4.11到图4.12展示了随时间变化的离散质量和能量的相对误差的变化.可以观察到,FPAVF-P 格式在原始质量上收敛得很好,其他三种方法性能较差,尤其是 FAVF 格式和 FPAVF 格式(FPAVF格式的结果这里没有显示因为它更糟糕).本章提出的三种格式都能很好地保持原始能量不变,而 SAV 方法只能保持一个修正的能量.这些现象再次验证了理论结果的正确性.

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

0102030405060708090100

t

n

3.1412

3.1413

3.1414

3.1415

3.1416

3.1417

3.1418

3.1419

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

original

80859095100

3.141585

3.14159

3.141595

3.1416

(a)α=1.3

0102030405060708090100

t

n

3.1412

3.1413

3.1414

3.1415

3.1416

3.1417

3.1418

3.1419

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

original

80859095100

3.141585

3.14159

3.141595

3.1416

(b)α=1.6

0102030405060708090100

t

n

3.1412

3.1413

3.1414

3.1415

3.1416

3.1417

3.1418

3.1419

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

original

80859095100

3.141585

3.14159

3.141595

3.1416

(c)α=1.9

0102030405060708090100

t

n

3.1412

3.1413

3.1414

3.1415

3.1416

3.1417

3.1418

3.1419

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

original

80859095100

3.141585

3.14159

3.141595

3.1416

(d)α=2.0

图4.9在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散质量.

0102030405060708090100

t

n

2.8

2.85

2.9

2.95

3.05

3.1

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

80859095100

2.9090061529

2.90900615295

2.909006153

2.90900615305

(a)α=1.3

0102030405060708090100

t

n

2.9

2.95

3.05

3.1

3.15

3.2

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

80859095100

3.0072433575

3.00724335755

3.0072433576

3.00724335765

(b)α=1.6

0102030405060708090100

t

n

3.05

3.1

3.15

3.2

3.25

3.3

3.35

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

80859095100

3.16130761445

3.1613076145

3.16130761455

3.1613076146

(c)α=1.9

0102030405060708090100

t

n

3.1

3.15

3.2

3.25

3.3

3.35

3.4

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

SAV

80859095100

3.22697078735

3.2269707874

3.22697078745

3.2269707875

(d)α=2.0

图4.10在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散能量.

四川师范大学硕士学位论文

0102030405060708090100

t

n

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(a)α=1.3

0102030405060708090100

t

n

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(b)α=1.6

0102030405060708090100

t

n

-16

-14

-12

-10

-8

-6

-4

-2

R

G

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

(c)α=1.9

图4.11在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散质量相对误差

0102030405060708090100

t

n

-16

-15

-14

-13

-12

-11

-10

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

(a)α=1.3

0102030405060708090100

t

n

-16

-15

-14

-13

-12

-11

-10

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

(b)α=1.6

0102030405060708090100

t

n

-16

-15

-14

-13

-12

-11

-10

R

H

n

FPAVF-P

FPAVF-C

FAVF

FPAVF

SAV

(c)α=1.9

图4.12在例4.2中,当 N =64且τ=0.01时,不同α下的离散能量相对误差

更详细的比较结果见表4.5到表4.8,通过观察这些数据,可以得出相同的结论.

表4.5在例4.2中,当α=2.0时,时刻 t = tn 的离散能量 Hn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C SAV FPAVF-P

03.226970787401763.226970787401763.226970787401733.212348627670943.22697078740176

103.226970787401763.226970787401763.226970787401683.212348627670623.22697078740176

203.226970787401763.226970787401763.226970787401723.212348627670663.22697078740176

403.226970787401753.226970787401763.226970787401823.212348627670333.22697078740176

603.226970787401763.226970787401763.226970787401913.212348627670353.22697078740176

803.226970787401763.226970787401753.226970787401993.212348627670733.22697078740176

1003.226970787401753.226970787401763.226970787402073.212348627670453.22697078740176

Original energy:3.22697078976648

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

表4.6在例4.2中,当α=1.3时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C FPAVF-P

03.141592976674553.141593618421523.141592412279093.14159265358976

103.141609522539333.135953748628703.141665056435693.14159265358963

203.141613435430993.144210893212613.141589650378083.14159265358952

403.141575390235643.143620670136543.141599171067593.14159265358932

603.141502493588463.142175087020133.141598685395563.14159265358912

803.141431741752143.141598262670153.141589466252013.14159265358895

1003.141356720716413.143287108639693.141582273197513.14159265358880

Original mass:3.14159265323701

表4.7在例4.2中,当α=1.6时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C FPAVF-P

03.141592976689403.141593618147293.141592412186833.14159265358976

103.141633893580313.137541918882093.141600726317923.14159265358928

203.141617161775233.144332224884253.141590448990673.14159265358919

403.141495540938943.144752133443083.141605006471973.14159265358901

603.141399979248553.142882562077793.141600234368123.14159265358885

803.141274886377523.142413926002163.141587684325133.14159265358871

1003.141152877663473.144893313853383.141594128224173.14159265358860

Original mass:3.14159265323701

表4.8在例4.2中,当α=2.0时,时刻 t = tn 的离散质量 Gn.

t FAVF FPAVF FPAVF-C FPAVF-P

03.141592977254703.141593619199023.141592411493243.14159265358976

103.141680002604123.143692150067213.141600701612083.14159265358976

203.141645445318493.145212501224013.141587452494533.14159265358976

403.141505356955003.145317028322093.141600318048293.14159265358976

603.141364385117273.145520138647663.141595605644813.14159265358976

803.141180132279913.147393299675433.141588001096443.14159265358976

1003.141011250599283.150118742733913.141547870195953.14159265358976

Original mass:3.14159265323701

最后,分别在图4.13-4.16中展示了α=1.3,1.6,1.99,2时波的演化过程,这是通过取 N =128和τ=0.01得到的.可以观察到,阶数α将显著影响波的形状,当α变大时,波的形状变化更快.具体来说,当α→2时,数值解收敛到经典的非线性薛定谔波动方程,参见[39,62,73].

四川师范大学硕士学位论文

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(a) t =0s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(b) t =1s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(c) t =5s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(d) t =10s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(e) t =50s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(f) t =100s

图4.13示例4.2中,α=1.3时的波传播图.

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(a) t =0s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(b) t =1s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(c) t =5s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(d) t =10s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(e) t =50s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(f) t =100s

图4.14示例4.2中,α=1.6时的波传播图.

4 NFSWEs 的同时保原始能量和质量守恒的方法

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(a) t =0s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(b) t =1s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(c) t =5s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(d) t =10s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(e) t =50s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(f) t =100s

图4.15示例4.2中,α=1.99时的波传播图.

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(a) t =0s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(b) t =1s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(c) t =5s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(d) t =10s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(e) t =50s

-5-4-3-2-1012345

x

-5

-4

-3

-2

-1

y

(f) t =100s

图4.16示例4.2中,α=2.0时的波传播图.

四川师范大学硕士学位论文

4.5小结

在本章中,首先重新表述了二维分数非线性薛定谔波动方程为一个等效的哈密顿系统.通过将分区平均向量场加方法与傅里叶拟谱方法结合,基于得到的哈密顿系统构建了一个守恒的数值格式.理论分析和数值结果表明,所提出的方法能够有效地保持原始能量和原始质量守恒.

5总结与展望

5.1本文总结

本文致力于解决非线性分数阶薛定谔方程的数值求解问题,旨在发展高效、准确、显式的数值方法,以及能够同时保持原始能量和质量守恒的算法.在当前研究中,尽管存在一些关于 NFSWEs 数值算法的研究,但主要集中在一维情况,且在时间方向的精度未能超过二阶,并且很多方法仅考虑了完全隐式的情况,留下了一系列开放问题.

本文研究的一方面首先通过 SAV 方法将 NFSWEs 的非二次能量转化为新变量的二次形式,然后结合显式龙格库塔(RK)方法和松弛技术,提出了一种任意高阶的显式保结构数值格式.并将这一方法应用到 NFSWEs 等类似方程的数值求解中,取得了一些令人满意的结果.另一方面,成功推导了具有周期边界条件的二维 NFSWEs 的哈密顿形式,然后通过引入分区平均向量场(PAVF)方法,并采用 PAVF-P 方法构建了能够同时守恒原始能量和质量的数值格式.

此外,本文使用了谱方法,即傅里叶拟谱方法,作为空间离散方法,充分利用了其非局部性质和傅里叶基函数的特性,通过快速傅里叶变换(FFT)提高了计算效率.综合而言,本文在 NFSWEs 数值求解方面取得了新的研究成果,提出的方法在长时间仿真具有良好的适用性,为未来相关研究提供了有益的参考.

5.2研究展望

在本文的基础上及研究过程中,发现存在以下改进空间:

(1)推广到高维问题:目前研究主要集中在二维问题的差分格式上,未来可将这些方法推广至更高维度,如三维或更高维度的非线性分数阶薛定谔方程.

(2)深入分析稳定性和收敛性:对数值方法的收敛性及稳定性尚未进行充分的分析.对提出的数值方法,需要进行更深入的稳定性和收敛性分析,以验证其可靠性和有效性.

(3)探索新的数值方法和模型:未来的研究可以探索并应用新的数值方法和模型,如神经网络方法或深度学习方法,以解决非线性分数阶薛定谔方程的数值求解问题.

四川师范大学硕士学位论文

参考文献

[1] GUO B, PU X, HUANG F. 2015. Fractional Partial Differential Equations and Their Numer-

ical Solutions[M/OL]. WORLD SCIENTIFIC[2023-03-12]. https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/9543.

[2] Anon. 2008. Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations:Vol. 6 handbook of Differential Equations - Stationary Partial Differential Equations[M/OL].Elsevier[2023-03-12]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1874573308X80167.

[3] Anon. 2008. Indefinite Integrals[M/OL]. 0th ed. Chapman and Hall/CRC: 121-130[2023-03-12].https://www.taylorfrancis.com/books/9781584889571/chapters/10.1201/9781584889571-7.

[4] Anon. 2015. Introduction to Fractional Calculus[M/OL]. 0th ed. Chapman and Hall/CRC:

19-46[2023-03-12]. https://www.taylorfrancis.com/books/9781482253818/chapters/10.1201/

b18503-6.

[5] BAO W, CAI Y. 2012. Uniform Error Estimates of Finite Difference Methods for the Nonlinear

Schrödinger Equation with Wave Operator[J/OL]. Siam J Numer Anal[2022-09-12]. https://epubs.siam.org/doi/10.1137/110830800.

[6] BAO W, DONG X, XIN J. 2010. Comparisons between sine-Gordon and perturbed nonlinear

Schrödinger equations for modeling light bullets beyond critical collapse[J/OL]. Phys. D: Non-linear Phenom., 239(13): 1120-1134[2022-04-03]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167278910000965.

[7] BRUGNANO L, ZHANG C, LI D. 2018. A class of energy-conserving Hamiltonian boundary

value methods for nonlinear Schrödinger equation with wave operator[J/OL]. Commun. Non-linear Sci. Numer. Simul., 60: 33-49[2022-04-03]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1007570417304409.

[8] BUDD C, ISERLES A, MCLACHLAN R I, et al. 1999. Geometric integration using discrete

gradients[J/OL]. Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Eng. Sci., 357(1754): 1021-1045

[2023-02-19]. https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1999.0363.

[9] CAFFARELLI L, SILVESTRE L. 2007. An Extension Problem Related to the Fractional

Laplacian[J/OL]. Comm. Partial Differential Equations, 32(8): 1245-1260[2022-08-10]. http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03605300600987306.

[10] CAI W, LI H, WANG Y. 2018. Partitioned averaged vector field methods[J/OL].

J Comput Phys, 370: 25-42[2022-07-20]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021999118303012.

[11] CARRERAS B A, LYNCH V E, ZASLAVSKY G M. 2001. Anomalous diffusion and exit

time distribution of particle tracers in plasma turbulence model[J/OL]. Phys. Plasmas, 8(12):5096-5103[2023-03-12]. http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1416180.

[12] CHEN C, YANG X. 2019. Eﬀicient numerical scheme for a dendritic solidification phase

field model with melt convection[J/OL]. J. Comput. Phys., 388: 41-62[2023-03-01]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999119302001.

四川师范大学硕士学位论文

[13] CHEN M, DENG W. 2014. Fourth order accurate scheme for the space fractional diffusionequations[J/OL]. Siam J Numer Anal, 52(3): 1418-1438. https://doi.org/10.1137/130933447.[14] CHENG Q, SHEN J. 2018. Multiple Scalar Auxiliary Variable (MSAV) Approach and its

Application to the Phase-Field Vesicle Membrane Model[J/OL]. Siam J Sci Comput, 40(6):A3982-A4006[2022-09-23]. https://epubs.siam.org/doi/10.1137/18M1166961.

[15] CHENG Q, SHEN J, YANG X. 2019. Highly Eﬀicient and Accurate Numerical Schemes for

the Epitaxial Thin Film Growth Models by Using the SAV Approach[J/OL]. J Sci Comput,78(3): 1467-1487[2023-03-01]. https://doi.org/10.1007/s10915-018-0832-5.

[16] CHENG X, WU F. 2018. Several conservative compact schemes for a class of nonlinear

Schrödinger equations with wave operator[J/OL]. Bound Value Probl, 2018(1): 40[2022-11-

07]. https://boundaryvalueproblems.springeropen.com/articles/10.1186/s13661-018-0956-4.

[17] CHENG X, QIN H, ZHANG J. 2022. Convergence of an energy-conserving scheme for nonlinear

space fractional Schrödinger equations with wave operator[J/OL]. J. Comput. Appl. Math.,400: 113762[2022-08-20]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377042721003848.

[18] COLIN T, FABRIE P. Tue Jun 30 20:00:00 EDT 1998. Semidiscretization in time for nonlinear

Schrödinger-waves equations[J/OL]. Discrete Cont Dyn-A, 4(4): 671-690[2022-11-09]. https://www.aimsciences.org/en/article/doi/10.3934/dcds.1998.4.671.

[19] DEMENGEL F, DEMENGEL G. 2012. Universitext: Functional Spaces for the Theory ofElliptic Partial Differential Equations[M/OL]. London: Springer[2022-11-07]. http://link.springer.com/10.1007/978-1-4471-2807-6.

[20] DENG W. 2009. Finite element method for the space and time fractional Fokker-Planckequation[J/OL]. Siam J Numer Anal, 47(1): 204-226. https://doi.org/10.1137/080714130.

[21] DING H, LI C, CHEN Y. 2015. High-order algorithms for Riesz derivative and their applications

(II)[J/OL]. J Comput Phys, 293: 218-237. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999114004148.

[22] DU Q, GUNZBURGER M, LEHOUCQ R B, et al. 2012. Analysis and approximation of

nonlocal diffusion problems with volume constraints[J/OL]. Siam Rev., 54(4): 667-696. https://doi.org/10.1137/110833294.

[23] ERVIN V J, HEUER N, ROOP J P. 2007. Numerical approximation of a time dependent,nonlinear, Space-Fractional diffusion equation[J/OL]. Siam J Numer Anal, 45(2): 572-591.

https://doi.org/10.1137/050642757.

[24] FU Y, CAI W, WANG Y. 2020. Structure-preserving algorithms for the two-dimensional

fractional Klein-Gordon-Schrödinger equation[J/OL]. Appl Numer Math, 156: 77-93[2022-07-

25]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927420301264.

[25] GAO T, DUAN J, LI X, et al. 2014. Mean exit time and escape probability for dynamical

systems driven by lévy noises[J/OL]. Siam J Sci Comput, 36(3): A887-A906. https://doi.org/10.1137/120897262.

[26] GONG Y, WANG Q, WANG Y, et al. 2017. A conservative Fourier pseudo-spectral methodfor the nonlinear Schrödinger equation[J/OL]. J. Comput. Phys., 328: 354-370[2022-09-12].https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999116305204.

[27] GONG Y, ZHAO J, WANG Q. 2019. Arbitrarily High-order Unconditionally Energy Sta-

ble Schemes for Gradient Flow Models Using the Scalar Auxiliary Variable Approach:arXiv:1907.04254[M/OL]. arXiv[2023-03-01]. http://arxiv.org/abs/1907.04254.

[28] GUO B, HAN Y, XIN J. 2008. Existence of the global smooth solution to the periodboundary value problem of fractional nonlinear Schrödinger equation[J/OL]. Appl. Math.Comput., 204(1): 468-477[2022-11-07]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300308005341.

[29] GUO L, XU Y. 2015. Energy Conserving Local Discontinuous Galerkin Methods for the Non-

linear Schrödinger Equation with Wave Operator[J/OL]. J. Sci. Comput., 65(2): 622-647[2022-04-03]. http://link.springer.com/10.1007/s10915-014-9977-z.

[30] HAIRER E, WANNER G. 2015. Runge-Kutta Methods, Explicit, Implicit[M/OL]//

ENGQUIST B. Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics. Berlin, Heidel-berg: Springer Berlin Heidelberg: 1282-1285[2023-08-22]. https://link.springer.com/10.1007/

978-3-540-70529-1\_144.

[31] HILFER R. 2000. FRACTIONAL CALCULUS AND REGULAR VARIATION INTHERMODYNAMICS[M/OL]. WORLD SCIENTIFIC: 429-463[2023-03-12]. http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812817747\_0009.

[32] HU D, CAI W, GU X M, et al. 2022. Eﬀicient energy preserving Galerkin-Legendrespectral methods for fractional nonlinear Schrödinger equation with wave operator[J/OL].Appl. Numer. Math., 172: 608-628[2022-08-20]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927421002981.

[33] HUANG Y, OBERMAN A. 2014. Numerical methods for the fractional laplacian: A finitedifference-quadrature approach[J/OL]. Siam J Numer Anal, 52(6): 3056-3084. https://doi.org/10.1137/140954040.

[34] KARAKASHIAN O, MAKRIDAKIS C. 1998. A space-time finite element methodfor the nonlinear Schrödinger equation: The discontinuous Galerkin method[J/OL].Math. Comp., 67(222): 479-499[2024-01-03]. https://www.ams.org/mcom/1998-67-222/S0025-5718-98-00946-6/.

[35] KETCHESON D I. 2019. Relaxation Runge-Kutta Methods: Conservation and Stability for

Inner-Product Norms[J/OL]. Siam J Numer Anal, 57(6): 2850-2870[2023-03-01]. https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/19M1263662.

[36] LI D, LI X, ZHANG Z. 2022. Implicit-explicit relaxation Runge-Kutta methods: Construction,

analysis and applications to PDEs[J/OL]. Math Comput, 92(339): 117-146[2022-10-28]. https://www.ams.org/mcom/2023-92-339/S0025-5718-2022-03766-2/.

[37] LI M, ZHAO Y L. 2018. A fast energy conserving finite element method for the nonlinear

fractional Schrödinger equation with wave operator[J/OL]. Appl. Math. Comput., 338: 758-

773[2022-08-20]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0096300318304983.

[38] LI S, Vu-Quoc L. 1995. Finite Difference Calculus Invariant Structure of a Class of Algorithms

for the Nonlinear Klein-Gordon Equation[J/OL]. Siam J Numer Anal, 32(6): 1839-1875[2022-

11-07]. https://epubs.siam.org/doi/10.1137/0732083.

[39] LI X, ZHANG L, WANG S. 2012. A compact finite difference scheme for the nonlinear

Schrödinger equation with wave operator[J/OL]. Appl. Math. Comput., 219(6): 3187-3197

[2022-04-03]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0096300312009502.

[40] LIANG J, ZHANG W, CHEN Y, et al. 2007. Robustness of Fractional-order Boundary Control

四川师范大学硕士学位论文

of Time Fractional Wave Equations with Delayed Boundary Measurement Using the SimplePredictor[M/OL]//SABATIER J, AGRAWAL O P, MACHADO J A T. Advances in FractionalCalculus. Dordrecht: Springer Netherlands: 543-552[2023-03-12]. http://link.springer.com/10.

1007/978-1-4020-6042-7\_37.

[41] LIU Z, LI X. 2020. The Exponential Scalar Auxiliary Variable (E-SAV) Approach for Phase

Field Models and Its Explicit Computing[J/OL]. Siam J Sci Comput, 42(3): B630-B655[2022-

09-23]. https://epubs.siam.org/doi/10.1137/19M1305914.

[42] MACHIHARA S, NAKANISHI K, OZAWA T. 2002. Nonrelativistic limit in the energy space

for nonlinear Klein-Gordon equations[J/OL]. Math Ann, 322(3): 603-621[2022-11-09]. http://link.springer.com/10.1007/s002080200008.

[43] MAGIN R, FENG X, BALEANU D. 2009. Solving the fractional order Bloch equation[J/OL].Concept Magn Reson A, 34A(1): 16-23[2023-03-12]. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.

1002/cmr.a.20129.

[44] MEERSCHAERT M M, TADJERAN C. 2004. Finite difference approximations for fractional

advection-dispersion flow equations[J/OL]. J Comput Appl Math, 172(1): 65-77. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042704000986.

[45] QUISPEL G R W, MCLAREN D I. 2008. A new class of energy-preserving numerical in-

tegration methods[J/OL]. J. Phys. A: Math. Theor., 41(4): 045206[2022-06-21]. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/41/4/045206.

[46] RAN M, ZHANG C. 2016. A conservative difference scheme for solving the strongly coupled

nonlinear fractional Schrödinger equations[J/OL]. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 41:

64-83[2022-09-03]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1007570416301289.

[47] RAN M, ZHANG C. 2016. A linearly implicit conservative scheme for the fractional nonlinear

Schrödinger equation with wave operator[J/OL]. Int. J. Comput. Math., 93(7): 1103-1118

[2022-08-26]. http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00207160.2015.1016924.

[48] RANOCHA H, KETCHESON D I. 2020. Relaxation Runge-Kutta Methods for Hamiltonian

Problems[J/OL]. J Sci Comput, 84(1): 17[2023-02-08]. https://link.springer.com/10.1007/s10915-020-01277-y.

[49] RANOCHA H, LÓCZI L, KETCHESON D I. 2020. General relaxation methods for initial-

value problems with application to multistep schemes[J/OL]. Numer Math, 146(4): 875-906

[2023-03-03]. https://doi.org/10.1007/s00211-020-01158-4.

[50] SAMKO S G, KILBAS A A, MARICHEV O I. 1993. Fractional integrals and derivatives:Vol. 1[M]. Gordon and breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland.

[51] SHEN J, XU J, YANG J. 2018. The scalar auxiliary variable (SAV) approach for gradient flows

[J/OL]. J Comput Phys, 353: 407-416[2022-09-12]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199911730774X.

[52] SHU C W, OSHER S. 1988. Eﬀicient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J/OL]. J. Comput. Phys., 77(2): 439-471[2023-03-03]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999188901775.

[53] SUN H, CHEN Y, CHEN W. 2011. Random-order fractional differential equation models

[J/OL]. Signal Process, 91(3): 525-530[2023-03-12]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0165168410000447.

[54] TSUTSUMI M. 1984. Nonrelativistic approximation of nonlinear Klein-Gordon equations in

two space dimensions[J/OL]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 8(6): 637-

643[2022-11-09]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0362546X84900087.

[55] WANG D, XIAO A, YANG W. 2013. Crank-Nicolson difference scheme for the coupled

nonlinear Schrödinger equations with the Riesz space fractional derivative[J/OL]. J. Com-put. Phys., 242: 670-681[2023-02-19]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999113001563.

[56] WANG D, XIAO A, YANG W. 2014. A linearly implicit conservative difference scheme for

the space fractional coupled nonlinear Schrödinger equations[J/OL]. J. Comput. Phys., 272:

644-655[2022-11-07]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999114003167.

[57] WANG N, LI M, HUANG C. 2021. Unconditional Energy Dissipation and Error Estimates ofthe SAV Fourier Spectral Method for Nonlinear Fractional Generalized Wave Equation[J/OL].J Sci Comput, 88(1): 19[2023-05-17]. https://link.springer.com/10.1007/s10915-021-01534-8.[58] WANG P, HUANG C. 2015. A conservative linearized difference scheme for the nonlinear

fractional Schrödinger equation[J/OL]. Numer. Algorithms, 69(3): 625-641[2022-11-07]. https://doi.org/10.1007/s11075-014-9917-x.

[59] WANG P, HUANG C. 2015. An energy conservative difference scheme for the nonlin-ear fractional Schrödinger equations[J/OL]. J. Comput. Phys., 293: 238-251[2023-02-19].https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999114002241.

[60] WANG P, HUANG C. 2018. Structure-preserving numerical methods for the fractionalSchrödinger equation[J/OL]. Appl Numer Math, 129: 137-158[2022-08-20]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927418300709.

[61] WANG S, ZHANG L, FAN R. 2011. Discrete-time orthogonal spline collocation methods for

the nonlinear Schrödinger equation with wave operator[J/OL]. J. Comput. Appl. Math., 235

(8): 1993-2005[2022-04-03]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377042710005510.[62] WANG T C, ZHANG L M. 2006. Analysis of some new conservative schemes for nonlinear

Schrödinger equation with wave operator[J/OL]. Appl. Math. Comput., 182(2): 1780-1794[2022-04-03]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S009630030600525X.

[63] WANG Y, MEI L, LI Q, et al. 2019. Split-step spectral Galerkin method for the two-dimensional

nonlinear space-fractional Schrödinger equation[J/OL]. Appl Numer Math, 136: 257-278[2022-

09-08]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927418302393.

[64] XIN J. 2000. Modeling light bullets with the two-dimensional sine-Gordon equation[J/OL].

Phys. D: Nonlinear Phenom., 135(3-4): 345-368[2022-04-03]. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167278999001281.

[65] XU Q, HESTHAVEN J S. 2014. Discontinuous galerkin method for fractional convection-

diffusion equations[J/OL]. Siam J. Numer. Anal., 52(1): 405-423. https://doi.org/10.1137/

130918174.

[66] YANG Q, LIU F, TURNER I. 2010. Numerical methods for fractional partial differential

equations with Riesz space fractional derivatives[J/OL]. Appl Math Model, 34(1): 200-218

[2022-11-07]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X09001127.

[67] YANG X, JU L. 2017. Eﬀicient linear schemes with unconditional energy stability for the phase

field elastic bending energy model[J/OL]. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 315: 691-712

四川师范大学硕士学位论文

[2023-03-01]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782516306016.

[68] YANG X, JU L. 2017. Linear and unconditionally energy stable schemes for the binary fluid-surfactant phase field model[J/OL]. Comput Method Appl M, 318: 1005-1029[2023-03-01].https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782516317856.

[69] YANG X, ZHANG G D. 2020. Convergence Analysis for the Invariant Energy Quadratiza-

tion (IEQ) Schemes for Solving the Cahn-Hilliard and Allen-Cahn Equations with GeneralNonlinear Potential[J/OL]. J. Sci. Comput., 82(3): 55[2023-03-01]. https://doi.org/10.1007/s10915-020-01151-x.

[70] ZASLAVSKY G M, STEVENS D, WEITZNER H. 1993. Self-similar transport in incomplete

chaos[J/OL]. Phys Rev E, 48(3): 1683-1694[2023-03-12]. https://link.aps.org/doi/10.1103/

PhysRevE.48.1683.

[71] ZAYERNOURI M, KARNIADAKIS G E. 2014. Fractional spectral collocation method[J/OL].Siam J Sci Comput, 36(1): A40-A62. https://doi.org/10.1137/130933216.

[72] ZENG F, LIU F, LI C, et al. 2014. A Crank-Nicolson ADI spectral method for a two-dimensional riesz space fractional nonlinear reaction-diffusion equation[J/OL]. Siam J. Numer.Anal., 52(6): 2599-2622. https://doi.org/10.1137/130934192.

[73] ZHANG L, CHANG Q. 2003. A conservative numerical scheme for a class of nonlinear

Schrödinger equation with wave operator[J/OL]. Appl. Math. Comput., 145(2): 603-612[2022-

11-09]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300302008421.

[74] ZHANG R, YU X, LI M, et al. 2017. A conservative local discontinuous Galerkin method

for the solution of nonlinear Schrödinger equation in two dimensions[J/OL]. Science ChinaMathematics, 60(12): 2515-2530[2024-01-03]. https://doi.org/10.1007/s11425-016-9118-x.

[75] ZHANG X, RAN M, LIU Y, et al. 2023. A high-order structure-preserving difference scheme

for generalized fractional Schrödinger equation with wave operator[J/OL]. Math. Com-put. Simulation, 210: 532-546[2023-04-01]. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475423001325.

[76] ZHANG X, CRAWFORD J W, DEEKS L K, et al. 2005. A mass balance based numeri-

cal method for the fractional advection-dispersion equation: Theory and application: FRAC-TIONAL ADVECTION-DISPERSION EQUATION[J/OL]. Water Resources Res., 41(7)[2023-

03-12]. http://doi.wiley.com/10.1029/2004WR003818.

[77] ZHANG Y, DING H, LUO J. 2014. Fourth-Order Compact Difference Schemes for theRiemann-Liouville and Riesz Derivatives[J/OL]. Abstr. Appl. Anal., 2014: 1-4[2023-03-12].http://www.hindawi.com/journals/aaa/2014/540692/.

[78] ZHAO J, WANG Q, YANG X. 2017. Numerical approximations for a phase field dendritic

crystal growth model based on the invariant energy quadratization approach[J/OL]. Int JNumer Meth Eng, 110(3): 279-300[2022-09-23]. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.

1002/nme.5372.

致谢

值此毕业之际,我要向在我攻读硕士学位的三年中给予我帮助和支持的人们表示最真诚的感谢.

首先,我要衷心地感谢我的导师冉茂华教授,他是我在学术上的启蒙者和引路人.硕士3年期间,我多次恍然大悟,常常感到过去自己的许多稚嫩之处,也因此更是心存感激,感激冉老师对我的教导和支持.他为我提供了优良的研究条件和丰富的学术资源,让我能够接触到偏微分方程与数学物理领域的前沿知识和最新动态.他给予了我无私的指导和悉心的关怀,不仅教授了我专业知识和研究方法,还培养了我的思维能力和创新意识.他对我的论文提出了宝贵的修改意见和建议,使我的论文更加完善和规范.

其次,我要感谢我的师姐张溪、田智慧、曹晴,她们在学习上给予了我很多帮助和指导,在生活上给予了我很多关心和照顾.她们用自己的经验和知识为我解答了许多困惑和难题,让我受益匪浅.她们也是我的好朋友,我们一起分享快乐与悲伤,一起度过了难忘的时光.感谢我的同门杨丁、谭凤,他们是我的同道中人,我们一起参与课题研究、撰写论文、参加学术交流.我们相互鼓励、相互支持、相互进步,在学术上形成了良好的合作关系,在友谊上形成了深厚的情感纽带.感谢我的师妹张鹤赢、史心怡.她们在研究和实验方面给予了我很多的新思路和实质性的协助.她们年轻、充满活力和创新精神,也让我不断感受到新生代学者的力量和潜力.

我还要特别感谢我的父母。他们是我生活中最坚实的后盾,他们的支持和鼓励是我不断前行的动力源泉。在我学业和研究中,他们给予了我无私的支持和理解,为我创造了良好的学习环境,并时刻鼓励我坚持追求自己的梦想。没有他们的支持和关爱,我将无法走到今天。

在此之外,还有许多其他人值得我感激:数学系里其他老师、我的室友、朋友等等.正是因为有这么一群人在背后默默地支持着我、陪伴着我、鞭策着我、期待着我,才使得这篇论文能够顺利完成,并且才使得这段硕士生涯能够充满意义.

最后再次向所有关心和爱护我的老师、同学、朋友、家人们表示感谢,愿你们工作顺利,学业有成,健康幸福.

四川师范大学硕士学位论文

在校期间的科研成果

在校期间的科研成果

[1] Y. Liu, M. Ran, L. Zhang, Hamiltonian-preserving schemes for the two-dimensional fractionalnonlinear Schrödinger wave equations, Comput. Math. Appl.150(2023)54-69.

[2] Y. Liu, M. Ran, Arbitrarily high-order explicit energy-conserving methods for the generalized

nonlinear fractional Schrödinger wave equations, Math. Comput. Simulation.216(2023)126-

144.

[3] Z. Tian, M. Ran, Y. Liu, Higher-order energy-preserving difference scheme for the fourth-ordernonlinear strain wave equation, Comput. Math. Appl.135(2023)124-133.

[4] X. Zhang, M. Ran, Y. Liu, L. Zhang, A high-order structure-preserving difference scheme forgeneralized fractional Schrödinger equation with wave operator, Math. Comput. Simulation.210(2023)532-546.

[5] Z. Feng, M. Ran, Y. Liu, An eﬀicient difference scheme for the non-Fickian time-fractionaldiffusion equations with variable coeﬀicient, Appl. Math. Lett.121(2021)107489.